

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Инженерная математика»

## **ОСНОВЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

для студентов специальности 1-52 02 01

«Технология и оборудование ювелирного производства»

*Учебное электронное издание*

**М и н с к 2 0 0 9**

УДК 539.3(075.8)  
ББК 22.251я7  
П 85

**А в т о р ы :**

*И.В. Прусова, В.М. Романчак, О.В. Титюра*

**Р е ц е н з е н т ы :**

*А.В. Чигарев*, зав. кафедрой «Теоретическая механика» БНТУ, доктор физико-математических наук, профессор;

*М.А. Журавков*, первый проректор БГУ, доктор физико-математических наук, профессор

В учебно-методическом пособии дано изложение элементов механики разрушения, начиная с вывода основных соотношений теории упругости. Рассмотрены задачи концентрации напряжений и теории трещин для плоской и антиплоской задач теории упругости. Приведены примеры решения задач для самостоятельной работы. Для изучения учебно-методического пособия требуется знание курса математики в объеме программы технического вуза. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов специальности 1-52 02 01 «Технология и оборудование ювелирного производства», занимающихся расчетами на прочность. Предложенный материал является теоретической основой для решения задач и индивидуальных домашних заданий по расчетам прочности элементов конструкций.

Белорусский национальный технический университет  
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37  
E-mail: emd@bntu.by  
<http://www.bntu.by/ru/struktura/facult/psf/chairs/im/>  
Регистрационный № БНТУ/ПСФ85-6.2009

© БНТУ, 2009.

© Прусова И.В., Романчак В.М., Титюра О.В.

© Титюра О.В., компьютерный дизайн, 2009

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
<b>1. ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ</b>	<b>8</b>
<b>2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ</b>	<b>11</b>
2.1. Напряженное состояние в точке	11
2.2. Определение максимального касательного напряжения	14
2.3. Деформированное состояние в точке	17
2.4. Энергия деформации упругого тела	18
<b>3. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ</b>	<b>20</b>
<b>4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ</b>	<b>23</b>
<b>5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ</b>	<b>25</b>
5.1. Антиплоская деформация	25
5.2. Плоская задача теории упругости	28
<b>6. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ</b>	<b>35</b>
6.1. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах	35
6.2. Одномерные задачи — трубы и диски	36
6.3. Напряжения в составных трубах	39
6.4. Вращающийся диск	40
6.5. Круглое отверстие. Задача Кирша	42
6.5.1. Всестороннее растяжение	43
6.5.2. Одноосное растяжение	44
<b>7. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ</b>	<b>46</b>
7.1. Гипотезы (теории) прочности	46
7.2. Теория наибольших нормальных напряжений	47
7.3. Гипотеза наибольших касательных напряжений	48
7.4. Примеры расчета на прочность	49
<b>8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТФКП</b>	<b>52</b>
8.1. Основные сведения по ТФКП	52
8.2. Формулы для комплексных потенциалов в случае антиплоской деформации	53

8.3. Плоская задача	56
8.4. Задача о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием	59
<b>9. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ</b>	<b>61</b>
<b>10. ВИДЫ ТРЕЩИН</b>	<b>66</b>
10.1. Трещина продольного сдвига	67
10.2. Плоское напряженное состояние. Трещина отрыва	68
10.3. Трещина плоского сдвига	69
<b>11. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ</b>	<b>70</b>
11.1. Определение коэффициентов интенсивности	70
11.2. Влияние конечных размеров	71
11.3. Эллиптические трещины	75
<b>12. КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ</b>	<b>80</b>
12.1. Критерий Гриффитса	80
12.2. Критерий Ирвина	83
<b>13. УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ</b>	<b>86</b>
13.1. Квазихрупкое разрушение	86
13.2. Радиус пластической зоны в случае плоского напряженного состояния	87
13.3. Поперечный сдвиг	88
13.4. Плоская деформация	89
13.5. Эллиптическая трещина	90
<b>14. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ</b>	<b>91</b>
14.1. Линии уровня напряжения для плоскости с круговым отверстием	91
14.2. Эпюра напряжений на контуре эллиптического отверстия	92
14.3. Прочность стеклянных нитей Гриффитса	92
14.4. Линии уровня напряжения для трещины	94
14.5. Трещина в условиях радиального натяга	94
14.6. Прочность вращающегося с диска	96
14.7. Запас прочности цилиндрического сосуда	97
14.8. Пример расчета по заданию 14.7	98
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>100</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие содержит необходимые теоретические сведения и примеры расчетов методами механики разрушения твердых тел с дефектами типа трещина.

Каждая конструкция должна быть надежной в течение определенного времени службы. Для пули это могут быть несколько секунд, для автомобиля – 10 лет, для драгоценного украшения – сотни лет.

Практически невозможно с точностью планировать время надежной работы изделия. Возможен лишь статистический, основанный на опытных данных, подход к этой проблеме. Причем, по самой природе вещей, мы можем предложить только более или менее разумные вероятностные оценки надежности. Ослабив конструкцию сверх меры, ее можно сделать легкой и дешевой, но тогда недопустимо возрастает вероятность частых поломок. И наоборот, слишком прочная конструкция (именно к этому всегда подсознательно тяготеют люди) может оказаться слишком тяжелой и дорогой.

В середине и в конце XIX в. разрушения от появления трещин стали систематическими. Разрушались корабли, паровые котлы, рельсы.

В начале XX в. такие разрушения стали принимать формы катастроф. Так, в 1901 г. в Северном море разломился пополам совершенно новый эсминец «Кобра» Британского ВМФ.

Из 2500 кораблей типа «Либерти», построенных во время второй мировой войны, 145 разломилось пополам и почти 700 претерпело серьезные разрушения. Подобная участь постигла множество мостов и других конструкций.

Танкер "Скенектеди" после ходовых испытаний возвратился в порт, где в тихую погоду при температуре  $-4^{\circ}\text{C}$  разломился на две части (рис. 1). Трещина зародилась у острого угла люка на палубе (прямоугольный люк, края которого не были скруглены) и практически мгновенно прошла по обоим бортам до киля. Разрушения такого же типа произошли еще на нескольких судах этой серии.



Рис. 1. Корабль "Скенектеди"

Подвесной (вантовый) мост через Такомский пролив (рис. 2) с пролетом между опорами 854 м. При ветре 19 м/с установились изгибно-крутильные колебания полотна моста с такой амплитудой, что угол наклона проезжей части к горизонту достигал  $45^\circ$ . После часа таких колебаний часть проезжего полотна отломилась и рухнула в воду. Мост был рассчитан на (статическую) ветровую нагрузку до скорости ветра 50 м/с, но возможность возбуждения колебаний не была учтена.



Рис. 2. Такомский мост до и после разрушения

Под разрушением элемента конструкции обычно понимают разделение его на части. При этом происходит образование новых поверхностей, на которое необходимо затратить некоторую энергию. Геометрически очаг разрушения чаще всего представляет собой трещину. Процесс разрушения представляется в росте трещины или системы трещин. Наличие макроскопически заметной трещины служило основанием для заключения о непригодности материала детали к безопасной работе. Практика давала для подобных выводов достаточно веские и убедительные доводы. Причиной тяжелых катастроф, связанных с разрушением самолетов судов, сосудов высокого давления, газопроводов, космических ракет и т. д. были трещины, появившиеся во время эксплуатации или имевшиеся до ее начала. При этом номинальные (без учета наличия трещины) напряжения были в несколько раз меньше предела текучести. В тоже время наблюдались примеры противоположного характера, когда отдельные конструкции длительное время вполне нормально работали при наличии трещин. Следовательно, последние не всегда могут быть предвестником полного разрушения. В тоже время, для правильной оценки несущей способности конструкции инженеру необходимо конкретно знать, какие трещины (по размерам, форме, расположению) для определенных условий нагружения являются опасными и какие безопасными, что служит характеристикой способности материала противостоять развитию трещин, как появляются трещины, при каких условиях и с какой скоростью они развиваются, какова предполагаемая траектория распространения трещины и т. д. Ответы на эти вопросы дает механика разрушения.

## 1. ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ

Виды разрушения классифицируются по различным признакам:

- 1) в зависимости от величины пластической деформации в момент разрушения различают хрупкое и вязкое;
- 2) по условиям нагружения разрушение при ползучести, усталостное, коррозионное и т. д.;
- 3) по типу нагруженного состояния, которому приписывают ответственность за разрушение, различают разрушение отрывом и разрушение сдвигом;
- 4) по структурным признакам: внутри- и межзеренное разрушение.

Между хрупким и вязким разрушением трудно установить отчетливую качественную границу. В металлических (кристаллических материалах) любому разрушению, в том числе хрупкому, предшествует пластическое деформирование. Оно может быть настолько незначительным, что величину пластической деформации практически почти невозможно измерить, но оно непременно будет перед разрушением. Различие между хрупким разрушением заключается в различном характере распределения пластического деформирования по объемам материала. При хрупком разрушении пластическое деформирование сосредотачивается в очень небольшом объеме. Такое местное деформирование называется микропластическим. Если пластическая деформация при разрушении близка по величине к значению максимальной упругой деформации, которую можно достичь для данного материала, то разрушение считают хрупким. Хрупкое разрушение развивается с большой скоростью, вследствие чего оно представляет наибольшую опасность в инженерной практике.

Хрупкость и пластичность не являются постоянными свойствами материала и зависят от температуры, скорости нагружения, концентрации напряжений, объемности напряженного состояния.

Между вязким и хрупким разрушением есть существенное энергетическое различие. В первом случае движение трещины происходит вследствие работы

внешних сил. В условиях хрупкого разрушения трещина развивается за счет расхода запасенной телом упругой энергии при небольшом пластическом течении у вершины трещины. Упрощенные схемы полностью упругого и полностью вязкого разрушения при одноосном растяжении показаны на рис. 1.1 и 1.2 соответственно.

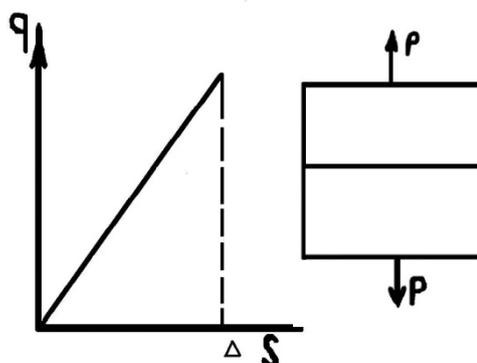


Рис. 1.1. Схема упругого разрушения

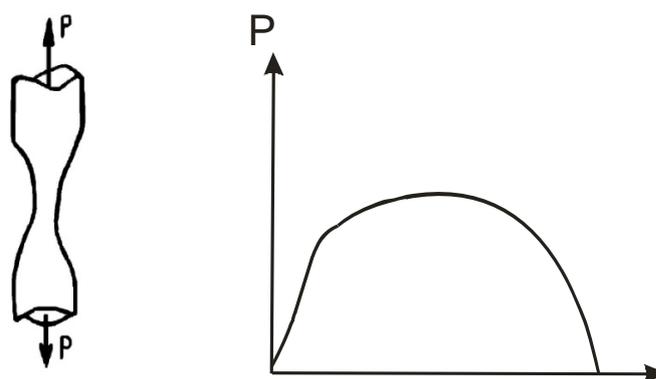


Рис. 1.2. Схема вязкого разрушения

Пожалуй, первым, кто обнаружил экспериментально влияние локальных дефектов на разрушение, был Леонардо да Винчи (1452-1519). Изучая разрывные нагрузки в тонкой проволоке, он обнаружил некоторое уменьшение разрывной нагрузки с увеличением длины проволоки. Данный результат противоречит теории прочности Галилея, но до недавнего времени это противоречие списывали на несовершенство приборов. В настоящее время считается, что проволока большей длины действительно разрушается в среднем при меньшей нагрузке из-за наличия большего количества дефектов.

Заняться вопросами разрушения Галилея (1564-1642) заставила взволновавшая его в молодые годы картина: галера, построенная как точная копия очень надежной галеры, но увеличенная ровно в два раза внезапно разрушилась.

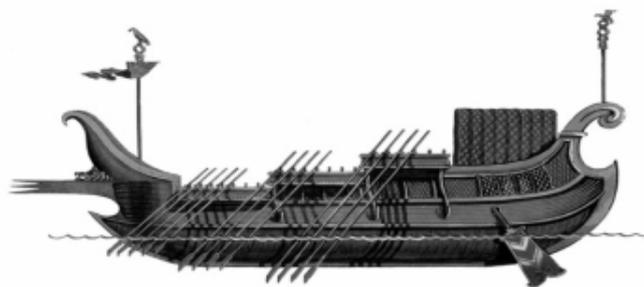


Рис 1.3. Римская галера

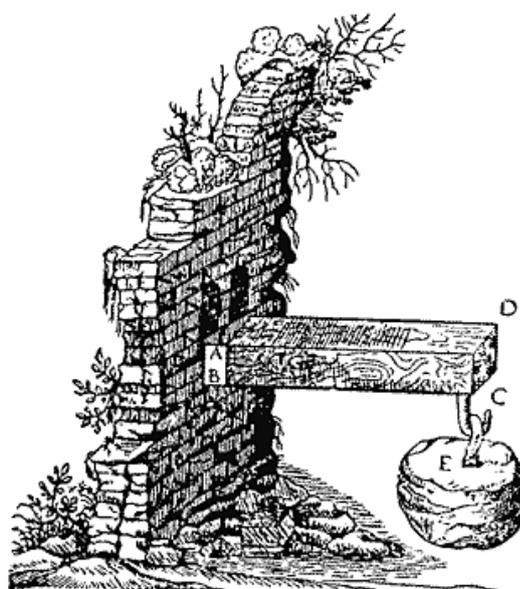


Рис. 1.4. Рисунок Галилея, иллюстрирующий испытания консольной балки

Теория прочности, выдвинутая Галилеем, позволила удовлетворительно описывать разрушение различных конструкций и до сих пор ею пользуются при анализе строительных конструкций.

## 2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

### 2.1. Напряженное состояние в точке

Для определения напряженного состояния в какой-нибудь точке тела, нужно вокруг этой точки выделить элементарный параллелепипед.

По граням этого параллелепипеда, в общем случае, будут действовать нормальные и касательные, напряжения. Нормальное напряжение считается положительным, когда оно вызывает растяжение и отрицательным, когда оно вызывает сжатие. Индекс  $x$  напряжения  $\sigma_x$  показывает, что напряжение действует на плоскость, нормальную к оси  $x$ . Для обозначения касательных напряжений используются два индекса: первый обозначает направление нормали к плоскости, второй – направление напряжения. За положительное направление составляющих касательного напряжения взято положительное направление осей координат, если растягивающее напряжение, действующее на ту же грань, совпадает с положительным направлением соответствующей оси (рис. 2.1).

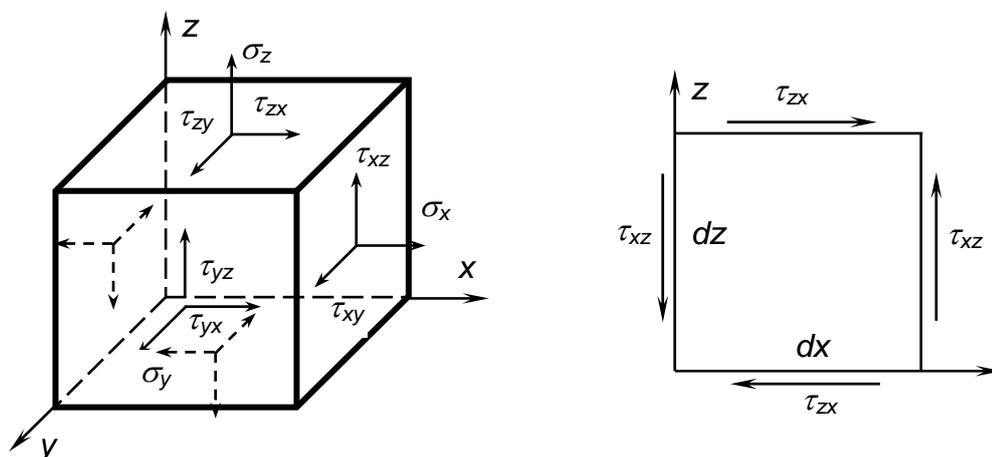


Рис. 2.1. Элементарный параллелепипед

Как видно из рис. 2.1 на гранях малого элемента с длиной ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  действуют три нормальных и шесть касательных напряжений, совокупность которых образует тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Пусть  $O$  – некоторая точка тела, находящегося в напряженном состоянии (рис. 2.2).

Для того, чтобы найти напряжение на любой наклонной плоскости  $BCD$ , проходящей вблизи точки  $O$ , вырежем очень малый тетраэдр  $BCDO$ . Записывая уравнения равновесия, будем пренебрегать объемными силами. Если через  $A$  обозначить площадь грани  $BCD$ , то площади трех остальных граней тетраэдра перпендикулярных осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$A_x = lA, \quad A_y = mA, \quad A_z = nA,$$

где через  $l$ ,  $m$  и  $n$  обозначены направляющие косинусы нормали  $N$

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m, \quad \cos(N, z) = n.$$

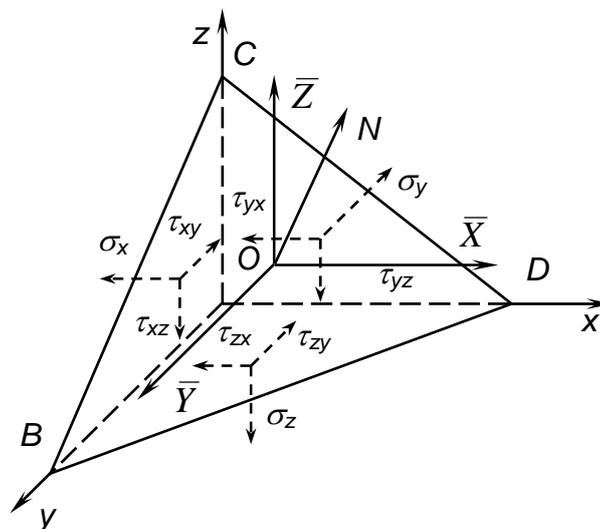


Рис. 2.2. Элементарный тетраэдр

Пусть  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  – три составляющие напряжения, действующего на наклонной грани  $BCD$ . Тогда составляющая в направлении оси  $x$  равна  $A\bar{X}$ . Уравнение проекций сил на ось  $x$  имеет вид:  $A\bar{X} - Al\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{zx} = 0$ .

Аналогичные уравнения можно записать и для осей  $y$  и  $z$ . После сокращения на общий множитель  $A$  приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.\end{aligned}$$

Выразим нормальное напряжение  $\sigma_v$  на наклонной площадке через  $X, Y, Z$ :

$$\sigma_v = X \cdot l + Y \cdot m + Z \cdot n, \quad (2.1.1)$$

отсюда, с учетом (2.1.1) получим

$$\sigma_v = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l + 2\tau_{xy} \cdot l \cdot m.$$

Всегда можно найти такие три взаимно перпендикулярные плоскости, для которых  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , обращаются в нуль. Эти плоскости называются главными плоскостями, а напряжения, действующие на них – главными напряжениями. Три корня кубического уравнения (2.1.2) дают значения трех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1.2)$$

Соответствующие оси координат называются главными осями. Зная эти напряжения, всегда можно найти главные площадки, решив систему уравнений:

$$\begin{aligned}
(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0, \\
\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\
\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \\
l^2 + m^2 + n^2 &= 1.
\end{aligned}$$

## 2.2. Определение максимального касательного напряжения

Пусть через  $x, y, z$  обозначены главные оси, в силу чего  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения;  $l, m, n$  – направляющие косинусы некоторой заданной площадки.

Тогда квадрат полного напряжения на этой площадке равен

$$p^2 = \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2.$$

Нормальная составляющая полного напряжения равна

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Квадрат касательной составляющей определяется зависимостью:

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (2.2.1)$$

Для определения положения площадок, на которых действуют наибольшие касательные напряжения, необходимо исследовать функцию  $\tau$  на экстремум.

Исключив при помощи (2.2.1) один из направляющих косинусов, например  $n$ , и приравняв производные по  $l$  и  $m$  нулю, получим следующие уравнения для определения направляющих косинусов площадок, на которых  $\tau$  достигает экстремума:

$$\begin{aligned}
l [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)/2] &= 0, \\
m [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)/2] &= 0.
\end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Приняв, например  $l = 0$ , найдем из второго уравнения, что  $m = \pm 1/\sqrt{2}$ ; тогда  $n = \pm 1/\sqrt{2}$ . Отсюда вытекает, что экстремальные касательные напряжения возникают на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам.

Подставляя направляющие косинусы в формулу (2.2.1), получим следующие значения главных касательных напряжений:

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.2.3)$$

Из (2.2.3) следует, что максимальные касательные напряжения действуют на площадке, делящей пополам угол с площадками  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , и что их величины равны половине разности между этими напряжениями. Экстремальные касательные напряжения возникают на площадках. Таким образом, максимальное касательное напряжение действуют на площадке, делящей пополам угол с площадками  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , и величина его равна половине разности между этими напряжениями.

Напряженное состояние в каждой точке тела, в конечном счете, будет определяться тремя главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Если из трех главных напряжений два равны нулю, то будет иметь место одномерное напряженное состояние в данной точке тела.

Если из трех главных напряжений только одно равно нулю, то будет иметь место двумерное напряженное состояние в данной точке тела.

Если ни одно из главных напряжений не равно нулю, то будет иметь место объемное напряженное состояние в данной точке тела.

Если во всех точках тела будет один и тот же тип напряженного состояния, то будет иметь место однородное напряженное состояние тела.

Линейное напряженное состояние называют простым напряженным состоянием, плоское и объемное напряженное состояние – сложным.

Тип напряженного состояния нельзя отождествлять с одноименным видом деформации; так при линейном напряженном состоянии могут происходить объемные деформации и т. д.

**Пример 1.** Пусть заданы две взаимно ортогональные площадки с нормальными  $x$  и  $y$ . Пусть имеем произвольную площадку с нормалью  $N$ , которая составляет с осью  $x$  угол  $\alpha$ . Найдем направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} l &= \cos(N, x) = \cos(\alpha), \\ m &= \cos(N, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha), \\ n &= 0. \end{aligned}$$

Тогда нормальные напряжения на площадке с нормалью  $N$  найдутся по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin(2\alpha), \end{aligned}$$

а касательные напряжения:

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos(2\alpha).$$

**Пример 2.** Пусть заданы две взаимно ортогональные площадки с нормальными  $x$  и  $y$ . Пусть имеем произвольную площадку с нормалью  $N$ , которая составляет с осью  $x$  угол  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} l &= \cos(N, x) = \cos(\alpha), \\ m &= \cos(N, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha), \\ n &= 0, \end{aligned}$$

причем

$$\tau_{xy} = 0,$$

$$\sigma_y = 0.$$

Тогда нормальные напряжения на площадке с нормалью  $N$  найдутся по формуле:  $\sigma_N = \sigma_x \cos^2 \alpha$ , а касательные напряжения:  $\tau_N = \sigma_x \sin 2\alpha$ .

### 2.3. Деформированное состояние в точке

Происходящие при нагружении тела перемещения его точек можно задать при помощи совокупности трех функций:  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  и  $w(x,y,z)$ , определяющих перемещения вдоль координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно. Можно показать, что деформации (линейные и угловые) в случае малых перемещений, выражаются через функции перемещений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

где  $\varepsilon_i$  – линейная деформация вдоль  $i$ -той оси координат;

$\varepsilon_{ij}$  – половина угловой деформация в плоскости  $i0j$ ;

$(i, j = x, y, z)$ .

Правило знаков принимается следующее: для линейных деформаций – растяжению соответствует положительная деформация; для угловых деформаций положительное ее значение соответствует уменьшению прямого угла между

положительными направлениями осей. Матрица  $\varepsilon_{ij}$  называется матрицей тензора деформаций.

## 2.4. Энергия деформации упругого тела

Важное значение в механике твердого тела имеет понятие об энергии деформации. Полная энергия  $\mathcal{E}$  состоит из потенциальной энергии  $U$  деформации тела (потенциала внутренних сил) и энергии (потенциала)  $\Pi$  внешних сил:

$$\mathcal{E} = U + \Pi.$$

Условно будем считать, что в начальном, недеформированном состоянии  $\mathcal{E} = 0$ , рис. 2.3 (а).

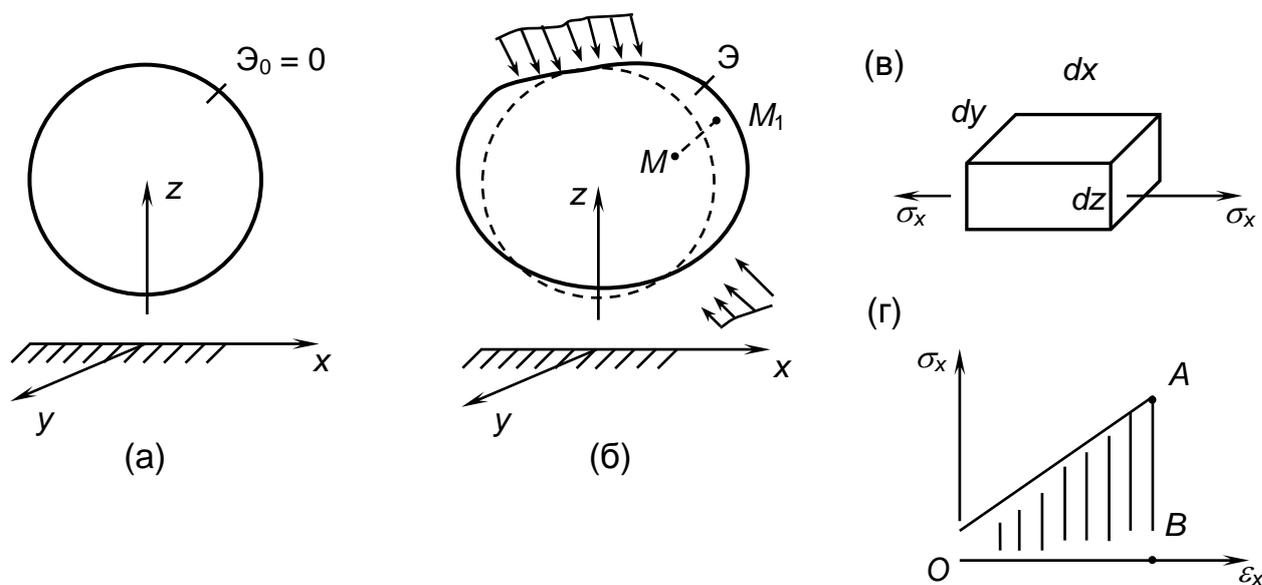


Рис. 2.3. Деформация тела

Следовательно, полная энергия  $\mathcal{E}$  представляет собой изменение энергии внешних и внутренних сил при переходе тела из начального – (а) в деформированное состояние – (б). Энергия любой системы сил измеряется работой, которую могут совершить эти силы при возвращении тела из конечного

в начальное, нулевое состояние. Составим вначале выражение для потенциала внутренних сил  $U$ . Поскольку деформации в разных точках тела разные, то и энергия деформации в объеме тела также распределена неравномерно. Введем понятие плотности потенциальной энергии деформации:  $dU = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$ , где  $\Delta V$  – элементарный объем. В случае упругого материала, и линейного напряженного состояния (рис. 2.3 (в))  $dU$  выражается площадью диаграммы деформирования (рис. 2.3 (г))  $dU = 0,5\sigma_x\varepsilon_x$ . Обобщая эту формулу на случай объемного напряженного состояния, получим:

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + 2\tau_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\tau_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\tau_{zx}\varepsilon_{zx}). \quad (2.4.1)$$

### 3. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Для количественной оценки основных свойств материалов, как правило, экспериментально определяют диаграмму растяжения в координатах  $\sigma$  и  $\varepsilon$  (рис. 3.1). На диаграмме отмечены характерные точки. Дадим их определение.

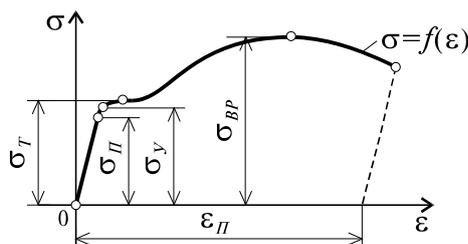


Рис. 3.1. Диаграмма растяжения

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется пределом пропорциональности  $\sigma_{II}$ . В пределах закона Гука тангенс угла наклона прямой  $\sigma = f(\varepsilon)$  к оси  $\varepsilon$  определяется величиной  $E$ . Упругие свойства материала сохраняются до напряжения  $\sigma_Y$ , называемого пределом упругости. Под пределом упругости  $\sigma_Y$  понимается такое наибольшее напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций, т.е. после полной разгрузки последняя точка диаграммы совпадает с начальной точкой 0.

Величина  $\sigma_T$  называется пределом текучести материала. Под пределом текучести понимается то напряжение, при котором происходит рост деформаций без заметного увеличения нагрузки. При напряжениях больших  $\sigma_T$  в теле конструкции развиваются пластические деформации  $\varepsilon_{II}$ , которые не исчезают при снятии нагрузки.

Отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения носит название предела прочности, или временного сопротивления, и обозначается через,  $\sigma_{BP}$  (при сжатии  $\sigma_{BC}$ ).

В табл. 3.1. приводятся значения указанных характеристик (в кПа) наиболее распространенных конструкционных материалов.

Таблица 3.1

Материал	$\sigma_{TP}$	$\sigma_{TC}$	$\sigma_{BP}$	$\sigma_{BC}$	$E \cdot 10^{-8}$
Сталь	250000	250000	390000	–	2
Чугун	140000	310000	150000	640000	0.7
Медь	250000	250000	320000	–	1.1
Алюминий	50000	50000	840000	–	0.75

При выполнении практических расчетов реальную диаграмму (рис. 3.1) упрощают, и с этой целью применяются различные аппроксимирующие диаграммы. Для решения задач с учетом упруго–пластических свойств материалов конструкций часто применяется диаграмма Прандтля. По этой диаграмме напряжение изменяется от нуля до предела текучести по закону Гука  $\sigma = E\varepsilon$ , а далее при росте  $\varepsilon$ ,  $\sigma = \sigma_T$ .

Способность материалов получать остаточные деформации носит название пластичности. На рис. 3.2 представлена характерная диаграмма для пластических материалов.

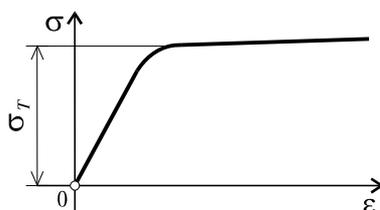


Рис. 3.2. Диаграмма растяжения пластических материалов

Противоположным свойству пластичности является свойство хрупкости, т.е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Материал, обладающий этим свойством, называется хрупким. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая сталь, стекло, кирпич, бетон, природные камни.

**Упражнение 1.** Построить примерный график в координатах  $\sigma$  и  $\epsilon$  для материалов из таблицы 3.1.

**Упражнение 2.** Построить диаграмму Прандтля в координатах  $\sigma$  и  $\epsilon$  для материалов из таблицы 3.1.

## 4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1) Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где  $X, Y, Z$  – проекции объемных сил на оси  $x, y, z$ .

2) Формулы обобщенного закона Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon, \quad \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon, \quad \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon, \quad \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz},\end{aligned}\tag{4.2}$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль сдвига,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  – постоянная Ламе, а  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ .

3) Уравнения Коши. Геометрические уравнения, связывающие между собой деформации и перемещения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

4) Граничные условия:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n,\end{aligned}\tag{4.4}$$

где  $X, Y, Z$  – интенсивности поверхностных сил, параллельные соответственно осям,  $x, y, z$ . Они положительные, если их направления совпадают с положительными направлениями осей координат:

$l = \cos(x, \nu); m = \cos(y, \nu); n = \cos(z, \nu)$  – направляющие косинусы.

При этом нужно найти:

1. Шесть напряжений –  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .
2. Шесть деформаций –  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .
3. Три перемещения –  $u, v, w$ .

Имеем 15 неизвестных.

Для их определения есть:

1. Три уравнения равновесия (4.1).
2. Шесть формул обобщенного закона Гука (4.2).
3. Шесть уравнений Коши (4.3).

Всего – 15 уравнений, то есть в математическом отношении задача разрешима.

**Упражнение.** Рассмотрим полупространство, границы которого свободны от напряжений. Записать граничные условия, которые должны выполняться на границе полупространства  $Z \geq 0$ .

## 5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В данной главе рассматриваются частные случаи основных уравнений теории упругости, при существенно упрощающих предположениях.

### 5.1. Антиплоская деформация

Представим себе цилиндрическое тело, нагруженное по боковой поверхности усилиями, равномерно распределенными вдоль образующих и направленными вдоль образующих.

Направим ось  $Z$  по оси цилиндра, оси ( $X$  и  $Y$ ) в плоскости поперечного сечения. На боковой по поверхности  $n=0,1,\dots,m$  – направляющие косинусы нормали к контуру сечения  $\Gamma$  в плоскости  $XOY$ .

Согласно сделанному предположению на боковой поверхности  $S$ :

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0l + 0m + \tau_{zx} 0 \equiv 0, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = 0l + 0m + \tau_{zy} 0 \equiv 0, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m.\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Следовательно, граничное условие имеет вид  $\bar{Z}(x, y) = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m$ , где  $\bar{Z}(x, y)$  – заданная функция. Попытаемся удовлетворить уравнениям теории упругости, приняв  $u = v = 0$ ,  $w = w(x, y)$ .

Тогда из уравнений Коши получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Кроме того,

$$\varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0.$$

Тогда по формулам закона Гука:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon = 0, \quad \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = 0,$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon = 0, \quad \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz},$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon = 0, \quad \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz},$$

$$\tau_{xz} = 2G\gamma_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\tau_{yz} = 2G\gamma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y},$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль сдвига,

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  – постоянная Ламе.

Отличные от нуля компоненты тензора напряжений представляют собою касательные напряжения в плоскости поперечного сечения.

Два первых уравнения равновесия (4.1) будут выполняться тождественно, третье же примет следующий простой вид:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (5.1.2)$$

Введем функцию  $\varphi(x, y) = Gw(x, y)$ , тогда

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Подставив (5.1.3) в уравнение (5.1.2), получим:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, выполняется

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяет гармоническому уравнению. Определим теперь главные напряжения, используя уравнение (2.1.2):

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & -\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\sigma^3 - \tau_{yz}^2 \sigma - \tau_{zx}^2 \sigma = 0,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = -\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2}.$$

## 5.2. Плоская задача теории упругости

Плоской задачей следует считать задачу о таком напряженном состоянии тела, когда все площадки одного направления, например, перпендикулярные к оси  $z$ , – заведомо главные. Для них касательные напряжения  $\tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$ , а главное напряжение  $\sigma_z = 0$ , (плоское напряженное состояние, рис. 5.1 (а)) или может быть выражено через  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  (плоская деформация, где  $\varepsilon_z = 0$ , рис. 5.1 (б)).

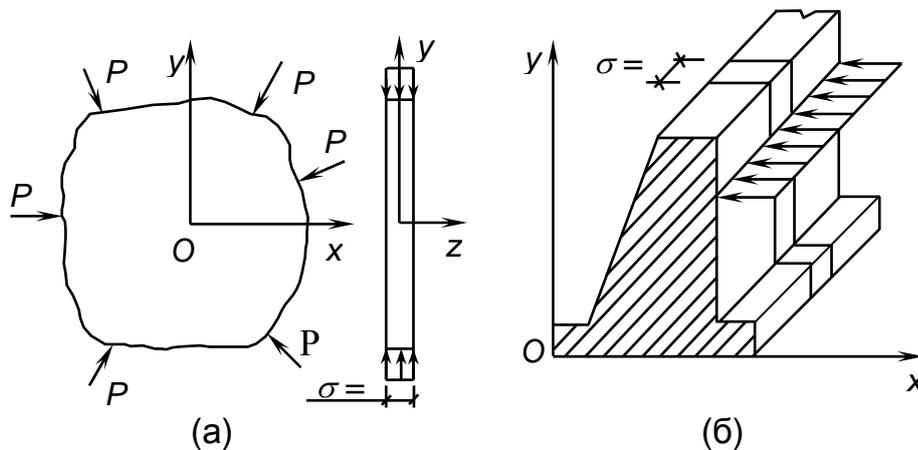


Рис. 5.1. Плоская задача

В этом случае количество неизвестных задачи уменьшается. Уравнения теории упругости значительно упрощаются.

Напряжения и деформации, а также перемещения  $u$  и  $v$  являются функциями координат  $x$  и  $y$  и не зависят от координаты  $z$ .

Примером плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = 0$ ,  $\varepsilon_z \neq 0$ ) может служить тонкая пластина, к контуру которой приложены нагрузки, постоянные по толщине пластины и параллельные ее срединной плоскости.

Если длинное призматическое тело нагружено силами, не изменяющимися по его длине и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на достаточном расстоянии от концов, подвергается плоской деформации ( $\sigma_z \neq 0, \varepsilon_z = 0$ ).

Два корня квадратного уравнения (2.1.2) дают значения первых двух главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

и первые два напряжения:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Из формулы следует, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y.$$

Следовательно, сумма двух взаимно ортогональных напряжений - величина постоянная.

Максимальное касательное напряжение, согласно формулам (2.2.3):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Оно возникает на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам:

$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha,$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha.$$

**Упражнение 1.** В некоторой точке тела его внешняя граница свободна от усилий. Нормаль в данной точке границы тела имеет направляющие косинусы  $(l, m)$ .

1. Определить направления главных площадок и направления действия максимального касательного напряжения.
2. Считая известной сумму:  $\sigma_x + \sigma_y = c_0$ , найти значения главных напряжений и значение максимального касательного напряжения.

Для плоских задач, дифференциальные уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (5.2.2)$$

Уравнения закона Гука для случая плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Восемь уравнений (5.2.1) – (5.2.3) позволяют определить восемь неизвестных: три напряжения, три деформации и два перемещения. Эти три уравнения можно свести к одному, если ввести так называемую функцию напряжений  $F$ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}.\end{aligned}$$

Тогда

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial^2 y} + \frac{\partial^3 v}{\partial^2 x\partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2},$$

следовательно,

$$-\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right),$$

поэтому

$$-2(1+\nu)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} = \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \nu\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \nu\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}\right).$$

Откуда

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (5.2.4)$$

Помимо уравнения (5.2.4), функция  $F$  должна удовлетворять и граничным условиям задачи.

Можно убедиться, что функция напряжений вида:  $F = \psi_1 + x\psi_2 + y\psi_3$  удовлетворяет уравнению (5.2.4), если в свою очередь каждая из этих функций  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  является гармонической, т.е. если она удовлетворяет условию  $\nabla^2\psi = 0$  и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка.

**Пример. 5.1.** Изгиб консоли, нагруженной на конце.

Для длинной прямоугольной полосы представляют интерес решения уравнения (5.2.4) в форме полиномов полуобратным способом. Рассмотрим консоль, имеющую узкое прямоугольное поперечное сечение единичной толщины и изгибаемую силой  $P$ , приложенной на конце (рис. 5.2).

Верхняя и нижняя грани консоли свободны от нагрузки; на торце  $x = 0$  распределены касательные напряжения, имеющие результирующую  $P$ .

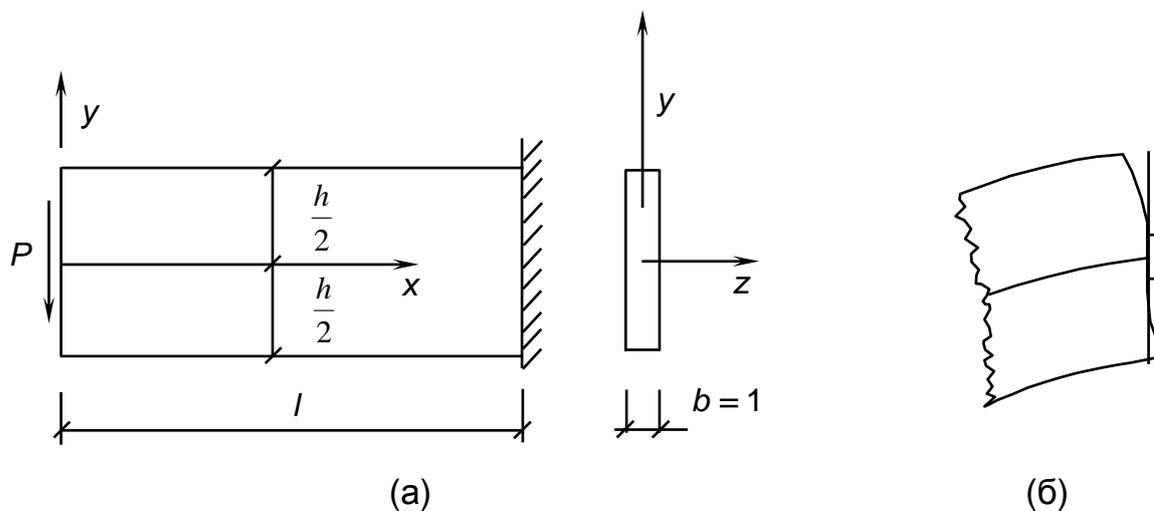


Рис. 5.2. Изгиб консоли

Примем функцию напряжений для этого случая в виде:

$$F = a_2 xy + b_4 xy^3. \tag{5.2.5}$$

Очевидно, что функция (5.2.5) удовлетворяет уравнению (5.2.4). Напряжения, определенные согласно формулам (3.19), с учетом  $q = 0$ :

$$\sigma_x = 6 b_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -a_2 - 3 b_4 y^2.$$

Чтобы продольные края консоли  $y = \pm \frac{h}{2}$  были свободны от усилий, необходимо принять

$$\tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = -a_2 - 3b_4 \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$a_2 = -\frac{3}{4} b_4 h^2.$$

Для удовлетворения условия на нагруженном конце консоли, сумма касательных усилий, распределенных по торцу  $x = 0$  должна быть равна  $P$

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} b \tau_{xy} dy = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{4} b_4 h^2 \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) b dy = b_4 \frac{bh^3}{2}.$$

Замечая, что  $bh^3/12$  – это момент инерции поперечного сечения консоли, получим  $b_4 = \frac{P}{6J}$ , и следующие формулы для определения напряжений:

$$\sigma_x = \frac{P}{J} xy = \frac{M}{J} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{P}{J} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right). \quad (5.2.6)$$

Это решение полностью совпадает с элементарным решением курса сопротивления материалов. Заметим, что это решение является точным лишь в том случае, когда касательные усилия на конце консоли распределяются по тому же параболическому закону, что и касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Если усилия на

конце распределяются иным образом, распределение напряжений (5.2.6) не является точным решением вблизи конца консоли. Однако, в силу принципа Сен-Венана, оно может считаться удовлетворительным для поперечных сечений, достаточно удаленных от этого конца.

**Принцип Сен-Венана** коротко может быть сформулирован так. В точках сплошного тела, достаточно удаленных от мест приложения локальных нагрузок, напряжения мало зависят от способа распределения этих нагрузок и определяются лишь величиной их статического эквивалента (величиной сил и моментов).

Принцип Сен-Венана хотя и не имеет строгого доказательства, но подтверждается опытом решения многих задач. Заменяя заданные условия на поверхности статически эквивалентными, решение задачи можно существенно упростить. Такой подход называют иногда смягчением граничных условий.

### **Упражнение**

Построить линии уровня наибольшего главного напряжения для консоли 5.1.

## 6. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

### 6.1. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах

При исследовании напряжений в телах непрямоугольной формы иногда удобно пользоваться полярными координатами  $r$  и  $\theta$  (рис. 6.1). Ниже приводятся без вывода соответствующие уравнения, доказательство которых не должно встретить затруднений.

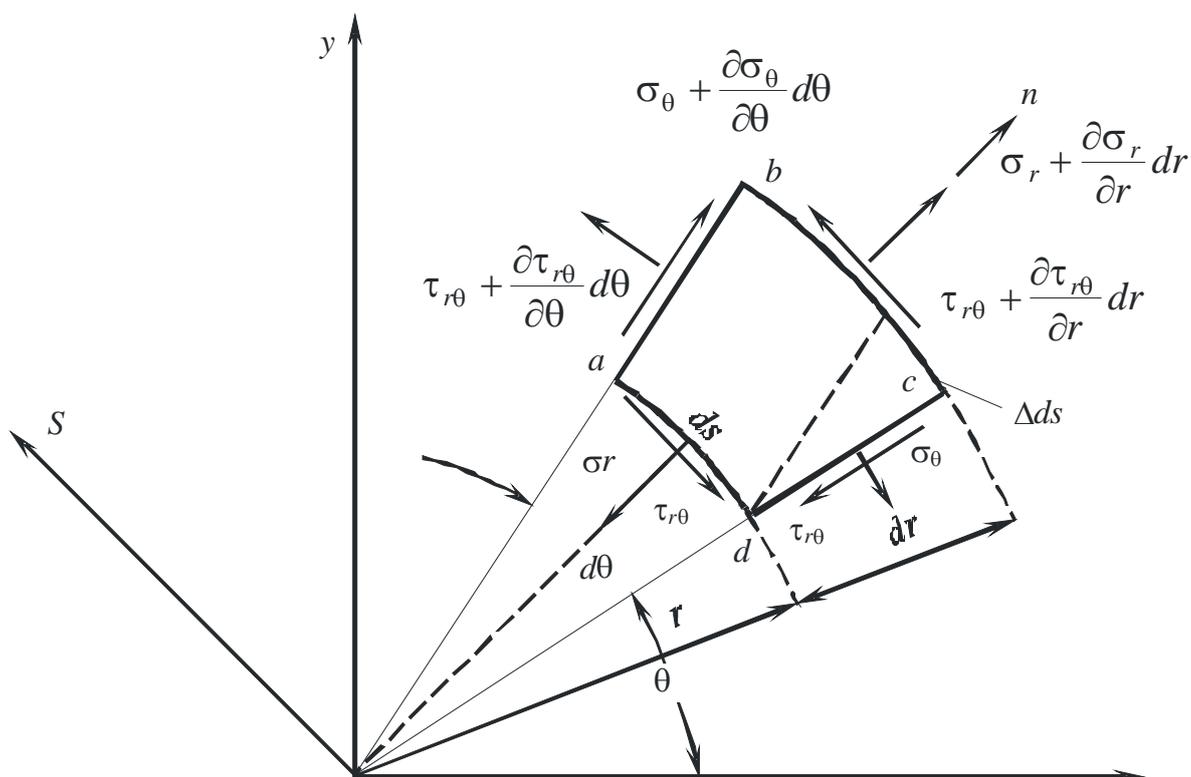


Рис. 6.1. Полярная система координат

Положение точки в этой системе координат определяется расстоянием  $r$  от начала координат  $O$  (рис. 6.1) и углом  $\theta$  между этим направлением  $r$  и некоторой осью  $Ox$ , занимающей определенное положение на плоскости. Взамен прямоугольного параллелепипеда выделим малый элемент  $abcd$ , вырезанный из диска двумя радиальными сечениями  $Oc$  и  $Ob$ , перпендикулярными к диску, и двумя цилиндрическими поверхностями  $ad$  и  $bc$ , радиусы кривизны которых равны  $r$  и  $r + dr$ . Составляющие нормальных напряжений в радиальном

направлении обозначим через  $\sigma_r$ , а в тангенциальном – через  $\sigma_\theta$ . Для касательного напряжения примем обозначение  $\tau_{r\theta}$ .

Между декартовыми и полярными координатами существуют такие зависимости:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = y/x,$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Для  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  можно получить следующие выражения:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2},$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}.$$

Гармонический оператор Лапласа в полярной системе координат принимает такой вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (6.1.1)$$

Бигармоническое уравнение при этом сохраняется

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (6.1.2)$$

## 6.2. Одномерные задачи — трубы и диски

Если функция напряжений зависит только от  $r$ , уравнение (6.1.2), с учетом (6.1.1), принимает вид:

$$\begin{aligned}\nabla_r^2 \nabla_r^2 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{d^4 F}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dF}{dr} = 0.\end{aligned}\quad (6.2.1)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно привести к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, если ввести новую переменную  $t$  с помощью зависимости  $r = e^t$ .

Таким путем легко получить общее решение уравнения (6.2.1). Это решение содержит четыре постоянных интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий. С помощью подстановки можно проверить, что общее решение имеет вид:  $A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$ .

Из этого общего решения можно получить решения ряда задач.

Соответствующие компоненты напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \\ \tau_{r,\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0.\end{aligned}\quad (6.2.2)$$

Принимая, например,  $B=0$ , можно привести уравнения (6.2.2) к виду:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C, \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C, \\ \tau_{r,\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Это решение можно использовать для описания поля напряжений в полом цилиндре, подверженном действию равномерного давления на внутренней и внешней поверхностях. Обозначим через  $a$  и  $b$  внутренний и внешний радиусы

цилиндра, а через  $p_a$  и  $p_b$  – внутреннее и внешнее давления. Тогда граничные условия задачи примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r/(r = a) &= \frac{A}{a^2} + 2C = -p_a, \\ \sigma_r/(r = b) &= \frac{A}{b^2} + 2C = -p_b,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}A &= \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{b^2 - a^2}, \\ 2C &= \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}.\end{aligned}$$

В частном случае, когда  $p_b = 0$  и цилиндр подвержен одному только внутреннему давлению, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Эти выражения показывают, что в этом частном случае напряжение  $\sigma_r$  всегда является сжимающим, а напряжение  $\sigma_\theta$  растягивающим. Последнее принимает наибольшее значение на внутренней поверхности цилиндра, где

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = p_a \frac{(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}. \quad (6.2.3)$$

Напряжение  $\sigma_\varphi$  всегда численно превышает внутреннее давление и приближается к нему по величине с ростом  $b$ . Следовательно, его нельзя сделать ниже  $P_a$  сколько бы материала не добавлялось к внешней части цилиндра.

### 6.3. Напряжения в составных трубах

Имеются конструкции, представляющие собой составные толстостенные оболочки или трубы (например, стволы артиллерийских орудий, облицовки пустотелых гребных винтов) (рис. 6.2,а). В этих случаях наружные оболочки насаживаются на внутренние с натягом  $\Delta$  (рис. 6.2,б). Геометрическое условие совместности деформаций внутренней и наружной трубы имеет вид

$$v_H + v_B = \Delta,$$

где  $v_B$  – уменьшение наружного радиуса внутренней трубы;

$v_H$  – увеличение внутреннего радиуса наружной трубы.

Подставив в уравнение (3.18) абсолютные величины радиальных перемещений  $v_B$  и  $v_H$  по формулам (3.12) и (3.10), с учетом обозначений, принятых для радиусов на рис. 6.2, получим

$$\Delta = \frac{p_b b}{E} C,$$

где

$$C = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}.$$

Тогда

$$p_b = \frac{1}{C} \frac{\Delta}{b} E. \quad (6.3.1)$$

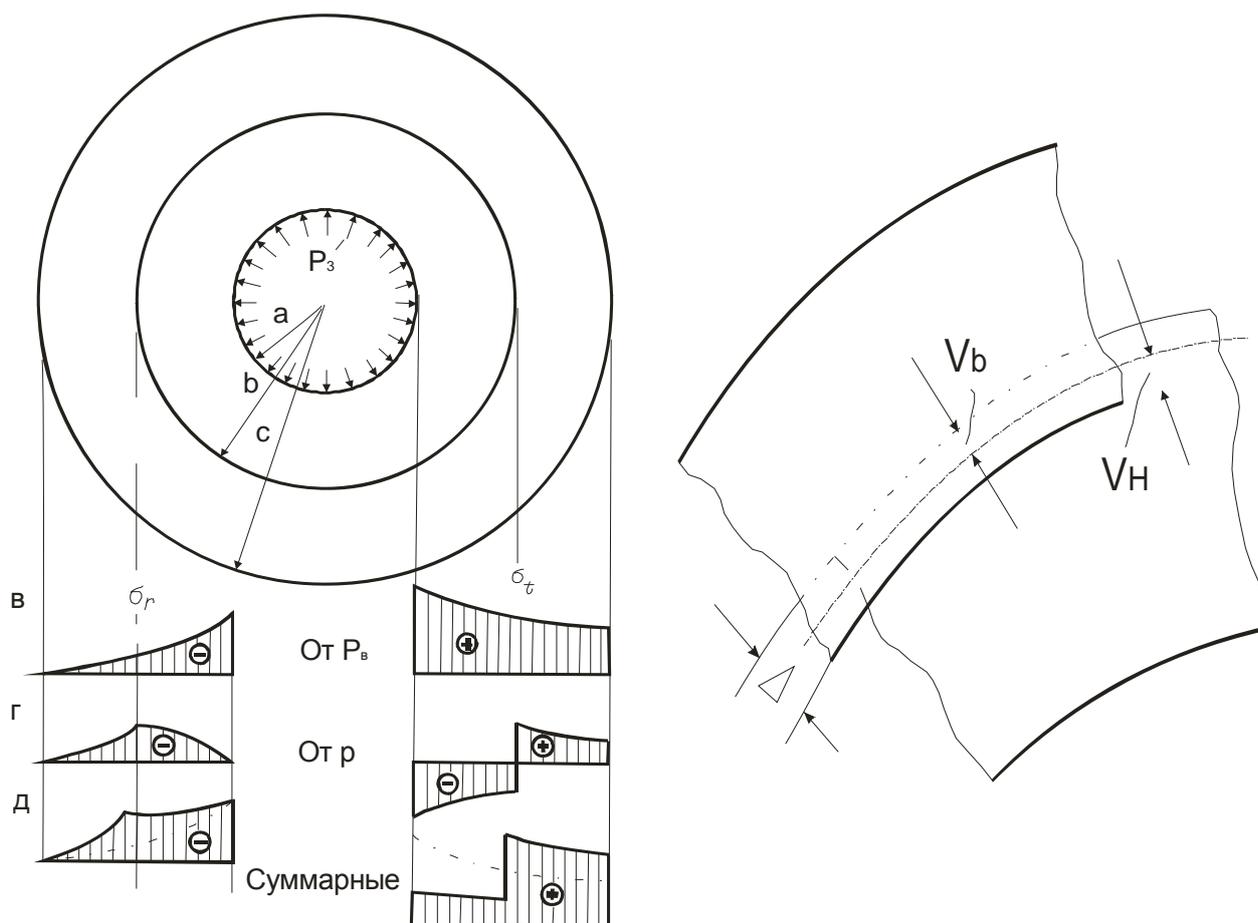


Рис. 6.2. Напряжения в составной трубе

#### 6.4. Вращающийся диск

Распределение напряжений в круглом вращающемся диске имеет большое практическое значение. Если толщина диска мала по сравнению с его радиусом, то изменением радиального и окружного напряжений по толщине диска можно пренебречь и задача легко решается. Если толщина диска постоянна, можно применить уравнение, в котором объемной силой будет являться сила инерции.

Тогда

$$R = \rho \omega^2 r,$$

$$S = 0.$$

Где  $\rho$  – масса единицы объема материала диска, а  $\omega$  - угловая скорость вращения. Для сплошного диска компоненты напряжений определяются формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2), \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2b^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2r^2, \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Эти напряжения принимают максимальные значения в центре диска, где

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2b^2. \quad (6.4.1)$$

На границе  $r=b$ :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - b^2) = 0, \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2b^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2r^2 = \frac{1-\nu}{4}\rho\omega^2b, \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

В случае диска с круглым отверстием радиуса  $a$  в центре соответствующие компоненты напряжений находятся в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right), \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right), \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Выполняются граничные условия:

$$(\sigma_r)_{r=a} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2} - a^2) = 0,$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{b^2} - b^2) = 0.$$

Максимальное радиальное напряжение возникает в точке  $r = \sqrt{ab}$  и действует на внутренней границе, где оно равно

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b-a)^2.$$

Максимальное окружное напряжение действует на внутренней границе, где оно равно

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} a^2) = \\ &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (2b^2 + a^2 \left( \frac{2-2\nu}{3+\nu} \right)) = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 (b^2 + a^2 \frac{1-\nu}{3+\nu}), \\ \lim_{a \rightarrow 0} (\sigma_\theta) &= \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 b^2. \end{aligned}$$

Таким образом, когда радиус отверстия,  $a$  стремится к нулю, максимальное окружное напряжение стремится к значению, вдвое большему того, которое действует в центре сплошного диска и определяется формулой (6.4.1).

Таким образом, введение малого кругового отверстия в центре сплошного вращающегося диска приводит к концентрации напряжений: удваивает максимальное напряжение.

## 6.5. Круглое отверстие. Задача Кирша

Рассмотрим пластинку, подверженную всестороннему или одноосному растяжению величины  $S$  в направлении оси  $Y$ . Если в пластине проделано

маленькое круговое отверстие, то распределение напряжений вблизи отверстия изменится, однако, в соответствии с принципом Сен-Венана, можно сделать вывод, что эти изменения можно пренебречь на расстояниях, достаточно больших по сравнению с радиусом отверстия  $r = a$ .

### 6.5.1. Всестороннее растяжение

Требуется найти решение, бигармонического уравнения, удовлетворяющего граничным условиям на бесконечности:

$$\begin{aligned} \sigma_r &\rightarrow \sigma, \\ \tau_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

и на границе отверстия:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$F(r) = \frac{\sigma}{4} (r^2 - 2a^2 \ln(r))$$

удовлетворяет бигармоническому уравнению. Соответствующие компоненты напряжений определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \sigma \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \sigma \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, при  $r \rightarrow \infty$ , выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\rightarrow \sigma, \\ \tau_{r\theta} &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

На границе отверстия выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 0, \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Окружные напряжения можно определить по формуле:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\sigma.$$

Таким образом, круглое отверстие в условиях всестороннего растяжения является причиной двукратной концентрации напряжений.

### 6.5.2. Одноосное растяжение

В случае одноосного растяжения вдоль оси  $y$  соответствующие компоненты напряжений в полярной системе координат определяются формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left( 1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left( 1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} = \frac{\sigma}{2} \left( 1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin(2\theta).\end{aligned}$$

На границе отверстия выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 0, \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Причем окружные напряжения можно определить по формуле:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma + 2\sigma \cos(2\theta).$$

Не трудно видеть, что круглое отверстие, в условиях одноосного растяжения, является причиной трехкратной концентрации напряжений.

**Упражнение 1.** Найти максимальное и минимально окружное напряжение в случае одноосного растяжения  $\sigma_x$  вдоль оси  $OX$  на бесконечности.

**Упражнение 2.** Найти максимальное окружное напряжение в случае одноосного растяжения вдоль оси  $OY$  с напряжением  $\sigma_y$  на бесконечности.

**Упражнение 3.** Найти максимальное окружное напряжение в случае двухосного растяжения  $\sigma_x, \sigma_y$  вдоль оси  $OX$  и  $OY$ .

**Упражнение 4.** Пусть напряжение, в случае одноосного растяжения вдоль оси  $OX$ , на бесконечности равно  $\sigma_x$ . Какое напряжение вдоль оси  $OY$  следует приложить, чтобы максимальное окружное напряжение было наименьшим?

## 7. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

### 7.1. Гипотезы (теории) прочности

Установлено, что в каждой точке нагруженного тела, в общем случае действует три главных напряжения.

Чтобы судить о прочности материала при сложном напряженном состоянии, нужно предварительно знать – в какой момент при той или иной комбинации главных напряжений наступает опасное состояние материала.

При простом напряженном состоянии ответ на этот вопрос дают диаграммы растяжения или сжатия. Предельными напряжениями считаются такие, при которых хрупкий материал разрушается, а пластичный материал получает недопустимо большие пластические деформации.

При сложном напряженном состоянии решение этой задачи значительно сложнее, т. к. число различных сочетаний из главных напряжений неограниченно велико, а опыт технически очень сложен.

Вследствие этого при составлении условий прочности материала при сложном напряженном состоянии мы можем располагать только допускаемыми напряжениями, установленными по результатам испытаний на простое растяжение или сжатие.

В связи с этим возникает задача: зная максимально допустимые безопасные напряжения при простом растяжении, найти эквивалентную, т. е. равно безопасную комбинацию из главных напряжений при сложном напряженном состоянии.

Единственным практическим путем решения этой задачи является установление общих критериев разрушения, которые позволили бы оценить опасность перехода материала в предельное состояние при сложном напряженном состоянии, используя лишь данные опытов на растяжение.

Критерии разрушения или гипотезы прочности представляют собой предположения о преимущественном влиянии на прочность материалов того или иного фактора, сопутствующего процессу деформации и разрушения материалов.

Наиболее важными факторами, связанными с возникновением опасного состояния материала, являются: нормальные и касательные напряжения, линейные деформации и потенциальная энергия деформации.

Какой из этих факторов, является главной причиной разрушения, установить не удастся, т. к. невозможно наблюдать действие какого-нибудь одного фактора изолированно от остальных.

При сложном напряженном состоянии следует говорить не о предельном напряжении, а о предельном напряженном состоянии. В качестве предельного состояния в опасной точке детали принимается переход материала в окрестности данной точки из упругого состояния в пластическое или разрушение детали, выражающееся в образовании трещин.

Критерии разрушения представляют собой меру напряженного состояния, определяющую условия перехода материала в предельное состояние, то есть в состояние разрушения.

В настоящее время общепризнанными являются пять теорий прочности. Рассмотрим некоторые из них.

## **7.2. Теория наибольших нормальных напряжений**

(I теория прочности, Галилей, 1638 г.)

Например, в основу теории наибольших нормальных напряжений (I теория прочности, Галилей, 1638 г.) положена гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине нормальных напряжений.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее из главных

напряжений достигает величины, соответствующей пределу прочности при простом растяжении.

В этом случае условие прочности должно иметь вид:  $\sigma_1 \leq [\sigma]_+$  при растяжении  $\sigma_1 \leq [\sigma]_-$  при сжатии.

Данная гипотеза удовлетворительно согласуется с результатами испытания деталей из хрупких материалов, таких как камень, кирпич, чугун. Для расчета деталей из пластичных материалов данная гипотеза непригодна.

### 7.3. Гипотеза наибольших касательных напряжений

(III теория прочности; Кулон, 1773 г.)

В основу теории наибольших касательных напряжений положена гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине касательных напряжений.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее из касательных напряжений достигает величины, соответствующей пределу текучести при простом растяжении.

При объемном напряженном состоянии:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

При простом растяжении ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), поэтому  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} \leq \frac{\sigma_T}{2}$ .

Предельное значение максимальных касательных напряжений при растяжении:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_T}{2}.$$

На основании сформулированной гипотезы, имеем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_T}{2}$$

и получим эквивалентное напряжение по III теории прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_T. \quad (7.3.1)$$

Условие прочности (7.3.1) хорошо согласуется с результатами испытания изотропных материалов, поэтому данная теория широко применяется для расчета деталей из металлических материалов.

#### 7.4. Примеры расчета на прочность

Составим условия прочности для толстостенной трубы, испытывающей внутреннее давление  $p_a$ . В зависимости от принятого предельного состояния для наиболее напряженной точки на внутренней поверхности трубы получим следующие выражения:

1. Для хрупких материалов (чугун, бетон) по первой теории прочности:

$$\sigma_1 \leq [\sigma].$$

По формуле (6.2.3), при  $r = b$ , расчетное напряжение:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = p_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

2. Для пластичных материалов (сталь, медь) по третьей теории прочности:

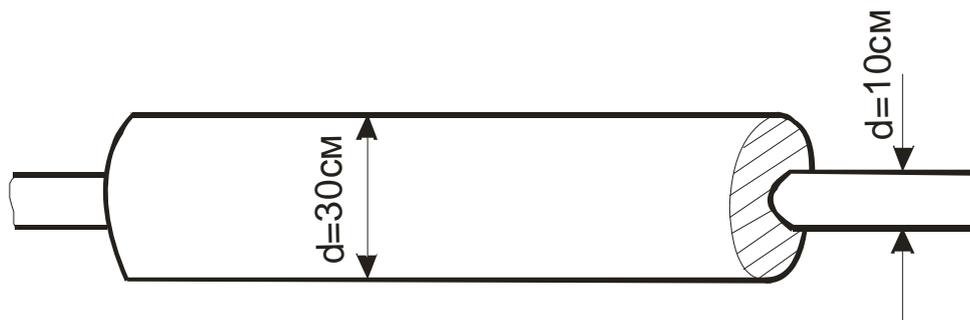
$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_T.$$

По формуле (6.2.3), при  $r = b$ , расчетное напряжение:

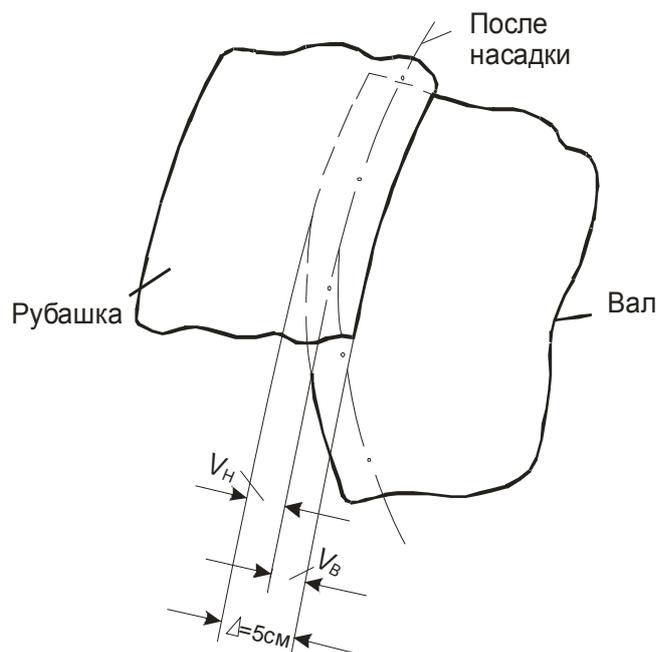
$$\sigma_P = p_a \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - (-p_b) \leq \sigma_T.$$

**Пример 3.2.** На вал диаметром  $d = 10 \text{ см}$  в горячем состоянии надета рубашка (рис. 7.1, А), внутренний диаметр которой до нагревания был на  $0,001d$  меньше диаметра вала. Толщина стенок рубашки  $10 \text{ см}$ . Вал и рубашка стальные. Определить наибольшие напряжения в рубашке ( $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МН/м}^2$ ).

а



б



в

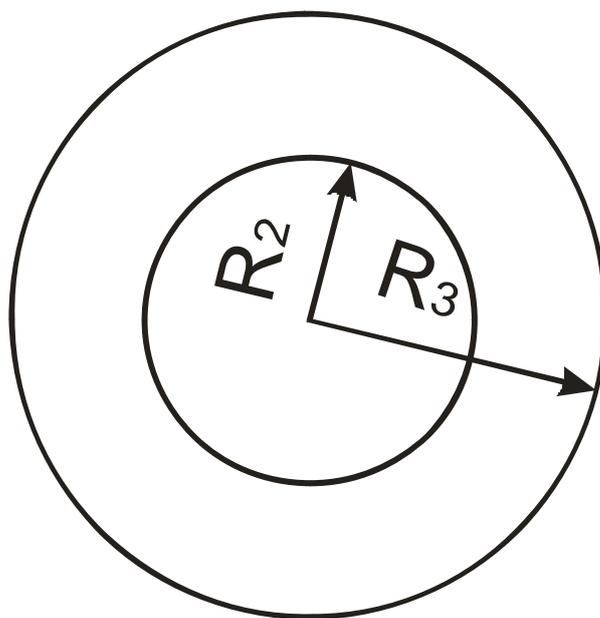


Рис. 7.1. Вал с надетой рубашкой

**Решение.** Уменьшение радиуса вала и увеличение внутреннего радиуса рубашки в сумме должны дать величину зазора  $\Delta$  между рубашкой и валом до нагревания, равного (рис. 7.1, в)

$$\Delta = \frac{1}{2} 0,001 d = 0,0005 \cdot 10 = 0,005 \text{ см.}$$

Для решения задачи следует использовать формулы для составных труб, полагая внутренний радиус внутренней трубы  $R_1$  равным нулю,  $R_2 = 5 \text{ см}$  и  $R_3 = 15 \text{ см}$ .

Давление, передающееся от рубашки на вал после насадки, по формуле (6.3.1):

$$p = \frac{\Delta E}{R_2} \cdot \frac{1}{C},$$

где

$$C = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = 1 + \frac{15^2 + 5^2}{15^2 - 5^2} = 2,25.$$

Тогда

$$p = \frac{0,005 \cdot 2 \cdot 10^5}{5 \cdot 2,25} = 89,0 \text{ МН / м}^2.$$

Наибольшее по абсолютной величине радиальное напряжение в рубашке возникает по поверхности соприкосновения с валом:

Наибольшее окружное напряжение в рубашке возникает на ее внутренней поверхности:

$$\sigma_{\theta} = \frac{p_b b^2}{c^2 - b^2} \left( 1 + \frac{c^2}{b^2} \right) = \frac{89,0 \cdot 5^2}{15^2 - 5^2} \left( 1 + \frac{15^2}{5^2} \right) = 111,2 \text{ МН / м}^2.$$

## 8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТФКП

### 8.1. Основные сведения по ТФКП

Рассмотренные плоские задачи по определению поля напряжений в окрестности кончика трещины, как и подавляющее большинство других плоских задач на концентрацию напряжений, проще решать с помощью функций комплексного переменного (если аналитическое решение вообще возможно, в противном случае необходимо обращаться к приближенным численным методам; для таких задач особенно эффективен метод конечных элементов).

Напомним основные сведения по теории функций комплексного переменного. Комплексная переменная  $Z$  состоит из вещественной  $\text{Re}$  и мнимой  $\text{Im}$  частей:

$$Z = x + yi = \text{Re} Z + \text{Im} Z.$$

Её можно также представить в полярных координатах:

$$Z = x + iy = r(\cos \Theta + i \cdot \sin \Theta) = r \cdot e^{i\Theta}.$$

Функция комплексного переменного может быть разделена на вещественную и мнимую части:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

где  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  – функции  $x$  и  $y$ . Функция называется аналитической в некоторой точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Можно показать, что вещественная и мнимая части любой аналитической функции комплексной переменной удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. они являются гармоническими функциями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

## 8.2. Формулы для комплексных потенциалов в случае антиплоской деформации

Введем функцию

$$\varphi(x, y) = Gw(x, y),$$

тогда

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяет гармоническому уравнению, следовательно, может быть представлена, как действительная часть комплексной аналитической функции  $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(\Phi(z)) = \frac{1}{2}(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)})$ .

Тогда

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \Phi'(z) \frac{dz}{dx} + \overline{\Phi'(z)} \frac{dz}{dx} \right) = \frac{1}{2} (\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}),$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \Phi'(z) \frac{dz}{dy} + \overline{\Phi'(z)} \frac{dz}{dy} \right) = \frac{1}{2} (i\Phi'(z) - i\overline{\Phi'(z)}),$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{1}{2} ((\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}) - i(i\Phi'(z) - i\overline{\Phi'(z)})) = \Phi'(z).$$

Формулы для представления напряжений и перемещений для антиплоской задачи через комплексный потенциал:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \Phi'(z),$$

$$w(x, y) = \frac{1}{2G}(\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)).$$

Рассмотрим теперь граничные условия. Напомним, что согласно (5.11):

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \equiv 0,$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \equiv 0,$$

$$\bar{Z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m.$$

Сформулируем теперь задачу.

Определить функцию  $\Phi'(z)$  аналитическую в области  $D$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , при этом должны выполняться следующие граничные условия:

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = Z(x, y) \Big|_{(x,y) \in \Gamma},$$

где  $\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \Phi'(z)$ , а  $Z(x, y)$  – заданная функция.

**Пример.** Трещина, параллельная оси  $OX$ , в бесконечной плоскости. На бесконечности, параллельно оси  $OY$ , действуют напряжения  $\tau_{zy} = \tau$ . Берега трещины свободны от усилий.

**Постановка задачи.** Требуется найти функцию аналитическую в области, представляющую собой плоскость с разрезом.

При этом должны выполняться следующие граничные условия: на верхнем и нижнем берегу разреза  $l=0$  и  $m=1$ ,  $Z(x, y)=0$ ,  $y = 0$ ,  $|x| \leq a$ , должны выполняться граничные условия:

$$\tau_{yz} = 0.$$

Кроме того, на бесконечности:

$$\tau_{yz} \rightarrow \tau, \text{ при } y \rightarrow \infty,$$

В качестве решения задачи возьмем аналитическую функцию  $\Phi(z)$  в виде:

$$\Phi(z) = -i\tau \sqrt{z^2 - a^2}.$$

Тогда

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \Phi'(z) = \frac{-i\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}},$$

$$\Phi'(z) \rightarrow -i\tau, \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Теперь нетрудно проверить выполнение граничных условий на бесконечности.

Кроме того

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{-i\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

На границе разреза  $y=0$  выполняются граничные условия:

$$\tau_{yz} = 0.$$

Наибольшее главное напряжение в точке можно представить в виде:

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = \left| \frac{-i\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right| = \frac{\tau \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2)}}. \quad (8.2.1)$$

### 8.3. Плоская задача

Формула Гурса позволяет выразить любую бигармоническую функцию  $\varphi$  через две аналитические функции:

$$\varphi = \psi_1 + x\psi_2 + y\psi_3 = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)).$$

Из различных решений этого дифференциального уравнения в частных производных мы можем получить различные решения двумерных задач при различных граничных условиях. Из представления для напряжений следуют формулы Колосова:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}), \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy} &= -2(z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)}). \end{aligned}$$

**Пример.** Задача о трещине в бесконечной полуплоскости (рис. 8.1).

Рассмотрим бесконечную пластину с трещиной  $2a$  при одноосном растяжении.

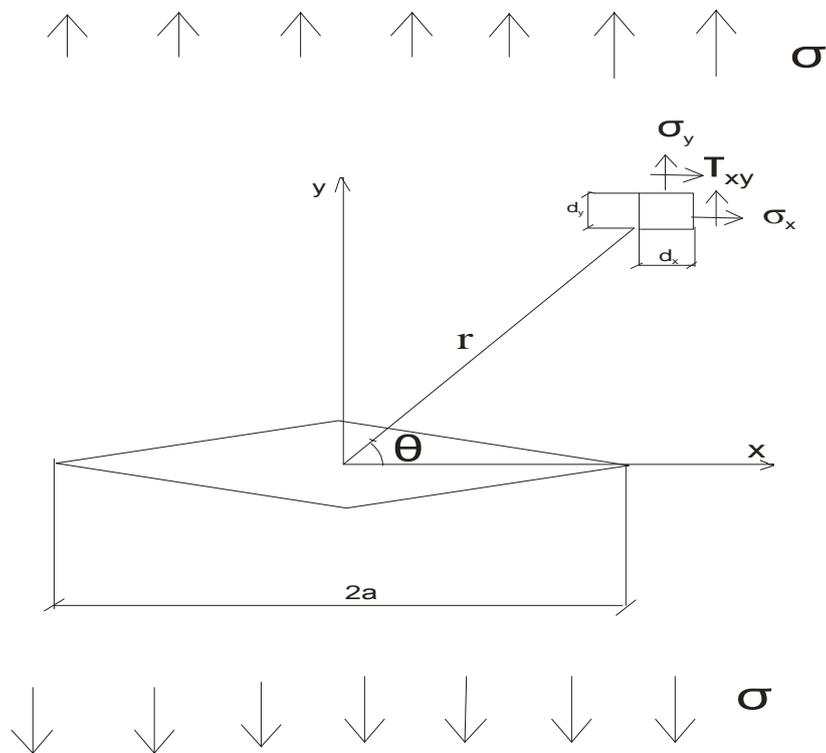


Рис. 8.1. Трещина отрыва в бесконечной плоскости

Граничные условия имеют вид:

на поверхности разреза  $|x| \leq a, y = 0$  :

$$\sigma_{yy} = 0 \text{ и } \tau_{xy} = 0,$$

кроме того, на бесконечности:

$$\sigma_{yy} \rightarrow \sigma, \tau_{xy} \rightarrow 0, \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Выбирая

$$\Phi(z) = \frac{\sigma a}{4} \left[ 2 \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1} - \frac{z}{a} \right],$$

$$\Psi(z) = -\frac{\sigma a}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1}} - \frac{z}{a} \right].$$

Можно показать, что

$$\Phi'(z) \rightarrow \frac{\sigma}{4}, \text{ при } z \rightarrow \infty,$$

$$\Psi'(z) \rightarrow \frac{\sigma}{2}, \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Тогда по формулам Колосова, при  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma,$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy} = -\sigma.$$

Откуда следует, что граничные условия на бесконечности выполняются.

На берегах разреза:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma a}{4} \left[ 2 \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1} - \frac{z}{a} \right],$$

$$\Phi'(z) = \frac{\sigma a}{4} \left[ \frac{2z}{a^2} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{a} \right] = \frac{\sigma z}{2a} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\sigma}{4},$$

$$\begin{aligned} \Phi''(z) &= \frac{\sigma a}{4} \left[ \frac{2}{a^2} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{4z^2}{a^4} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \right] = \\ &= \frac{\sigma a}{4} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{2}{a^2} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right) - \frac{1}{2} \frac{4z^2}{a^4} \right] = \frac{\sigma a}{4} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left[ -\frac{2}{a^2} \right], \end{aligned}$$

$$\Psi(z) = -\frac{\sigma a}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1}} - \frac{z}{a} \right],$$

$$\Psi'(z) = -\frac{\sigma a}{2} \left[ \frac{2z}{a^2} - \frac{1}{2} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a} \right],$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i\tau_{xy} &= -2 \left( \frac{\sigma a}{z} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{-2}{a^2} \right] - \frac{\sigma a}{2} \left( \frac{-1}{2} \frac{2z}{a^2} \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a} \right) \right) = \\ &= -2 \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{\sigma a}{z} \left[ \frac{-2}{a^2} \right] + \frac{\sigma a}{4} \left( \frac{2z}{a^2} \right) \right) + \frac{\sigma a}{1} \frac{1}{a} = \\ &= 2\sigma \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{2a} \right] - \left( \frac{z}{2a} \right) \right) + \sigma = \sigma \left( \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{z-z}{a} + \sigma. \end{aligned}$$

Тогда на границе

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= \sigma, \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy} &= \sigma,\end{aligned}$$

Откуда

$$\sigma_{xx} = \sigma, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Впервые задачу об определении поля напряжений для отрывного вида решил в 1939 году Вестергаард.

#### 8.4. Задача о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием

Задачу о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием впервые решил Колосов Г.В. в 1909 году. Работа долгое время оставалась неизвестной для европейских инженеров.

Рассмотрим бесконечную пластику под действием одноосного растягивающего напряжения  $\sigma$ , действующего в направлении, составляющем угол  $\beta$  с положительной осью  $X$ . Контур отверстия свободен от напряжения.

Уравнения контура эллиптического отверстия имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса. Функция, отображающая внешность эллипса на круг конформно, будет

$$z(\xi) = R \left( \frac{1}{\xi} + m\xi \right),$$

где

$$R = \frac{a + b}{2},$$

$$m = \frac{a - b}{a + b}.$$

Напряжения на границе отверстия ( $\xi = e^{i\varphi}$ ), можно получить по формуле:

$$\sigma_\varphi = \sigma_x + \sigma_y = \frac{\sigma(1 - m^2 - 2\cos 2(\beta - \varphi) + 2m\cos 2\beta)}{1 + m^2 - 2m\cos 2\varphi}.$$

В частном случае, когда растягивающее усилие  $P$  действует под прямым углом к главным осям:  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , получаем

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma(1 - m^2 + 2\cos 2\varphi - 2m)}{1 + m^2 - 2m\cos 2\varphi}.$$

Наибольшее значение получается на концах большей оси

$$\cos 2\varphi = 1:$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma}{1 + m^2 - 2m}(1 - m^2 + 2 - 2m) = \frac{\sigma}{(1 - m)^2}(3 + m)(1 - m) = \frac{\sigma(3 + m)}{(1 - m)}.$$

В частном случае, когда  $a=b$ ,  $m=0$ , решение совпадает с найденным для кругового отверстия.

Если  $m \rightarrow 1$ , эллипс вырождается в трещину.

## 9. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Профессор Инглис в своей знаменитой статье, написанной в 1913 году, решил аналогичную задачу и ввел понятие «концентрации напряжений», которое имеет принципиальное значение в расчетах прочности конструкций.

Концентрация напряжений – число, показывающее, во сколько раз локальное напряжение превышает среднее значение напряжения.

Инглис обратил внимание инженеров на то факт, что эллиптический вырез в пластинке создает локальные напряжения на границе во много раз больше средних напряжений на достаточном удалении от выреза.

Коэффициент концентрации напряжений зависит от формы отверстия, или надреза, и от свойств материала. Наихудшая ситуация возникает в случае острых надрезов и хрупких материалов. Инглис рассчитал, как разного рода вырезы, вроде люков на палубе, влияют на прочность крупных сооружений, в частности морских судов. Расчет Инглиса носил скорее идейный характер и не принимал во внимание множество других факторов.

Этот вывод Инглиса, который он получил чисто математическим путем, был не понят инженерами. Данные результаты еще как-то согласуются с нашими представлениями о разрушении хрупких материалов. Но ведь неупругое поведение пластичных металлов выравнивает напряжения вокруг малого отверстия, значительно ослабляя их концентрации. Мягкая сталь менее других материалов чувствительна к концентрации напряжений. И данный факт ввел в заблуждение не одно поколение инженеров.

Для металлов, работающих в условиях циклического нагружения, то есть в условиях усталостной концентрация напряжений, тенденция о которой упорно и, как казалось безосновательно, говорил Инглис, действительно имела место.

Каковы бы ни были размеры надрезов-концентраторов, сама концентрация напряжений всегда играет огромную роль. Как показал Колосов и Инглис, всякое

отверстие, любой острый надрез в материале создает в нем местное повышение напряжений. Этот местный всплеск напряжения, величину которого можно рассчитать (конечно, в самом лучшем случае только для идеальных лабораторных условий), зависит только от формы отверстия и никак не связан с его размерами. Все инженеры знают о существовании концентрации напряжений, но далеко не все ее чувствуют. Действительно, полагаясь лишь на здравый смысл, трудно понять, почему крохотное отверстие ослабляет материал в той же степени, что и большая дыра: это противоречит привычным представлениям.

Там, где есть малые отверстия и надрезы, материал начинает разрушаться от усталости очень скоро, но и при обычном статическом разрушении, то есть под действием постоянных нагрузок, такие отверстия и надрезы делают свое дело. Когда стекольщик режет стекло, он не старается прорезать его на всю толщину листа, а делает лишь неглубокий надрез на поверхности, после чего по такой царапине стекло легко разламывается. Ослабляющее действие царапины практически не зависит от ее глубины: мелкая царапина действует ничуть не слабее глубокой, поскольку степень повышения напряжений зависит лишь от остроты ее кромки.

В 1920 году инженер Гриффитс провел серию опытов исследуя прочность тонких стеклянных нитей (рис. 9.1, 9.2) и установил, что с уменьшением диаметра нити разрушающие напряжения резко возрастают. Расхождение с теорией Галилея было настолько необъяснимо, что заставило исследователей выдвинуть и развить новую теорию разрушения.

Кварцевая нить (рис. 9.2), упруго изогнутая до деформации 7,5 %, напряжения в ней достигают до  $530 \text{ кг/мм}^2$  (прочность обычного стекла 12-15  $\text{кг/мм}^2$ ).

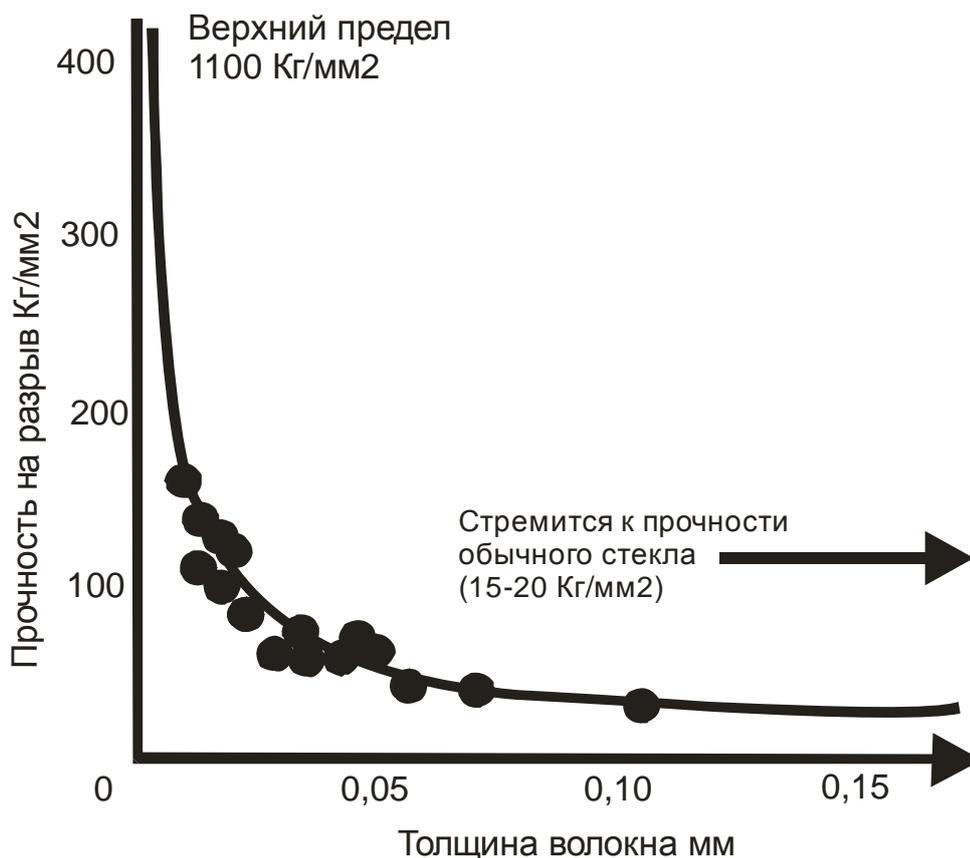


Рис. 9.1. Аппроксимация экспериментальных данных Гриффитса

Гриффитсу приходит в голову идея распространить расчет Инглиса на объекты гораздо меньших размеров, с надрезами почти столь малой толщины, что их нельзя рассмотреть в оптический микроскоп.

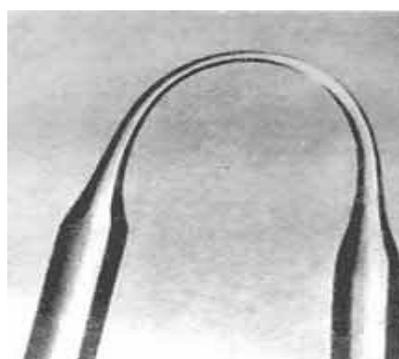


Рис. 9.2. Кварцевая нить

В 1921 г. Гриффитс предложил теорию хрупкого разрушения. Он исходил из предположения, что в материале всегда присутствуют микроскопические трещины. В качестве исходной модели теории Гриффитса рассматривается

пластинка единичной толщины с эллиптической трещиной. Пластина растягивается силой, перпендикулярной трещине.

Согласно известному решению [3] о распределении напряжений около эллиптического отверстия в растягиваемой полосе максимальные напряжения на большой полуоси эллипса:

$$\sigma_{\max} = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right). \quad (9.1)$$

Запишем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y &= b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = b \sqrt{\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right)} = \\ &= \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{2(a-x)} + o(a-x). \end{aligned}$$

Проведем теперь через вершину эллипса касательную окружность с радиусом  $R$ . Тогда

$$R = \frac{b}{\sqrt{a}}.$$

Таким образом, максимальные напряжения на большой полуоси эллипса:

$$\sigma_{\max} = \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{R}} \right). \quad (9.1)$$

При малом радиусе в вершине трещины:

$$\sigma_{\max} = 2\sigma\sqrt{a/R} \quad (9.2)$$

Формула (9.2) является полезной для инженеров, занимающихся расчетами допустимых напряжений в деталях, содержащих концентраторы напряжений.

Формула (9.2) показывает, что эллиптическое отверстие, в условиях одноосного растяжения, создает неограниченную концентрацию напряжений при уменьшении радиуса закругления.

## 10. ВИДЫ ТРЕЩИН

У вершины трещины, при нагружении, возникает значительная концентрация напряжений и деформаций, происходит перераспределение последних, что вызывает развитие трещины. Поэтому для получения количественных характеристик способности материала сопротивляться разрушению при наличии трещины, необходимо располагать распределением напряжений и деформаций у вершины трещины.

Виды локального напряженно – деформированного состояния в вершине трещины делят на три основные категории (рис. 10.1).

I. Отрыв. Характеризуется расхождением поверхностей трещины друг от друга в направлении перпендикулярном к ее плоскости. Расхождение происходит симметрично относительно плоскостей  $xу$  и  $xz$ .

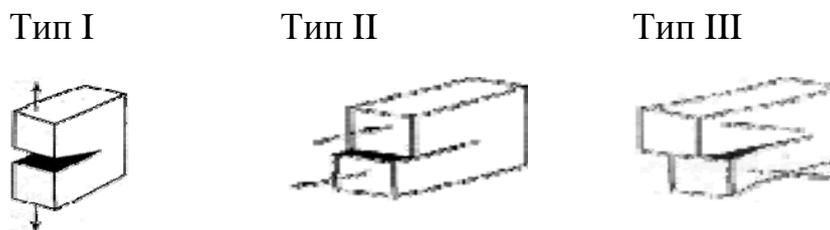


Рис. 10.1. Типы трещин

II. Поперечный сдвиг. Представляет собой локальное деформирование, при котором поверхности трещины скользят в противоположных направлениях одна по другой перпендикулярно к переднему краю (фронт) трещины.

III. Продольный сдвиг. Трещина типа «срез», образуется при антиплоском сдвиге. При продольном сдвиге поверхности трещины скользят одна по другой параллельно фронту трещины и плоскости – это так называемое антиплоское деформирование.

Любой сложный вид деформированного состояния и поля напряжений можно получить с помощью комбинации описанных трех видов.

## 10.1. Трещина продольного сдвига

Проиллюстрировать методику получения асимптотических решений в вершине трещины проще на примере трещины продольного сдвига рис. 10.2.

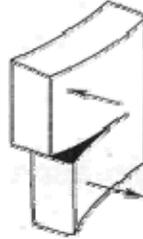


Рис. 10.2. Схема трещины продольного сдвига

Пусть выполняются условия антиплоской задачи. Рассмотрим трещину, параллельную оси  $OX$ , в бесконечной плоскости. На бесконечности, параллельно оси  $OY$ , действуют напряжения  $\tau_{zy} = \tau$ . Берега трещины свободны от усилий.

Тогда, как было показано в п. 8.2:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{-i\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (10.1.1)$$

Рассмотрим поведение функций  $\tau_{xz} - i\tau_{yz}$  в вершине трещины. Сделаем замену переменных  $z = a + re^{i\varphi}$  в формуле (10.1.1), получим

$$\begin{aligned} \tau_{xz} - i\tau_{yz} &= \frac{-i\tau(a + re^{i\varphi})}{\sqrt{(a + re^{i\varphi} - a)(a + re^{i\varphi} + a)}} = \\ &= \frac{-i\tau a}{\sqrt{re^{i\varphi} 2a}} + O(1) = -i\tau \sqrt{\frac{a}{2}} r^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}} + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом, в вершине трещины асимптотическое решение имеет вид

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \Phi'(z) = -i\tau \sqrt{\frac{a}{2}} r^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}} = \tau \sqrt{\frac{a}{2}} r^{-\frac{1}{2}} \left( \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right).$$

Или

$$\tau_{xz} = \tau \sqrt{\frac{a}{2}} r^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\tau_{yz} = \tau \sqrt{\frac{a}{2}} r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Кроме того, для главного напряжения:

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = \tau \sqrt{\frac{a}{2}} r^{-\frac{1}{2}}.$$

В вершине трещины продольного сдвига напряжения обращаются в бесконечность и классические теории прочности неприменимы.

## 10.2. Плоское напряженное состояние. Трещина отрыва

Рассмотрим бесконечную пластину с трещиной  $2a$  при одноосном растяжении (рис. 10.3).

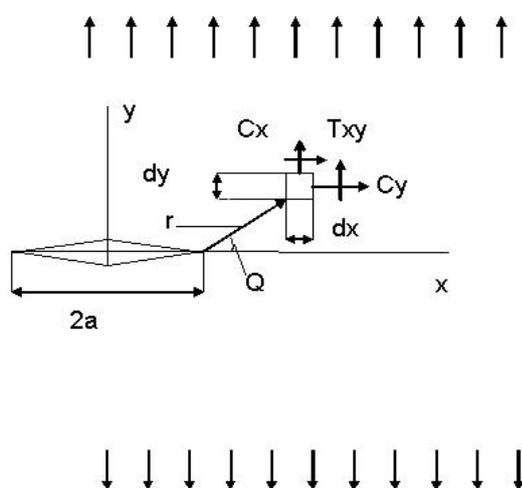


Рис. 10.3. Одноосное растяжение пластинки с трещиной

Сделав замену переменных  $z = a + re^{i\varphi}$  в выражениях для комплексных потенциалов, получим

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a},$$

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}.$$

Кроме того, для плоского деформированного состояния:

$$u = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$v = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

В вершине трещины отрыва напряжения обращаются в бесконечность и классические теории прочности неприменимы.

### 10.3. Трещина плоского сдвига

Для бесконечной пластины с трещиной, которая на бесконечном расстоянии от трещины находится в состоянии однородного плоского сдвига:

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a},$$

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( 2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Следует подчеркнуть, что в вершине трещины поперечного сдвига напряжения обращаются в бесконечность и классические теории прочности неприменимы.

## 11. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ

### 11.1. Определение коэффициентов интенсивности

В полученном выше соотношении, описывающие напряженное состояние и перемещения в небольшой окрестности у кончика трещины, входят действительные параметры  $K$ , играющие ключевую роль в механике разрушения. Они называются коэффициентами интенсивности напряжения и зависят от величины и характера внешних нагрузок, формы и размеров тела, расположения и длины трещин, а также от условий нагружения (температуры, скорости, среды и т.д.). Коэффициент интенсивности напряжения имеет несколько необычные единицы: сила, деленная на длину в степени  $3/2$  ( $\text{кгс/см}^{3/2}$  или  $\text{МПа}\sqrt{\text{м}}$ ). Их решающая роль в механике разрушения заключается в том, что именно они определяют интенсивность напряженного состояния в окрестности кончика трещины. Коэффициент интенсивности напряжения является своеобразной мерой напряженного состояния у кончика трещины, определяющей уровень напряжений в его окрестности [1, 2, 3]. Если коэффициент интенсивности напряжений одинаков для деталей различных геометрических форм с отличающимися по конфигурации трещинами, различными нагрузками, напряжениями и характером их распределения, то можно считать, что материал в вершине трещины во всех этих случаях нагружен одинаково.

Действительно, как следует из формул, полученных в п. 10, распределение напряжений по переменным углу  $\varphi$  и радиусу  $r$  совершенно не зависит от длины трещины, форме тела и характера внешних нагрузок. Интенсивность этого распределения целиком определяется одним единственным параметром – множителем  $K$ , который, наоборот, не зависит от координат  $\varphi$  и  $r$ .

Для центральной трещины, возникшей при растяжении пластины неограниченных размеров и расположенной перпендикулярно к направлению действия напряжения  $\sigma$  (отрыв):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}.$$

Для трещин вида продольный и поперечный сдвиг:

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a},$$

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi a}.$$

При других условиях нагружения, иных формах трещин, вводят поправочные функции:

$$K_I = \sqrt{\pi a} \cdot \sigma \cdot f_{1K}, \quad K_2 = \sqrt{\pi a} \cdot \tau \cdot f_{2K}, \quad K_3 = \sqrt{\pi a} \cdot \tau \cdot f_{3K}.$$

## 11.2. Влияние конечных размеров

Трещины в пластинах конечных размеров представляют огромный практический интерес, но, для таких случаев не существует замкнутых форм решений. Эти задачи сложны из-за граничных условий. Приблизительное решение можно получить для полосы конечной ширины, нагруженной растягивающими силами с краевой или центральной трещиной.

Рассмотрим сначала бесконечный лист, в котором имеется бесконечное число расположенных на одном уровне параллельных трещин, как показано на рис. 11.1 Решение для этого случая, имеет вид:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{W}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{W}}. \quad (11.2.1)$$

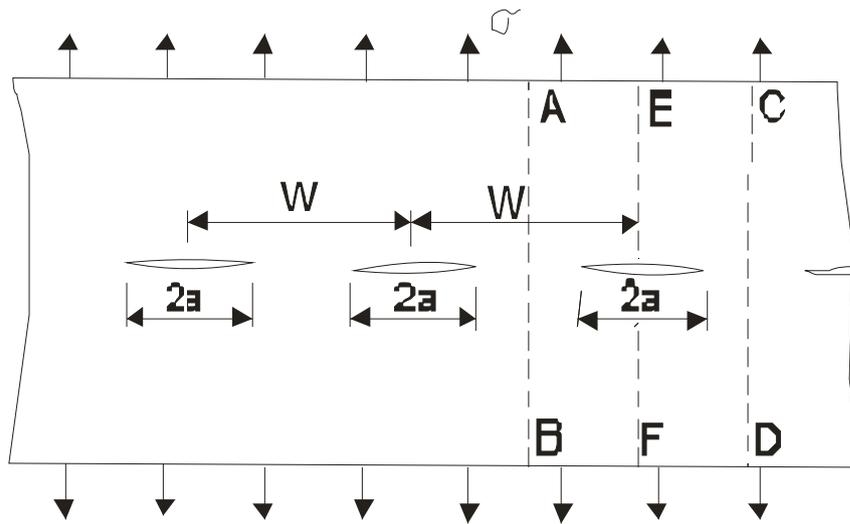


Рис. 11.1. Бесконечная пластина с параллельными трещинами

Если пластину разрезать вдоль линий  $AB$  и  $CD$ , то получим полосу конечной ширины  $W$ , в которой имеется центральная трещина  $2a$ . Вполне вероятно, что решение (3.28) приблизительно верно и для полосы. В случае параллельных трещин на краях полосы шириной  $W$  действуют напряжения  $\sigma$ . Заметим, что сдвиговые напряжения равны нулю из-за симметрии (рис. 11.1), тогда как края пластины конечных размеров  $AB$  и  $CD$  свободны от напряжений. Логично предположить, что напряжения, параллельные трещине, не оказывают большого влияния на величину коэффициента  $K$  и, следовательно, выражение (3.28) можно использовать в качестве приближенного решения для полосы конечных размеров. Легко видеть, что при стремлении отношения  $a/W$  к нулю величина коэффициента  $K_I$  определяемая выражением (3.28), будет приближаться к величине  $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ . Это означает, что если трещины малы, то полоса конечных размеров (рис. 11.2) будет вести себя как бесконечная пластина.

Для определения коэффициента интенсивности напряжений в растянутой полосе наиболее удобна формула

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}.$$

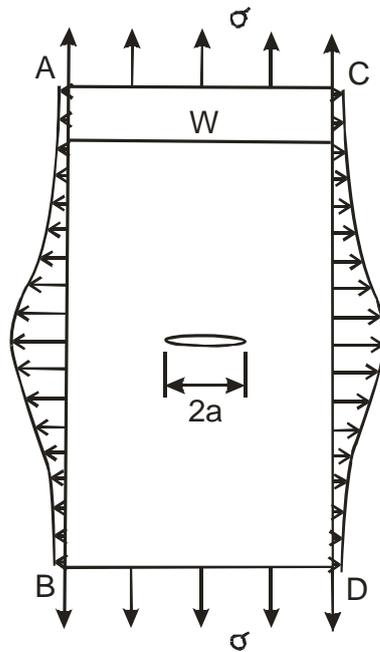


Рис. 11.2. Напряжения на краях полосы, вырезанной из бесконечной пластины с параллельными трещинами

На рис. 11.3 выполнено сравнение корректировочный факторов на конечность ширины пластины Ирвина, Исида и Феддерсена.

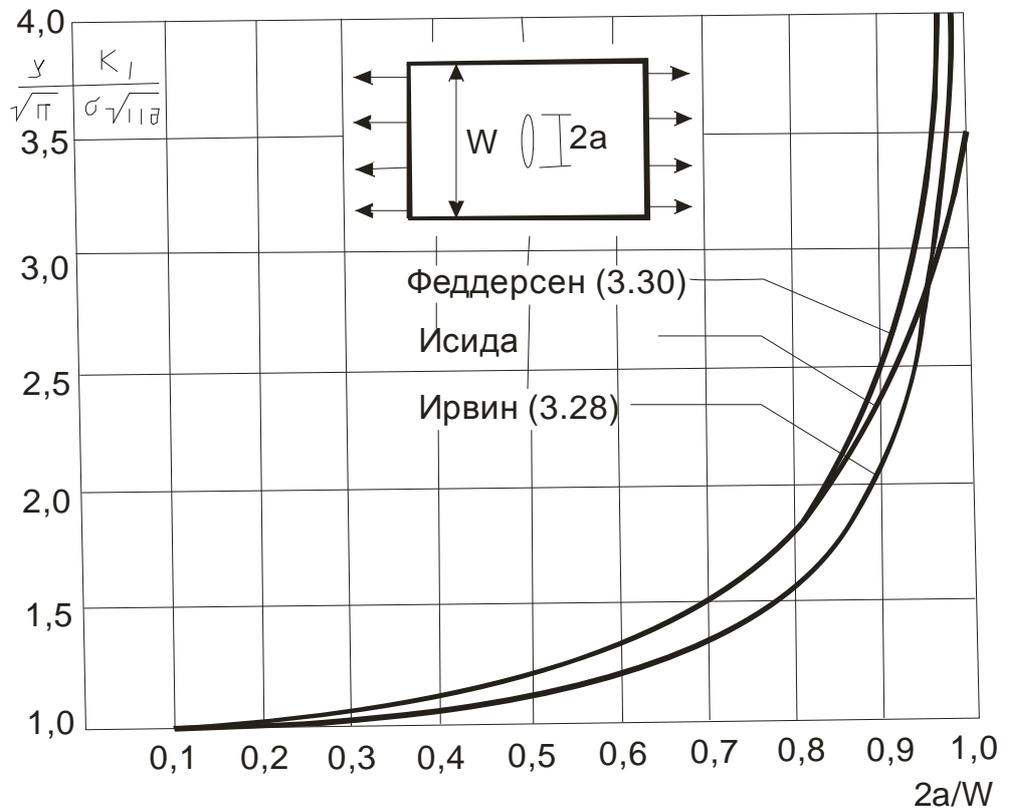


Рис. 11.3. Коррекции на конечность размеров пластины с центральной трещиной

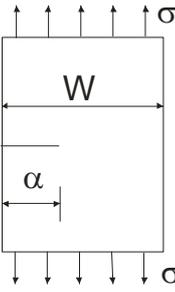
Разрезая пластину с параллельными трещинами (см. рис. 11.1) вдоль линий  $EF$  и  $CD$ , можно также получить полосу с краевой трещиной. Как и в центральной трещине, в качестве аппроксимации решения о краевой трещине можно использовать выражение (3.28). Как и прежде, для малых значений  $a/W$  величина  $K$  стремится к  $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ . Однако напряжения, действующие на краю  $EF$ , стремятся несколько закрыть трещину. Отсутствие этих напряжений в полосе конечных размеров приводит к тому, что в этой полосе раскрытие трещины немного больше. Следовательно, в этом случае  $K$  несколько больше за счет того, что края полосы свободны от напряжений. Корректировочный коэффициент отличается от единицы примерно на 12 %. Таким образом, для маленькой краевой трещины величина  $K$  задана соотношением:

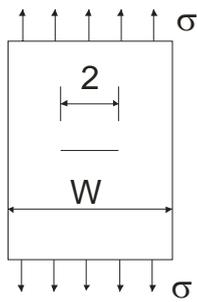
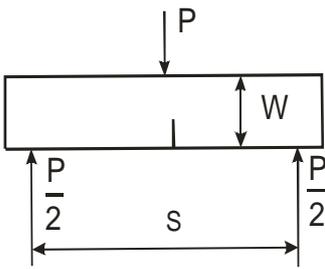
$$K_I = 1,12\sigma\sqrt{\pi a}. \quad (11.2.2)$$

В таблице 3.2 собраны коэффициенты интенсивности напряжений и полиномы учета конечности размеров для нескольких практически важных конфигураций.

Таблица 3.2

Величина  $K$  для типовых конфигураций

№	Конфигурация	Величина $K$
1	2	3
1		<p>и</p> <p>где</p> $K_I = 1,12\sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{для малых } \frac{a}{W}$ $K_I = Y\sigma\sqrt{a},$ $Y = 1,99 - 0,41\frac{a}{W} + 18,7\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 38,48\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 53,85\left(\frac{a}{W}\right)^4$

1	2	3
2		$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}$
3		<p style="text-align: center;"><b>Толщина B</b></p> $K_I = \frac{PS}{W^{\frac{3}{2}}} \left( 2,9 \left( \frac{a}{W} \right)^{\frac{1}{2}} - 4,6 \left( \frac{a}{W} \right)^{\frac{3}{2}} + 21,8 \left( \frac{a}{W} \right)^{\frac{5}{2}} - 37,6 \left( \frac{a}{W} \right)^{\frac{7}{2}} \right)$

### 11.3. Эллиптические трещины

На практике трещины часто зарождаются в углах и на краях тел. Такие трещины распространяются преимущественно внутрь тела и принимают форму четверти или половины эллипса. Для того чтобы применять положения механики разрушения к «угловым трещинам» (четверть эллипса), а также к «поверхностным выемкам» (половина эллипса), необходимо знать коэффициенты интенсивности напряжений для трещин с искривленным фронтом.

Снеддоном [1] была исследована задача о внутренней трещине округлой формы, которая находится в бесконечно протяженном твердом теле под действием однородного растяжения (рис.11.4). Автор пришел к заключению, что

$$K_I = \frac{2\sigma \sqrt{\pi a}}{\pi}. \quad (11.3.1)$$

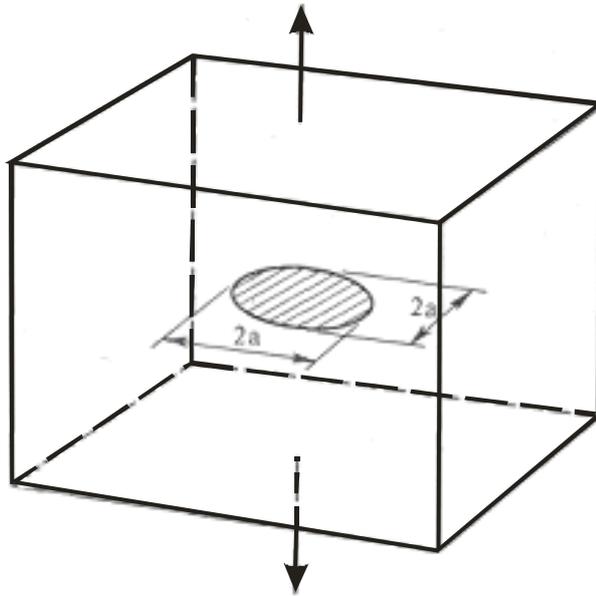


Рис. 11.4. Внутренняя трещина округлой формы

Задача о внутренней раковине эллиптической формы точного решения не имеет, однако на основе поля напряжений вокруг эллиптической полости, полученного Ирвиным, было выведено полезное соотношение. Точно так же как в случае сквозных трещин, перемещения, полученные из этого решения, были выражены через коэффициент интенсивности напряжений. В результате, по Ирвину,

$$K = \sigma \sqrt{\pi c} \cdot \frac{\left( \sin^2(\varphi) + \frac{c^2}{a^2} \cos^2(\varphi) \right)^{\frac{1}{4}}}{\Phi}. \quad (11.3.2)$$

Здесь  $\Phi$  — эллиптический интеграл второго рода, заданный отношением:

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} \sin^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

где  $a$  и  $c$  можно определить из рис. 11.5. Если  $c = a$ , то уравнение (11.3.2), как и следовало ожидать, приводится к уравнению (11.3.1).

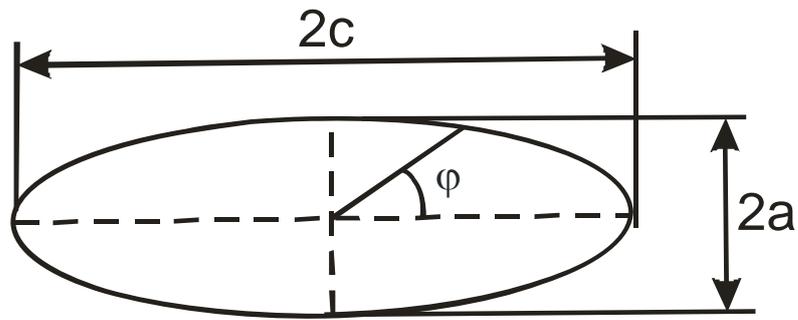


Рис. 11.5. Эллиптическая трещина

Соотношения (11.3.1) и (11.3.2) с очень небольшими изменениями можно применить к полуэллиптическим поверхностным выемкам и к угловым трещинам, имеющим форму четверти эллипса. Поэтому эти соотношения представляют собой большой практический интерес. Величина  $K_I$ , как выяснилось, меняет свои значения вдоль фронта трещины. На конце малой оси эллипса ( $\varphi = \pi/2$ ) интенсивность напряжений максимальна; на конце большой оси ( $\varphi = 0$ ) она принимает наименьшее значение. Поэтому

$$K_{I\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi},$$

$$K_{I\left(\varphi=0\right)} = \frac{\sigma \sqrt{\frac{\pi a^2}{c}}}{\Phi}.$$

Обычно, к этим выражениям величины  $K$  добавляют ряд корректировочных коэффициентов. Поверхностная раковина сопоставима с краевой трещиной. В п. 11.3 было показано, что соответствующую ей величину  $K$  следует изменить с помощью корректировочного коэффициента примерно на 12%. Эта корректировка называется корректировкой на тыльную свободную поверхность:

$$K_I = 1,12 \sigma \sqrt{\pi a} \frac{G(t)}{\Phi},$$

где

$$G(t) = \left( \sin^2 t + \frac{a^2}{c^2} \cos^2(t) \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Максимальная интенсивность:

$$K_{\max} = 1,12 \sigma \sqrt{\pi c} \cdot \frac{1}{\Phi}.$$

Наконец, часто нужна корректировка для учета близости свободной поверхности к фронту трещины. Для этой коррекции можно воспользоваться формулой (11.2.2).

Получим

$$K_{\max} = 1,12 \sigma \sqrt{\pi c} \cdot \frac{M}{\Phi}, \tag{11.3.3}$$

$$M = \sqrt{\frac{2H}{\pi c'} \operatorname{tg} \frac{\pi c'}{2H}},$$

где  $M$  — корректировочный коэффициент, учитывающий близость свободной поверхности к фронту трещины и определяемый из рис. 11.6 или по формуле (11.2.1).

Для большей точности можно использовать коррекцию на близость свободной поверхности к фронту трещины Кобаяши [3], которая приведена в графической форме на рис. 11.6.

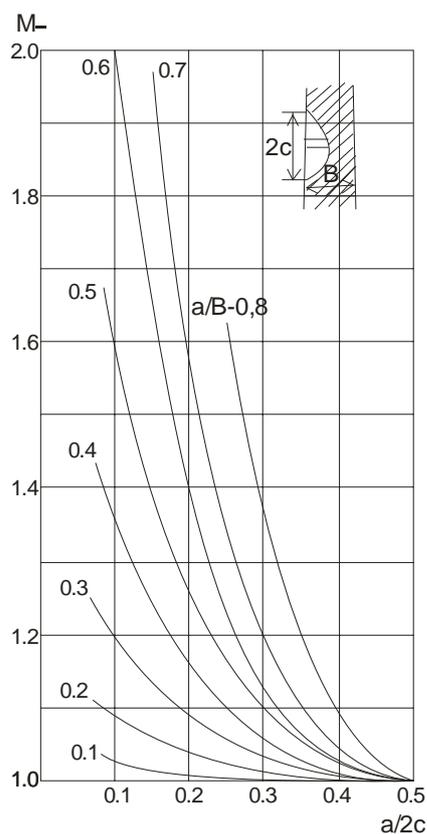


Рис. 11.6. Коррекция Кобаяши, учитывающая близость свободной поверхности к фронту трещины

В случае, когда полуэллиптическая раковина распространяется глубоко внутрь материала, корректировочный коэффициент учета тыльной свободной поверхности следует уменьшить до единицы. В случае трещины, имеющей форму четверти эллипса, для угловой трещины величину корректировочного коэффициента на тыльную свободную поверхность выбирают равной  $M = 1,2$ .

## 12. КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ

### 12.1. Критерий Гриффитса

Гриффитс рассматривал хрупкие тела, у которых почти вся деформация вплоть до разрушения является упругой.

Возьмем прямоугольную пластину, растянем ее напряжением  $\sigma$  и жестко закрепим ее края.

Потенциальная энергия деформированного упругого тела в виде квадрата со стороной  $a$ , равна (п. 2.4):

$$W = \frac{1}{2} \sigma_y a e_y = \frac{\sigma^2 a^2}{2E},$$

причем на единицу площади приходится энергия  $\frac{\sigma^2}{2E}$ .

Можно показать, что потенциальная энергия деформированного хрупкого тела, имеющего сквозную (рис. 12.1) трещину длиной  $2l$  и растягиваемого внешними напряжениями  $\sigma$ , будет меньше за счет «зоны разгрузки»:

$$W(l) = \frac{\sigma^2 a^2}{2E} - \frac{\pi \sigma^2 l^2}{E}.$$

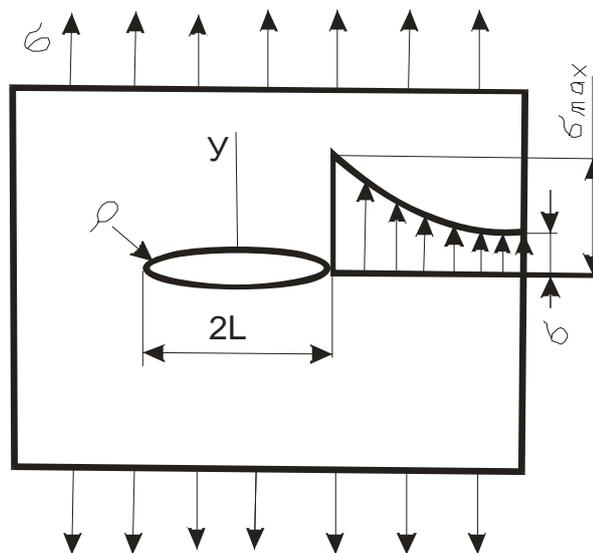


Рис. 12.1. Бесконечная пластина с трещиной

Если длину трещины теперь увеличить на величину  $\Delta l$ , то величина освобожденной энергии составит:

$$W(l+\Delta l) - W(l) = \left( \frac{\sigma^2 a^2}{2E} - \frac{\pi \sigma^2 (l+\Delta l)^2}{E} \right) - \left( \frac{\sigma^2 a^2}{2E} - \frac{\pi \sigma^2 l^2}{E} \right) = \frac{\pi \sigma^2 2l}{E} \Delta l + o(\Delta l).$$

Следовательно

$$\frac{W(l+\Delta l) - W(l)}{\Delta l} = \frac{\pi \sigma^2 2l}{E} + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l},$$

$$\frac{dW}{dl} = \frac{\pi \sigma^2 2l}{E}.$$

С другой стороны, на увеличение длины трещины должна быть затрачена энергия. Учитывая, что две поверхности трещины распространяются в обе стороны, увеличение поверхностной энергии для трещины составляет:

$$\Gamma = 4\gamma l$$

и

$$\frac{d\Gamma}{dl} = 4\gamma,$$

где  $\gamma$  – удельная поверхностная энергия; она равна энергии, необходимой для образования единицы площади новой поверхности, и зависит от температуры, давления, окружающей среды. Для металлов величина  $\gamma$  составляет порядка 1 Дж/м<sup>2</sup>.

Таким образом,

$$4\gamma = \frac{dW}{dl} = \frac{\pi \sigma^2 2l}{E}.$$

Потенциальная энергия тела может или увеличиваться, или уменьшаться. Если она увеличивается, то это свидетельствует о том, что для роста трещины

подводится энергия извне посредством увеличения внешней нагрузки. При этом, рост трещины можно контролировать уменьшением нагрузки и поддержанием на постоянном уровне.

Если энергия уменьшается, то, следовательно, увеличение размеров трещины происходит за счет расхода накопленного запаса энергии в области трещины. Последняя ситуация и представляет наибольшую опасность. Поэтому Гриффитс сформулировал энергетическое условие хрупкого разрушения.

Критерий Гриффитса: для самопроизвольного, неконтролируемого роста трещины при заданном значении напряжений  $\sigma = \sigma_c$  достаточно, чтобы с ростом длины трещины, энергия  $W$  деформируемого тела не увеличивалась:

$$4\gamma = 2\pi\sigma^2 l / E, \quad (12.1.1)$$

откуда для плоского напряженного состояния получаем

$$\sigma_c \sqrt{\pi l} = \sqrt{2 \gamma E}.$$

Для плоского деформированного состояния, соответственно:

$$\sigma_c \sqrt{\pi l} = \sqrt{2 \gamma E / (1 - \nu^2)}.$$

Нагрузку на тело можно безопасно увеличивать до тех пор, пока действующее напряжение  $\sigma$  меньше  $\sigma_c$ , при этом разрушения не происходит. Если  $\sigma$  больше  $\sigma_c$ , происходит неустойчивый рост трещины, и тело разрушается. При известной начальной длине трещины легко определить критическое напряжение для данной трещины.

Равенство (12.1.1) Гриффитс проверил экспериментально. На стенках стеклянных сферических колб и цилиндрических трубок, диаметр которых был достаточно велик, а толщина стенок составляла соответственно 0,25 и 0,5 мм,

наносились трещины различной длины. Затем колбы и трубки обжигали при температуре  $4500^{\circ}\text{C}$  для снятия остаточных напряжений. Подготовленные таким образом, колбы и трубки нагружали внутренним гидравлическим давлением до разрушения и измеряли разрушающее напряжение для каждой трещины длиной 2 мм. Результаты опыта подтвердили постоянство величины и тем самым теоретическую схему Гриффитса.

Применение Гриффитсом энергетического подхода рассмотрением баланса поверхностной и упругой энергии трещины в процессе её распространения позволило избежать определения радиуса кривизны в вершине трещины, так как измерить его практически невозможно.

Важное значение теории Гриффитса заключается в том, что она позволяет связать реальную прочность (разрушающее напряжение) хрупких тел с размерами дефектов типа трещин и физическими постоянными материала. **Основной вывод:** само по себе наличие трещины еще не является обязательным предвестником разрушения. Оно может наступить только при определенном сочетании размера трещины и величины нагрузки.

## 12.2. Критерий Ирвина

Ирвин [1] предложил считать, что поток энергии  $G$  численно равный работе, отнесенной к единице длины приращения трещины, идет на создание перемещений  $v$  в вершине трещины, если при этом она прирастает на величину  $dl$ , т. е.

$$G \cdot dl = \int_0^{dl} (\sigma_y \cdot v) dx.$$

Пусть трещина расположена на отрезке  $[-\Delta, \infty]$ .

Представим, что в вершине трещины приложены силы таким образом, что берега трещины сомкнулись на участке  $[-\Delta, 0]$ .

Напряжения в окрестности вершины сомкнувшейся трещины определяются формулой (п. 10.2):

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Полагая  $r = x$ ,  $\varphi = 0$ , получим

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}.$$

При этом перемещения окрестности вершины исходной трещины определяются формулой:

$$v = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Положив  $\varphi = \pi$ ,  $r = \Delta - x$ , получим

$$v = \frac{4(1-\nu^2)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta} (\sigma_y \cdot v) dx &= \int_0^{\Delta} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} 4(1-\nu^2) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{\Delta-x}{2\pi}} dx = \frac{4K_{I_1}^2(1-\nu^2)}{2\pi E} \int_0^{\Delta} \sqrt{\frac{\Delta-x}{x}} dx = \\ &= \frac{4K_{I_1}^2(1-\nu^2)}{2\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\Delta - \Delta \sin^2 \varphi}{\Delta \sin^2 \varphi}} d\Delta \sin^2 \varphi = \frac{4K_{I_1}^2(1-\nu^2)}{2\pi E} \Delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi)}{\sin \varphi} 2 \sin \varphi \cos(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{4K_{I_1}^2(1-\nu^2)}{2\pi E} \Delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{K_{I_1}^2(1-\nu^2)}{E} \Delta. \end{aligned}$$

После интегрирования получим

$$G = 2\gamma = \frac{K_1^2(1-\nu^2)}{E}. \quad (12.1.2)$$

Величина  $G$  может использоваться в качестве критерия разрушения.

Таким образом, в качестве критерия разрушения трещины может служить коэффициент  $K_I$ .

Как следует из формулы (12.1.2), коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  и вязкость разрушения  $G$  связаны между собой простым соотношением при плоском деформированном состоянии:

$$G = \frac{K_1^2(1-\nu^2)}{E}, \quad (12.1.3)$$

и при плоском напряженном состоянии:

$$G = \frac{K_1^2}{E}. \quad (12.1.4)$$

Для трещин сдвига выражения для вязкости разрушения аналогичны приведенному.

Формулы (12.1.3), (12.1.4) показывают, что квадрат коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  непосредственно определяет выделение энергии деформации с ростом трещины.

Таким образом, приходим к двум эквивалентным формулировкам критерия разрушения. Трещина распространяется в том случае, если

1) интенсивность освобождающейся энергии  $G$  достигает критической величины  $G=G_c$ ;

2) коэффициент интенсивности напряжений  $K$  достигает критической величины  $K=K_c$ .

## 13. УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ

### 13.1. Квазихрупкое разрушение

Теория Гриффитса в её первоначальном виде не применима к пластичным материалам, поскольку у них макроскопически хрупкое разрушение обязательно сопровождается микропластическим деформированием. Материалы, обладающие пластичностью, но у которых макроскопическая картина разрушения носит в целом хрупкий характер, называют в механике разрушения квазихрупким.

У таких материалов, при развитии трещины зона микропластического деформирования сосредоточена в тонком слое у поверхности трещины в основном у её вершины. Вследствие наличия пластической зоны у вершины трещины неконтролируемому быстрому росту трещины предшествует ее медленное устойчивое развитие, наблюдаемое экспериментально.

Из рассмотренных в предыдущей главе решений упругих задач о распределении напряжений в окрестности вершины трещины следует, что в этой области напряжения сингулярны. На практике же материалы (в частности, металлы) обычно имеют предел текучести; при напряжениях выше этого предела материалы испытывают пластические деформации. На рис. 13.1 показано распределение напряжений в теле с трещиной

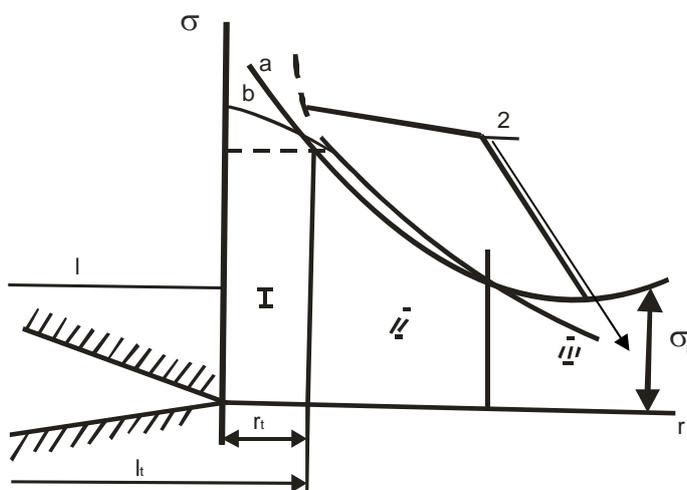


Рис. 13.1. Зона пластичности в теле с трещиной

Местные напряжения у вершины трещины согласно асимптотическому решению (кривая 1) и точному решению теории упругости (кривая 2) значительно превышают номинальные напряжения  $\sigma_T$ . Большинство материалов на основе металлов имеют сравнительно низкий предел текучести. Поэтому в вершине трещины возникают упругопластические деформации. В окрестности кончика трещины образуется более или менее развитая пластическая зона протяженностью  $r_T$ . Для этой зоны анализ напряженно-деформированного состояния непосредственно с помощью упругих решений типа полученных соотношений будет неправомерным (реальному распределению напряжений соответствует кривая 3; вследствие упрочнения напряжения у вершины трещины несколько выше предела текучести). Однако, если величина  $r_T$  не превышает 20% длины трещины, то данными формулами еще можно пользоваться. Необходимо только увеличить полудлину трещины на размер пластической зоны  $r_T$ .

### 13.2. Радиус пластической зоны в случае плоского напряженного состояния

Радиус пластической зоны оценим приближенно, приравняв выражение для  $\sigma_y$  при  $\varphi = 0$  к пределу текучести материала  $\sigma_T$ .

Для плоского напряженного состояния по асимптотическим формулам, тогда

$$\sigma_T = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}},$$

откуда

$$r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2.$$

И, при этом, условная полудлина трещины, с учетом поправки на пластичность, составит  $a + r$ .

Таким образом, для определения  $K_I$  и  $r$  получаем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_T} \right)^2, \\ K_I = \sigma \sqrt{\pi(l+r)}, \end{cases}$$

которую можно решать методом последовательных приближений по схеме:

$$\begin{aligned} K_0 &= \sigma \sqrt{\pi l}, \\ \begin{cases} r_k = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_k}{\sigma_T} \right)^2, \\ K_{k+1} = \sigma \sqrt{\pi(l+r_k)}, \end{cases} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока  $|r_k - r_{k+1}| > \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – допустимая ошибка.

### 13.3. Поперечный сдвиг

Радиус пластической зоны наиболее просто оценить приближенно, приравняв выражение для  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = K_{III} r^{\frac{1}{2}},$$

к пределу текучести материала  $\sigma_T$ .

Тогда

$$\sigma_T = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}.$$

В результате получаем систему для нахождения  $K_{III}$  и  $r$ :

$$r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{III}}{\sigma_T} \right)^2,$$

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}.$$

### 13.4. Плоская деформация

Даже в том случае, когда внутри пластины налицо условие возникновения плоской деформации, на поверхности ее всегда возникает плоское напряженное состояние. В направлении, перпендикулярном внешней поверхности, не действуют никакие напряжения, следовательно, на этой поверхности  $\sigma_z = \sigma_3 = 0$ . Если деформация внутренней части пластины происходит в основном в одной плоскости, то во внутренней ее части напряжение  $\sigma_3$  постепенно увеличивается от нуля (на поверхности пластины) до величины, определяемой плоским деформируемым состоянием. Таким образом, зона пластичности постепенно уменьшается от размера, определяемого плоским напряженным состоянием, до размера, соответствующего плоской деформации, как это схематически проиллюстрировано на рис. 13.2.

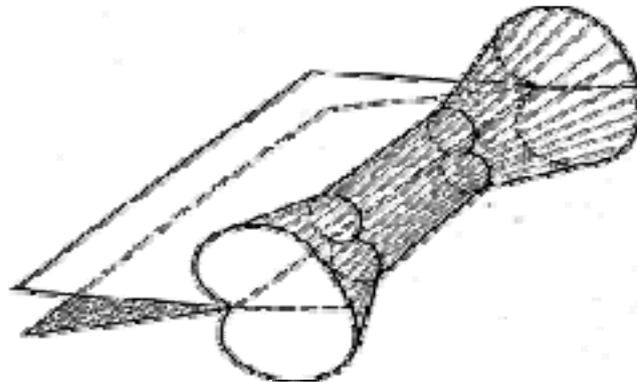


Рис. 13.2. Пространственное изображение зоны пластичности

В случае плоской деформации ориентировочно средний радиус зоны пластичности можно определить по формуле:

$$r = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_T} \right)^2.$$

### 13.5. Эллиптическая трещина

В случае эллиптической трещины коррекцию на зону пластичности производят, используя формулы:

$$\begin{aligned} c' &= c + r, \\ K_I &= \sigma \sqrt{\pi c'} \frac{1}{\Phi(c')}, \\ r &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_T} \right)^2, \end{aligned}$$

где

$$\Phi(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Корректировка учета близости свободной поверхности к фронту трещины производится с использованием формул:

$$\begin{aligned} c' &= c + r, \\ K_I &= 1,12 \sigma \sqrt{\pi c'} \cdot \frac{M}{\Phi}, \\ r &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_T} \right)^2, \end{aligned}$$

причем

$$M = \sqrt{\frac{2H}{\pi c'} \operatorname{tg} \frac{\pi c'}{2H}}.$$

## 14. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

### 14.1. Линии уровня напряжения для плоскости с круговым отверстием

Рассмотрим пластинку, подверженную одноосному растяжению величины  $\sigma$  в направлении оси  $Y$ . (Задача Кирша п. 6.3).

Построить линии уровня наибольшего главного напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma C_k,$$

где  $k = 1 \dots 4$ ,

$C_k$  – постоянные, значения взять из таблицы 14.1.

Указать область «нагрузки», «разгрузки», область «растяжения» и «сжатия»; оценить область пластического деформирования в предположении, что  $\sigma_T = 2.8\sigma$ . Исходные данные выбрать из табл. 14.1.

Таблица 14.1

1-ая цифра варианта	$\tilde{N}_1$	$\tilde{N}_2$	2-ая цифра варианта	$\tilde{N}_3$	$\tilde{N}_4$
0	1	1.7	0	0	-0.1
1	1	1.8	1	0	-0.15
2	1	2.1	2	0	-0.17
3	1	2.2	3	0	-0.19
4	1	2.3	4	0	-0.20
5	1	2.4	5	0	-0.25
6	1	2.5	6	0	-0.28
7	1	1.9	7	0	-0.30
8	1	2.0	8	0	-0.35
9	1	2.6	9	0	-0.4

## 14.2. Эпюра напряжений на контуре эллиптического отверстия

Рассматривается эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  (п. 8.4). На бесконечности действуют растягивающие усилия под углом  $\beta$  к оси  $OX$ .

Построить эпюру напряжений на контуре эллиптического отверстия. Найти коэффициент концентрации напряжений.

Исходные данные выбрать из табл. 14.2.

Таблица 14.2

1-ая цифра варианта	$a$ , мм	$b$ , мм	2-ая цифра варианта	$\beta$ , град
0	1	3	0	30
1	2	3	1	45
2	3	4	2	60
3	4	5	3	45
4	4	2	4	120
5	5	3	5	45
6	6	4	6	120
7	7	4	7	60
8	8	5	8	30
9	9	5	9	30

## 14.3. Прочность стеклянных нитей Гриффитса

Аппроксимировать экспериментальные данные Гриффитса (рис. 9.1) по методу наименьших квадратов, кривой вида

$$S(D) = a + bD^\alpha,$$

где  $a, b, \alpha$  – постоянные, подлежащие определению;

$D$  – диаметр нити;

$S(D)$  – разрушающая нагрузка.

Используя полученную эмпирическую формулу, оценить необходимую толщину шпагата, свитого из стеклянных нитей, выдерживающего суммарное проектное усилия на разрыв  $N$ . Расчет произвести для двух вариантов диаметров стеклянных нити  $D1$  и  $D2$ .

Предполагая, что причиной разрушения стекла являются внутренние трещины Снеддона, которые имеют круглую форму (диаметром  $2a$ ) и постоянный относительный размер ( $2a/D=const$ ), оценить относительный размер трещины в стекле. Поверхностную энергию на единицу площади образования трещины, принять  $\gamma = 0,56 \cdot 10^{-3}$  см·кГ/см<sup>2</sup> и модуль упругости стекла  $E = 65 \cdot 10^3$  Мпа.

Оценить, на сколько изменяться результаты, если исключить точку с номером  $N^*$ .

Исходные данные для задания приведены в табл. 14.3.

Таблица 14.3

1-ая цифра варианта	Диаметр нити $D1$ , мм	Диаметр нити $D2$ , мм	2-ая цифра варианта	Номер точки $N^*$	Проектное усилие $N$ , Н
0	0,012	0,12	0	1	1000
1	0,014	0,14	1	12	1200
2	0,015	0,15	2	3	1300
3	0,016	0,16	3	4	1400
4	0,017	0,17	4	13	1600
5	0,018	0,18	5	14	1700
6	0,019	0,19	6	15	1800
7	0,02	0,2	7	15	1900
8	0,021	0,21	8	17	2000
9	0,022	0,22	9	18	2100

#### 14.4. Линии уровня напряжения для трещины

Построить линии уровня наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$ , для трещины в условиях антиплоской деформации, из п. 8.2:

Построить линии уровня:

$$\sigma_1 = \tau C_k,$$

где  $C_k$  – постоянные, взятые из табл. 14.1;

$$k = 1 \dots 6.$$

Указать область «нагрузки», «разгрузки»; область «растяжения» и «сжатия»; оценить область пластического деформирования в предположении, что

$$\sigma_T = 2,8\tau.$$

#### 14.5. Трещина в условиях радиального натяга

На вал насажен диск с внешним радиусом  $b$  (рис.14.1). Диаметр внутреннего отверстия диска несколько меньше диаметра вала, радиус вала после насаживания диска равен  $a$ . За счет радиального натяга  $\Delta$  на поверхности соприкосновения создается некоторое давление  $P_k$ . По этим данным можно вычислить максимальное окружное напряжение на внутренней поверхности диска по формуле (6.3.1).

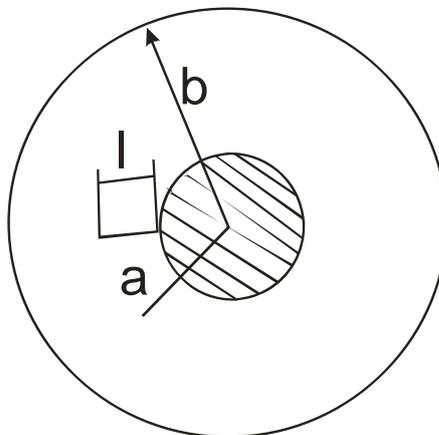


Рис. 14.1. Трещина в условиях радиального натяга

В диске имеется небольшая трещина длиной  $l$ , исходящая в радиальном направлении от внутренней поверхности ( $a/l = 10$ ). Коэффициент интенсивности напряжений в этом случае определяется по формуле:

$$K_1 = 1,12 \cdot \sigma_{\max} \cdot \sqrt{\pi l}.$$

При заданных значениях  $K_{1c}$ , длине трещины и отношении радиусов  $b/a$ , определить допустимую величину радиального натяга  $\Delta_C$ .

Полученную величину  $\Delta_C$  сравнить с

- величиной допустимого натяга  $\Delta_C^g$ , вычисленного по первой теории прочности Галилея (без учета наличия трещины),
- величиной натяга  $\Delta_C^T$ , вычисленной по третьей теорией прочности Кулона (без учета наличия трещины).

Данные взять из таблицы 14.4.

Таблица 14.4

1-ая цифра варианта	Сплав	$E \cdot 10^{-5}$ , Мпа	$\sigma_T$ , МПа	$\sigma_b$ , МПа	$K_{1c}$ , Мпа $\sqrt{м}$	$b/a$	2-ая цифра варианта	$l \cdot 10^3$ , м
0	Ст.20	2,11	280	470	99	2,6	0	0,5
1	З3ХЗСНВФНА	2,20	1500	1800	52	2,5	1	0,6
2	12Х2МФА	2,05	550	630	213	3,0	2	0,7
3	АК4-1Т1	0,75	330	430	108	3,5	3	0,8
4	АК6	0,71	440	540	38	4,0	4	0,9
5	ВТ-20	0,90	970	1020	40	1,5	5	1,0
6	ВТ-9	0,92	1050	1110	81	5,0	6	1,1
7	Д16Т1	0,72	350	500	42	5,5	7	1,2
8	В96	0,75	490	610	31	6,0	8	1,3
9	АМг6	0,70	150	310	28	6,5	9	1,4

## 14.6. Прочность вращающегося с диска

На внутренней поверхности диска, вращающегося с большой частотой, имеется радиальная трещина длиной  $l$ . Максимальное окружное напряжение на внутренней поверхности диска можно определить по формулам п. 6.4. Если трещина мала по сравнению с радиусом отверстия, то коэффициент интенсивности напряжений оценивается по зависимости (6. 1).

Необходимо сравнить критическое число оборотов  $n_C$ :

- 1) по первой теории прочности Галилея (без учета наличия трещины);
- 2) по теории разрушения Гриффитса.

Исходные данные выбрать из табл. 14.5.

Таблица 14.5

1-ая цифра варианта	Сплав	$\gamma$ , кг/см <sup>3</sup>	Коэффициент Пуассона $\nu$	$b/a$	$a/l$	2-ая цифра варианта	$l \cdot 10^3$ , м
0	Ст.20	7,85	0,30	3,0	10	0	1,5
1	АК4-1Т1	2,55	0,34	4,0	20	1	2,0
2	АК6	2,60	0,32	4,5	15	2	3,0
3	Д16Т1	2,70	0,30	5,0	10	3	4,0
4	12Х2МФА	7,80	0,28	5,5	20	4	4,5
5	ВТ-9	5,50	0,34	6,0	10	5	5,0
6	АМг6	2,50	0,34	6,5	15	6	5,5
7	ВТ-20	5,60	0,33	7,0	15	7	6,0
8	В96	2,70	0,31	7,5	10	8	6,5
9	АК6	2,60	0,32	8,0	10	9	7,0

## 14.7. Запас прочности цилиндрического сосуда

Определить запас прочности для цилиндрического сосуда, нагруженного, при комнатной температуре, внутренним давлением  $P$ . Наружный диаметр сосуда  $D$ , толщина стенки  $H$ . Сосуд изготовлен из сплава с известными  $\sigma_T$ ,  $K_{Ic}$ . При дефектоскопическом контроле на внутренней поверхности сосуда была обнаружена полуэллиптическая трещина глубиной  $l$  и протяженностью вдоль образующей  $2a$  (рис. 14.2). Исходные данные приведены в таблице 14.6.

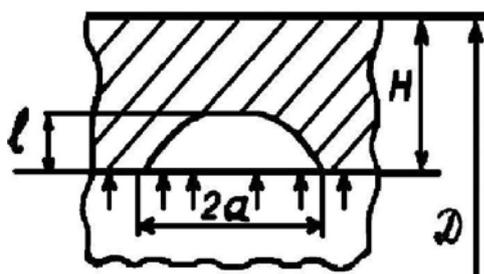


Рис. 14.2. Полуэллиптическая трещина

Таблица 14.6

1-ая цифра варианта	Сплав	$P$ МПа	$D$ м	$H$ мм	$2a$ мм	2-ая цифра варианта	$l \cdot 10^3$ м
0	Ст.20	20	0,48	8,5	8,5	0	2
1	ЗЗХЗСНВФН А	28	0,48	8,5	8,5	1	3
2	12Х2МФА	20	0,60	9,0	8,5	2	4
3	АК4-1Т1	15	0,60	9,6	7,5	3	2
4	АК-6	15	0,48	8,5	8,5	4	3
5	ВТ-20	20	0,70	10,0	8,0	5	3
6	ВТ-9	20	0,48	8,5	8,5	6	2
7	Д16Т1	15	0,50	8,5	7,0	7	4
8	В96	15	0,50	8,5	6,5	8	3
9	АМгб	15	0,50	8,5	6,0	9	2

## 14.8. Пример расчета по заданию 14.7

Дано:

$$P = 28,3 \text{ МПа}, D = 0,48 \text{ м}, H = 0,0085 \text{ м}, \sigma_T = 1000 \text{ МПа}, \\ \sigma_b = 1200 \text{ МПа}, K_{1C} = 70 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}, l = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}, 2a = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

### Порядок расчета

Напряжения в стенке сосуда определим по формуле:

$$\sigma = \sigma_\varphi = \frac{D p_a}{2H} = \frac{28,3 \cdot 0,48}{2 \cdot 8,5 \cdot 10^{-3}} = 799 \text{ МПа}.$$

Для рассматриваемой трещины в сосуде:

$$K_1 = \hat{E} = 1,12 \sigma_c \sqrt{\pi l} \cdot \frac{\dot{I}}{\Phi},$$

где  $\sigma$  – напряжения растягивающие трещину;

$l$  – глубина трещины;

$M$  и  $\Phi$  – поправочные функции (11.5.1).

Вначале полагаем, что

$$r = 0 \text{ и } l' = l.$$

1.1. Вычисляем поправочные функции:

$$M = \sqrt{\frac{2H}{\pi l'} \operatorname{tg} \frac{\pi l'}{2H}} = 1,06,$$

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{a^2 - l'^2}{a^2} \sin^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt = 1,35.$$

1.2. Вычисляем коэффициент интенсивности:

$$K = 1,12 \sigma \sqrt{\pi l'} \cdot \frac{M}{\Phi} = 68.$$

1.3. Вычислим поправку Ирвина на пластичность:

$$r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_T} \right)^2 = 2,6 \cdot 10^{-4}.$$

1.4. Вычисляем измененную длину трещины:

$$l' = l + r = 3,2 \cdot 10^{-3}$$

Повторяем вычисления 1.1 - 1.4 для измененных значений  $l'$  до тех пор, пока значение  $K$  не будут существенно изменяться.

Последовательно получаем

$$K = 68,0; 71,8; 72,2; 72,3 \dots$$

Ограничимся третьим приближением  $K = 72$ .

Сравнивая  $K = 72$  с предельным  $K_{1C} = 70 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$ , получаем, коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{K_{1C}}{K} = \frac{70 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}}{71} < 1,$$

следовательно, эксплуатация сосуда недопустима.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нотт, Дж.Ф. Основы механики разрушения / Дж.Ф. Нотт. - Москва: Металлургия, 1978. - 256 с.
2. Партон, В.З. Механика разрушения. / В.З. Партон. - Москва: Физматлит, 1990. - 239 с.
3. Броек, Д. Основы механики разрушения: Пер. с англ. / Д. Броек. - Москва: Высшая школа, 1980. - 368 с.
4. Васильев, Д.В. Основы механики разрушения. Методические указания к самостоятельной работе студентов по решению задач. Варианты заданий расчетно-проектировочных работ. / Д.В. Васильев, С.П. Евстратова, Л.В. Агамиров. - Москва: ИТЦ "МАТИ"-РГТУ. - 50 с.