УДК 517.956

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ГРИБКОВА В. П.,
канд. техн. наук, доц. КОЗЛОВ С. М.

Белорусский национальный технический университет

E-mail: v.gribkova@gmail.com

Предлагается новый метод приближенного решения одного вида сингулярных интегральных уравнений теории упругости, которые рассматривались ранее другими авторами. Приближенное решение отыскивается в виде асимптотического многочлена невысокой степени (первое приближение), основанного на полиномах Чебышева второго рода. Другие авторы получали решение методом механических квадратур (только в отдельных точках) и хотя использовали также полиномы Чебышева второго рода, однако применяли другую систему узлов, на которых строили нужные формулы.

Предлагаемый метод позволяет не только найти приближенное решение для всего промежутка в виде многочлена, но и вслед за приближенным решением получить остаточный член в виде разложения в бесконечный ряд, коэффициентами которого являются линейные функционалы заданного интегрального уравнения, а базисными функциями – полиномы Чебышева второго рода. Такое представление остаточного члена первого приближения позволяет найти слагаемое бесконечного ряда, начиная с которого будет выполняться заданная точность искомого решения. Этот номер является степенью асимптотического многочлена (второе приближение), который и будет с заданной точностью давать приближение к точному решению. Рассматриваемые многочлены асимптотически стремятся к полиному наилучшего равномерного приближения в пространстве *C*, построенному для данного оператора.

Показана сходимость приближенного решения к точному и дана оценка погрешности. Предлагаемый алгоритм получения приближенного решения и оценки погрешности хорошо реализуется с помощью вычислительной техники и не требует большой предварительной подготовки при составлении программы.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, теория упругости, асимптотический многочлен.

Библиогр.: 10 назв.

SOLUTION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATION FOR ELASTICITY THEORY WITH THE HELP OF ASYMPTOTIC POLYNOMIAL FUNCTION

GRIBKOVA V. P., KOZLOV S. M.

Belarusian National Technical University

The paper offers a new method for approximate solution of one type of singular integral equations for elasticity theory which have been studied by other authors. The approximate solution is found in the form of asymptotic polynomial function of a low degree (first approximation) based on the Chebyshev second order polynomial. Other authors have obtained a solution (only in separate points) using a method of mechanical quadrature and though they used also the Chebyshev polynomial of the second order they applied another system of junctures which were used for the creation of the required formulas.

The suggested method allows not only to find an approximate solution for the whole interval in the form of polynomial, but it also makes it possible to obtain a remainder term in the form of infinite expansion where coefficients are linear functional of the given integral equation and basis functions are the Chebyshev polynomial of the second order. Such presentation of the remainder term of the first approximation permits to find a summand of the infinite series, which will serve as a start for fulfilling the given solution accuracy. This number is a degree of the asymptotic polynomial (second approximation), which will give the approximation to the exact solution with the given accuracy. The examined polynomial functions tend asymptotically to the polynomial of the best uniform approximation in the space *C*, created for the given operator.

The paper demonstrates a convergence of the approximate solution to the exact one and provides an error estimation. The proposed algorithm for obtaining of the approximate solution and error estimation is easily realized with the help of computing technique and does not require considerable preliminary preparation during programming.

Keywords: singular integral equation, elasticity theory, asymptotic polynomial.

Ref.: 10 titles.

Приближенное решение. В статье рассматривается решение сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,t)\varphi(t)dt=f(x),\quad x\in[-1,1]. \qquad (1)$$

Решение ограничено на обоих концах $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$ и может быть представлено в виде $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\varphi_0(x)$. Такие интегральные уравнения используются в теории упругости. В [1, 2] приближенное решение было получено методом механических квадратур. В рассматриваемом случае приближенное решение предлагается получать в пространстве C с нормой $\| f \| = \max_{-1\le x\le 1} | f(x) |$ в виде асимптотических многочленов.

Используемые в дальнейшем полиномы Чебышева второго рода имеют вид $U_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in[-1,1]$, или, при замене переменной $x=\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, выполняется равенство $U_n(\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

Представим асимптотический многочлен через полиномы Чебышева:

$$\varphi_0(x) \approx G_n^{\bar{\varphi}_0}(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m^{\bar{\varphi}_0} U_m(x);$$

$$a_m^{\bar{\varphi}_0} = \frac{2}{n+3}\sum_{j=1}^{n+2}\bar{\varphi}_0(x_j)(1-x_j^2)U(x_j), \quad m=\overline{0,n};$$

$$x_j = \cos\frac{j\pi}{n+3}, \quad j=\overline{1,n+2}, \tag{2}$$

где $a_m^{\bar{\varphi}_0}$ – коэффициент, который нужно определить; $\bar{\varphi}_0(x_j)$ – ордината приближенного решения в отличие от ординаты точного решения $\varphi_0(x_j)$.

В рассматриваемом случае удобнее будет определять приближенное решение в виде интерполяционного многочлена $\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x)$ [3] (черта сверху ставится, чтобы отличать его от асимптотического многочлена той же степени). Он связан с многочленом $G_n^{\bar{\varphi}_0}(x)$ следующим образом:

$$\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x) = G_n^{\bar{\varphi}_0}(x) + M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}U_{n+1}(x);$$

$$M_{nn}^{\bar{\varphi}_0} = \frac{2}{n+3}\sum_{j=1}^{n+2}(-1)^j\bar{\varphi}(x_j)(1-x_j^2), \tag{3}$$

где $M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}$ – линейный функционал функции $\bar{\varphi}_0(x_j)$.

В узловых точках x_j выполняется равенство

$$\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x_j) = G_n^{\bar{\varphi}_0}(x_j) + (-1)^j\nu M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}.$$

То есть асимптотический многочлен (2) отличается от интерполяционного (3) в узловых точках на величину линейного функционала $M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}$ с попеременной сменой знака. Постоянная равна $\nu=-1$, либо $\nu=1$. В дальнейшем для простоты примем $\nu=1$. Интерполяционный многочлен можно представить в виде $\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x)=\sum_{m=0}^{n+1}a_m^{\bar{\varphi}_0}U_m(x)$, полагая в качестве старшего коэффициента линейный функционал, т. е. $a_{n+1}=M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}$. Первый индекс внизу у линейного функционала означает степень многочлена $G_n^{\bar{\varphi}_0}(x)$, так как он зависит от этого многочлена, второй – номер линейного функционала в последовательности $\left\{M_{nr}^{\bar{x}}\right\}_{r=n}^{\infty}$, которая в дальнейшем будет использоваться для оценки погрешности.

Подставим приближенное решение вида (3) в рассматриваемое операторное уравнение (1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)}{t-x}dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\overline{G}_{n+1}^{K}((x),\,t)\sqrt{1-t^2}\,\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)dt = \overline{G}_{n+1}^{f}(x). \tag{4}$$

Двойные скобки у переменной x ядра $\overline{G}_{n+1}^{K}((x),\,t)$ означают, что по этой переменной происходит приближение. Соответствующие интерполяционные многочлены выражаются через полиномы Чебышева второго рода следующим образом:

$$\overline{G}_{n+1}^{K}((x),\,t) = \sum_{m=0}^{n+1}a_m^K(t)U_m(x), \tag{5}$$

$$m=\overline{0,\,n}, \quad a_m^K(t) = \frac{2}{n+3}\sum_{j=1}^{n+2}K(x_j,\,t)(1-x_j^2)U_m(x_j);$$

$$m=n+1, \quad a_{n+1}^K(t) = M_{nn}^K(t) =$$

$$= \frac{2}{n+3}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j(1-x_j^2)K(x_j,\,t);$$

$$\overline{G}^{f}_{n+1}(x)=\sum_{m=0}^{n+1}a_m^f U_m(x); \qquad (6)$$

$$m=\overline{0,\ n},\ a_m^f=\sum_{j=1}^{n+2}f(x_j)(1-x_j^2)U(x_j);$$

$$m=n+1,\quad a_{n+1}^f=M_n^f=\sum_{j=1}^{n+2}(-1)^j f(x_j)(1-x_j^2).$$

Для вычисления первого слагаемого равенства (4) применим известное соотношение [2]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}U_m(t)}{t-x}dt=-T_{m+1}(x). \qquad (7)$$

Тогда, (4) можно выразить явно через коэффициенты многочленов

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n+1}a_m^{\bar{\varphi}_0}T_{m+1}(x)+\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n+1}U_m(x)\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}a_m^K(t)\sqrt{1-t^2}\sum_{i=0}^{n+1}a_i^{\bar{\varphi}_0}U_i(t)dt=$$
$$=\sum_{m=0}^{n+1}a_m^f U_m(x). \qquad (8)$$

Если использовать обозначения

$$a_{mi}^K=\int_{-1}^{1}a_m^K(t)\sqrt{1-t^2}U_i(t)dt,$$

то (8) преобразуется к виду

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n+1}a_m^{\bar{\varphi}_0}T_{m+1}(x)+\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n+1}U_m(x)\sum_{i=0}^{n+1}a_{m\,i}^K a_i^{\bar{\varphi}_0}=$$
$$=\sum_{m=0}^{n+1}a_m^f U_m(x).$$

Вычисляя это равенство в точках $x_j=\cos\dfrac{j\pi}{n+3}$, $j=\overline{1,\ n+2}$, получим систему $n+2$ уравнений с $n+2$ неизвестными $a_m^{\bar{\varphi}_0}$, $m=\overline{0,\ n+1}$ (во втором слагаемом поменяем порядок суммирования):

$$\sum_{m=0}^{n+1}a_m^{\bar{\varphi}_0}\Bigg(-\frac{1}{2}T_{m+1}(x_j)+\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n+1}U_i(x_j)\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}a_i^K(t)\sqrt{1-t^2}U_m(t)dt\Bigg)=\sum_{m=0}^{n+1}a_m^f U_m(x_j),$$

или

$$\sum_{m=0}^{n+1}a_m^{\bar{\varphi}_0}\left(-\frac{1}{2}T_{m+1}(x_j)+\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n+1}U_i(x_j)a_{im}^K\right)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n+1}a_m^f U_m(x_j),\ \ j=\overline{1,\ n+2}. \qquad (9)$$

После определения коэффициентов $a_m^{\bar{\varphi}_0}$, $m=\overline{0,\ n+1}$ из (9) решение может быть записано в виде (2). Решение системы уравнений можно найти методом последовательных приближений. Существование и единственность ее решения следует из результатов [4], как для одного из проекционных методов.

Доказательство сходимости приближенного решения к точному решению. Рассмотрим условия, при которых приближенное решение будет сходиться к точному.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $K(x,\ t)$ по переменной x имеют производные порядка p, а искомая функция $\varphi(x)$ – производную порядка $p-1$, принадлежащую классу Lip α. Тогда приближенное решение уравнения (1) вида $\sqrt{1-t^2}G_n^{\bar{\varphi}_0}(x)$ равномерно стремится к точному решению $\varphi(x)$ при $n\to\infty$, если выполняются условия $p\geq 2$, $0<\alpha<1$.

Докажем это утверждение.

На основании результатов конструктивной теории функций [5] для функции $\varphi_0(x)$ существует полином наилучшего равномерного приближения $P_n^{\varphi_0}(x)$ с величиной наибольшего уклонения $E_n^{\varphi_0}$.

Составим разность между точным решением уравнения (1) и приближенным (3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)\varphi(t)dt-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\overline{G}_{n+1}^{K}((x)t)\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}dt=f(x)-G_{n+1}^f(x). \ (10)$$

Преобразуем (10), используя полином $P_n^{\varphi_0}(x)$, следующим образом:

$$\varphi(x)-G_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x)\sqrt{1-x^2}=\left(\varphi(x)-P_n^{\varphi_0}(x)\sqrt{1-x^2}\right)+$$
$$+\left(P_n^{\varphi_0}(x)-G_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x)\right)\sqrt{1-x^2},$$

тогда выражение (10) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)-P_n^{\varphi_0}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}\frac{P_n^{\varphi_0}(t)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)}{t-x}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)\left(\varphi(t)-P_n^{\varphi_0}(t)\sqrt{1-t^2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)\left(P_n^{\varphi_0}(t)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)\right)\sqrt{1-t^2}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(K(x,t)-\overline{G}_{n+1}^{K}((x)t)\right)\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)dt=$$

$$=f(x)-G_{n+1}^{f}(x).$$

Введем функцию $I_{n+1}(x)$. Выделим в ней слагаемые, зависящие от разности $\varphi(t)-P_n^{\varphi_0}(t)\sqrt{1-t^2}$, и все остальные, не зависящие от нее:

$$I_{n+1}(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)-P_n^{\varphi_0}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)(\varphi(t)-P_n^{\varphi_0}(t)\sqrt{1-t^2})dt\right)+$$

$$+\left(\int_{-1}^{1}\frac{(P_n^{\varphi_0}(t)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)(P_n^{\varphi_0}(t)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}dt\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(K(x,\ t)-\overline{G}_{n+1}^{K}((x)t))\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}dt-(f(x)-G_{n+1}^{f}(x))\right)=I_{n+1}^{(1)}(x)+I_{n+1}^{(2)}(x)+I_{n+1}^{(3)}(x). \tag{11}$$

Получим оценки для каждого из слагаемых.

Для первого слагаемого $I_{n+1}^{(1)}(x)$:

$$I_{n+1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(\varphi_0(t)-P_n^{\varphi_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)(\varphi_0(t)-P_n^{\varphi_0}(t))\sqrt{1-t^2}dt;$$

$$\|I_{n+1}\|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left|\frac{(\varphi_0(t)-P_n^{\varphi_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}\right|dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|K(x,\ t)(\varphi_0(t)-P_n^{\varphi_0}(t))\sqrt{1-t^2}|dt\le\frac{1}{2}E_n^{\varphi_0}\left(1+\frac{1}{\pi}\overline{K}\right), \tag{12}$$

так как выполняется условие

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left|\frac{(\varphi_0(t)-P_n^{\varphi_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}\right|dt\le\frac{E_n^{\varphi_0}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left|\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\right|dt\le\frac{E_n^{\varphi_0}}{2\pi}\pi=\frac{1}{2}E_n^{\varphi_0},$$

где величина $\overline{K}$ – верхняя грань ядра $\overline{K}=\max\limits_{-1\le x\le 1}\int_{-1}^{1}|K(t,\ x)|\,dt.$

Для второго слагаемого $I_{n+1}^{(2)}(x)$

$$I_{n+1}^{(2)}(x)=\int_{-1}^{1}\frac{(P_n^{\varphi_0}(t)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)(P_n^{\varphi_0}(t)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}dt$$

можно получить оценку при следующих условиях. Интерполяционный многочлен $\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x)$ – точное решение для всех многочленов степени $\le n.$ Тогда он является точным решением для $P_n^{\varphi_0}(x)$. Разность между ними может быть записана в виде

$$P_n^{\varphi_0}(x)-\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(x)=P_n^{\varphi_0}(x)-G_n^{\bar{\varphi}_0}(x)-M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}U_{n+1}(x).$$

Вычислим асимптотический многочлен для полинома наилучшего равномерного приближения:

$$P_n^{\varphi_0}(x)=\sum_{m=0}^{n}a_m^P U_m(x);$$

$$m=\overline{0,\ n},\ \ a_m^P=\sum_{j=1}^{n+2}P(x_j)(1-x_j^2)U_m(x_j);$$

$$a_{n+1}^P=M_n^P=\frac{2}{n+3}\sum_{j=1}^{n+2}(-1)^j P_n(x_j)(1-x_j^2).$$

Тогда функцию $I_{n+1}^{(2)}(x)$ можно представить следующим образом:

$$I_{n+1}^{(2)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\left(\frac{2}{n+3}\sum_{m=0}^{n+1}U_m(t)\sum_{j=1}^{n+2}(P_n^{\varphi_0}(t_j)-G_n^{\bar{\varphi}_0}(t_j)\right)(1-t_j^2)U_n(x_j)dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}U_{n+1}(t)dt.$$

Применив преобразование (7), получим

$$I_{n+1}^{(2)}(x)=-\frac{1}{n+3}\sum_{m=0}^{n}T_{m+1}(x)\sum_{j=1}^{n+2}U_m(t_j)(1-t_j^2)(P_n^{\varphi_0}(t_j)-G_n^{\bar{\varphi}_0}(t_j))+\frac{1}{2}M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}T_{n+2}(x).$$

Оценка для него

$$\|I_{n+1}^{(2)}\|\le E_n^{\varphi_0}\frac{1}{n+3}\sum_{m=0}^{n}\|T_{m+1}\|\sum_{j=1}^{n+2}|U_m(t_j)|(1-t_j^2)+\frac{1}{2}M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}\|T_{m+2}\|\le E_n^{\varphi_0}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+3)}+1/2\right)\le E_n^{\varphi_0}\frac{(n+2)}{2},\quad (13)$$

так как имеют место равенства $\|T_m\|=\max\limits_{-1\le x\le 1}|T_m(x)|=1,\ \|U_m\|=\max\limits_{-1\le x\le 1}|U_m(x)|=m+1.$ Для третьего слагаемого $I_{n+1}^{(3)}(x)$ справедливо вычисление сумм через последовательности линейных функционалов $\left\{M_{nr}^{\bar{x}}\right\}_{r=n}^{\infty}$ и $\left\{M_r^f\right\}_{r=n}^{\infty}$ [3, 6]:

$$I_{n+1}^{(3)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(K(x,\ t)-\overline{G}_{n+1}^{K}((x),\ t))\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}}(t)dt-(f(x)-G_{n+1}^{f}(x))=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2}{n+3}\sum_{m=0}^{n+1}U_m(x)\sum_{j=1}^{n+2}(K(x_j,\ t)-\overline{G}_{n+1}^{K}((x_j),\ t))(1-x_j^2)U_m(x_j)\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}}(t)dt-\sum_{r=n+1}^{\infty}M_r^f\chi_{r+2}^{(n)}(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{r=n+1}^{\infty}M_{nr}^{K}(t)\chi_{r+2}^{(n)}(x)\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}}(t)dt-\sum_{r=n+1}^{\infty}M_r^f\chi_{r+2}^{(n)}(x);$$

$$I_{n+1}^{(3)}(x)=\sum_{r=n+1}^{\infty}\chi_{r+2}^{(n)}(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}M_{nr}^{K}(t)\overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}}(t)dt-M_r^f\right).\quad (14)$$

Способы вычисления функций $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$ приведены в [3, 6]. Они выражаются через полиномы Чебышева второго рода. В [3, 6] доказано равномерное стремление к нулю бесконечной суммы (14) во всех случаях, когда функции $f(x)$ и $K(x,\ t)$ по переменной x имеют производные порядка $p\ge 2,$ принадлежащие классу Lip α, где $0<\alpha<1$ для всех значений x, включая концы. Известно также, что выполняются неравенства:

$$M_n^f\le E_n^x;\quad \int_{-1}^{1}M_{nn}^{K}(t)dt\le E_n^x.\quad (15)$$

Тогда для функции $I_{n+1}(x)$ имеет место оценка

$$\|I_{n+1}\|\le\|I_{n+1}^{(1)}\|+\|I_{n+1}^{(2)}\|+\|I_{n+1}^{(3)}\|,$$

или

$$\| I_{n+1} \| \le \frac{1}{2} E_n^{\varphi_0} (1 + \frac{1}{\pi} \overline{K}) + E_n^{\varphi_0} \frac{(n+2)}{2} + \| I_{n+1}^{(3)} \|. \quad (16)$$

Для наибольшего уклонения E_n^x выполняется неравенство [5] $E_n^x \le \frac{c^x}{n^{p+\alpha}}$ для всех функций, производная которых порядка $p \ge 0$ принадлежит классу Lip α $(0<\alpha<1)$. Откуда следует, что для стремления к нулю выражения (14) необходимо, чтобы функция $\varphi_0(x)$ имела первую производную, принадлежащую классу Lip α при $0<\alpha<1$.

Таким образом, для сходимости приближенного решения $G_n^{\overline{\varphi}_0}(x)$ к точному $\varphi_0(x)$, а также $\sqrt{1-x^2}G_n^{\overline{\varphi}_0}(x)$ к $\varphi(x)$, должны выполняться условия: функции $f(x)$ и $K(x,\ t)$ по переменной x имеют производные порядка p, а искомая функция – порядка p – 1, принадлежащие классу Lip α, где $p \ge 2$ и $0<\alpha<1$. Теорема доказана.

Оценка погрешности. Введем функцию $R_{n+1}(x)$ и представим разность (10) в виде

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} K(x,\ t)(\varphi(t) - \overline{G}_{n+1}^{\overline{\varphi}}(t))dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t) - \overline{G}_{n+1}^{\overline{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} (K(x,t) - \overline{G}_{n+1}^{K}((x),t))\sqrt{1-t^2}\,\overline{G}_{n+1}^{\overline{\varphi}_0}(t)dt +$$

$$+(f(x) - \overline{G}_{n+1}^{f}(x)). \quad (17)$$

Учитывая, что для асимптотического (2) и интерполяционного (3) многочленов выполняется условие (4), выделим в каждом слагаемом (17) соответствующие члены с линейными функционалами и выразим остаточный член через асимптотический многочлен

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} K(x,\ t)(\varphi_0(t) - G_n^{\overline{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} K(x,t) M_{nn}^{\overline{\varphi}_0} U_{n+1}(t)dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(\varphi_0(t) - G_n^{\overline{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{M_{nn}^{\overline{\varphi}_0} U_{n+1}(t)}{t-x}dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} (K(x,t) - G_n^{K}((x),t)) G_n^{\overline{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} M_n^K(t) G_n^{\overline{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}dt +$$

$$+(f(x) - G_n^f(x)) + M_n^f U_{n+1}(x).$$

Введем остаточный член более низкого порядка $R_n(x)$

$$R_{n+1}(x) = R_n(x) + \frac{M_{nn}^{\overline{\varphi}_0}}{2\pi}\int_{-1}^{1} K(x,\ t) U_{n+1}(t)\sqrt{1-t^2}dt.$$

Тогда будет иметь место равенство

$$R_n(x) = -\frac{M_{nn}^{\overline{\varphi}_0}}{2\pi}\int_{-1}^{1} K(x,\ t) U_{n+1}(t)\sqrt{1-t^2}dt - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(\varphi_0(t) - G_n^{\overline{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{M_{nn}^{\overline{\varphi}_0} U_{n+1}(t)}{t-x}dt \right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} (K(x,\ t) - G_n^{K}((x),t)) G_n^{\overline{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} M_n^K(t) G_n^{\overline{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}dt \right) +$$

$$+\left(f(x) - G_n^f(x) + M_n^f U_{n+1}(x) \right). \quad (18)$$

Далее можно оценивать разность между точным решением и асимптотическим многочленом следующим образом. Второе слагаемое правой части (18) приводится к виду

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(\varphi_0(t)-G_n^{\bar{\varphi}_0}(t))\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt=\frac{1}{2}\sum_{r=n}^{\infty}M_{nr}^{\bar{\varphi}_0}\tilde{\chi}_{r+2}^{(n)}(x), \tag{19}$$

где функция $\tilde{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)$ получена с помощью преобразования (7) над функцией $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$. Функцию $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$ можно представить [3]

$$\chi_{r+2}^{(n)}(x)=\sum_{m=n(2)}^{\infty}b_{rm}h_{m+2}^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n}b_{r,r+2i}h_{r+2i}^{(n)}(x), \tag{20}$$

где b_{rm} – элементы r строки матрицы B [6]

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\dots\\0&1&0&0&\dots\\1&0&1&0&\dots\\0&1&0&1&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{bmatrix};\quad h_{m+2}^{(n)}(x)=\begin{cases}U_{m+1}(x),\ \text{если}\ m+2=\begin{cases}(2\lambda+1)(n+3);\\2\lambda(n+3);\\(2\lambda(n+3)\pm(n+2);\end{cases}\\U_{m+1}(x)\pm U_{j-1}(x),\ \text{если}\ m+2=2\lambda(n+3)\pm j;\\\qquad 1\le j\le n+1.\end{cases} \tag{21}$$

Вид матрицы B говорит о том, что номера r и m одинаковой четности, и для нечетных номеров сумма (20) вычисляется только для слагаемых с нечетными номерами, а для четных – только для слагаемых с четными номерами m, т. е. номер m меняется через две единицы. Элементы матрицы B вычисляются через функцию Мёбиуса (более подробно дано в [6, 7]).

Функция $\tilde{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)$ будет иметь вид

$$\tilde{\chi}_{r+2}^{(n)}(t)=\pi\sum_{m=n(2)}^{\infty}b_{rm}\tilde{h}_{m+2}^{(n)}(x)=\pi\sum_{i=1}^{n}b_{r,r+2i}\tilde{h}_{r+2i}^{(n)}(x),$$

где

$$\tilde{h}_{m+2}^{(n)}(x)=\begin{cases}-\pi T_{m+2}(x),\ \text{если}\ m+2=\begin{cases}(2\lambda+1)(n+3);\\2\lambda(n+3);\\(2\lambda(n+3)\pm(n+2);\end{cases}\\-\pi(T_{m+2}(x)\pm T_j(x)),\ \text{если}\ m+2=2\lambda(n+3)\pm j;\\\qquad 1\le j\le n+1.\end{cases} \tag{22}$$

Норма функции $\tilde{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)$ с учетом того, что $\|T_n\|\le 1$ и $\|\tilde{h}_{m+2}^{(n)}\|\le 2\pi,$ и (22), будет

$$\|\tilde{\chi}_{r+2}^{(n)}\|\le\pi\frac{r+2-n}{2}2\le\pi(r+2).$$

Тогда для выражения (19) будет иметь место неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)-G_n^{\bar{\varphi}_0}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt\right|\le\frac{1}{2}\sum_{r=n}^{\infty}|M_{nr}^{\bar{\varphi}_0}|(r+2). \tag{23}$$

Третье слагаемое (18) представляет собой функцию $I_{n+1}^{(3)}(x),$ для которой выполняется равенство (14), откуда следует оценка вида

$$\| I_{n+1}^{(3)} \| \le \sum_{r=n+1}^{\infty} \| \chi_{r+2}^{(n)} \| \left(\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-1}^{1} M_{nr}^{K}(t) \overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t) \sqrt{1-t^2}\, dt \right| + | M_r^f | \right).$$

Учитывая оценки для $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$

$$\| \chi_{r+2}^{(n)} \| = \left| \sum_{i=1}^{n} b_{r,r+2i} h_{r+2i}^{(n)}(x) \right| \le \sum_{i=1}^{n} (r+1+2i) = \frac{r+1+2+r+1+2n}{2} \cdot \frac{r+2-n}{2} = \frac{(r+2)^2-n^2}{2},$$

в итоге получим неравенство

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} K(x,\ t)(\varphi(t) - G_n^{\bar{\varphi}}(t))dt \right| \le \frac{| M_{nn}^{\bar{\varphi}_0} |}{2\pi} \int_{-1}^{1} | K(x,\ t) U_{n+1}(t) \sqrt{1-t^2} \,|\, dt + \frac{1}{2} \sum_{r=n}^{\infty} | M_{nr}^{\bar{\varphi}_0} | (r+2) +$$

$$+ \sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} | M_{nr}^{K}(t) G_n^{\bar{\varphi}}(t) |\, dt + | M_r^f | \right) \left(\frac{(r+2)^2 - n^2}{2} \right).$$

Полагая, что существует нижняя грань ядра $\min\limits_{-1 \le x \le 1} \int_{-1}^{1} | K(x,\ t) |\, dt = \underline{K}$, можно записать:

$$\frac{\underline{K}}{2\pi} \| \varphi_0 - \overline{G}_n^{\bar{\varphi}_0} \| \le \frac{| M_{nn}^{\bar{\varphi}_0} |}{2\pi} \overline{K}(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{r=n}^{\infty} | M_{nr}^{\bar{\varphi}_0} | (r+2) +$$

$$+ \sum_{r=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} | M_{nr}^{K}(t) G_n^{\bar{\varphi}_0}(t) \sqrt{1-t^2} \,|\, dt + | M_r^f | \right) \left(\frac{(r+2)^2 - n^2}{2} \right),$$

или

$$\| \varphi_0 - G_n^{\bar{\varphi}_0} \| \le \frac{2\pi}{\underline{K}} \| R_n \|, \tag{24}$$

где

$$R_n(x) = -\frac{M_{nn}^{\bar{\varphi}_0}}{2\pi} \int_{-1}^{1} K(x,\ t) U_{n+1}(t) \sqrt{1-t^2}\, dt - \frac{1}{2} \sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\bar{\varphi}_0} \tilde{\chi}_{r+2}^{(n)}(x) +$$

$$+ \sum_{r=n}^{\infty} \chi_{r+2}^{(n)}(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} M_{nr}^{K}(t) \overline{G}_{n+1}^{\bar{\varphi}_0}(t) \sqrt{1-t^2}\, dt - M_r^f \right), \tag{25}$$

или оценка для нормы

$$\| R_n \| \le \frac{| M_{nn}^{\bar{\varphi}_0} |}{2\pi} \overline{K}(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{r=n}^{\infty} | M_{nr}^{\bar{\varphi}_0} | (r+2) +$$

$$+ \sum_{r=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-1}^{1} M_{nr}^{K}(t) G_n^{\bar{\varphi}_0}(t) \sqrt{1-t^2}\, dt \right| + | M_r^f | \right) \left(\frac{(r+2)^2 - n^2}{2} \right). \tag{26}$$

Ряд (25) будет равномерно сходиться, если линейные функционалы последовательностей $\left\{ M_{nr}^{\bar{\varphi}_0} \right\}_{r=n}^{\infty}$, $\left\{ M_{nr}^{K}(t) \right\}_{r=n}^{\infty}$ и $\left\{ M_r^f \right\}_{r=n}^{\infty}$ удовлетворяют условиям:

$$| M_{nr}^{\bar{\varphi}_0} | \le \frac{c^{\varphi_0}}{r^{p+\alpha}};\ \int_{-1}^{1} | M_{nr}^{K}(t) |\, dt \le \frac{c^{K}}{r^{p+1+\alpha}};\ | M_r^f | \le \frac{c^f}{r^{p+1+\alpha}},$$

при $p \ge 2;\ 0 < \alpha < 1$.

Вид остаточного члена (26) позволяет сделать вывод о том, что наибольшую погрешность вносят второе слагаемое исходного уравнения (1) и его правая часть. Для сходимости метода искомое точное решение, а следовательно, и приближенное должны удовлетворять требованию, чтобы его первая производная принадлежала классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$, где $0<\alpha<1$. Тогда первая производная должна быть многочленом не менее чем второй степени. В таком случае асимптотический многочлен $G_n^{\bar{\varphi}_0}(x)$ будет третьей степени, а система уравнений (9) для определения коэффициентов многочлена – пятого порядка. Это решение $G_3^{\bar{\varphi}_0}(x)$ можно назвать первым приближением к точному решению.

Таким образом, алгоритм получения приближенного решения с заданной точностью может быть следующим.

1. Вычислить многочлен $G_3^{\bar{\varphi}_0}(x)$ как первое приближение для точного решения, определив его коэффициенты из системы уравнений (9) пятого порядка.

2. Вычислить $R_3(x)$ – остаточный член (25) либо его оценку (26).

3. По виду слагаемых ряда (25) найти номер члена N, начиная с которого сумма остатка будет меньше заданной величины погрешности.

4. Вычислить многочлен $G_N^{\bar{\varphi}_0}(x)$ – второе приближение, снова решив систему уравнений (9), порядок которой будет $N+2$.

5. Уточнить оценку погрешности (24), снова вычислив линейные функционалы $M_{Nr}^{\bar{\varphi}_0}$, M_{Nr}^{K} и соответствующие функции $\chi_{r+2}^{(N)}(x)$, $\tilde{\chi}_{r+2}^{(N)}(x)$.

Последовательность линейных функционалов $\left\{M_r^f\right\}_{r=n}^{\infty}$ не зависит от искомого решения $G_N^{\bar{\varphi}_0}(x)$, поэтому она вычисляется один раз.

Аналогичный метод использовали для решения других уравнений [8–10]. Однако в данном случае есть отличия в его применении и конечных результатах. А именно сходимость приближенного решения к точному в рассматриваемом случае начинается с $n=3$, а в других случаях – с $n=5$.

ВЫВОДЫ

1. Предлагаемый метод дает приближенное решение в виде многочлена, который позволяет вычислять решение в любой точке рассматриваемого промежутка, в отличие от методов механических квадратур [2], которые дают решение только в отдельных точках.

2. Оценка погрешности для тех методов, которые основаны на интерполяционных многочленах [1], как правило, проводится на незамкнутых промежутках. При этом нет никаких рекомендаций, насколько близко к концевым точкам эта оценка справедлива. Для данного метода оценка погрешности дается для $\bar{\varphi}_0(x)$ на всем промежутке, включая концевые точки. В них погрешность достигает наибольшего значения и определяет те условия, которые для сходимости приближенного решения к точному накладываются на все функции, входящие в уравнение (1), так как полиномы Чебышева второго рода на концах промежутка принимают значения $|U_n(-1)|=|U_n(1)|=n+1$.

3. При вычислении погрешности нет необходимости прибегать к использованию производных высокого порядка, как это имеет место во всех других методах [1, 2], основанных на интерполяционных полиномах и квадратурных формулах.

4. Алгоритм метода применяется одинаковым образом как для четных степеней многочленов, так и для нечетных. В то время как для других методов требуется специальный подбор степени многочлена.

5. Все перечисленные особенности метода позволяют достаточно просто и единообразно реализовывать его с помощью вычислительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каландия, А. И.** Математические методы теории упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 303 с.

2. **Хубежды, Ш. С.** О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с весовыми функциями / Ш. С. Хубежды, Л. Ю. Плиева, З. В. Бесаева // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Вып. 2, т. 13. – С. 56–62.

3. **Грибкова, В. П.** Равномерные приближения, основанные на полиномах Чебышева / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-24: сб. трудов XXIV Междунар. науч. конф.: в 10 т. – Пенза, 2011. – Т. 1. – С. 31–36.

4. **Габдулхаев, Б. Г.** Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: КГУ, 1980. – 232 с.

5. **Натансон И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.; Л.: ГТТЛ, 1949. – 688 с.

6. **Грибкова, В. П.** Эффективные методы равномерных приближений, основанные на полиномах Чебышева / В. П. Грибкова. – М.: Спутник, 2013. – 209 с.

7. **Грибкова, В. П.** Приближенное решение дифференциальных уравнений с помощью асимптотических полиномов / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 2. – С. 264–274.

8. **Грибкова В. П.** Решение сингулярного интегродифференциального уравнения с помощью асимптотических многочленов / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 9. – С. 1150–1159.

9. **Грибкова, В. П.** Решение одного сингулярного интегрального уравнения с помощью асимптотических полиномов / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. – Минск, 2012. – Ч. 3. – С. 7–8.

10. **Грибкова, В. П.** Приближенное решение одного уравнения теории крыла методом асимптотических многочленов / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // Наука и техника. – 2012. – № 5. – С. 78–86.

R E F E R E N C E S

1. **Kalandia, A. I.** (1973) *Mathematical Methods for Elasticity Theory*. Moscow, Nauka. 303 p. (in Russian).

2. **Khubezhdy, Sh. S.,** Plieva, L. Yu., & Besaeva, Z. V. (2011) About Quadrature Formulas for Singular Integrals with Weight Functions. *Vladikavkazsky Matematichesky Zhournal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 13 (2), 56–62 (in Russian).

3. **Gribkova, V. P.,** & Kozlov, S. M. (2011) Uniform Approximations Based on the Chebyshev Polynomial. *Matematicheskie Metody v Tekhnike i Tekhnologiiakh – MMTT-24: Sbornik Trudov XXIV Mezhdunarodnoi Nauchnoi Konferentsii* [Mathematical Methods in Engineering and Technology – MMTT-24: Proceedings XXIV International Conference]. Penza, 1, 31–36 (in Russian).

4. **Gabdulhaev, B. G.** (1980) *Optimal Approximations for Solution of Linear Problems.* Kazan: Publisher University of Kazan. 232 p. (in Russian).

5. **Natanson, I. P.** (1949) *Constructive Theory of Functions.* Moscow; Leningrad, Gostekhizdat. 688 p. (in Russian).

6. **Gribkova, V. P.** (2013) *Efficient Methods of Uniform Approximations Based on the Chebyshev Polynomial*. Moscow, Sputnik. 209 p. (in Russian).

7. **Gribkova, V. P.,** & Kozlov, S. M. (2012) Approximate Solution of Differential Equations with the Help of Asymptotic Polynomial Function. *Differentsial'nye Uravneniia* [Differential Equations], 48 (2), 264–274. doi: 10.1134/S0012266 112020103.

8. **Gribkova, V. P.,** & Kozlov, S. M. (2013) Solution of Singular Integro-Differential Equation with the Help of Asymptotic Polynomial Function. *Differentsial'nye Uravneniia* [Differential Equations], 49 (9), 1150–1159. doi: 10. 1134/S001226611 3090103.

9. **Gribkova, V. P.,** & Kozlov, S. M. (2012) Solution of one Singular Integral Equation with the Help of Asymptotic Polynomial Function. *XI Belorusskaia Matematicheskaia Konferentsiia: Tez. Dokl. Mezhdunar. Nauch. Konf.* [International Scientific Conference “XI[th] Belarusian Mathematical Conference” (BMC-XI): Abstracts of Reports]. Minsk, Part 3, 7–8 (in Russian).

10. **Gribkova, V. P.,** & Kozlov, S. M. (2012) Approximate Solution of One Equation for Wing Theory While Using Method of Asymptotic Polynomial Function. *Nauka i Tekhnika* [Science and Technique], 5, 78–86 (in Russian).

Поступила 27.02.2014

УДК 519.876

К МЕТОДИКЕ ПОВЫШЕНИЯ АКТИВНОЙ ВИБРОЗАЩИТЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

МИКУЛИК Т. Н., докт. техн. наук РЕЙЗИНА Г. Н.

Белорусский национальный технический университет

E-mail: greizina@gmail.com

Изучены условия виброзащиты системы «оператор – сиденье» транспортного средства (тракторов семейства «Беларус»), проведены экспериментальные исследования вибронагруженности системы с учетом упругодемпфирующих характеристик, комфортности оператора. В результате установлен диапазон частот колебаний системы, плохо переносимый оператором, так как последний находится в зоне собственных частот колебаний внутренних органов человека. Проведено исследование влияния физиологических факторов оператора – частоты сердечных сокращений, вариационного размаха, амплитуды моды, индекса напряжения – на основе факторного эксперимента, получены корреляционные зависимости. Разработанная методика исследования алгоритмического обеспечения повышения активной виброзащиты системы «оператор – сиденье» подразумевает наличие математической модели системы, используемой для синтеза законов управления и выбора алгоритмов формирования сигналов физиологического состояния оператора. Составлена структурная схема алгоритма виброзащиты системы «водитель – сиденье – дорога».

В качестве математической модели возмущений внешней среды приняты гармонические синусоидальные и полигармонические возмущения со стороны силовой установки, а также используются дискретные алгоритмы, основанные на фильтрации белого шума с линейным фильтром и заданной корреляционной функцией. При гармоническом возбуждении системы «оператор – сиденье» сила, передаваемая амортизатором системе, а также оценка эффективности амортизации в виде коэффициента передачи силы и величины виброизоляции исчисляется в децибелах. Движение системы при возникающих в результате работы силовой установки вибрационных силах описывается рядом