Министерство Образования Республики Беларусь

Белорусский Национальный Технический Университет

кафедра «Теоретическая механика»

Теоретическая механика в вопросах и ответах.

Кинематика. Часть II.

Учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения

Электронный учебный материал.

Минск БНТУ 2014

УДК 531.(075.8)

ББК 22.21.Я

Авторы:
Богинская Т.Ф., Мышковец М.В., Тульев В.Д.

Рецензет:
Ботогова М.Г., доцент БГУ

В данном учебном пособии рассмотрены все основные темы курса теоретической механики по разделу кинематика. В первой части приведены учебные примеры и сформулированы вопросы к решению. Во второй части приводятся ответы на поставленные вопросы и решения задач. Учебное пособие полезно для студентов всех форм обучения, изучающих теоретическую механику.

Белорусский Национальный Технический Университет
Пр-т Независимости, 65, г Минск, Республика Беларусь
Тел. (017)212-77-52 факс (017) 282-91-37
Регистрационный номер № БНТУ/МСФ25-26.2014

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Что представляет собою кинематика?

Это раздел теоретической механики, в котором изучается движение тел, без учета их массы и учета сил, вызывающих движение.

Какие основные задачи рассматриваются в кинематике?

Различают две основные задачи. Первая состоит в установлении закона движения тела, т.е. в отыскании способа (правила), по которому можно определить положение тела или его частей (точек) в пространстве в любой момент времени. Вторая состоит в определении (нахождении) величин, характеризующих движение тела или его частей.

Какую роль играет кинематика в подготовке современного, инженера?

Во-первых, она знакомит с терминами и понятиями, необходимыми для изучения общетехнических и специальных дисциплин. Во-вторых, положения и методы кинематики широко используются при решении технических задач, связанных с исследованием движения различных звеньев машин, механизмов и аппаратов. В-третьих, кинематика служит основой для динамики, изучающей также движение тел, но с учетом их массы и действующих сил.

Как рекомендуется пользоваться пособием?

Пособие требует предварительного знакомства с предметом. Поэтому вначале необходимо прочитать материал по учебнику, обратив особое внимание на формулировки и содержание понятий, окончательные выводы и формулы, познакомиться с примерами и задачами. Затем можно обратиться к пособию. Решая задачи и отвечая на вопросы, необходимо обоснованно формулировать ответы. Если ответ, составленный учащимся, расходится с ответом, приведенным, во второй части пособия, следует проанализировать причину и характер расхождения. Не торопитесь заглянуть в ответ!

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

Вначале необходимо усвоить следующие важнейшие понятия: движение, система отсчета, скорость, ускорение.

<u>Движением</u> в механике называется перемещение тела или его частей из одного места пространства в другое с течением времени. Тела могут совершать разнообразные движения. Поэтому наряду с установлением законов и определением кинематических характеристик необходимо также классифицировать движения тел по видам.

<u>Система отсчета.</u> Наблюдать и изучать движение тела возможно лишь по отношению к другому телу. С последним, как правило, связывают систему координат (чаще всего прямоугольную декартову).

<u>Тело отсчета и связанная с ним система координат составляют систему отсчета.</u>

Она может быть подвижной или условно неподвижной.

<u>Скоростью</u> движения называется физическая величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве и направление движения.

<u>Ускорением</u> движения называется физическая величина, характеризующая изменение скорости тела с течением времени.

Закон движения, скорость и ускорение определяются в зависимости от вида движения тела. Рассмотрим эти характеристики для отдельной точки.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Целью изучения движения точки является определение основных характеристик этого движения: положения точки в выбранной системе отсчета, траектории точки, ее скорости и ускорения в любой момент времени. Для определения положения точки применяются векторный, координатный и естественный способы задания движения. При решении задач, как правило, используются координатный и естественный способы.

2.1. Координатный способ задания движения

При координатном способе задания движения положение точки определяется ее координатами, которые при движении точки изменяются с течением времени. Поэтому, чтобы определить положение точки в любой момент времени, необходимо знать закон изменения этих координат или уравнения движения точки. В прямоугольной декартовой системе координат уравнения движения имеют вид:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t). \tag{2.1}$$

Уравнения (2.1) являются также параметрическими уравнениями траектории точки, как геометрического места последовательных положений движущейся точки. Уравнение траектории точки в координатной форме определяется из (2.1) путём исключения параметра *t*.

Скорость точки при координатном способе задания движения по величине и направлению определяется формулами : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$;

$$\cos(\overline{V}, \hat{\ } \bar{i}) = V_x / V;\ \cos(\overline{V}, \hat{\ } \bar{j}) = V_y / V; \cos(\overline{V}, \hat{\ } \bar{k}) = {}^{V_z}\!/_{V}, \tag{2.2}$$

где $V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x};\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y};\ V_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}$ – проекции вектора скорости на оси координат.

Ускорение точки в этом случае по величине и направлению определяется соответственно формулами : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

$$\cos(\bar{a}, \hat{\ } \bar{i}) = a_x / a;\ \cos(\bar{a}, \hat{\ } \bar{j}) = a_y / a; \cos(\bar{a}, \hat{\ } \bar{k}) = {}^{a_z}\!/_{a}, \tag{2.3}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на оси координат.

2.2. Естественный способ задания движения

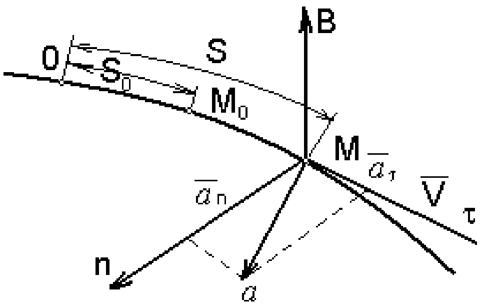
В этом способе задаются траектория и закон движения (уравнение движения) точки по этой траектории, т.е.

$$S = OM = f(t). \tag{2.4}$$

Дополнительно выбирается начало отсчета (0) и направление положительного отсчёта дуги S. С движущейся точкой M связывают естественные оси: касательную, главную нормаль и бинормаль.

Скорость точки при естественном способе задания движения определяется формулой

$$V = ds/dt \tag{2.5}$$



Направлена скорость по касательной к траектории.

Ускорение точки при естественном способе задания движения по модулю и направлению определяется формулами :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};\ tg\alpha = a_\tau / a_n \tag{2.6}$$

Здесь a_n – нормальное ускорение. Оно направлено по главной нормали к центру кривизны, по модулю равно

$$a_n = V^2/\rho \tag{2.7}$$

где ρ – радиус кривизны кривой в данной точке. a_τ – касательное ускорение. Оно направлено по касательной к траектории (по вектору скорости или противоположно) и равно

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{2.8}$$

Вопросы и задачи

2.1. Можно ли задать движение одной и той же точки разными способами?

2.2. Когда рекомендуется использовать естественный способ задания движения?

2.3. Когда криволинейное движение точки называют равномерным?

2.4. Когда криволинейное движение точки называют равнопеременным?

2.5. При каком движении полное ускорение точки совпадает с касательным? С нормальным?

2.6. В каком виде можно записать закон равномерного и закон равнопеременного движения точки?

2.7. Движение точки задано координатным способом $x = 3\cos t;\ y = 5 - 3\sin t$, где x и y – в см, t – в секундах. Определите: 1. Траекторию точки. 2. Положение точки в начальный момент и при $t_1 = \pi/2c$. 3. Направление движения точки.

4. Изменится ли направление ее движения, если во втором уравнении знак (-) сменить на (+)? 5. Величину и направление вектора скорости при $t_1 = \pi/2c$.

6. Величину и направление вектора ускорения при $t_1 = \pi/2c$. 7. Характер движения точки по траектории.

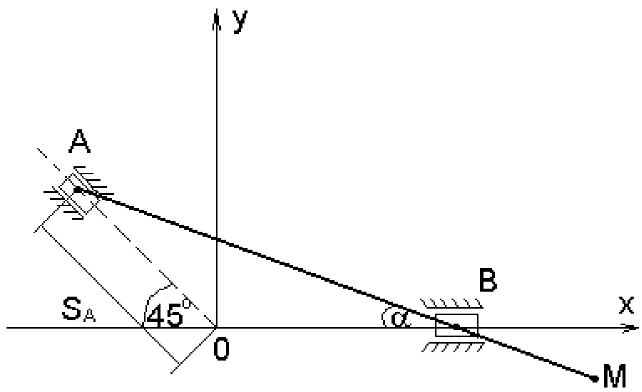
2.8. Точка движется в плоскости *XOY* согласно уравнениям $x = 3 + 2t$; $y = 4t^2$ (x и y – в см, t – в секундах). 1. Найдите уравнение траектории в координатной форме. Определите при $t = 1c$: 2. Величину скорости точки.

3. Величину ускорения точки. 4. Величину касательного ускорения. 5. Величину нормального ускорения. 6. Радиус кривизны траектории. 7. Угол между вектором касательного ускорения и осью *Ox* (покажите на рисунке). 8. Значение дуговой координаты при $S_0 = 0$.

2.9. Движение точки, задано уравнениями $x = 2t$; $y = \sin \pi t^2$ (x и y - в см, t - в секундах).

Определите: 1. Уравнение траектории точки. 2. Ближайший после начала движения момент времени t, когда траектория пересечет ось *Ox* (вычертите этот участок траектории). 3. Величину скорости точки в этот момент. 4. Величину ускорения точки при $t = t_1$. 5. Величину скорости точки в момент наибольшего удаления .точки от оси *Ox*.

2.10.



Для приведенного на рисунка механизма известны закон движения ползуна $S_A = 30\sqrt{2}\sin \pi t$ см и $MB = 1/2AB = 15$ см.

1. Составьте уравнения движения точки *M*.

Определите при $t = 1/6c$:

2. Величину скорости.

3. Модуль полного ускорения.

4.Величину касательного ускорения.

5. Величину нормального ускорения.

6. Радиус кривизны траектории.

7. Угол между векторами скорости и полного ускорения.

2.11. Движение точки по траектории задано уравнением $S = 2e^{-2t}\sin\frac{\pi}{2}t$ см. В момент времени $t = 1c$ точка находится на траектории в положении, где радиус кривизны равен 20 см. В указанный момент времени определите:

1. Скорость точки.

2. Касательное и нормальное ускорения.

3. Полное ускорение.

4. Характер движения точки по траектории.

2.12. Скорость движения точки по некоторой траектории задана уравнением $V = 5\pi\cos\frac{\pi}{2}t$ см/с.

Определите в момент времени $t = 1c$:

1. Скорость точки.
2. Касательное ускорение.
3. Значение дуговой координаты при $S_0 = 0$.
4. Пройденный путь за время t=4 c.

2.13. Поезд, двигаясь равноускоренно на закруглении радиуса 500 м с некоторой начальной скоростью, за 2 мин. прошел расстояние S=1500 м и развил скорость 72 км/час.

Определите: 1. Начальную скорость поезда.

2. Касательное, нормальное и полное ускорения поезда в начале участка.
3. Касательное, нормальное и полное ускорения поезда в конце 2-ой минуты.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В кинематике тела изучаются законы его движения и определяются кинематические характеристики. Особенность ее состоит в том, что наряду с изучением движения всего тела рассматривается также движение его точек. Различают следующие виды движения твердого тела: поступательное, вращательное, плоскопараллельное, сферическое и общий случай движения свободного тела. Простейшими являются поступательное и вращательное движения. Все другие движения можно свести либо к совокупности поступательного и вращательного движений, либо к одному из них.

При, поступательном движении тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

3.1. Кинематические характеристики движения тела

К ним относятся угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение. Изменение угла поворота с течением времени, т.е.

$$\varphi = f(t) \tag{3.1}$$

представляет закон вращательного движения тела.

Угловая скорость – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота с течением времени, определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{3.2}$$

Угловое ускорение – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости, равна

$$\varepsilon = d\omega / dt = d^2\varphi / dt^2 = \ddot{\varphi}. \quad (3.3)$$

Угловая скорость и угловое ускорение могут быть изображены в виде векторов, направленных вдоль оси вращения.

Угол φ поворота тела связан с числом его оборотов N зависимостью

$$\varphi = 2\pi N, \quad (3.4)$$

а угловая скорость ω с числом оборотов n в минуту соотношением

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \ \text{рад/с}. \quad (3.4)$$

При равномерном вращении тела ($\omega = const$) и равнопеременном вращении ($\varepsilon = const$) уравнения вращения имеют вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t; \ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (3.5)$$

3.2. Кинематические характеристики движения точек тела

Движение любой точки тела целесообразно задавать естественным способом – (известны их траекторий).

Модуль скорости любой точки тела

$$V = \omega R, \quad (3.6)$$

где R – расстояние от точки до оси вращения.

Нормальное и касательное ускорения определяются по формулам

$$a_n = \omega^2 R; \ a_\tau = \varepsilon R. \quad (3.7)$$

Полное ускорение определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.8)$$

Вопросы и задачи

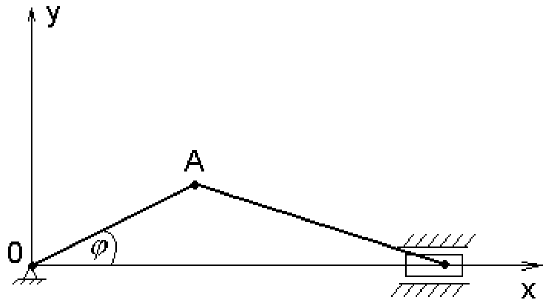
3.1. Когда вращательное движение тела называют равномерным, когда равнопеременным?

3.2. Как направлено полное ускорение точки при равномерном вращении тела?

3.3. Как направлен вектор линейное скорости точки тела при вращательном движений?

3.4. Как направлен вектор угловой скорости тела при вращательном движении?

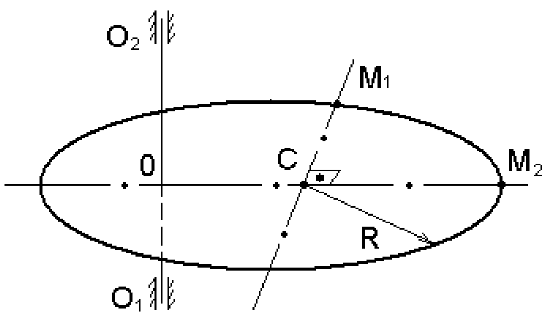
3.5.



В кривошипно-шатунном механизме кривошип OA длиной 20 см шарнирно соединен с осью вращения O и движется в плоскости xOy так, что его угол поворота изменяется по закону $\varphi = t^2 - 3t$ рад.

Определите: 1. Траекторию точки A.
2. Угловую скорость кривошипа при $t = 1$ с.
3. Угловое ускорение кривошипа.
4. Характер движения кривошипа при $t = 1$ с.
5. Модуль и направление вектора скорости точки A в этот момент.
6. Модуль и направление касательного (вращательного), нормального (центростремительного) и полного ускорений точки при $t = 1$ с.

3.6.

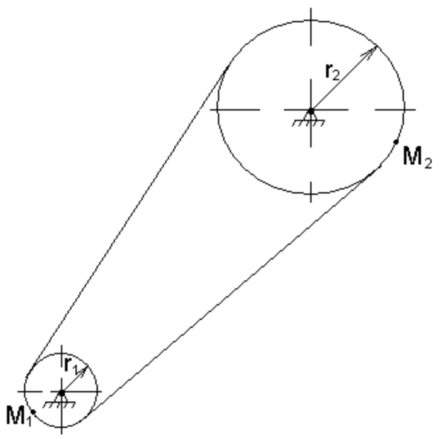


Диску радиусом R=30 см, вращающемуся вокруг вертикальной, оси O_1O_2, перпендикулярной плоскости диска и отстоящей от его центра на расстоянии OC=R/2, в начальный момент сообщили угловую скорость n=300 об/мин.

Вследствие трения в опорах O_1 и O_2 через 10 с. угловая скорость диска уменьшилась до $\omega = 2\pi$ рад/с.

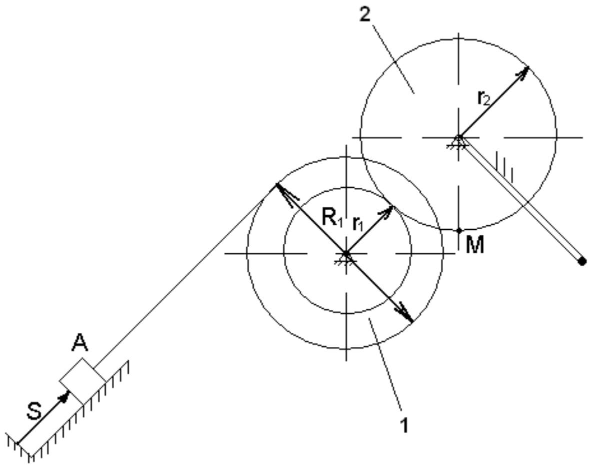
Считая движение равнопеременным, определите в конце десятой секунды:
1. Линейные скорости точек M_1 и M_2 (модуль и направление).
2. Угловое ускорение диска.
3. Число оборотов диска вокруг оси.
4. Полные ускорения точек M_1 и M_2.

3.7.



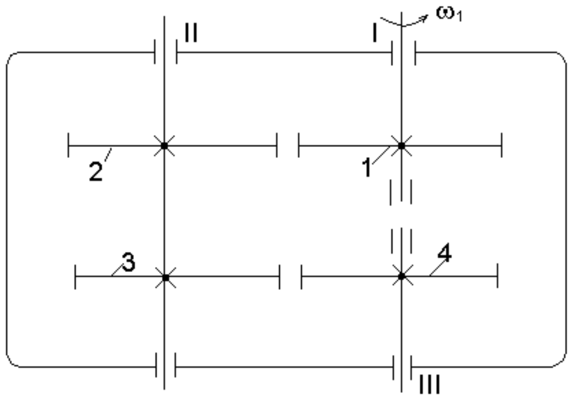
При пуске в ход электромотора шкив A радиусом $r_1 = 25$ см вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 0{,}4\pi$ рад/с^2. Через некоторое время шкив B радиусом $r_2 = 50$ см станка приобретает угловую скорость $n_2 = 600$ об/мин. Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определите: 1. Угловую скорость шкива B.
2. Угловую скорость шкива A.
3. Линейную скорость точек M_1 и M_2.
4. Время разгона шкива B.
5. Нормальное, тангенциальное и полное ускорение точки M_2.

3.8.



Груз A с помощью лебедки поднимается по наклонной плоскости. Известны радиусы зубчатых колес r_1=15 см, $R_1 = 20$ см, r_2=30 см и закон движения груза $S = 50\ t^2$ см. Пренебрегая растяжением троса, определите в момент времени $t = 1$ с: 1. Скорость груза A.
2. Ускорение груза A.
3. Угловую скорость и угловое ускорение рукоятки лебедки.
4. Скорость точки M.
5. Ускорение точки M.

3.9.



В изображенном редукторе известны число зубьев колес $z_1, z_2, z_3, z_4,$ и угловая скорость вала 1 ω_1.
Определите: 1. Угловую скорость вала II.
2. Передаточное число редуктора.

4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА (ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ)

Плоским или плоскопараллельным называют такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Решая задачи на эту тему, необходимо уметь находить скорость и ускорение любой точки, а также угловую скорость и угловое ускорение тела (фигуры) в плоскопараллельном движении.

Скорость любой точки плоской фигуры можно найти двумя способами.

В первом способе движение фигуры мысленно раскладывается на поступательное и вращательное. В этом случае скорость любой точки B определяется по формуле

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}; \tag{4.1}$$

где $\overline{V}_A$ – скорость любой точки (полюса) той же фигуры; $\overline{V}_{BA}$ скорость точки B при вращении ее с фигурой вокруг полюса, направлена перпендикулярна BA, а по модулю равна

$$V_{BA} = \omega \cdot BA. \tag{4.2}$$

Из (4.1), в частности, следует, что проекции скоростей двух точек фигуры на прямую, соединяющую точки, равны между собой, т.е.

$$np_{AB}(\overline{V}_B) = np_{AB}(\overline{V}_A)\,. \tag{4.3}$$

Во втором способе движение фигуры в данный момент рассматривается как вращательное вокруг мгновенного центра скоростей (МЦС). В этом случае скорость любой точки B определяется по формуле

$$V_B = \omega \cdot L\,, \tag{4.4}$$

где ω – угловая скорость фигуры вокруг МЦС; L – расстояние от точки до МЦС.

Чтобы найти МЦС плоской фигуры, необходимо найти направления скоростей двух произвольных точек одной и той же фигуры и восстановить в точках перпендикуляры к скоростям, МЦС находится на пересечении перпендикуляров. (4.5)

Ускорение любой точки плоской фигуры определяется по формуле

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau\,, \tag{4.6}$$

где $\overline{a}_A$ – ускорение произвольной точки (полюса) той же фигуры; $\overline{a}_{BA}^n$ – центростремительное ускорение точки B при вращении ее с фигурой вокруг полюса, направлено от B к A ; $\overline{a}_{BA}^\tau$ – вращательное ускорение точки B при вращении ее с фигурой вокруг полюса, направлено перпендикулярно BA (при ускоренном вращении совпадает с $\overline{V}_{BA}$, при замедленном направлено обратно $\overline{V}_{BA}$).

По модулю эти ускорения равны

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB. \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB\,. \tag{4.7}$$

где ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение фигуры.

Примечание. Если точки A и B совершают криволинейное движение, то вместо (4.6) пользуются формулой

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau \tag{4.8}$$

где $\vec{a}_B^n$, $\vec{a}_A^n$, $\vec{a}_B^\tau$, $\vec{a}_A^\tau$ нормальные и касательные ускорения точек B и A соответственно.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЦС

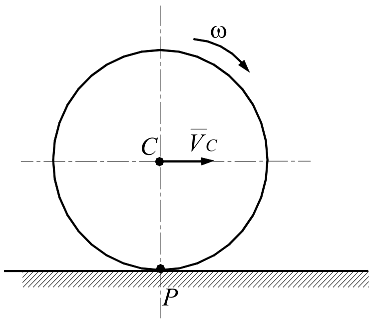


Рис.4.1

а) Колесо катится без скольжения. МЦС находится в точке Р соприкосновения колеса с неподвижной поверхностью (рис. 4.1).

$$\omega = \frac{V_c}{CP} \tag{4.9}$$

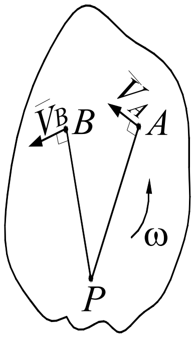


Рис.4.2

б) Известны скорости двух точек или величина и направление скорости одной точки $\left(\overline{V}_A\right)$ и направление другой. Для нахождения МЦС проводим перпендикуляры к векторам скоростей в точках *A* и *B*. Точка Р пересечения перпендикуляров будет МЦС (рис. 4.2).

$$щ = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \qquad (4.10)$$

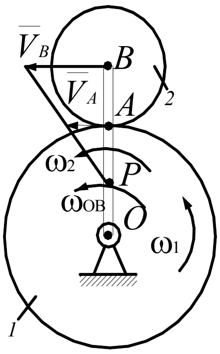


Рис.4.3

в) Известны угловые скорости кривошипа ОВ (ω_{OB}) и колеса 1 (ω_1) (рис. 4.3).

$$V_B = щ_{OB}\left(r_1 + r_2\right), \quad V_A = щ_1 r_1.$$

Считаем, что

$$V_B > V_A \ , \quad \overline{V}_A \parallel \overline{V}_B.$$

МЦС находится на пересечении двух прямых, одна из которых проведена через точки *A* и *B*, вторая – через концы векторов скоростей. Колесо 1 и кривошип *OA* вращаются вокруг точки *O*. Колесо 2 совершает плоское движение. Тогда

$$щ_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A}{AP}, \quad BP = AP + r_2,$$

$$V_B \cdot AP = V_A \cdot BP = V_A\left(AP + r_2\right),$$

или

$$AP\left(V_B - V_A\right) = V_A r_2, \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{V_A r_2}{V_B - V_A}.$$

Откладываем на прямой *BA* отрезок *AP* и получаем точку *P* (МЦС).

$$щ_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A\left(V_B - V_A\right)}{V_A\, r_2} = \frac{V_B - V_A}{r_2}. \qquad (4.11)$$

Направление угловой скорости колеса 2 (ω_2) определяется направлениями вращения векторов скоростей точек *A* и *B* относительно МЦС.

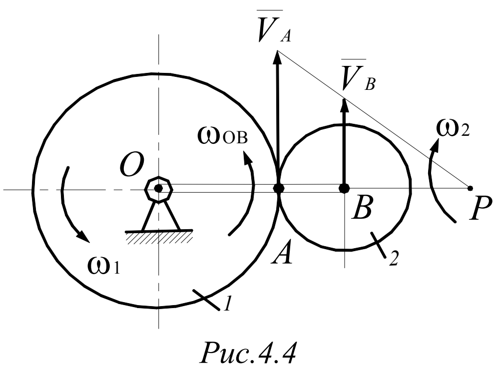


Рис.4.4

г) Известны угловые скорости кривошипа *OB* $\left(\omega_{OB}\right)$ и колеса 1 $\left(\omega_1\right)$ (рис. 4.4). Считаем, что:

$$V_A > V_B \ , \quad \overline{V}_A \parallel \overline{V}_B.$$

$$V_A = щ_1 \cdot r_1 \ , \quad V_B = щ_{OA}\left(r_1 + r_2\right).$$

МЦС находится в точке пересечения прямой, проведенной через точки *A* и *B*, и прямой, проведенной через концы векторов скоростей точек *A* и *B* (рис.4.4).

Колесо 1 и кривошип OA вращаются вокруг точки O. Колесо 2 совершает плоское движение. Следовательно:

$$щ_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A}{AP}, \quad AP = BP + r_2.$$

Тогда

$$V_A \cdot BP = V_B AP = V_B\left(BP + r_2\right) \;\Rightarrow\; BP = \frac{V_B r_2}{V_A - V_B}.$$

Откладываем на прямой AB отрезок BP и получаем точку P (МЦС).

$$щ_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_B\left(V_A - V_B\right)}{V_B\, r_2} = \frac{V_A - V_B}{r_2}. \qquad (4.12)$$

Направление угловой скорости колеса 2 $\left(\omega_2\right)$ определяется направлениями вращения векторов скоростей точек A и B относительно МЦС .

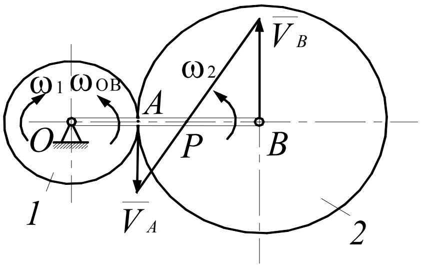


Рис.4.5

д) Известны угловые скорости кривошипа ОВ (ω_{OB}) и колеса 1(ω_1), которые направлены противоположно (рис.4.5).

$$V_A = щ_1 r_1, \quad V_B = щ_{OB}\left(r_2 + r_1\right).$$

Колесо 1 и кривошип OA вращаются вокруг точки O. Колесо 2 совершает плоское движение. МЦС находится в точке пересечения прямой, соединяющей концы векторов скоростей точек A и B, и прямой AB (рис.4.5).

$$щ_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A}{AP}, \quad BP = r_2 - AP\,.$$

Тогда $$V_B \cdot AP = V_A \cdot BP = V_A\left(r_2 - AP\right).$$

Откуда $$AP = \frac{V_A\, r_2}{V_B + V_A}.$$

$$щ_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A\left(V_B + V_A\right)}{V_A\, r_2} = \frac{V_B + V_A}{r_2} \qquad (4.13)$$

Направление угловой скорости колеса 2 (ω_2) определяется направлениями вращения векторов скоростей точек A и B относительно МЦС (рис.4.5).

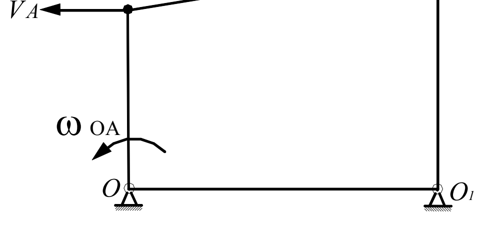


Рис. 4.6

е) Четырехзвенник $OABO_1$ занимает положение, показанное на рис. 4.6. $OA \parallel O_1B$.

Находим скорость точки А:

$$V_A = щ_{OA} \cdot OA\,.$$

Вектор скорости $\overline{V}_A$ перпендикулярен $A\overline{O}$ и направлен в соответствии с угловой скоростью.

Скорость точки B также перпендикулярна BO_1, так как звенья OA и O_1B совершают вращательное движение. Стержень AB совершает плоское движение. Строим МЦС стержня AB. Перпендикуляры к скоростям точек A и B будут параллельны. Поэтому МЦС находится в бесконечности. Стержень AB совершает мгновенное поступательное движение, и скорости всех точек стержня будут одинаковы по величине и направлению. В данный момент угловая скорость стержня AB равна нулю $(\omega_{AB} = 0)$.

Вопросы и задачи

4.1. Что следует понимать под плоской фигурой?

4.2. Какую особенность следует иметь в виду при решении задач на плоско-параллельное движение?

4.3. Почему скорости точек плоской фигуры чаще определяют вторым способом?

4.4. Обязательно ли МЦС должен находиться в пределах фигуры?

4.5. Если механизм состоит из нескольких тел (звеньев), то как можно найти МЦС?

4.6. При нахождении МЦС можно ли брать скорость двух точек, принадлежащих разным телам (звеньям)?

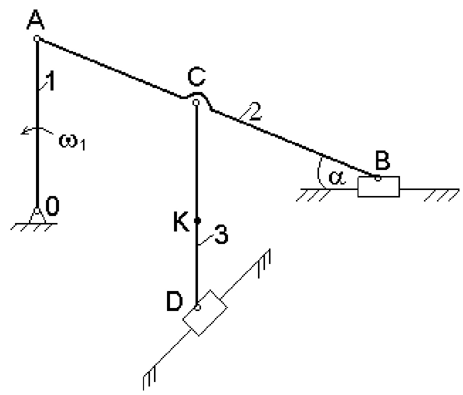
4.7. Как найти угловую скорость плоской фигуры?

4.8. Если угловая скорость определяется с помощью (4.2), зависит ли ее значение от выбора полюса?

4.9. В чем отличие векторов $\bar{a}_B^n$ и $\bar{a}_B^\tau$ от $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BA}^\tau$ (см 4.8)?

4.10. Как найти угловое ускорение плоской фигуры?

4.11.



Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3 и ползунов B и D, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой шарнирами. Точки C и K находятся в серединах, соответствующих стержней. Длины стержней соответственно равны L_1, L_2, L_3 в м., угловая скорость стержня 1 равна ω_1 рад/с.

Для заданного положения механизма ответить на вопросы: 1. Какое движение совершает стержень OA? Определить $\bar{V}_A$. 2. Показать на рис. $\bar{V}_B$. Найти положение МЦС стержня AB.

3. Определить угловую скорость звена 2. Какое движение совершает стержень AB? Чему равны $\bar{V}_B$ и $\bar{V}_C$?

4. Показать на рис. $\bar{V}_D$. Найти положение МЦС стержня CD. Чему равна $|\bar{V}_D|$?

5. Определить угловую скорость стержня CD и $\bar{V}_K$.

6. Найти модуль и направление $\bar{a}_A$.

7. Показать на рис. $\overline{a}_B$. Записать векторное равенства для определения $\overline{a}_B$. Обосновать выбор полюса.

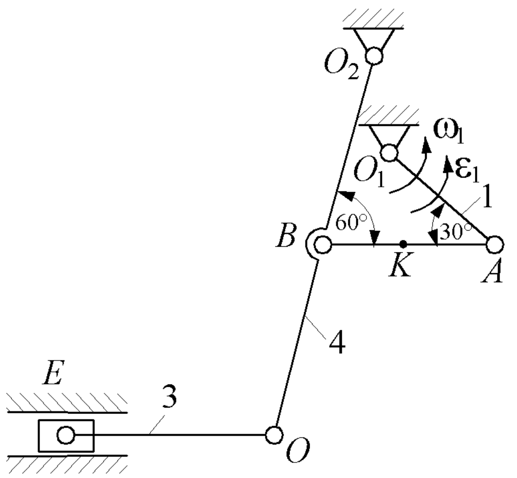
8. Показать на рис. $\overline{a}_{BA}^n$ и $\overline{a}_{BA}^\tau$ вычислить $\left|\overline{a}_{BA}^n\right|$.

9. Вычислить $\left|\overline{a}_B\right|$ и $\left|\overline{a}_{BA}^\tau\right|$.

10. Определить угловое ускорение эвена 2.

11. Записать формулу для определения $\overline{a}_C$. Показать на рис. и определить $\overline{a}_{CA}^n$ и $\overline{a}_{CA}^\tau$. В какой последовательности следует выполнять вычисления, чтобы определить модуль и направление $\overline{a}_C$?

4.12.



Кривошип O_1A, вращаясь вокруг неподвижной оси O_1, приводит в движение звенья 2, 3 и 4 соединенные между собой шарнирно.

Дано: $L_1 = 0{,}2$ м, $L_2 = 0{,}4$ м, $L_3 = 0{,}3$ м, $L_4 = 0{,}4$ м, $O_2B = 0{,}3$ м, $BK = 0{,}2$ м, $\omega_1 = 10$ рад/с., $\varepsilon_1 = 10$ рад/с^2, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Ответить на вопросы и найти величины указанные ниже: 1. Какое движение совершают звенья 1 и 4? Показать на рис. $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$. Определить $\overline{V}_A$.

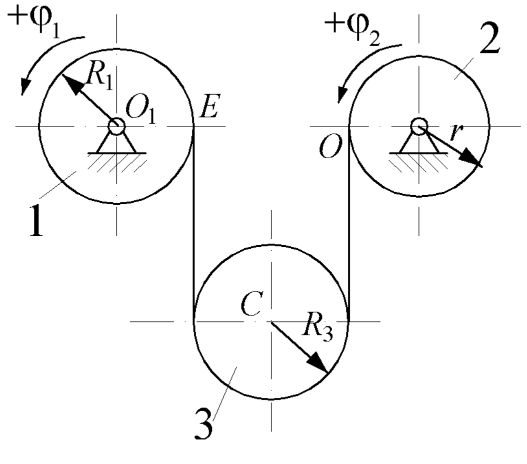
2. Какое движение совершает звено 2? Определить $\overline{V}_B$ с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек тела. Найти МЦС звена 2.

3. Определить ω_2 и ω_4.

4. Показать на рис. $\overline{V}_D$, $\overline{V}_E$ и $\overline{V}_K$. Найти $\left|\overline{V}_D\right|$ и $\left|\overline{V}_E\right|$.

5. Записать формулу для определения $\overline{a}_B$. Определить и показать на рис. $\overline{a}_B^n$, $\overline{a}_A^n$. Вычислить $\left|\overline{a}_B\right|$.

4.13.



Блок 3 удерживается на двух параллельных тросах, навернутых на барабаны 1 и 2, вращающиеся вокруг осей по законам $\varphi_1 = e^{t-1}$ рад и $\varphi_2 = 1 - 4t$ рад соответственно. Дано: $R_1 = R_3 = 0{,}2$ м, $r = 0{,}5R_1$, $t = 1$ с.

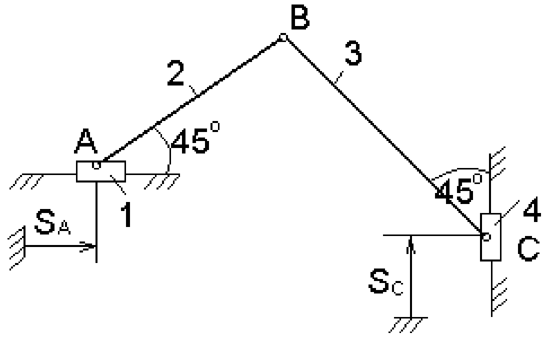
1. Определить ω_1 и ω_2, $\overline{V}_E$ и $\overline{V}_D$.

2. Чему равны $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$? Какое движение совершает теле 3? Определить положение МЦС тела 3.

3. Определить ω_3 и $\overline{V}_C$.

4. Определить ε_1 и ε_2. Зная векторное равенство для определения $\overline{V}_C$ определить $\overline{a}_C$.

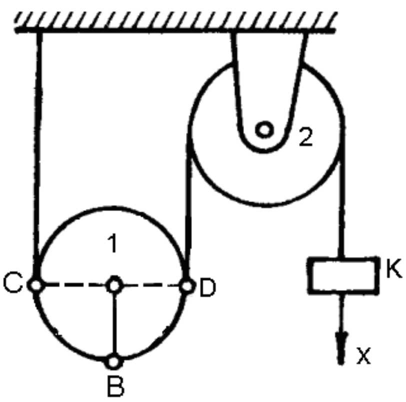
4.14. Ползуны 1 и 4, соединенные двумя стержнями $AB = 0,4$ м и $BC=1$ м, движутся по прямолинейным взаимноперпендикулярным направляющим соответственна по законам $S_A = 0,1t^2$ м, $S_C = 0,2\ln t$ м, (t – в секундах).



В момент времени $t = 1$ с. механизм занимает положение, показанное на рисунке. Для этого момента времени ответить на следующие вопросы:

1. Определить $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_C$
2. Какое движение совершают звенья 2 и 3. Записать векторные равенства для определения $\overline{V}_B$. Показать на рис. $\overline{V}_{BA}$ и $\overline{V}_{BC}$.
3. Определить $|\overline{V}_B|$.
4. Определить ω_3. Какое движение совершает тело 3?
5. Найти МЦС тела AB и ω_2.
6. Определить $\overline{a}_A$ и $\overline{a}_C$ и показать их на рисунке.
7. Записать векторные равенства для определения $\overline{a}_B$. Показать на рис. и определить $\overline{a}^n_{BA}$, $\overline{a}^n_{BC}$. Найти $\overline{a}^B_{BC}$. 8. Определить $|a_B|$. 9. Определить $\overline{V}_B$ в момент $t = 2$ с при том же положении механизма.

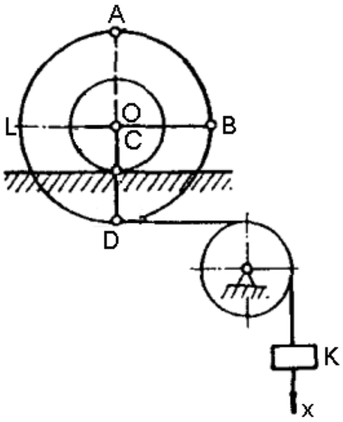
4.15.



Подвижный блок 1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Груз K, прикрепленный к концу этой нити, опускается вертикально вниз по закону $x = 2t^2$ м. Определить ускорение точки D, лежащей на ободе подвижного блока 1, в момент $t = 0,5$ с. Радиус подвижного блока 1 равен 0,2 м. Ответить на вопросы и найти указанные величины.

1. Какое движение совершает блок 1?
2. В какой точке находится МЦС блока 1?
3. Определить угловую скорость и угловое ускорение блока 1.
4. Запишите векторную формулу для определения ускорения точки D.
5. Показать на рис. и определить $\overline{a}^n_{DA}$, $\overline{a}^\tau_{DO}$.
6. Определить величину ускорения точки D.

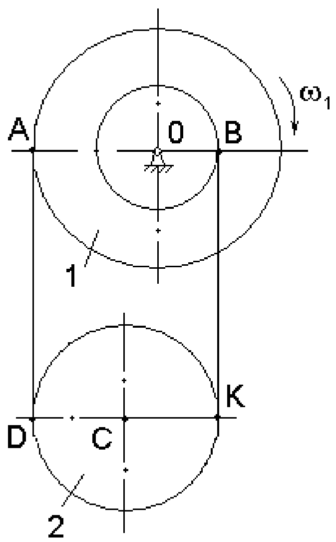
4.16. Груз К, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой L, опускается вертикально вниз по закону $x = t^2$ м. При этом катушка L катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить ускорение точки B лежащей на ободе катушки, ее угловую скорость и угловое ускорение в момент времени $t = 0{,}5$ с в положении, указанном на рисунке; $AD \perp OB$, $OD = 2 \cdot OC = 0{,}2$ м.



Ответить на вопросы и найти указанные величины.

1. Какое движение совершает груз K?
2. Какое движение совершает катушка L?
3. В какой точке находится МЦС катушки L?
4. Определить угловую скорость и угловое ускорение катушки L?
5. Запишите векторную формулу для определения ускорения точки B?
6. Показать на рис. и определить $\overline{a}^{n}_{BO}$, $\overline{a}^{\tau}_{BO}$, $\overline{a}_{O}$.

4.17.



Подвижный блок 2 подвешен на двух параллельных нитях, навитых на ступенчатый блок 1, вращающийся с угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с, у которого $R_1 = 2r_1 = 0{,}4$ м.

Необходимо ответить на вопросы и найти указанные величины.

1. Какое движение совершает блок 1? Найти $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$ и показать эти векторы.
2. Какое движение совершает блок 2?
3. Найти скорости точек K и D.
4. Определить положение МЦС блока 2 и его угловую скорость.
5. Определить скорость точки C.

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Сложным движением точки называют движение, которое рассматривают одновременно в основной (неподвижной) $o_1x_1y_1z_1$ и в подвижной системах отсчета $oxyz$.

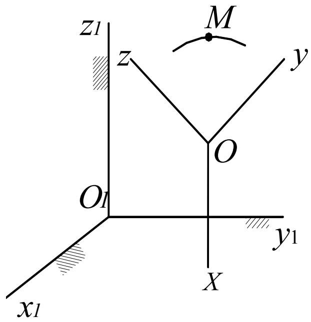


Рис.5.1

Движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета называют **относительным**. Движение подвижной системы по отношению к неподвижной называют **переносным**. Движение точки М по отношению к неподвижной системе отсчета называют **абсолютным** (рис.5.1).

Пример *а*. Человек идет по движущемуся вагону метро. Движение человека можно рассматривать как сложное, состоящее из двух движений. Если основную (неподвижную) систему координат связать с платформой станции метро, то движение человека относительно этой системы координат будет абсолютным. Движение человека относительно вагона, с которой связана подвижная система координат, будет относительным. Движение вагона, с которой жестко связана подвижная система координат, т.е. движение подвижной системы, будет переносным.

Пример *б*. Движение поршня в двигателе движущегося автомобиля можно рассматривать как сложное. Движение поршня относительно какой-либо неподвижной точки на дороге, которую принимают за начало неподвижной, основной системы координат, будет абсолютным. Движение поршня относительно автомобиля, с которым жестко связана подвижная система координат, будет относительным. Движение автомобиля, с которым связана подвижная система координат, относительно неподвижной системы будет переносным.

Решение задач на эту тему требует четкого знания понятий относительного, переносного и абсолютного движений, точки, а также умения найти скорость и ускорение точки в этих движениях.

Умение правильно выбрать подвижную и неподвижную системы(тела) отсчета является необходимым условием успешного решения задач на сложное движение.

Скорость точки в сложном движении (абсолютная скорость) V определяется по формуле

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r, \qquad (5.1)$$

где $\overline{V}_e$ и $\overline{V}_r$ – переносная и относительная скорости точки. Чтобы из (5.1) найти какую-либо характеристику точки (например $\overline{V}_a$), необходимо найти две другие ($\overline{V}_e$ и $\overline{V}_r$) и сложить их геометрически. При этом пользуются правилом остановки одного из двух движений.

Чтобы найти переносную скорость точки, необходимо мысленно остановить относительное ее движение. Наблюдаемая при этом в данный момент скорость является переносной. Чтобы найти относительную скорость точки, необходимо мысленно остановить переносное ее движение. Наблюдаемая при этом в данный момент скорость является относительной.

Ускорение точки а сложном движении (абсолютное ускорение) определяется по формуле

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c, \qquad (5.2)$$

где $\overline{a}_e$ и $\overline{a}_r$ – переносное и относительное ускорения точки определяются с помощью правила остановки одного из двух движений; $\overline{a}_c$ – кориолисово ускорение. Оно определяется по формуле

$$\overline{a}_c = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r), \qquad (5.3)$$

где $\overline{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения. Модуль кориолисового ускорения определяется по формуле

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \overline{V}_r}). \qquad (5.4)$$

Направление кориолисового ускорения определяется с помощью векторного произведения (5.3) или по правилу Н.Е.Жуковского:

Чтобы найти направление ($\overline{a}_c$), необходимо спроектировать относительную скорость ($\overline{v}_r$) на плоскость, перпендикулярную к вектору угловой скорости ($\overline{\omega}_e$) и затем повернуть эту проекцию на 90° по направлению переносной угловой скорости. (5.5)

Примечания. 1. Если переносное движение является вращательным, а относительное – криволинейным, то формулу (5.2) лучше записать в следующем виде:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_c, \tag{5.6}$$

где $\overline{a}_e^n$, $\overline{a}_r^n$, $\overline{a}_e^\tau$, $\overline{a}_r^\tau$ – нормальные и касательные составляющие ускорений точки в переносном и относительном движениях соответственно 2. Чтобы найти абсолютное ускорение точки, необходимо найти переносное, относительное и кориолисово ускорение и сложить их геометрически в соответствии с формулами (5.2) или (5,6). Для определения величины абсолютного ускорения выражения (5.2) или (5.6) проектируют на три взаимно перпендикулярные оси и определяют ускорение по формуле

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} \tag{5.7}$$

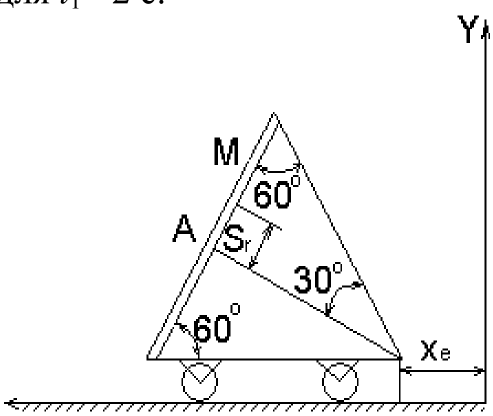
Вопросы и задачи.

5.1. Как следует выбирать подвижную систему отсчета?

5.2. В каких случаях кориолисово ускорение равно нулю?

5.3. Назвать основные этапы решения задач на сложное движение точки.

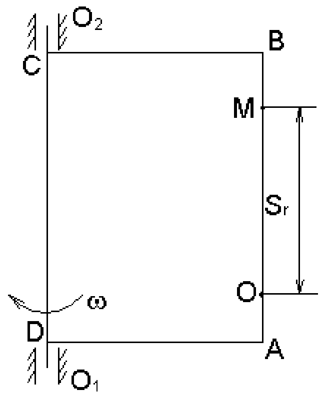
5.4. Треугольная пластина на колесах движется по горизонтальной плоскости по закону $x_e = -Bt + 3t^2$ (X_e – в метрах, t – в секундах). По стороне пластины перемещается точка M по закону $AM = S_r = 4\sin\frac{\pi}{3}t$ м. Ответить на вопросы для t_1= 2 с.



1. Какое движение совершает точка M.
2 Определить положение точки M на пластине.
3. Определить скорость относительного движения точки M.
4. Что следует понимать под переносной скоростью точки M.
5. Определить скорость переносного движения точки M.
6. Определить абсолютную скорость точки M.

7. Определить ускорение относительного движения точки M. 8. Определить ускорение переносного движения точки M. 9. Определить абсолютное ускорение точки M.

5.5.



Прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{2}$ рад/с$=const$. Вдоль стороны AB движется точка M по закону $OM = S_r = a\sin\frac{\pi}{2}t$ м. Дано: $DA = CB = a$.

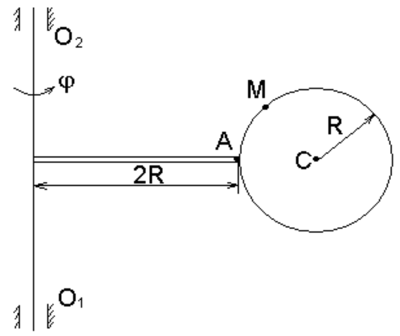
Ответить на вопросы для момента времени t_1=1 с.: 1. Какое движение совершает точка M?

2. Что является относительным движением точки M?

3. Что является переносным движением точки M?

4. Как направлен вектор угловой скорости переносного движения? 5. Определить модули и указать на рисунке векторы скоростей относительного и переносного движений. 6. Определить модуль абсолютной скорости точки M. 7. Каким векторным равенством определяется абсолютное ускорение точки M? 8. Определить относительное ускорение точки M. 9. Определить переносное ускорение точки M. 10. Определить ускорение Кориолиса. 11. Определить абсолютное ускорение точки M.

5.6.



Кольцо R = 0,2 м вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 1{,}2t - t^2$ рад. По кольцу перемещается точка M по закону $AM = S_r = 0{,}2\pi\cos\frac{\pi}{4}t$.

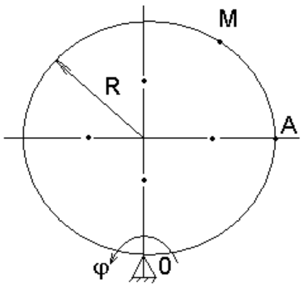
(S_r – в метрах, t – в секундах).

Для момента времени $t_1 = \frac{4}{3}c$ ответить на вопросы:

1. Какое движение совершает точка M?
2. Что является относительным движением точки M?
3. Что является переносным движением точки M?
4. Каким векторным равенством определяется абсолютная скорость точки M?
5. Определить скорость относительного движения и показать ее направление.
6. Определить переносную скорость точки M и показать ее направление.
7. .Определить модуль и направление вектора абсолютной скорости точки M.
8. Каким векторным равенством определяется абсолютное ускорение точки M?
9. Определить относительное ускорение точки M.
10. Определить переносное ускорение точки M.
11. Изобразить на рисунке векторы ускорений относительного и переносного движений.

12. Определить ускорение Кориолиса.
13. Изобразить на рисунке вектор ускорения Кориолиса.
14. Определить абсолютное ускорение точки M.
15. Определить положение точки M на кольце для момента времени $t_2 = 2$ с.
16. Определить скорость относительного движения точки для $t_2 = 2$ с.

5.7.



Точка M движется по кольцу $R = 0{,}3$ м по закону $AM = S_r = 0{,}75\pi(0{,}1t + 0{,}3t^3)$ (S_r – в метрах, t – в секундах). Кольцо вращается в плоскости рисунка относительно оси проходящей через точку O по закону $\varphi = 2t - 0{,}3t^2$ рад.

Ответить на вопросы для момента времени $t_1 = 1$ с.:
1. Указать относительное и переносное движения точки M.
2. Определить относительную и переносную скорости точки M.
3. Изобразить на рисунке векторы скоростей относительного и переносного движений.
4. Определить модуль абсолютной скорости.
5. Записать теорему Кориолиса.
6. Определить составляющие $\overline{a}_r^n$ и $\overline{a}_r^\tau$ относительного ускорения точки M.
7. Определить составляющие $\overline{a}_e^n$ и $\overline{a}_e^\tau$ переносного ускорения точки M.
8. Указать на рисунке векторы относительного и переносного ускорений.
9. Определить величину и направление ускорения Кориолиса.
10. Определить абсолютное ускорение точки M.

6. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ МЕТОДОМ ВИЛЛИСА.

Метод Виллиса применяют для определения угловых скоростей зубчатых механизмов, в которых имеются зубчатые колеса, вращающиеся относительно подвижных осей, т.е. планетарные или дифференциальные механизмы.

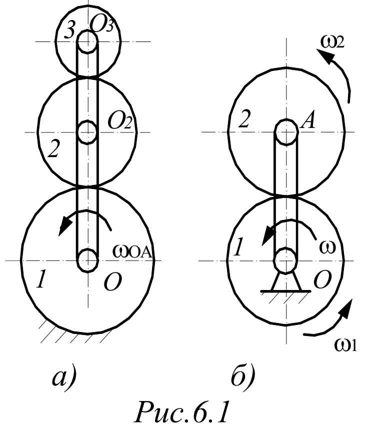


Рис.6.1

На рис. 6.1а изображена схема планетарного зубчатого механизма, в котором колесо (1) неподвижно, а остальные колеса приводятся в движение кривошипом, который называют водилом. Ось водила совпадает с осью неподвижного колеса. На рис.6.1б изображен дифференциальный зубчатый механизм, в котором колесо 1 и водило (кривошип) вращаются вокруг одной и той же оси, проходящей через точку O.

Метод Виллиса основан на теории сложения вращений вокруг параллельных осей. Зубчатые колеса участвуют в двух движениях:

а) в относительном вращении зубчатых колес по отношению к водилу,

б) в переносном вращении вместе с водилом вокруг его оси (переносной угловой скоростью для каждого зубчатого колеса будет угловая скорость водила).

При расчете определяют зависимость между относительными угловыми скоростями, которые равны разности абсолютных и переносных угловых скоростей. В этом случае отношения между относительными угловыми скоростями обратно пропорциональны радиусам колес или числу зубьев, взятые со знаком минус, если зацепление внешнее, и со знаком плюс, если зацепление внутреннее.

Пример *а*. Определить угловую скорость колеса 2 дифференциального механизма (рис.6.2), если ω_{OA}=4 рад/с, ω_1=8 рад/с, r_1=30 см, r_2=15 см.

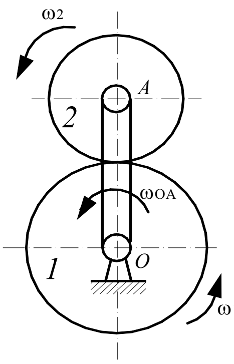


Рис. 6.2

Решение. В механизме переносная угловая скорость – это угловая скорость кривошипа (водила) *OA*. Тогда относительная скорость каждого колеса будет равна (направление абсолютной угловой скорости колеса 2 выбираем против хода часовой стрелки) разности абсолютной и переносной угловых скоростей:

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_{OA},$$

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_{OA}.$$

Составим отношение для механизма, учитывая, что колеса 1 и 2 имеют внешнее зацепление:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_{OA}}{\omega_2 - \omega_{OA}} = -\frac{r_2}{r_1},$$

$$-(\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2} = \omega_2 - \omega_{OA},$$

$$\omega_2 = \omega_{OA} - (\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2},$$

$$\omega_2 = 4 - (8-4)\frac{30}{15} = 4 - 8 = -4 \text{рад/с}.$$

Минус показывает, что колесо 2 вращается по часовой стрелке, т.е. противоположно первоначально выбранному направлению.

Ответ. $\omega_2 = -\,4$ рад/с. Угловая скорость колеса 2 направлена противоположно угловой скорости водила и колеса 1.

Пример *б*. Определить угловую скорость колеса 2 дифференциального механизма в случае внутреннего зацепления (рис. 6.3), если $\omega_{OA} = 8$ рад/с, $\omega_1 = 12$ рад/с, $r_1 = 60$ см, $r_2 = 15$ см.

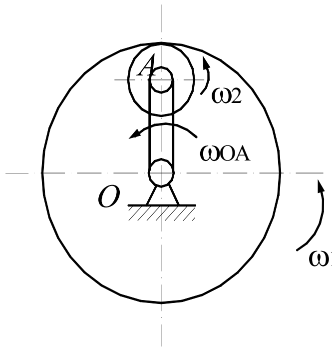


Рис. 6.3

Решение. Переносная угловая скорость – это угловая скорость кривошипа (водила) OA. Относительная скорость каждого колеса равна (абсолютную угловую скорость колеса 2 считаем направленной против хода часовой стрелки):

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_{OA},$$
$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_{OA}.$$

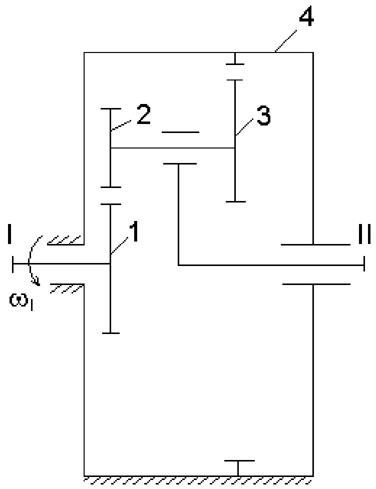
Составим отношение для механизма, учитывая, что колеса 1 и 2 имеют внутреннее зацепление.

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_{OA}}{\omega_2 - \omega_{OA}} = \frac{r_2}{r_1}, \qquad (\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2} = \omega_2 - \omega_{OA},$$

$$\omega_2 = \omega_{OA} + (\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2}, \qquad \omega_2 = 8 + (12 - 8)\frac{60}{15} = 8 + 16 = 24 \text{рад/с}.$$

Вопросы и задачи

6.1.

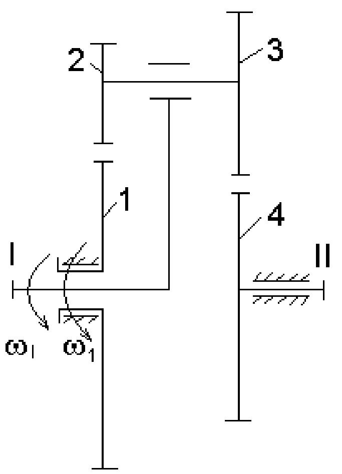


Ведущий вал 1 редуктора делает $\omega_1 = 120$ рад/с. Неподвижное зубчатое колесо с внутренним зацеплением имеет $z_4 = 180$ зубцов; бегающие шестеренки, спаренные между собой, имеют $z_2 = 40$ и $z_3 = 60$ зубцов. Шестеренка, закрепленная на ведущем валу, имеет 80 зубцов.

Ответить на вопросы и найти указанную величину:

1. Как называется механизм?
2. Какая угловая скорость механизма будет переносной?
3. Составьте формулу Виллиса и определите ω_2.

6.2.



Ведущий вал вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 120$ рад/с. Колесо 1 вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 180$ рад/с и имеет число зубцов $z_1 = 80$; а бегающие колеса имеют $z_2 = 20$; $z_3 = 40$. Колесо 4 имеет $z_4 = 60$ зубцов. Колесо 1 и ведущий вал 1 вращаются в одном направлении.

Ответить на вопросы и найти указанную величину:

1. Как называется механизм?
2. Какая угловая скорость механизма будет переносной?
3. Составьте формулу Виллиса и определите ω_2.

Ответы на вопросы задач

2.1. Да, можно.

2.2. В том случае, когда известна траектория точки.

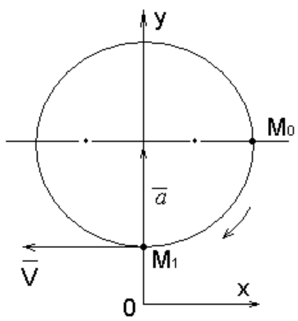
2.3. Если модуль скорости не изменяется со временем.

2.4. Если модуль касательного ускорения не изменяется со временем.

2.5. При прямолинейном движении всегда и криволинейном, когда нормальное ускорение равно нулю. С нормальным – при равномерном движении точки по кривой.

2.6. Равномерного – $S = S_0 + V_t$, равнопеременного – $S = S_0 + V_0 t + a_\tau t^2 / 2$.

2.7.



1. $\dfrac{x}{3} = \cos t;\ \dfrac{y-5}{3} = -\sin t \Rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 9$ окружность с центром в точке (0,5).

2. При $t = 0$ $X_0 = 3$ см, $Y_0 = 5$ см; при $t_1 = \dfrac{\pi}{2} c$ $X_1 = 0;\ Y_1 = 2$ см.

3. По ходу часовой стрелки, т.к. при $t = \pi / 4$ с $X_0 > X > X_1$, а $Y_0 = Y$.

4. Изменится, т.к. в этом случае при $t = \pi / 4c$. $X_0 > X > X_1$, а $Y_0 = Y$.

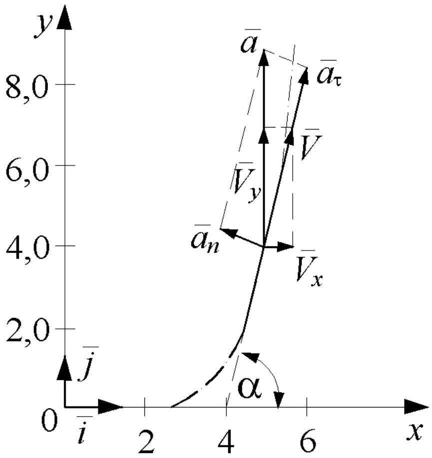
5. $V_x = \dfrac{dx}{dt} = -3\sin t;\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = -3\cos t.\ V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ =3 см/с и не зависит от t.

При $t_1 = \pi/2c$ $V_x = -3$ см/с, $V_y = 0 \Rightarrow \overline{V}_y \perp OY$ и направлен противоположно оси OX.

6. $a_x = dV_x / dt = -3\cos t;\ a_y = dV_x / dt = 3\sin t$ $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 3$ см/с$^2 \Rightarrow \overline{a} \perp OX$ и направлен вдоль оси OY.

7. Равномерное, т.к. $V = const$.

2.8.



1. $t = \dfrac{x-3}{2};\ y = x^2 - 6x + 9$ - парабола.

2. $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8{,}24$ см/с.

3. $a = a\sqrt{V_x^2 + a_y^2} = 8$ см/с^2.

4. $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \left.\dfrac{32}{\sqrt{1+16t^2}}\right|_{t=1} = 7{,}8$ см/с^2.

5. $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 1{,}9$ см/с^2.

6. $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = 35$ см.

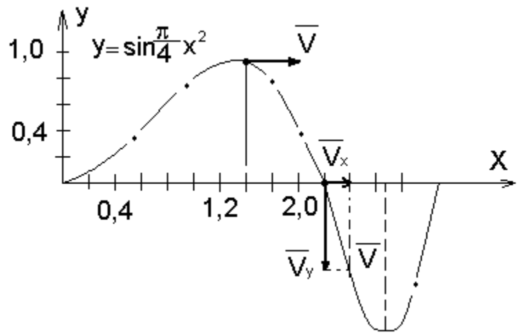
7. $\cos(\bar{i}, \bar{a}_\tau) = \cos(\bar{i}, \bar{V}_\tau) = \dfrac{V_x}{V} = 0{,}243 \Rightarrow L(\bar{i}, \bar{a}_\tau) = 76^\circ$.

8. $S = \int\limits_0^t V dt = \int\limits_0^t \sqrt{x^2 + y^2}\, dt = \left(t\sqrt{1+16t^2} + \dfrac{1}{4}\ln\left(4t + \sqrt{1+16t^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 = 4{,}7$ см.

2.9. 1. $y = \sin\dfrac{\pi}{4}x^2$.

2. Из условия $y = 0 \Rightarrow \sin \pi t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$ с.

3. $V_x = x = 2$. $V_y = \dot{y} = 2\pi t \cos \pi t^2$; $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\Big|_{t_1=1} = 6{,}6$ см/с.



4.

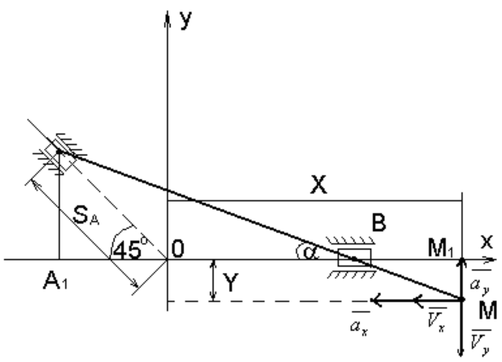
$a_x = 0;\ a_y = dV_y / dt = 2\pi \cos \pi t^2 - 4\pi^2 t^2 \sin \pi t^2$.

$a = |a_y|\big|_{t_1=1} = 2\pi = 6{,}28$ см/с^2.

5. В момент наибольшего управления $V_y = 0$.

Тогда $V = V_x = 2$ см/с.

2.10.



Составим уравнения движения точки *M*.

1. $x = A_1M_1 - OA_1 = AM \cdot \cos\alpha - OA \cdot \cos 45^\circ$;

$y = -MM_1 = -BM \sin\alpha$.

Так как

$AA_1 = OA \sin 45^0 = AB \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{OA \sin 45^\circ}{AB} =$

$= \sin \pi t \Rightarrow \alpha = \pi t$.

Тогда $x = 45\cos \pi t - 30\sin \pi t$ см, $y = -15\sin \pi t$ см.

2. $V_x = dx / dt = (-4\pi \sin \pi t - 30\pi \cos \pi t)\big|_{t=\frac{1}{6}} = -48{,}45\pi$ см/с.

$V_y = dx / dt = (-15\pi \cos \pi t)\big|_{t=\frac{1}{6}} = -12{,}9\pi$ см/с.

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 50{,}2\pi$ см/с.

3. $a_x = aVx / dt = (-45\pi^2 \cos \pi t + 30\pi^2 \sin \pi t)\big|_{t=\frac{1}{6}} = -23{,}9\pi^2$ см/с^2.

$a_y = aVx / dt = 15\pi^2 \sin \pi t)\big|_{t=\frac{1}{6}} = 7{,}5\pi^2$ см/с^2.

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 25{,}05\pi^2$ см/с^2.

4. $a_\tau = \dfrac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \dfrac{-48{,}45\pi(-23{,}9\pi^2) + (-12{,}9\pi)\cdot 7{,}5\pi^2}{50{,}2\pi} = 21{,}1\pi^2$ см/с^2.

5. $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 13{,}4\pi^2$ см/с^2.

6. $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = 188$ см.

7. Угол между вектором скорости и вектором ускорения равен углу между вектором касательного и полного ускорений. Поэтому

$$tg(\overline{V}\,\hat{,}\,\overline{a}) = \frac{a_n}{a_\tau} = 0{,}625 \Rightarrow L(\overline{V}\,\hat{,}\,\overline{a}) = 32^\circ.$$

2.11. 1. $V = ds/dt = \left(-10e^{-2t}\sin\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{5}{2}\pi e^{-2t}\cos\dfrac{\pi}{2}t\right)\Bigg|_{t=1} = -1{,}35$ см/с.

2. $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}\left(20e^{-2t}\sin\dfrac{\pi}{2}t - 10\pi e^{-2t}\cos\dfrac{\pi}{2}t\,\dfrac{5}{4}\pi^2 e^{-2t}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}t\right)\Bigg|_{t=1} = 1{,}03$ см/с^2.

$a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{1{,}35^2}{20} = 1{,}14$ см/с^2.

3. $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 1{,}04$ см/с^2.

4. Криволинейное замедленное, т.к. при $t = 1$ $V/a_\tau = 0$ и $a_n \neq 0$.

2.12. 1. $V = 5\pi\cos\dfrac{\pi}{2}t\Bigg|_{t=4} = 5\pi$ см/с.

2. $a_\tau = dV/dt = -\dfrac{5\pi^2}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}t\Bigg|_{t=4} = 0$.

3. $S = \int\limits_0^t V dt = \int\limits_0^4 5\pi\cos\dfrac{\pi}{2}t dt = 10\sin\dfrac{\pi}{2}t\Bigg|_{t=4} = 0$.

4. $Q = |S_1 - S_0| + |S_2 - S_1| + |S_3 - S_2| + |S_4 - S_3| = 40$ см, где $S_0 = 0$.

$S_1 = S|_{t=1} = 10;\;\; S_2 = S|_{t=2} = 0;\;\; S_3 = S|_{t=3} = -10;\;\; S_4 = S|_{t=4} = 0$.

2.13. 1. Запишем формулы равнопеременного движения

$$V = V_0 + a_\tau t \Rightarrow a_\tau = \frac{V - V_0}{t}.$$

$A = V_0 t + a_\tau t^2/2 \Rightarrow S = V_0 t + \dfrac{(V - V_0)t}{2} = \dfrac{(V + V_0)t}{2} \Rightarrow V_0 = \dfrac{2S - Vt}{t} =$

$= \dfrac{2\cdot 1500 - 20\cdot 120}{120} = 5$м/с.

2. В начале участка $a_\tau = \dfrac{V - V_0}{t} = \dfrac{20-5}{120} = 0{,}125$ м/с^2.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0{,}05 \text{ м/с}^2;\ a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 0{,}134 \text{ м/с}^2.$$

3. В конце 2-й минуты $a_\tau = 0{,}125$ м/с., т.к. движение равнопеременное

$$a_n = \frac{20^2}{500} = 0{,}8 \text{ м/с}^2;\ a = \sqrt{0.125^2 + 0{,}8^2} = 0{,}81 \text{ м/с}^2.$$

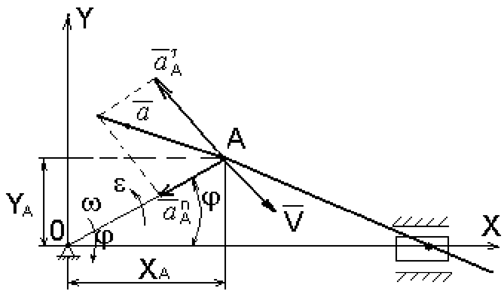
3.1. Если $\omega = const$, то движение – равномерное. В случае $\varepsilon = const$ равнопеременное.

3.2. В этом случае полное ускорение равно нормальному и направлено к центру окружности – траектории точки.

3.3. По касательной к окружности или перпендикулярно к радиусу окружности.

3.4. Вдоль оси вращения в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против хода часовой стрелки.

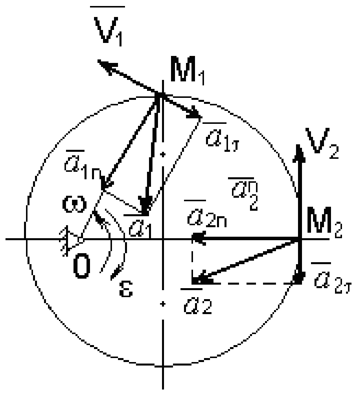
3.5.



1. $X_A^2 + Y_A^2 = |OA|^2$ –- окружность с центром в точке O и радиусом A.
2. $\omega = d\varphi / dt = (2t-3)|t = -1$ рад/с.
3. $\varepsilon = d\omega / dt = 2$ рад/с^2.
4. Замедленное, т.к. $\omega\langle 0$, а $\varepsilon\rangle 0$.
5. $V_A = \omega \cdot OA = 1 \cdot 20 = 20$ см/с; $\bar{V}_A \perp OA$.

6. $a_n = \omega^2 OA = 20$ см/с^2 направлено от A к O. $a_\tau = \varepsilon \cdot OA = 40$ см/с^2, $\bar{a}_\tau \perp OA$ направлен в сторону ε.

3.6.



1. $V_{M_1} = \omega \cdot OM_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^2}{4} + R^2} = \pi\sqrt{5}R = 2{,}11$ м/с.

$OM_1 = \sqrt{\dfrac{R^2}{4} + R^2}$.

$V_{M_2} = \omega \cdot OM_2 = 2\pi \cdot \dfrac{3}{2}R = 2{,}83$ м/с.

$OM_2 = \dfrac{3}{2}R$.

2. $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$; $\omega_0 = \dfrac{\pi n_0}{30} = 10\pi$ рад/с. $\varepsilon = \dfrac{\omega_0 - \omega}{t} = \dfrac{10\pi - 2\pi}{10} = 0{,}8\pi /$ рад/с^2.

3. $\varphi = 2\pi N$; $\varphi = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow N = \dfrac{2\omega_0 t - \varepsilon t^2}{4\pi} = \dfrac{2 \cdot 10\pi \cdot 10 - 0{,}8\pi \cdot 100}{4\pi} = 30$ оборотов.

4. $a_1 = OM_1\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 10{,}6$ м/с^2.

$a_2 = OM_2\sqrt{\varepsilon^1 + \omega^4} = 14{,}2$ м/с^2.

3.7. 1. $\omega^2 = \dfrac{\pi n_2}{30} = 20$ рад/с.

2. $V_{M_1} = V_{M_2}$, т.к. ремень не проскальзывает, $\Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_1 = \dfrac{\omega_2 r_2}{r_1} = 40\pi$ рад/с.

3. $V_{M_1} = V_{M_2} = \omega_1 r_1 = 40\pi \cdot 25 = 1000\pi$ см/с.

4. Из формулы $\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon_1 t$ при $\omega_0 = 0$ $t = \dfrac{\omega_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{40\pi}{0{,}4\pi} = 100c$.

5. $a_n = \omega_2^2 r_2 = 2 \cdot 10^4 \pi^2$ см/с^2; $a_\tau = \varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2 = 10\pi$ см/с^2;

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \cong 2 \cdot 10^4 \pi^2$ см/с^2.

3.8. 1. $V_A = ds/dt = 100t\big|_{t=1} = 100$ см/с.

2. $a_A = d^2S/dt^2 = 100$ см/с^2.

3. $\omega_1 = \dfrac{V_A}{R_1} = \dfrac{100t}{20} = 5t$. Т.к. окружные скорости колес, находящихся в зацеплении, равны, то $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{\omega_1 r_1}{r_2} = \dfrac{5t \cdot 15}{30} = 2{,}5t$ рад/с. $\omega_2\big|_{t=1} = 2{,}5$ рад/с.

$\varepsilon_2 = \dfrac{d\omega_2}{dt} = 2{,}5$ рад/с^2.

4. $V_M = \omega_2 r_2 = 75$ см/с.

5. $a_M = r_2\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 2{,}02$ м/с^2.

3.9. 1. Из условия $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ с учетом, что $r_1 = KZ_1$, $r_2 = KZ_2$, $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 z_1}{z_2} = \omega_2$.

2. $i_{1.3} = \dfrac{\omega_1}{\omega_3} = \dfrac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$, т.к. $\omega_2 = \omega_3$, а $\omega_4 = \omega_3 = \dfrac{\omega_3 z_3}{z_4}$.

4.1. Любое тело, точки которого лежат в одной плоскости – так же отрезок прямой линии.

4.2. Рассматриваемое тело или механизм обязательно изображают в том положении, какое указано в условии задачи.

4.3. Потому, что зная МЦС, можно показать направление скорости любой точки (она перпендикулярна отрезку, соединяющему точку с МЦС).

4.4. Нет. Она может находиться в любом месте в плоскости фигуры.

4.5. В этом случае следует найти МЦС каждого звена отдельно.

4.6. Нет. Точки обязательно должны принадлежать одному телу (звену).

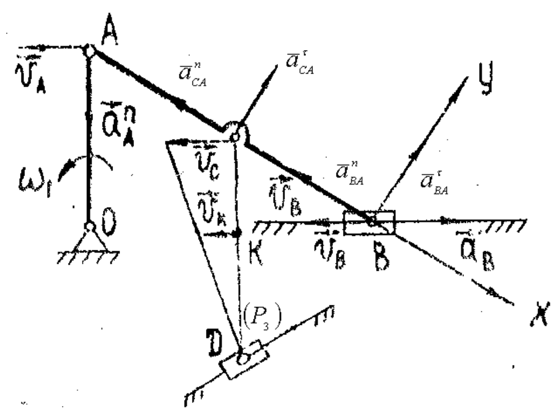
4.7. Двумя способами. С помощью (4.2) или (4.4).

4.8. Нет, не зависит.

4.9. Их модули находятся одинаковым образом, сравни (4.7) и (3.7). Различие в направлениях и величине. $\overline{a}_B^n$ – направлено по нормали к центру кривизны кривой, $\overline{a}_B^\tau$ перпендикулярно к $\overline{a}_B^n$; $\overline{a}_{BA}^n$ – направлено к произвольному полюсу, $\overline{a}_{BA}^B$ перпендикулярно к $\overline{a}_{BA}^n$.

4.10. Двумя способами. С помощью (4.6) путем нахождения $\overline{a}_{BA}^B \Rightarrow \varepsilon = \overline{a}_{BA}^B / BA$ и (4.4) $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{V_B}{\ell}\right)$.

4.11.



1. Вращательное $V_A = \omega_1 \cdot \ell_1$.
2. МЦС AB в бесконечности.
3. $\omega_2 = 0$. Мгновенно-поступательное. $V_B = V_C = V_A$.
4. МЦС CD в точке D. $V_D = 0$.
5. $\omega_3 = \dfrac{V_c}{CD} = \dfrac{\omega_1 \cdot \ell_1}{\ell_3}$. $V_K = \dfrac{V_c}{2} = \dfrac{\omega_1 \cdot \ell_1}{2}$.

6. $\overline{a}_A = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n$, $a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot \ell_1 = 0$, $a_A^n = \omega_1^2 \cdot \ell_1$, $a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \omega_1^2 \ell_1$.

7. $\overline{a}_c = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^B$ (*). Точка A, принята за полюс.

8. $\overline{a}_{BA}^{ц} = \omega_2^2 \cdot \ell_2 = 0$.

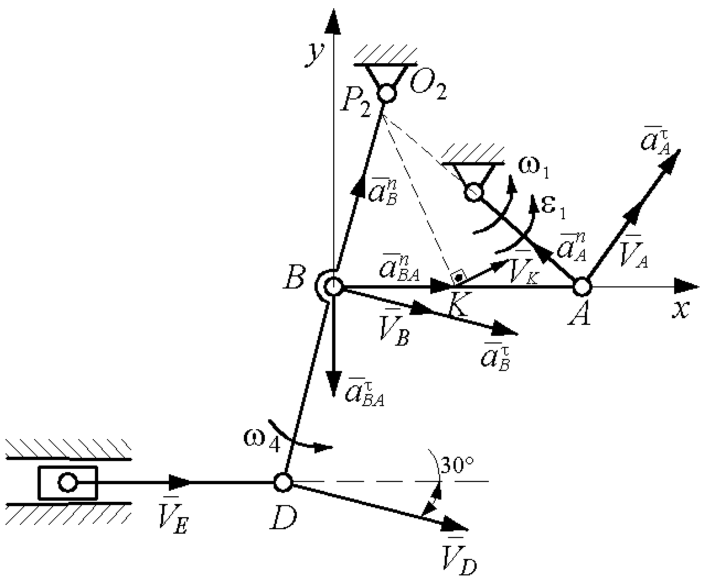
9. Следует выбрать координатные оси так, чтобы на одну из них $\overline{a}_{BA}^B$ спроектировалось в точку. Проектируя равенство (*) на Bx, получим, получим $a_B \cdot \cos\alpha = a_A^n \cdot \sin\alpha \Rightarrow a_B = \omega_1^2 \cdot \ell_1 \cdot tg\alpha$. Проектируя равенство (*) на By, получим: $a_B \cdot \sin\alpha = -a_A^n \cdot \cos\alpha + a_{BA}^\tau \Rightarrow a_{BA}^\tau = \dfrac{\omega_1^2 \ell_1}{\cos\alpha}$. Знак «+» указывает, что направления $\overline{a}_B$ и $\overline{a}_{BA}^\tau$ выбраны верно.

10. $\varepsilon_2 = \dfrac{a_{BA}^\tau}{\ell_2} = \dfrac{\omega_1^2 \ell_1}{\ell_2 \cos\alpha}$.

11. $\overline{a}_c = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA}^n + \overline{a}_{CA}^\tau$ (**), $a_{CA}^n = \omega_2^2 \cdot \dfrac{\ell_2}{2} = 0$, $a_{CA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot \dfrac{\ell_2}{2} = \dfrac{\omega_1^2 \ell_1}{2\cos\alpha}$ проектируя равенство (**), получим: на $Bx: a_{cx} = \alpha_A^n \sin\alpha$ и $By: a_{cy} = -a_A^n \cos\alpha + a_{CA}^\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow a_c = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2}$. Направление $\bar{a}_c$ определится по формулам: $\cos(\bar{a}_c \widehat{,}\, \bar{i}) = \dfrac{a_{cx}}{a_c}$, $\cos(\bar{a}_c \widehat{,}\, \bar{j}) = \dfrac{a_{cy}}{a_c}$.

4.12.



1. Вращательное $V_A = \omega_1 \cdot \ell_1 = 2$ м/с.
2. Плоскопараллельное $V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ$, $V_B = 1{,}15$ м/с. МЦС тела AB и P_2 – пересечение перпендикуляров к $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$.

3. $\omega_2 = \dfrac{V_A}{|AP_2|} = \dfrac{V_B}{|BP_2|} = 5{,}8$ рад/с.

$\omega_4 = \dfrac{V_B}{|BO_2|} = 3{,}8$ рад/с.

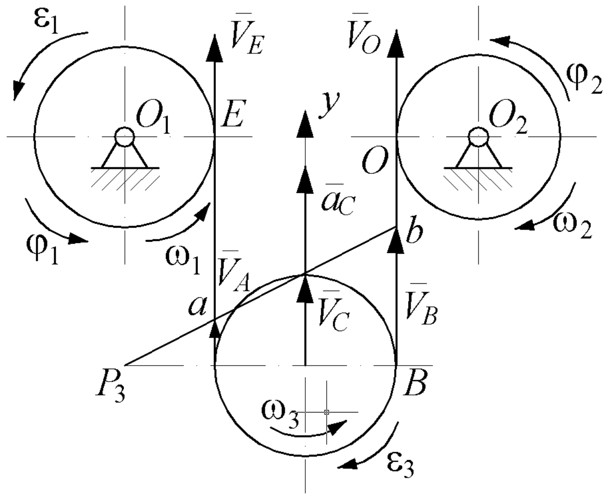
4. $V_D = 2V_B = 2{,}3$ м/с, $V_E = V_D \cos 30^\circ = 2$ м/с. $\bar{V}_K \perp KP_2$.

5. С одной стороны B принадлежит O_2D. Поэтому $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau$. С другой - звену AB, которое движется плоско-параллельно. Поэтому $\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$. Следовательно, $\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$ (*), $a_B^n = \omega_4^2 |BO_2| = 4{,}5$ м/с^2, $a_A^n = \omega_1^2 \ell_1 = 20$ м/с^2, $a_{BA}^n = \omega_2^2 \ell_2 = 13{,}3$ м/с^2.

6. $a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2}$; $a_B^n = 4{,}5$ м/с^2., для определения a_B^τ необходимо равенство (*) спроектировать так, чтобы неизвестное $\bar{a}_{BA}^\tau$ спроектировалось в точку. Поэтому выбираем оси Bx и By и проектируем (*)на Bx: $a_B^n \cos 60^\circ + a_B^\tau \cos 30^\circ = - a_A^n \cos 30^\circ + a_A^\tau \cos 60^\circ + a_{BA}^n \Rightarrow a_B^\tau = -4{,}5$ м/с^2. Знак (–) показывает, что $\bar{a}_B^\tau$ на рис. следовало показать в противоположную сторону, т.е. звено 4 вращается замедленно $a_B = 4{,}5\sqrt{2}$ м/с^2.

4.13. 1. $\omega_1 = \varphi_1' = \ell^{t-1} = 1$ рад/с, $\omega = \varphi_2' = -4$ рад/с.
Направления показаны на рис. $V_E = \omega_1 \cdot R_1 = 0{,}2$, $V_D = \omega \cdot r = 0{,}4$ м/с.

2. Ввиду нерастяжимости нити $V_A = V_E$, $V_B = V_D$. Плоско-параллельное. МЦС блока 3 в P_3; лежит на пересечении прямых AB и ab. P_3 находим из соотношения $\dfrac{V_B}{V_A} = \dfrac{|BP_3|}{|AP_3|} \Rightarrow |AP_3| = 0{,}4$ м.



3. $\omega_3 = \dfrac{V_B}{|BP_3|} = \dfrac{V_A}{|AP_3|} = 0{,}5$ рад/с.

$\overline{V}_c = \dfrac{\overline{V}_A + \overline{V}_B}{2}$ (*) (как средняя линия трапеции), $V_{oy} = \dfrac{1}{2}(V_{Ay} + V_{By}) = 0{,}3$ м/с, $V_{cx} = \dfrac{1}{2}(V_{Ax} + V_{Bx}) = 0$, $V_c = V_{Cy} = 0{,}3$ м/с.

4. $\varepsilon_1 = \varphi_1'' = \ell^{t-1} = 1$ рад/с^2, движение ускоренное, $\varepsilon_2 = \varphi'' \cdot 0$, вращение равномерное. Равенство (*) выполняется в любой момент времени. Поэтому $\overline{a}_c = \dfrac{d\overline{V}_c}{dt} = \dfrac{1}{2}(\overline{a}_A + \overline{a}_B)$ (**). Проектируя (**) на ось Cy, учитываем, что $a_c = |a = c_y|$, т.к. точка С движется по вертикальной прямой.

$a_{Ay} = a_A^B = a_E^\tau = \varepsilon_1 R_1$, $a_{By} = a_B^B = a_D^\tau = \varepsilon_2 r = 0$,

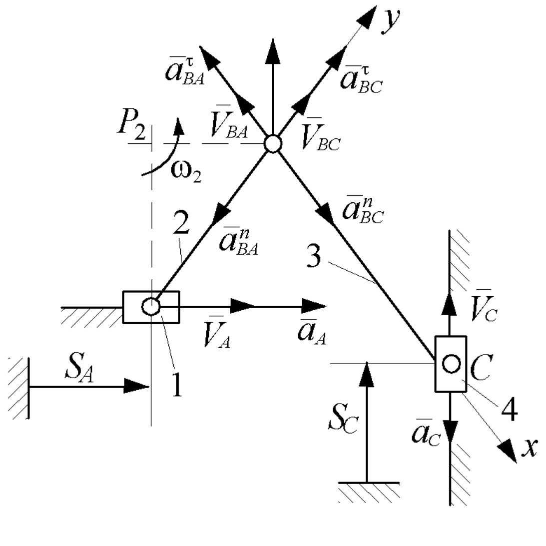
т.к. $\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow a_C = a_{Cy} = \dfrac{1}{2} a_{Ay} = 0{,}1$ м/с^2.

4.14. 1. $V_A = \dot{S}_A = 0{,}2$ с/м, $V_C = \dot{S}_C = 0{,}2$ с/м.

2. Плоско-параллельное. С одной стороны $B \in AB$ и $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$, с другой - $B \in BC$ и $V_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC}$. Отсюда $\overline{V}_A + \overline{V}_{BA} = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC}$ (*).

3. Проектируя равенство (*) на ось By получим: $V_A = \cos 45^\circ V_c \cos 45^\circ + V_{Bc} \Rightarrow$ $\Rightarrow V_{Bc} = V_A \cos 45^\circ - V_c \cos 45 = 0$.

Из $\overline{V}_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC} \Rightarrow \overline{V}_B = \overline{V}_C$, $|\overline{V}_B| = |\overline{V}_C| = 0{,}2$ м/с.



4. МЦС тела 3 – в ∞, $\omega_3 = \dfrac{V_B}{\infty} = \dfrac{V_C}{\infty} = 0$. Мгновенно-поступательное.

5. МЦС тела AB в P_2 (находится на пересечении перпендикуляров к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$). $\omega_2 = \dfrac{V_A}{|AP_2|} = \dfrac{V_B}{|BP_2|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ рад/с.

6. $a_A = \ddot{S}_A = 0{,}2$ м/с^2, $a_C = \ddot{S}_C = -0{,}2$ м/с^2. Знак (–) указывает на то, что тело 4 движется замедленно.

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau,\ \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau = \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau \qquad (**),$$

7. $\overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau$, $a_{BA}^n = \omega_2^2|BA| = 0{,}1$ м/с^2, $a_{BC}^n = \omega_3^2|BC| = 0$.

Проектируя векторное равенство (**) на ось By, получим: $a_A \cos 45^\circ - a_{BA}^n =$ $= -a_c \cos 45^\circ + a_{BC}^\tau \Rightarrow a_{BC}^\tau = 0{,}18$ м/с^2, знак (+) указывает на то, что вектор $\overline{a}_{BC}^\tau$ показан верно на рис.

8. Проектируя $\overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau$ на оси Bx и By, получим: $a_{Bx} = a_C \cos 45^\circ = 0{,}14$ м/с^2, $a_{By} = -a_C \sin 45^\circ + a_{BC}^\tau = 0{,}04$ м/с^2,

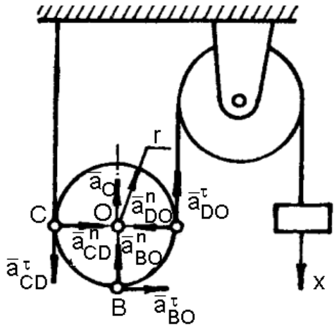
$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 0{,}145$ м/с^2.

9. $V_A = \dot{S}_A = 0{,}4$ м/с, $V_C = \dot{S}_C = 0{,}1$ м/с. Проектируя векторное равенство (*) на ось By, получим: $V_A \cos 45^\circ = V_C \cos 45^\circ + V_{BC} \Rightarrow V_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}3 = 0{,}15\sqrt{2}$ м/с.

Проектируя $\overline{V}_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC}$ на оси Bx и By, получим: $V_{Bx} = -V_C \cos 45^\circ = -0{,}05\sqrt{2}$ м/с^2, $V_{By} = V_{BC} + V_C \cos 45^\circ = 0{,}2$ м/с, $V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2} = 0{,}3$ м/с. Направление $\overline{V}_B$ определяется по формулам:

$$\cos(\widehat{\overline{V}_B \overline{i}}) = \frac{V_{Bx}}{V_B},\ \cos(\widehat{\overline{V}_B \overline{j}}) = \frac{V_{By}}{V_B}.$$

4.15. 1. Плоскопараллельное.



2. В точке С.

3.Определим угловую скорость блока: $\omega = \frac{V_0}{r} = \frac{2t}{r}$.

4. Определим угловое ускорение блока: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{r}$. В момент $t = 0{,}5$ с

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot 0{,}5}{0{,}2} = 5 \text{ с}^{-1},\ \varepsilon = \frac{2}{0{,}2} = 10 \text{ с}^{-2}.$$

5. Определим ускорение точки D: $\overline{a}_D = \overline{a}_O + \overline{a}_{DO}^n + \overline{a}_{DO}^\tau$, $a_0 = 2$ м/с^2.

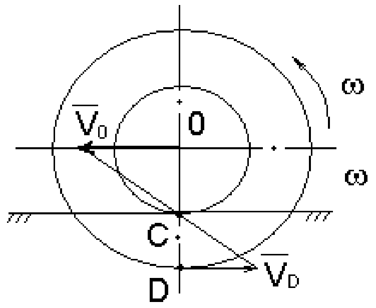
$$\overline{a}_{DO}^n = \omega^2 r = 5^2 \cdot 0{,}2 = 5 \text{ м/с}^2,\ \overline{a}_{DO}^\tau = \varepsilon \cdot r = 10 \cdot 0{,}2 = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Dx} = -a_{DO}^n = -5 \text{ м/с}^2,\ a_{Dy} = a_0 + a_{DO}^\tau = 2 + 2 = 4 \text{ м/с}^2,$$

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6{,}4 \text{ м/с}^2.$$

4.16. 1. Поступательное.

2. Плоскопараллельное.
3. В точке *C*.



4. $\omega = \dfrac{V_D}{CD}$; $V_D = V_K = \dfrac{dx}{dt} = 2t$; $CD = OD - OC = 0{,}1$ м.

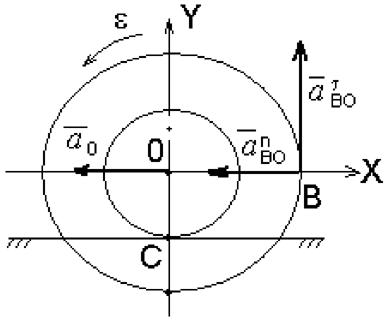
$\omega = \dfrac{2t}{0{,}1} = 20t$; $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 20$ рад/с; $\omega_{t=0{,}5} = 10$ рад/с.

5. $\bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{a}_{BO}^{\tau} + \bar{a}_{BO}^{n}$ (*).

6. $a_0 = \varepsilon \cdot OC = 20 \cdot 0{,}1 = 2$ м/с^2.

$a_{BO}^{\tau} = \varepsilon \cdot OB = 20 \cdot 0{,}2 = 4$ м/с^2.

$a_{BO}^{n} = \omega^2 \cdot OB = 10^2 \cdot 0{,}2$ м/с^2. направление векторов показано на рисунке.



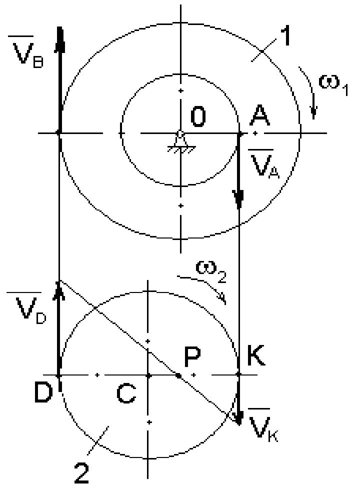
7. Проектируем выражения (*) на оси координат.

$\bar{a}_{Bx} = -\bar{a}_0 - \bar{a}_{BO}^{n} = -2 - 20 = -22$ м/с^2.

$a_{By} = \bar{a}_{BO}^{\tau} = 4$ м/с^2.

$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{22^2 + 4^2} = 22{,}4$ м/с^2.

4.17.



1. Вращательное.
$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$ м/с. $V_B = \omega_1 \cdot R_1 = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$ м/с.
Направление $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ показано на рисунке.
2. Плоскопараллельное.
3. $V_K = V_A = 0{,}4$ м/с; $V_D = V_B = 0{,}8$ м/с.
4. МЦС блока 2 лежит на пересечении прямой DK и прямой, соединяющей концы векторов $\bar{V}_D$ и $\bar{V}_K$. Положения МЦС находим из пропорции.

$\omega_2 = \dfrac{V_D}{DP} = \dfrac{V_K}{KP}$; $DP = 2R_2 - KP$; $R_2 = \dfrac{R_1 + r_1}{2} = 0{,}3$ м.

$\dfrac{V_D}{2R_2 - KP} = \dfrac{V_K}{KP} \Rightarrow KP = \dfrac{0{,}8R_2}{1{,}2} = \dfrac{2}{3}R_2 = 0{,}2$ м$= r_1$. $\omega_2 = \dfrac{V_K}{KP} = \dfrac{0{,}4}{0{,}2} = 2$ рад/с.

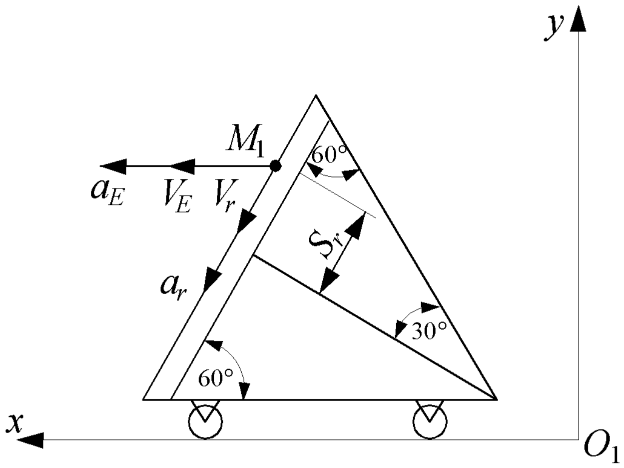
5. $V_C = \omega_2 \cdot CP = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$ м/с.

5.1. По отношению к ней должна перемещаться изучаемая точка.

5.2. Если переносное движение поступательное ($\omega_e = 0$) и если относительная скорость параллельна оси переносного вращения $\left(\bar{V}_r \| \bar{\omega}_e\right)$.

5.3. Первый – выбрать точку, второй – разложить движение на переносное и относительное, третий – применить формулы (5.1) или (5.2) в зависимости от условия задачи.

5.4.



1. Сложное движение, т.к. перемещается по стороне движущейся пластины (относительное движение) и вместе с ней перемещается относительно подвижной системы отсчета XOY (переносное движение).
2. Для этого найдем AM_1 при $t_1 = 2$ с:

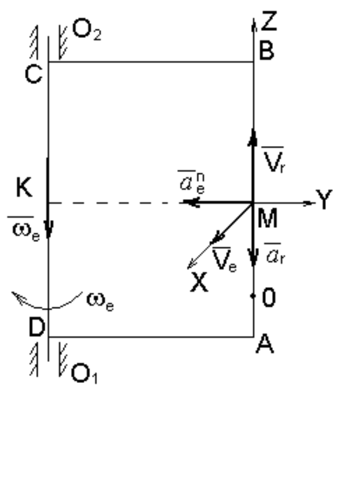
$$AM_1 = S_r = 4\sin\frac{\pi t_1}{3} = 3{,}46 \text{ м.}$$

3. $V_r = \dot{S}_r = 4\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}t_1 = -2$ м/с, где знак минус означает, сто вектор $\overline{V}_r$ направлен в сторону уменьшения S_r (смотри рисунок).
4. Скорость той точки пластины (подвижной системы отсчета)с которой совпадает в данный момент точка M (т.е. M_1, на рис.).
5. $V_e = \dot{X}_e = -8 + 6t_1 = 4$ м/с.
6. $\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e$. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r \cdot V_e \cos(\overline{V}_r \,\hat{,}\, \overline{V}_e)} = 5{,}28 \text{ м/с.}$$

7. $a_r = \ddot{S}_r = -4\dfrac{\pi^2}{9}\sin\dfrac{\pi}{3}t_1 \approx -3{,}46$ м/с^2. Вектор $\overline{a}_r$ совпадает с вектором $\overline{V}_r$.
8. $a_e = \ddot{x}_e \approx 6$ м/с^2. Вектор $\overline{a}_e$ совпадает с вектором $\overline{V}_e$.
9. При переносном поступательном движении $\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e$. Модуль абсолютного ускорения определить по формуле: $a_a = \sqrt{a_r^2 + a_e^2 + 2a_r a_e \cos(\overline{a}_r \,\hat{,}\, \overline{a}_e)} \approx 8$ м/с^2.

5.5.



1. Сложное, т.к. перемещается по вращающемуся телу.
2. Движение точки вдоль AB.
3. Вращательное движение прямоугольника $ABCD$ относительно оси O_1O_2.
4. Вдоль оси O_1O_2 вниз.
5. $V_r = \dot{S}_r = a\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}t_1 = 0$, $V_e = \omega_e \cdot R = \omega_e \cdot MK = \dfrac{\pi}{2}a$ м/с, направлен $\overline{V}_e \perp$пл. $ABCD$ в сторону вращения.
6. Т.к. $\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e$, а по расчету $V_r = 0$, то

$\left|\overline{V}_a\right| = \left|\overline{V}_e\right| = \dfrac{\pi}{2}a$ м/с.

7. При переносном вращательном движении $\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c$.

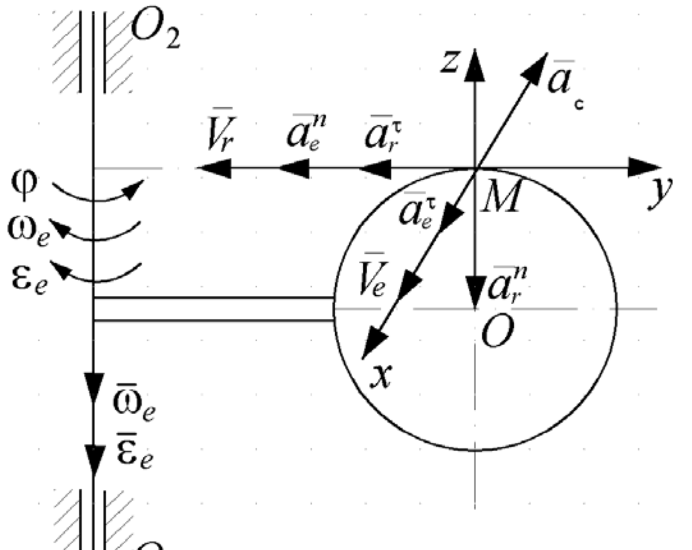
8. $\overline{a}_r = \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau$; $a_r^\tau = \ddot{S}_r = -a\dfrac{\pi^2}{4}\sin\dfrac{\pi}{2}t_1 = -a\dfrac{\pi^2}{4}$ м/с^2 (знак минус указывает, что $\overline{a}_r^\tau$ направлен вниз по BA). $a_r^n = 0$, т.к. относительное движение прямолинейное и $\rho = \infty$.

9. $\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau$; $a_e^n = \omega_e^2 \cdot R = \dfrac{\pi^2}{4}a$ м/с^2 и направлен $\overline{a}_e^n$ к оси вращения; $a_e^\tau = 0$, т.к. $\varepsilon_e = 0$.

10. $a_c = 2\omega_e \cdot V_r \sin(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{V}_r}) = 0$ по двум причинам: в данный момент времени $V_r = 0$ и в любой момент времени $\overline{\omega}_e \| \overline{V}_r$.

11. $a_a = \sqrt{a_r^2 + (a_e^n)^2} = \dfrac{\pi^2}{4}a\sqrt{2}$ м/с^2, т.к. $\overline{a}_r \perp \overline{a}_e^n$.

5.6. Для $t_1 = \dfrac{4}{3}$ с точка М находится в указанном на рисунке положении.



1. Сложное.
2. Движение по кольцу.
3. Вращательное движение кольца относительно неподвижной оси O_1O_2.
4. $\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e$.
5. $V_r = \dot{S} = -0{,}2\dfrac{\pi^2}{4}\sin\dfrac{\pi}{4}t_1 = -0{,}43$ м/с. Отрицательный знак указывает на то, что $\overline{V}_r$ направлен в сторону убывания S.

6. $V_e = \omega_e \cdot R_1$, где $\omega_e = \dot{\varphi} = 1{,}2 - 2t_1 = -1{,}4$ рад/с.
Следовательно, кольцо вращается относительно оси O_1O_2 в сторону, противоположную направлению положительного отсчета угла φ. $R_1 = 3R = 0{,}6$ м. $V_e = 0{,}34$ м/с.

7. Т.к. $\overline{V}_r \perp \overline{V}_e$, то $V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 0{,}94$ м/с. $\cos\widehat{\overline{V}_a, \bar{i}} = \dfrac{V_{ax}}{V_a} \approx 0{,}893$.

$\cos\widehat{\overline{V}_a, \bar{j}} = \dfrac{V_{ay}}{V_a} = \dfrac{V_r}{V_a} \approx 0{,}446$.

8. $\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c$.

9. $\overline{a}_r = \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau$; $\overline{a}_r^n = \dfrac{V_r^2}{R} = 0,9$ м/с^2. $\overline{a}_r^\tau = \dot{V}_r = -\dfrac{0,1\pi^3}{8}\cos\dfrac{\pi}{4}t_1 \approx 0,2$ м/с^2.

10. $\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau$, $a_e^n = \omega_e^2 \cdot 3R \approx 1,18$ м/с^2. $\overline{a}_e^\tau = \varepsilon_e \cdot 3R = 1,2$ м/с^2; где $\varepsilon_e = \ddot{\varphi} = -2$ рад/с^2.

Вектор $\overline{\varepsilon}_e$ направлен вдоль $\overline{\omega}_e$.

11. На рисунке указаны.

12. $a_c = 2\omega_e \cdot V_r \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r) \approx 1,18$ м/с^2.

13. Используя правило Жуковского, получим вектор ускорения Кориолиса, направленным $\perp$ плоскости рисунка от нас.

14. Лучше методом проекции. Для этого проектируем (5.2) на оси:

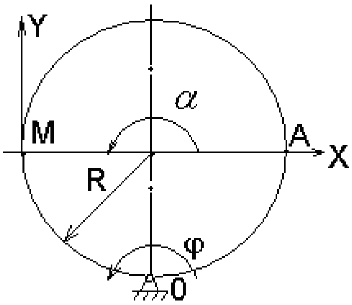
$a_{ax} = a_e^\tau - a_c = 0,024$ м/с^2; $a_{ay} = -a_e^n - a_r^\tau = -1,37$ м/с^2; $a_{az} = -a_r^n = -0,9$ м/с^2;

$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = 1,64$ м/с^2.

15. $AM = S = 0,2\pi\cos\dfrac{\pi}{4}t_2 = 0$, т.е. точка M_2 будет совпадать с точкой A.

16. $V_{r_2} = \dot{S} = -0,2\dfrac{\pi^2}{4}\sin\dfrac{\pi}{4}t_2 \approx -0,49$ м/с.

5.7.

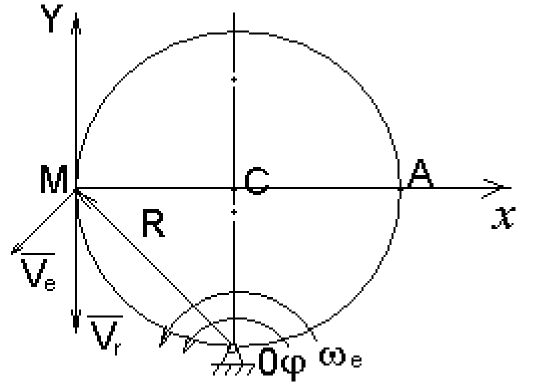


1. Относительное – по кольцу, переносное – вместе с кольцом относительно оси, проходящей через точку O.

2. Положение точки М на кольце определяется расстоянием $S = AM$ для $t_1 = 1$ с; $\alpha = \dfrac{S}{R} = \dfrac{0,75\pi \cdot 0.4}{0,3} = \pi$ рад.

$V_r = \dot{S} = 0,75(0,1 + 0,9t_1^2) \approx 2,35$ м/с, $V_e = \omega_e \cdot R_1$, где $\omega_e = \dot{\varphi} = 1,4$ рад/с; $R_1 = OM = 0,42$ м; $V_e = 0,59$ м/с.

3.



4. Из (5.1) $V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos 45^\circ} \approx 28$ м/с.

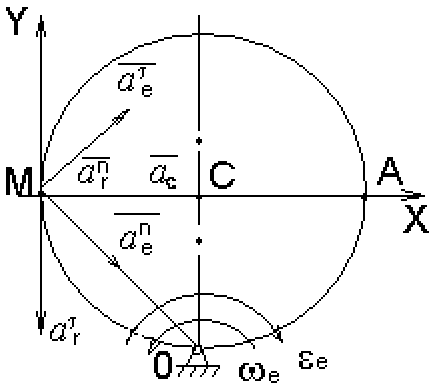
5. См. (5.2).

6. $\overline{a}_r = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n$, $a_r^\tau = \dot{V}_r = \ddot{S} = 4,25$ м/с^2,

$a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R} \approx 18,5$ м/с^2.

7. $\overline{a}_e = \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n$, $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot R_1$, где $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \ddot{\varphi} = 0{,}6$ рад/с^2. Знак минус указывает на замедленное вращение кольца относительно оси. $a_e^\tau = 0{,}25$ м/с^2; $a_e^n = \omega_e^2 \cdot R_1 \approx 0{,}83$ м/с^2.

8.



9. $a_c = 2\omega_e \cdot V_r \sin(\overline{\omega}_e, \overset{\wedge}{\ } \overline{V}_r) \approx 6{,}6$ м/с^2. В соответствии с правилом (5.5) вектор $\overline{a}_c$ показан на рисунке 3.

10. Методом проекций:

$a_{ax} = a_c + a_r^n + a_e^n \cos 45^\circ + a_e^\tau \cos 45^\circ \approx 26$ м/с^2.

$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \approx 26{,}3$ м/с^2.

6.1. 1.Планетарный.

2. $\omega_e = \omega_{II}$;

3. $\dfrac{\omega_1 - \omega_{II}}{\omega_4 - \omega_{II}} = -\dfrac{z_2}{z_1} \cdot \dfrac{z_4}{z_3}$; $\omega_4 = 0$; $\omega_1 = \omega_I$;

$\dfrac{\omega_I - \omega_{II}}{\omega_{II}} = -\dfrac{z_2}{z_1}\dfrac{z_4}{z_3}$; $(\omega_I - \omega_{II}) z_1 z_3 = \omega_{II} z_2 \cdot z_4$

$$\omega_{II} = \frac{\omega_1 z_1 z_3}{z_2 z_4 + z_1 z_3} = \frac{120 \cdot 80 \cdot 60}{40 \cdot 180 + 80 \cdot 60} = 48 \text{ рад/с.}$$

6.2. 1. Дифференциальный.

2. $\omega_e = \omega_I$.

3. $\dfrac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_4 - \omega_I} = \left(-\dfrac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\dfrac{z_4}{z_3}\right) = \dfrac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$.

$(\omega_1 - \omega_I) z_1 z_3 = (\omega_4 - \omega_I) z_2 z_4$.

$\omega_1 z_1 z_3 - \omega_I z_1 z_3 + \omega_I z_2 z_4 = \omega_4 z_2 z_4$.

$$\omega_{II} = \omega_4 = \frac{\omega_1 z_1 z_3 + \omega_I (z_2 z_4 - z_1 z_3)}{z_2 z_4} = \frac{180 \cdot 80 \cdot 40 + 120(20 \cdot 60 - 80 \cdot 40)}{20 \cdot 60} = 280$$

рад/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под общей ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 735 с.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для машиностроительных специальностей вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для втузов. – 12-изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика. Учебное пособие для технических вузов./ Яблонский А.А., Никифорова В.М. – 8-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2001. – 764 с.
5. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1968. – 419 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Динамика. – М.: Наука, 1985. – 559 с.
7. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учебно-методическое пособие по теоретической механике / Г.Н. Алехнович, Т.Ф. Богинская, Ю.В. Василевич и др. – Мн.: БГПА, 1997. – 88 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для втузов. – 3-е изд. испр. под ред. проф. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1978. – 388 с.
9. Исследование методов решения задач по теоретической механике: Учебно-методическое пособие для студентов высших технических учебных заведений. В 3 ч. /Г.И. Беляева, С.И. Миткевич, С.Г. Дрозд, И.С. Куликов. – Мн.: БГПА, 1999. – Ч. 1: Статика. – 102 с.