

УДК 621.316.726.078

В. В. НАПРАСНИКОВ, С. В. КРАСНОВСКАЯ, БНТУ

ВЛИЯНИЕ УПРОЩАЮЩИХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЯХ КОМПРЕССОРНО-КОНДЕНСАТОРНЫХ АГРЕГАТОВ НА СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

В статье затрагиваются проблемы адекватности математической модели и точности получаемых результатов, учитывая особенности конечно-элементного подхода при проектировании параметрической модели компрессорно-конденсаторных агрегатов. Исследуется допустимая степень упрощения конечно-элементной модели компрессорно-конденсаторного агрегата при определении спектра собственных частот колебаний и проводится модальный анализ конструкции в нескольких упрощенных постановках. Решение задачи о собственных значениях в общем виде реализовано на конкретном примере системы.

The article touches upon such issues as mathematical model validity and accuracy of the obtained results, considering features of the finite element approach to condensing unit parametric modeling. Acceptable simplifying assumptions of a finite-element model of a condensing unit to define natural frequency spectrum is investigated and modal analyses of several simplified models are conducted. Eigensolution is implemented on a specific example of a system.

Современная гражданская и военная техника, во многих случаях оснащенная большим количеством радиоэлектронной аппаратуры. Перегрев радиоэлектронной аппаратуры, которая обычно располагается в замкнутых герметичных объемах, влечет за собой повреждение всей бортовой электроники и может привести к недопустимым отказам. Поэтому ответственные системы должны оснащаться средствами для охлаждения воздуха, к которым относятся компрессорно-конденсаторные агрегаты. Пример полной трехмерной твердотельной модели компрессорно-конденсаторного агрегата (ККА) представлен на рис. 1.

Несущим и опорным элементом конструкции агрегата является рама. Рама обеспечивает возможность крепления агрегата на машину и удобный доступ для технического обслуживания. Она должна обладать достаточной жесткостью для обеспечения целостности механической системы, предотвращая по возможности явления паразитных колебаний.

Одним из требований технических условий для конструкций компрессорно-конденсаторных агрегатов является отсутствие резонансов в заданном частотном диапазоне.

При анализе спектра собственных частот рам компрессорно-конденсаторных агрегатов

встает вопрос о допустимой степени упрощения модели. Расчетная модель должна быть рационально построена исходя из времени расчета, точности и надежности получаемых результатов [1–3].

Таким образом, актуальной является задача о построении математических моделей несущих конструкций систем компрессорно-конденсаторных агрегатов на современных транспортных средствах, оснащенных большим количеством электроники, которые позволят оценить спектр их собственных частот на этапе проектирования.

Подготовка конечно-элементной модели ККА

Метод конечных элементов – численный метод решения краевых задач, сегодня он при-

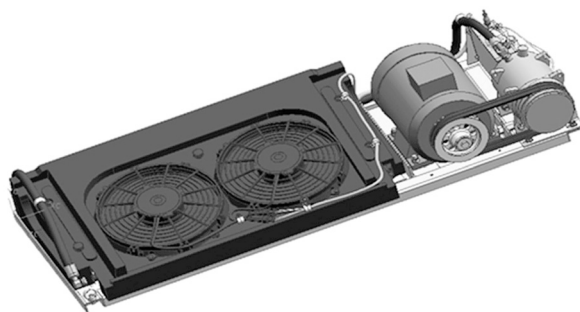


Рис. 1. Пример полной трехмерной твердотельной модели компрессорно-конденсаторного агрегата

меняется при моделировании всевозможных ситуаций [1,9]. Конечно-элементное моделирование способно дать как качественную, так и количественную картину процессов и явлений, причем сделать это наглядно и, что самое главное, быстро и с приемлемой для исследователя степенью точности.

Разрешающая система уравнений динамики в конечно-элементной формулировке имеет вид (1):

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (1)$$

Матрица жесткости определяется выражением (2):

$$K = \sum_{i=1}^{NE} K_i^e \quad (2)$$

где NE – число элементов; K_i^e – матрицы жесткости отдельных элементов.

Матрица масс системы определяется соотношением (3):

$$M = \sum_{i=1}^{NE} M_i^e \quad (3)$$

где M_i^e – матрицы масс отдельных элементов.

Демпфирование аппроксимируется комбинацией вкладов сопротивлений, связанных с двумя матрицами системы – матрицей масс и матрицей жесткости (4):

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4)$$

Коэффициенты α и β известны как константы демпфирования Рэлея.

Модальный анализ

Модальный анализ используется для определения собственных частот и форм колебаний конструкции. Модальный анализ обычно предшествует другим видам динамического анализа. Как будет показано далее, результаты модального анализа дают возможность определить некоторые параметры и соотношения, необходимые для других видов анализа.

Предполагается, что совершаются свободные незатухающие колебания (5)

$$F(t) = 0 \text{ и } C = 0. \quad (5)$$

Разрешающее уравнение имеет вид (6)

$$M\ddot{u} + Ku = 0. \quad (6)$$

Для линейной системы свободные колебания будут гармоническими (7)

$$u = u_0 \cos \omega t \quad (7)$$

Замена u и \ddot{u} в разрешающем уравнении приводит к соотношению (8)

$$u = u_0 \cos \omega t \quad (8)$$

Для существования нетривиальных решений детерминант $|K - \lambda M|$ должен быть равен нулю (9)

$$|K - \lambda M| = 0, \quad (9)$$

где $\lambda = \omega^2$.

Это задача о собственных значениях λ , которая заключается в нахождении наименьшего собственного значения λ_j и соответствующего ему собственного вектора u_j . Собственное значение λ_j определяет собственную частоту системы $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$, а собственный вектор – соответствующую форму колебаний.

Алгоритм QR–Хаусхолдера в сочетаниями с обратными итерациями

Для вычисления собственных значений используем метод редукции (приведения) Хаусхолдера [4–9]. Алгоритм Хаусхолдера – QR-обратных итераций (HQRI) является одним из наиболее важных алгоритмов, основанных на преобразованиях, несмотря на то, что его возможности ограничены решением стандартных задач на собственные значения. Поэтому при рассмотрении обобщенной проблемы $K_\phi = \lambda M_\phi$ ее прежде всего необходимо привести к стандартному виду и лишь после этого возможно использование схемы HQRI. Наименование «алгоритм решения HQRI» связано с тем, что в его структуре можно четко выделить три основных этапа:

1) Приведение матрицы K к тридиагональному виду с помощью преобразования Хаусхолдера.

2) Вычисление всех собственных значений с помощью QR-преобразований.

3) Вычисление собственных векторов тридиагональной матрицы с помощью обратных итераций и переход от них к собственным векторам исходной матрицы K .

Основное отличие данного алгоритма от алгоритма Якоби заключается в том, что исходная матрица за конечное число вращений приводится к тридиагональной форме, которая оказывается особенно удобной для вычисления собственных значений с помощью дальнейших QR-итерационных преобразований. Алгоритм позволяет определять необходимое число требуемых собственных векторов.

Методы преобразования составляют группу алгоритмов решения задач на собственные значения, которые используют основные свойства матрицы собственных векторов Φ :

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (10)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (11)$$

где $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ и $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Поскольку существует единственная матрица Φ порядка $n \times n$, одновременно производящая матрицы K и M к диагональному виду, согласно (10) и (11), то можно попробовать сформировать ее при помощи итераций [4–6]. Основная схема приведения K и M к диагональному виду использует последовательное умножение слева на матрицу P_k^T и справа на P_k при $k = 1, 2, \dots$. В частности, если положить $K_1 = K$ и $M_1 = M$, то будем иметь (12), (13):

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= P_1^T K_1 P_1 \\ K_3 &= P_2^T K_2 P_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ K_{k+1} &= P_k^T K_k P_k \end{aligned} \right\}; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= P_1^T M_1 P_1 \\ M_3 &= P_2^T M_2 P_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ M_{k+1} &= P_k^T M_k P_k \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

причем матрицы P_k подбираются так, чтобы привести K_k и M_k возможно ближе к диагональному виду. Тогда для соответствующего алгоритма должны выполняться следующие предельные соотношения \rightarrow , $M_{k+1} \rightarrow I$ при $k \rightarrow \infty$. В этом случае матрица Φ представляется в виде произведения (14):

$$\Phi = P_1 P_2 \dots P_i \quad (14)$$

где i – номер последней итерации. Отметим, что практически не обязательно, чтобы M_{k+1} стремилась к I , а K_{k+1} к Λ . Достаточно, чтобы эти матрицы сходились к диагональной форме, т. е. $K_{k+1} \rightarrow \text{diag}(K_r)$ и $M_{k+1} \rightarrow \text{diag}(M_r)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда, если i – номер последней

итерации, то, пренебрегая изменением порядка расположения собственных чисел и собственных векторов, будем иметь (15), (16):

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{K_r^{(i+1)}}{M_r^{(i+1)}} \right) \quad (15)$$

$$\Phi = P_1 P_2 \dots P_i \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r^{(i+1)}}} \right) \quad (16)$$

Приведение матрицы K по Хаусхолдеру к тридиагональному виду состоит из $(n-2)$ преобразований вида (12). Полагая, что $K_1 = K$, последовательно вычисляем (17):

$$K_{k+1} = P_k^T K_k P_k \quad (k = 1, \dots, n-2) \quad (17)$$

где P_k – матрицы преобразования Хаусхолдера являются матрицами отражений (18):

$$P_k = I - \theta \omega_k \omega_k^T \quad (18)$$

$$\theta = \frac{2}{\omega_k^T \omega_k} \quad (19)$$

где ω_i – вектор порядка $n-i+1$. [7–9]

Изложенный подход использовался для вычисления спектра частот компрессорно-конденсаторного агрегата, схема которого представлена на рис. 2.

Основные компоненты вместе со всеми вспомогательными элементами крепятся на общей раме. Конструкция рамы должна быть изготовлена из профилей прочных как на изгиб, так и на кручение. В качестве конструктивных элементов рамы были выбраны уголки стальные горячекатаные, швеллеры стальные горячекатаные. Конструкция рамы компрес-

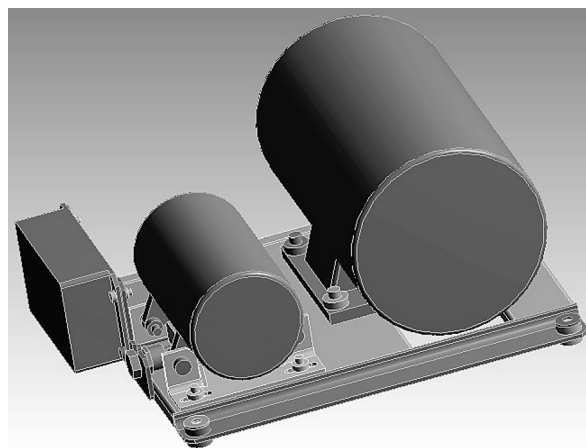


Рис. 2. Трехмерная модель компрессорно-конденсаторного агрегата

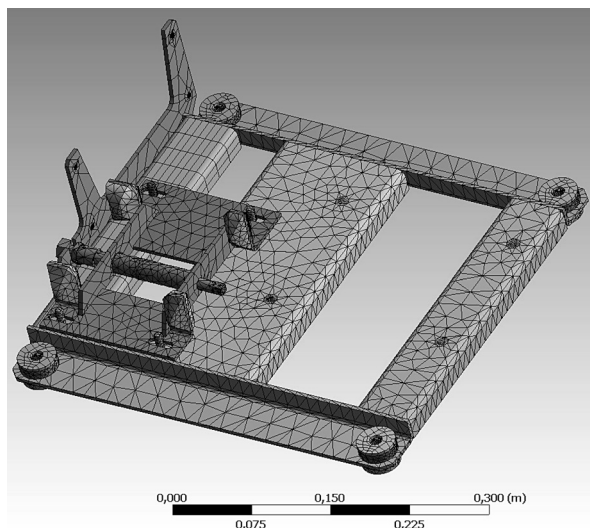


Рис. 3. Упрощенная конечно-элементная модель рамы и агрегатов в виде присоединенных масс

сорно-конденсаторного агрегата сваривается сваркой по ГОСТ 5264-80 [10].

Для создания рациональной конечно-элементной модели по критерию времени проектирования на основе созданной геометрической модели определялись части конструкции, не влияющие существенно на распределение частот собственных колебаний компрессорно-конденсаторного агрегата [11–12].

Одним из возможных вариантов упрощения является трехмерная модель компрессорно-конденсаторного агрегата представленная на рис. 3.

Анализ влияния упрощений модели на спектр собственных частот

Для выявления влияния упрощающих предположений в моделях компрессорно-конденсаторного агрегата на спектр собственных

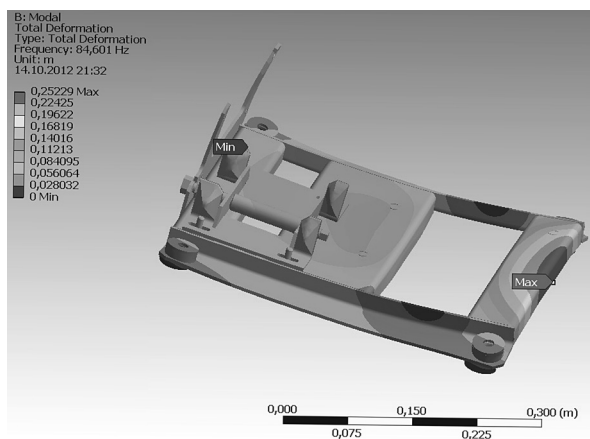


Рис. 4. Четвертая мода колебаний для второго варианта ($\omega_4 = 84,601$ Гц)

частот выполнены несколько вариантов расчета со следующими конфигурациями:

1) Используется упрощенная конечно-элементная модель рамы, компрессор и двигатель представлены цилиндрическими телами равнозначной массы, на раме предусмотрены полиуретановые подпятники для уменьшения вибрации;

2) Используется упрощенная конечно-элементная модель рамы, агрегаты представлены присоединенными массами, на раме предусмотрены полиуретановые подпятники для уменьшения вибрации;

3) Используется упрощенная конечно-элементная модель рамы, агрегаты представлены присоединенными массами, полиуретановые подпятники заменены упрощенными полиуретановыми телами-таблетками;

4) Используется упрощенная конечно-элементная модель рамы, агрегаты представлены присоединенными массами, на раме отсутствуют полиуретановые подпятники;

В качестве примера на рис. 4 представлена четвертая мода колебаний для второго варианта, соответствующая собственной частоте $\omega_4 = 84,601$ Гц.

Результаты моделирования сведены в таблице.

Спектр собственных частот для различных вариантов моделей ККА

Вариант	Время расчета, с	Собственная частота, Гц					
		1 мода	2 мода	3 мода	4 мода	5 мода	6 мода
1	644	57,54	68,186	104,08	163,22	222,92	230,21
2	515	59,212	71,399	72,2	84,601	104,36	115,88
3	233	45,788	46,294	56,297	80,242	80,732	104,44
4	497	97,589	107,85	122,43	152,28	157,6	251,86

Выводы

Наибольшей жесткостью обладает рама, выполненная без полиуретановых подпятников для уменьшения вибрации. Однако если принять за эталонную собственную частоту, соответствующую первой моде колебаний первой наиболее полной модели, погрешность в полученных результатах составит 69,6%. При рассмотрении третьего варианта упрощения, где подпятники заменены телами-таблетками, погрешность составила 20,4%. Во втором варианте упрощений при замене тел присоединенными массами погрешность в результатах составила 2,9%.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о неприемлемости третьего и четвертого варианта упрощения модели рамы. Второй вариант является наиболее предпочтительным, так как обеспечивает приемлемую точность и является наименее ресурсозатратным.

Перечень принятых обозначений и сокращений

ККА – компрессорно-конденсаторный агрегат;

M – матрица масс системы;
 C – матрица сопротивлений;
 K – матрица жесткости;
 F – функция нагрузки, зависящая от времени;
 u – вектор узловых перемещений;
 \dot{u} – вектор узловых скоростей;
 \ddot{u} – вектор узловых ускорений;
 Φ – матрица собственных векторов;
 Λ – матрица собственных значений;
 I – единичная матрица.

Литература

1. **Зенкевич О.**, Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986.
2. **Бараускас Р. А.** Исследование по созданию вибродвигателей с ударным взаимодействием методом конечных элементов. Автореф. Дисс., к. т. н. – М., 1982.
3. **Иванов А. А.** Расчет автомобильных рам методом конечных элементов. – Автомобильная промышленность, № 4, 1973.
4. **К. J. Bathe**, E. L. Wilson, «Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics.» International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, 1973, pp. 213–226.
5. **К. J. Bathe**, E. L. Wilson «Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis.» A. S. C. E., Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 98, 1972, pp. 1471–1485.
6. **К. J. Bathe**, E. L. Wilson, «Eigensolution of Large Structural Systems with Small Bandwidth,» A. S. C. E., Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 99, 1973, pp. 467–479.
7. **Finite element procedures** / Klaus-Jurgen Bathe. Revision of: Finite element procedures in engineering analysis. 1982. ISBN 0–13–301458–4
8. **Бате К.**, Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов /Пер. с англ. А. С. Алексеева и др.; Под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1982–448с., ил. – Перевод изд.: Numerical methods in finite element analysis /К. – J. Bathe, E. L. Wilson (1976).
9. **Клаф Р.**, Пензиен Дж. Динамика сооружений: Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с. – Перевод изд.: Dynamics of Structures/Ray W. Clough, Joseph Penzien. – New York, 1975.
10. **ГОСТ 22502–89** Агрегаты компрессорно-конденсаторные с герметичными холодильными компрессорами для торгового холодильного оборудования. Общие технические условия.
11. **Бородуля А. В.**, Соловьев А. Н., Напрасников В. В., Мирзаванд М. А. Построение спектра конечно-элементных моделей для принятия рациональных инженерных решений при ремонте морских платформ // Весци НАН Беларусі. Сер. Фіз-тэхн. Навук. 2013. № 4. С. 101–108.
12. **Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость** (Н. Н. Шеменников, Н. Д. Тарабасов, В. Б. Петров, В. И. Мясенков) – М.: Машиностроение, 1981.