УДК 514.116(076.2)

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

***Бабушкин Прохор Николаевич**, студент 1-го курса*
кафедры «Математические методы в строительстве»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель - Чернявская С.В., канд. физ.-мат. наук, доцент)

Оптимизационные задачи, то есть такие, где при заданных ограничениях на переменную или переменные нужно отыскать наибольшее или наименьшее значение выражения или функции встречаются почти в любой технической науке. Например, в теплоэнергетике решаются задачи достижения максимального коэффициента полезного действия котельного агрегата или обеспечения минимального значения теплопотерь через теплоизоляцию теплопровода. Функция, которую нужно оптимизировать, называется *целевой функцией*. Чаще всего целевая функция содержит несколько переменных. Значения переменных, при которых достигается экстремум целевой функции, называются *оптимальными значениями*. Оптимизационные задачи, в которых исследуется функции одной переменной, изучаются в средней школе и на первом курсе технического университета. Методы их решения связаны с исследованием множества значений функций или исследованием функции по ее производной. Также это могут быть алгебраические методы, как например, метод перебора или использования известных неравенств. На примерах нескольких задач рассмотрим и сравним наиболее известные из методов решения как школьной, так и высшей математики.

Пример 1. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Для пересылки детали упаковываются в коробки трех типов. Коробка типа А вмещает 70 деталей, типа В - 40 деталей, типа С -25 деталей. Стоимость пересылки коробки типа А 200 рублей, типа В - 100 рублей, типа С - 70 рублей. Сколько коробок и какого типа нужно взять, чтобы суммарная стоимость пересылки была наименьшей.

Решение. Решим задачу *методом перебора*. Искомая величина - стоимость пересылки заказа принимает только натуральные значения и количество вариантов небольшое. Пусть x,y,z - необходимое количество коробок типов А, В и С соответственно. Из условия следует, что $70x+40y+25z=1100$.

Пусть целевая функция – это $10s$, тогда одна десятая часть стоимости пересылки будет равна $20x+10y+7z$. Выразим переменную y из первого равенства и подставим во второе, получим 0,1s=275+(10x+3z)/4. Из числовых данных условия следует, что s – натуральное число, поэтому выражение 10x+3z должно делиться на 4 нацело и при этом иметь наименьшее возможное значение. Рассмотрим варианты.

Если взять x=0, то выражение 10x+3z при различных натуральных значениях z принимает значения 3, 6, 9, 12,…и т. д. Наименьшее из них, которое делится на 4, равно 12. Если же взять x=1, то 10x+3z при целых неотрицательных x принимает значения 10, 13, 16,…Наименьшее из них, которое делится на 4, равно 16. Если же $x \geq 2$, то $10x+3z \geq 20$. Следовательно, наилучший вариант x=0, z=4. Проверим, что в этом случае y принимает натуральное значение, найдем его: y=25 Итак, для минимизации стоимости пересылки нужно взять коробки только двух типов, а именно, 25 коробок типа B и 4 коробки типа C. Значение целевой функции, то есть стоимости пересылки при этом равно 2780 рублей.

Пример 2. Найти наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$.

Решение. Решим задачу сначала *методом оценки множества значений функции*. В исходной дроби выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель и преобразуем к виду $y = x^2 - 1 + \dfrac{2}{x^2+1} = x^2 + 1 + \dfrac{2}{x^2+1} - 2$. Теперь оценим это выражение, для чего сделаем замену переменной $t = x^2 + 1$. После замены получим выражение $y = t + \dfrac{2}{t} - 2$, где $t \geq 1$. Преобразуем его к квадратному уравнению с параметром $t^2 - (2+y)t + 2 = 0$. Чтобы это уравнение имело решения, нужно, чтобы его дискриминант был неотрицательным, то есть $(2+y)^2 - 8 \geq 0$. Решив квадратное неравенство с учетом положительности функции y, что является очевидным, получим, что $y \geq 2\sqrt{2} - 2$. Следовательно, $y_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$ и достигается оно при значении $t = \sqrt{2}$.

Решим эту задачу *методами математического анализа*. Производная исходной функции будет равна: $y' = \dfrac{2x(x^4 + 2x^2 - 1)}{(x^2+1)^2}$, критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2} - 1$. Исследование знака производной показывает, что x_2.- это точка минимума функции. Соответственно, ответ: $y_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$.

Пример 3. По двум перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке O, движутся точки A и B по направлению к O со скоростями 1 м/с и 2 м/с. Достигнув точки O, они продолжают движение. В начальный момент времени расстояния AO=5 м, BO=20 м. Через сколько секунд расстояние AB будет минимальным?

Решение. Составим целевую функцию – расстояние между точками A и B. Пусть t секунд –это искомое время. Выразим расстояния OA и OB через t секунд от начала движения. Они будут равны соответственно: $(5-t)^2, (20-2t)^2$. Квадрат расстояния между точками А и В в этот момент будет равен $AB^2 = (5-t)^2 + (20-2t)^2 = 5t^2 - 90t + 425$. Полученная целевая функция является квадратичной, ее график есть парабола с ветвями, направленными вверх. Следовательно, наименьшее значение будет достигнуто в вершине параболы, то есть при t=9 сек.

Интересными являются идеи решения, в которых вместо исследования функции применяется какое-либо известное неравенство. Наиболее известными являются неравенства о средних значениях, например, такое: *для любых неотрицательных чисел* $x_1, x_2, ... x_n$ *справедливо неравенство между их средним арифметическим и средним геометрическим:* $\frac{x_1 + x_2 + ... x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$.

Покажем применение этого неравенства в следующем примере.

Пример 4. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2}$.

Решение. Сначала преобразуем выражение, разделив почленно числитель на знаменатель данной дроби $f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2} = x^2 + \frac{4}{x^2}$., после чего, применив неравенство о средних значениях, получим: $x^2 + \frac{4}{x^2} \ge 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} = 4.$

В курсе математики технического университета изучаются задачи на вычисление экстремума функции нескольких переменных при заданном условии, связывающем эти переменные. Это так называемые условные экстремумы, отыскание которых проводится *методом Лагранжа*. Приведем пример задачи на условный экстремум функции двух переменных.

Пример 5. Вычислить экстремум функции $z = x^2 - y^2$ при условии $x + 2y - 3 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x + 2y - 3)$ и найдем ее частные производные по всем трем переменным: $L'_x = 2x + \lambda, L'_y = -2y + 2\lambda, L'_\lambda = x + 2y - 3$. Приравняв их значения к нулю и решив систему полученных уравнений, найдем $\lambda = 2, x = -1, y = 4$. Таким образом, критическая точка функции имеет координаты М(-1,2). Найдем вторые производные функции Лагранжа и вычислим их значения в критической точке, получим $L''_{xx} = 2, L''_{yy} = -2, L''_{xy} = 0$. Найдем также частные производные по x и y от уравнения связи $\varphi'_x = 1, \varphi'_y = 2$ и составим якобиан J= $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, вычислив который, получим положительное значение определителя, равное 6.

Следовательно, в критической точке функция z имеет минимум, причем минимальное значение z равно -3.

Покажем, как можно решить эту задачу без применения метода Лагранжа, с помощью *исследования функции одной переменной*. Так как уравнение связи позволяет выразить одну переменную через другую, то $y = \frac{3-x}{2}$. Подставим это выражение в функцию z, получим $z = \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{9}{4}$. Исследуем получившуюся функцию одной переменной на обычный экстремум. Будем иметь: $z' = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}$, критическая точка $x=-1$. Исследование знака производной показывает, что в данной критической точке функция имеет минимум. Минимальное значение функции z равно -3.

В рассмотренных задачах мы увидели соединение методов решения оптимизационных задач методами алгебры, исследования функций одной переменной с помощью ее известных свойств и методом исследования по ее производной, а также нахождение условных экстремумов методом Лагранжа. Перечисленные методы не исчерпывают собой все имеющиеся возможности решения задач на оптимизацию, а являются лишь их небольшой частью.

Литература:

1. Актершев С.П. Задачи на максимум и минимум. С-Птб, БХВ-Петербург, 2005.
2. Беляева Э.С., Монахов В.М. Экстремальные задачи М., Просвещение 1977.
3. Чернявская С.В., Ревтович В.Н. Оптимизационные задачи на централизованном тестировании, Материалы 14-й МНТК «Наука- образованию, производству, экономике», Минск, БНТУ, 2016 г., том 3, стр 349.