

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

*Арсеньев Виктор Сергеевич, студент 2-го курса  
кафедры «Математические методы в строительстве»,*

*Тимонович Юлия Юрьевна, студентка 2-го курса  
кафедры «Математические методы в строительстве»,*

*Данчиков Александр Владимирович, студент 2-го курса кафедры  
«Мосты и тоннели»*

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск  
(Научный руководитель – Вербицкая О.Л., канд. техн. наук, доцент)*

Одним из наиболее актуальных направлений развития современной науки является применение методов математического моделирования при проектировании и расчете конструкций различных форм. При этом получить аналитическое решение или решение в приближенной форме (с помощью рядов) во многих случаях не представляется возможным. Тогда используются численные методы, одним из которых является метод конечных элементов (МКЭ). Для теоретического исследования образцов цилиндрической формы, предназначенных для испытания асфальтобетона дорожных покрытий, при построении конечно-элементной модели удобно использовать конечные элементы треугольной формы (рис.1).

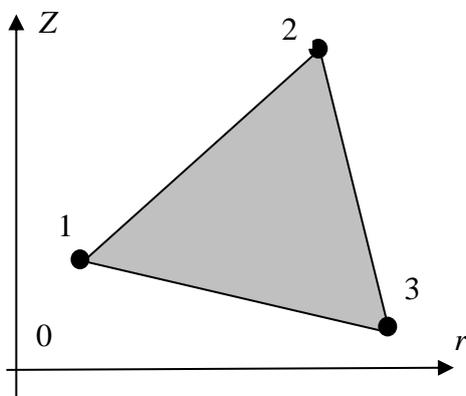


Рисунок 1 – Поперечное сечение кольцевого конечного элемента  
треугольного очертания с шестью степенями свободы

Для геометрического описания деформированного состояния ротационно-симметричных тел использована цилиндрическая система координатных осей

$R, \theta, Z$ . На рисунке 2 в системе этих координат показаны составляющие вектора перемещения и тензора напряжения.

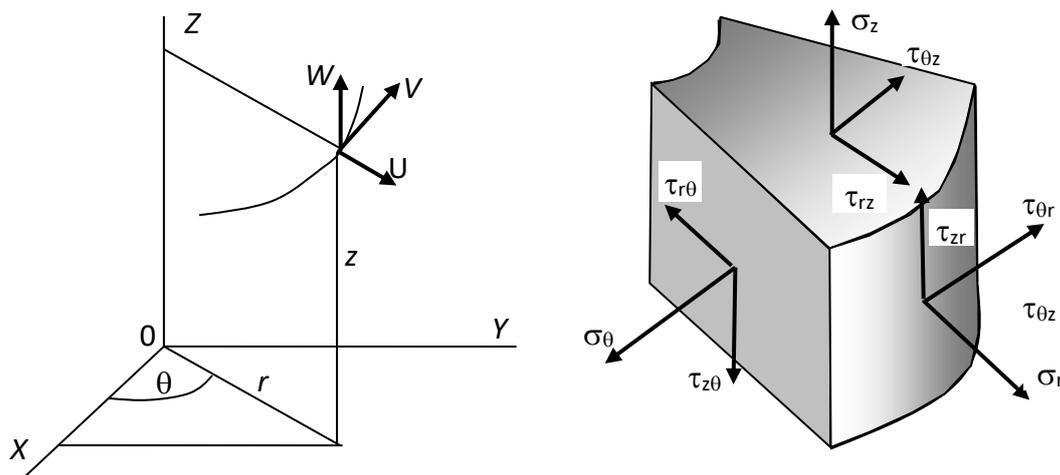


Рисунок 2 – Перемещения и напряжения в элементе ротационно-симметричного тела

При реализации МКЭ должны быть выполнены следующие этапы: формирование матриц жесткости отдельных КЭ, объединение этих матриц жесткости, формирование вектора сил, решение полученной системы уравнений, выделение вектора перемещений каждого КЭ, вычисление вектора напряжений. Можно отметить, что самым трудоемким этапом реализации МКЭ является решение система разрешающих уравнений.

Матрица жесткости отдельного треугольного конечного элемента определяется следующим выражением [1]

$$K = 2\pi B^T D B \bar{r} \Delta$$

где  $\bar{r} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$ ;  $\bar{z} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ ,

$r_1, r_2, r_3$ ;  $z_1, z_2, z_3$  – координаты узлов конечного элемента;

$B$  – геометрическая матрица

$$B = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ \frac{1}{r}(a_1 + b_1 r + c_1) & 0 & \frac{1}{r}(a_1 + b_1 r + c_1) & 0 & \frac{1}{r}(a_1 + b_1 r + c_1) & 0 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix};$$

$D$  – матрица жесткости

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} a_1 &= r_2 z_3 - r_3 z_2; & b_1 &= z_2 - z_3; & c_1 &= r_3 - r_2; \\ a_2 &= -r_3 z_1 + r_1 z_3; & b_2 &= z_3 - z_1; & c_2 &= r_1 - r_3; \\ a_3 &= r_1 z_2 - r_2 z_1; & b_3 &= z_1 - z_2; & c_3 &= r_2 - r_1. \end{aligned}$$

$a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$  и  $\Delta$  – геометрические параметры и площадь КЭ;

Напряжение и деформация в конечном элементе определяются выражениями

$$\bar{\sigma} = DB\bar{q} - D\bar{\varepsilon}_o + \bar{\sigma}_o, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{B}\bar{q} + \bar{\varepsilon}_o$$

где  $\bar{\varepsilon}_o, \bar{\sigma}_o$  – вектора начальной деформации и начального напряжения;

$\bar{q} = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)^T$  – вектор узловых перемещений отдельного КЭ.

После формирования матриц жесткости отдельных конечных элементов можно собирать матрицу жесткости всего ансамбля конечных элементов и вектора узловых сил. Для этого используем поэлементный способ. Его суть заключается в последовательном просмотре всего списка конечных элементов, из которых состоит механическая система. По глобальным и местным номерам узлов рассматриваемого конечного элемента устанавливается связь между позициями общей матрицы жесткости и матрицы жесткости конечного элемента. Учитывая эту связь, значения расположенные в позициях матрицы жесткости конечного элемента, подсуммируются к соответствующим позициям общей матрицы жесткости всей модели. После перебора всех конечных элементов формируется окончательная объединенная матрица жесткости. Аналогично формируется и вектор узловых сил – правая часть канонических уравнений метода конечных элементов. В результате образуется общая система линейных уравнений

$$\bar{K} \cdot \bar{V} = \bar{F}$$

Полученная система канонических уравнений еще не является системой разрешающих уравнений поставленной задачи, так как в них не учтены условия закрепления образца. На основе статических граничных условий формируется правая часть канонических уравнений метода конечных элементов. Кинематические условия определяют часть неизвестных перемещений и то же формируют правые части уравнений. Столбцы матрицы жесткости, соответствующие известным узловым перемещениям, переносятся в правую часть разрешающих уравнений. В результате получаем уплотненную матрицу

жесткости и вектор узловых сил, из которых и строится система разрешающих уравнений.

$$\bar{K}_z \cdot \vec{V}_z = \vec{F}_z$$

Ее решение дает уплотненный вектор узловых перемещений  $\vec{V}_z$ . С учетом кинематических граничных условий разуплотняем вектор узловых перемещений  $V$ . Затем из него выделяем вектора узловых перемещений каждого КЭ  $\vec{V} \rightarrow \vec{q}_k$  и используем их для определения векторов напряжения и деформации

$$\vec{\sigma}_k = (\sigma_{rk}, \sigma_{\theta k}, \tau_{r\theta k})^T \quad \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta})^T.$$

На кафедре «Математические методы в строительстве» разработана компьютерная программа *Python*, в которой применен МКЭ для исследования НДС образцов цилиндрической формы.

#### Литература:

1. Вербицкая, О. Л. Соппротивление материалов и теория упругости: применение метода конечных элементов при расчете прямоугольных пластин : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций» / О. Л. Вербицкая, Л. И. Шевчук ; Белорусский национальный технический университет, Кафедра «Математические методы в строительстве». – Минск : БНТУ, 2021. – 52 с.