УДК 514.7

ГЕОМЕТРИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Саранков Дмитрий Александрович, Августинович Александра Александровна, Тунчик Дмитрий Андреевич, Дубинин Даниил Николаевич,
студенты 2-го курса кафедры «Геодезия и аэрокосмические технологии»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Хотомцева М.А. старший преподаватель)

Начнём с того, что поверхность F постоянной кривизны, таковой является, если во всех точках этой поверхности K=const, H=const (K – Гауссова кривизна, H – средняя кривизна).

Всего существует три типа таких поверхностей:

– Постоянной положительной кривизны;
– Постоянной нулевой кривизны;
– Постоянной отрицательной кривизны.

Поверхность постоянной положительной кривизны является эллиптического типа – модель Римана. Примером данной поверхности можно назвать сферу. Так же из геометрии Римана можно узнать, что сумма углов треугольника больше 180°.

Параметрическое уравнение сферы:

$$\begin{cases} x = Rsin(t)\cos(\varphi) \\ y = Rsin(t)sint(\varphi) \\ z = R(\ln tg\dfrac{t}{2} + \cos t) \end{cases} \tag{1}$$

Метрика сферы:

$$ds^2 = R^2(cos^2(\theta)d\varphi^2 + d\theta^2) \tag{2}$$

Главные кривизны сферы:

$$k_1 = k_2 = R \tag{3}$$

И наконец Гауссова кривизна сферы:

$$K = k_1k_2 = R^2 > 0 \tag{4}$$

Мы видим, что главные кривизны сферы постоянны и равны, что выражает независимость её геометрических свойств от направления на сфере. Гауссова кривизна положительна и постоянна, а значит сфера является примером поверхности постоянной положительной кривизны.

Поверхности постоянной нулевой кривизны являются поверхностями параболического типа и относятся к модели Евклида. Поверхностью известной из школьного курса является плоскость. Другим примером является цилиндрическая поверхность (Рис. 1). На поверхностях постоянной нулевой кривизны сумма углов треугольника равна 180°

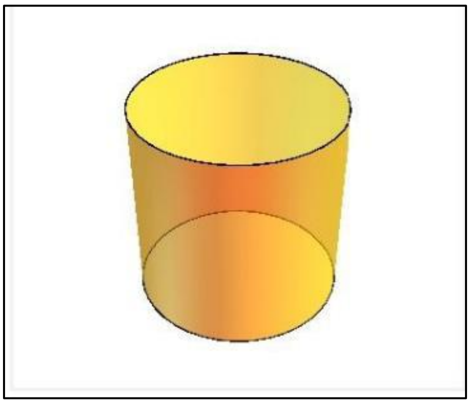

Рисунок 1 – Цилиндрическая поверхность нулевой кривизны

Поверхности постоянной отрицательной кривизны являются поверхностями гиперболического типа и относятся к модели Лобачевского. Примером такой поверхности является псевдосфера (Рис. 3). Из модели Лобачевского можно вынести один интересный факт: в треугольнике, лежащем на поверхности отрицательной кривизны, сумма углов меньше 180.

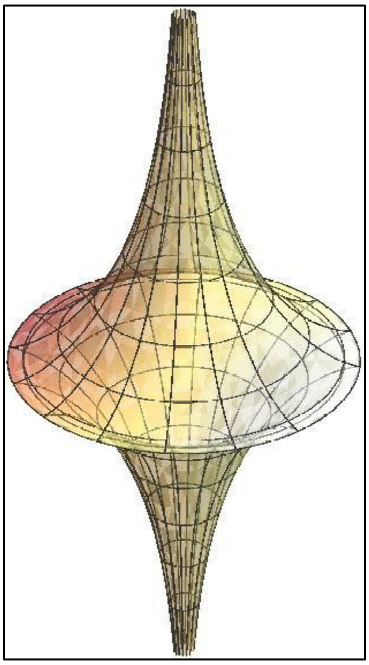

Рисунок 2 – Псевдосфера

Параметрическое уравнение псевдосферы:

$$\begin{cases} x = Rsin(t)\cos(\varphi) \\ y = Rsin(t)sint(\varphi) \\ z = R(\ln tg\dfrac{t}{2} + \cos t) \end{cases} \tag{5}$$

Вычисляя производные от радиуса-вектора, получим:

$$\vec{r}_{\varphi} = (-Rsin(t)\sin(\varphi), Rsin(t)\cos(\varphi), 0);$$

$$\vec{r}_t = (Rcos(t)\cos(\varphi), Rcos(t)\sin(\varphi), ctg(t)).$$

Теперь можем найти первую квадратичную форму псевдосферы:

$$ds^2 = R^2(ctg^2(t)dt^2 + sin^2(t)d\varphi^2) \tag{6}$$

Лучше всего перейти от переменной t к ρ (полярный радиус) для удобства

$$\rho = Rsin(t), \qquad \frac{d\rho}{\rho} = ctg(t).$$

Теперь метрика преобразуется в более удобный вид:

$$ds^2 = R^2\rho^2\left[\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{R}\right)^2\right] \tag{7}$$

Когда введём следующие переменные:

$$x = \frac{\varphi}{R}, \qquad y = \frac{1}{\rho}$$

получим окончательную метрику Клейна геометрии Лобачевского

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{8}$$

Хотелось бы заметить, что первую квадратичную форму можно записать и в метрике Лобачевского, какой она и была первоначально записана Николаем Ивановичем Лобачевским:

$$ds^2 = R^2(d\chi^2 + sh^2\chi d\varphi^2) \tag{9}$$

Перейдём ко второй квадратичной формы. Найдём единичный вектор псевдосферы:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_t \times \vec{r}_{\varphi}}{|\vec{r}_t \times \vec{r}_{\varphi}|} = (\cos(\varphi)\cos(t), \sin(\varphi)\cos(t), -\sin(t)) \tag{10}$$

После найдём вторые частные производные:

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = (-Rsin(t)\cos(\varphi), -Rsint(t)\sin(\varphi), 0);$$

$$\vec{r}_{\varphi t} = (-Rcos(t)\sin(\varphi), Rcos(t)\cos(\varphi), 0);$$

$$\vec{r}_{tt} = \left(-Rsin(t)\cos(\varphi), -Rsin(t)\sin(\varphi), -R\left(2\cos(t) + \frac{cos^3 t}{sin^2 t}\right)\right)$$

Таким образом, вычисляя коэффициенты второй квадратичной формы, получим:

$$L = \vec{n}\cdot\vec{r}_{\varphi\varphi} = -Rcos(t)\sin(t) \tag{11}$$

$$M = \vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi t} = 0 \qquad (12)$$
$$N = \vec{n} \cdot \vec{r}_{tt} = Rctg(t) \qquad (13)$$

Учитывая вычисленную нами первую квадратичную форму псевдосферы, найдём главные кривизны этой поверхности:

$$k_1 = -\frac{1}{R}ctg(t), \qquad k_2 = \frac{1}{R}tg(t)$$

После нахождения главных кривизн наконец вычислим Гауссову кривизну псевдосферы:

$$K = k_1 k_2 = -\frac{1}{R^2} \qquad (14)$$

Тем самым мы видим, что гауссова кривизна псевдосферы отрицательна, а также постоянна.

Следует ещё рассказать о теореме Гаусса-Бонне, которая утверждает, что среднее значение гауссовой кривизны на двумерном многообразии не зависит от выбора метрики и определяется топологией многообразия.

Начнём с локальной теоремы Гаусса-Бонне. Представим, что в любой точке A гладкой поверхности существует нормаль – прямая N(A), проходящая через нашу точку и перпендикулярная касательной плоскости T_1(A). И когда при этом на каждой нормали есть возможность задать положительное направление, то гладкая поверхность является ориентируемой. Приведём пример, сфера S_1 ориентируется с помощью проходящих через радиусы сферы и направленных наружу нормалей (Рис. 3).

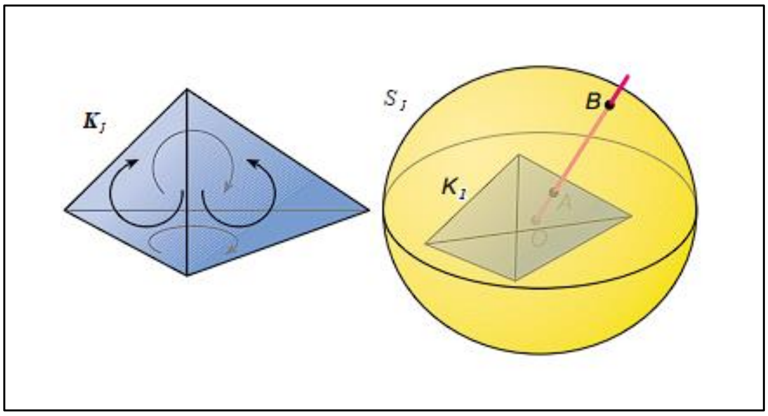

Рисунок 3 – Две замкнутые ориентируемые поверхности: поверхность тетраэдра K_1 и сфера S_1

Давайте рассмотрим на ориентируемой поверхности M_1 криволинейный треугольник ABC. Вычислим его внутренние углы как углы между касательными к сторонам в вершинах A, B и C. Тогда справедлива формула

$$(\angle A + \angle B + \angle C) - \pi = \iint\limits_{\Delta ABC} KdS + \left(\int\limits_{AB} k_g ds + \int\limits_{BC} k_g ds + \int\limits_{CA} k_g ds \right) \qquad (15)$$

Это и называется локальной теоремой Гаусса-Бонне. Если, ΔABC составлен из дуг геодезических линий, формула (15) принимает вид

$$(\angle A + \angle B + \angle C) - \pi = \iint\limits_{\Delta ABC} KdS \qquad (16)$$

Формула (16) позволяет сформулировать характерные для глобальной геометрии утверждения. Первое и самое очевидное состоит в том, что $\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta ABC} KdS$ – целое число.

Теорема 1. Если для односвязной замкнутой ориентированной поверхности M_1 ее гауссова кривизна К не является тождественным нулем и при этом $K \geq 0$, то эйлерова характеристика $\chi(M_1) > 0$ и поверхность M_1 гомеоморфна сфере S_1.

Теорема 2. Если на замкнутой ориентированной поверхности существует касательное векторное поле без особых точек, то $\iint_{M_1} KdS = 0$.

Таким образом, выполняя геодезические расчёты на произвольных реальных поверхностях, важно учитывать кривизну этих поверхностей, так как изменение кривизны приводит к изменению геометрических свойств. В окрестностях точек эти поверхности можно приближать поверхностями постоянной кривизны.