УДК 51:811.111:378.147.091.3-027.63

CALCPLOT3D ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

***Пешевич Николай Дмитриевич, Падалец Артём Александрович, Пилинога Алексей Андреевич**, студенты 1-го курса*
кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(*Научный руководитель – Хотомцева М.А., старший преподаватель*)

Приложение CalcPlot3D широко применяется в поиске решения и иллюстрации к решениям проблем, связанных с функциями нескольких переменных. Приложение формирует представление о математических объектах в трёхмерном пространстве так, чтобы пользователи развивали своё пространственное мышление и, например, представляли примерное изображение поверхности в начале решения проблемы.

Рассмотрим некоторые задачи теории функций нескольких переменных, решаемые в CalcPlot3.

1. Построение графиков функций двух переменных.

Построение в CalcPlot3D происходит следующим образом: выбираем тип поверхности (функция $z = f(x, y)$, неявная поверхность, параметрическая поверхность) и заполняем поля.

Построим график функции $z = x^2 - y^2$ (Рис.1). Анализ графика показывает, что областью определения этой функции является $\mathbf{R}^2$, то есть анализ графика позволяет в некоторых случаях найти область определения функции.

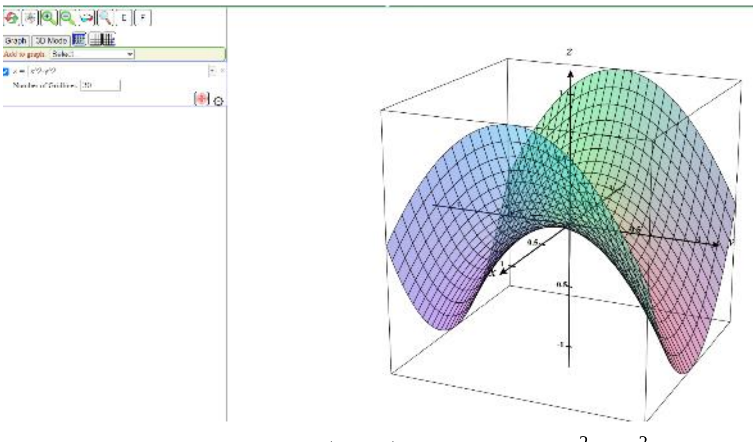

Рисунок 1 – График функции $z = x^2 - y^2$

2. Проверка правильности решения задач.

Рассмотрим задачу нахождения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке.

Пусть поверхность $F(x,y,z)=0$ имеет в некоторой ее точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ касательную плоскость. Прямая, проходящая через точку M_0, перпендикулярная этой касательной плоскости, называется нормалью к поверхности в точке M_0.

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Уравнение нормали к поверхности в параметрической форме записи:

$$\begin{cases} x=x_0+F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot t, \\ y=y_0+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot t, \\ z=z_0+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot t. \end{cases}$$

Найдём уравнения касательной плоскости и нормали к однополостному гиперболоиду $x^2+2y^2-z^2-5=0$ в точке $M(2,-1,1)$.

$F(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2-5$.

$F'_x\Big|_{M_0}=2x\big|_{x=2}=4$, $F'_y\Big|_{M_0}=4y\big|_{y=-1}=-4,$ $F'_z\Big|_{M_0}=-2z\big|_{z=1}=-2$.

Поэтому уравнение касательной плоскости к данной поверхности запишется в виде $4(x-2)-4(y+1)-2(z-1)=0$ или $2x-2y-z-5=0$.

Уравнение нормали $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-1}{-2}$ или $\begin{cases} x=2+2\cdot t, \\ y=-1-2\cdot t, \\ z=1-t. \end{cases}$

Поверхность, касательная плоскость и нормаль представлены на рисунке 2.

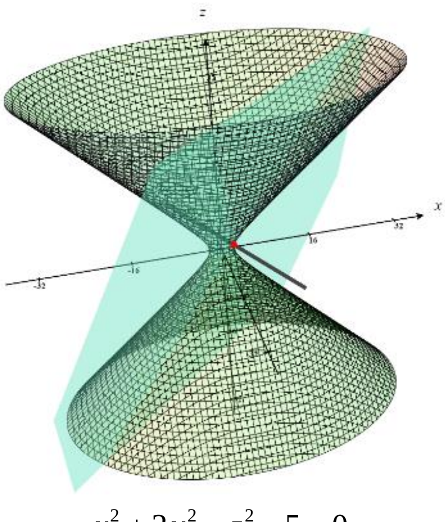

Рисунок 2 – Поверхность $x^2+2y^2-z^2-5=0$, касательная плоскость и нормаль в точке $M(2,-1,1)$

3. Построение линий уровня.

Линия уровня $f(x,y)=k$ — это множество всех точек в области D, в которых f принимает заданное значение k. Другими словами, линия уровня показывает, где график поверхности f имеет высоту k. Линии уровня рассматриваются также, как сечения поверхности графика плоскостями $z = C$, которые проецируются на плоскость Oxy.

Построим линии уровня функции $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
На рисунке 3 представлена карта линий уровня и поверхность с нанесёнными на неё линиями уровня, выполненная в системе CalcPlot3D.

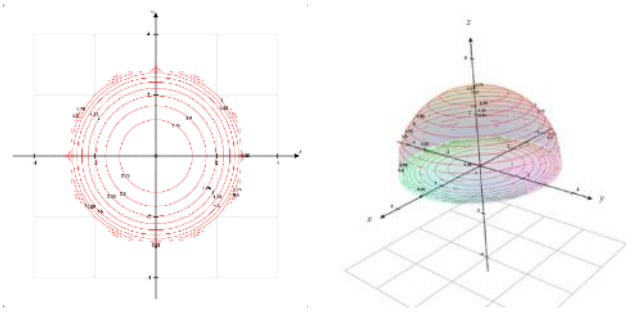

Рисунок 3 – Карта линий уровня и график поверхности

4. Построение градиента.

Градиент дифференцируемой функции двух или трёх переменных $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяет направление, в котором функция в этой точке возрастает с наибольшей скоростью, при этом направление градиента совпадает с направлением нормали к линии уровня (поверхности уровня).

Построим градиент функция трех переменных $u = \left(3x - y^2 + z\right)e^{3y-2z}$ в точке $M_0\left(-1;2;3\right)$.

$$\mathbf{grad}\, u\left(M_0\right) = \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3y-2z}. \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(9x - 3y^2 + 3z - 2y\right)e^{3y-2z} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(1 - 6x + 2y^2 - 2z\right)e^{3y-2z}$$

Вычислим значения частных производных в точке $M_0\left(-1, 2, 3\right)$:

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y} = -16, \quad \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z} = 9.$$

Тогда $\mathbf{grad}\, u\left(M_0\right) = 3\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

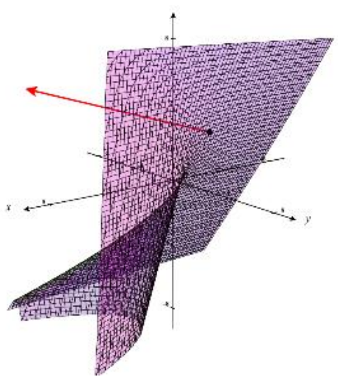

Рисунок 4 – Поверхность уровня и вектор-градиент в точке $M_0\left(-1, 2, 3\right)$