МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ФИГУРЕ ОТ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ

Методические указания

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ФИГУРЕ ОТ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ

Методические указания

Минск
БНТУ
2014

УДК 51(075.4)
ББК 221я7
О-62

Составители:
Т.Н. Гурина, Л.А. Яблонская

Рецензенты:
В.И. Терешенков, Т.С. Яцкевич

Издание посвящено разбору теоретического материала по теме «Определенный интеграл по фигуре от скалярной функции». Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы от скалярной функции излагаются с общих позиций интегрирования функции нескольких переменных. Разобрано достаточно большое количество примеров, которые поясняют смысл основных понятий при решении задач. Издание содержит индивидуальные задания по рассматриваемой теме для самостоятельного выполнения студентами.

Содержание

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985
2. Герасимович А.И., Кеда Н.П., Сугак М.Б. Математический анализ.Ч.2.-Мн.: Выш. школа, 1990.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. -М.: Высш.шк., 1986. Ч.2.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: в 5 ч.– Мн.: Выш. школа, 1985. Ч.3.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под ред. Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1978
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 ч. -М.: Наука, 1987. Ч.2.
8. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. 2часть.-М., Айрис Пресс,2004
9. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике. Ч.2.-Мн.: Выш. школа, 1994.

§1. Фигура. Диаметр. Мера.

Фигурой (Ф) назовем любое связное, замкнутое, ограниченное множество точек на плоскости $\left(R^2\right)$ или в пространстве $\left(R^3\right)$.

Таким образом, геометрической фигурой (Ф) являются:

1) линия $\left(L_1\right)$ в R^2 или $\left(L_2\right)$ R^3, в частности отрезок $[a,b]$ координатной оси (рис.1);
2) плоская область (S) в R^2 (рис.2);
3) поверхность (σ) в R^3 (рис.3);
4) пространственная область (V) в R^3, ограниченная замкнутой поверхностью – тело в пространстве, (рис.4)

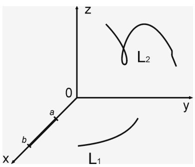


рис.1

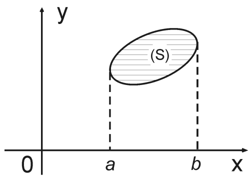


рис.2

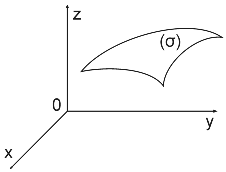


рис.3

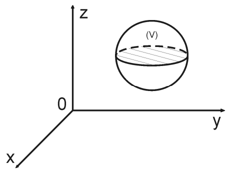


рис.4

Диаметром $diam(\Phi)$ фигуры Ф называют максимальное расстояние между двумя ее точками.

Например, диаметр эллипса равен его фокальной оси; диаметр куба равен длине его диагонали.

С понятием фигуры связано понятие ее *меры* μ(Ф).

Мерой одномерной фигуры (линии) называют ее длину: $\mu(L)$ – длина дуги L.

Мерой двумерной фигуры называют ее площадь: $\mu(S)$ – площадь области S, $\mu(\sigma)$ – площадь поверхности σ.

Мерой трехмерной фигуры (тела) называют ее объем: μ(*V*) – объем тела *V*.

§2. Определенный интеграл по фигуре. Теорема существования.

Пусть в каждой точке P фигуры (Φ), мера которой μ(Φ)=μ, определена скалярная функция $u = f(P), P \in (\Phi)$.

Выполним следующие действия:

1. Произвольно разобъем фигуру (Φ) на *n* элементарных фигур $(\Delta\Phi_i)$ с мерами $\Delta\mu_i, i = \overline{1,n}$.
2. Произвольно выберем на каждой элементарной фигуре точки $P_i \in (\Delta\Phi_i)$ и вычислим значения $f(P_i)$ функции в этих точках.
3. Вычислим произведения $f(P_i) \cdot \Delta\mu_i, i = \overline{1,n}$.
4. Составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\mu_i$, которая называется *n-й интегральной суммой* для функции $f(P)$ по фигуре (Φ).
5. Обозначим через λ – максимальный из диаметров элементарных фигур $(\Delta\Phi_i)$: $\lambda = \max\{diam(\Delta\Phi_i)\}$. Перейдем к пределу в интегральной сумме $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\mu_i$ при условии что λ→0.

Так как произвольно осуществляется разбиение фигуры (Φ) на элементарные $(\Delta\Phi_i)$ и произвольно выбираются точки $P_i \in (\Delta\Phi_i)$, то, очевидно, что для данной фигуры (Φ) и выбранного *n* можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

Определение. Если существует конечный предел n-й интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\mu_i$ при условии что λ→0 (при этом каждая из элементарных фигур стягивается в точку) и этот предел не зависит ни от способа разбиения фигуры (Φ) на элементарные $(\Delta\Phi_i)$, ни от выбора точек P_i на них, то он (предел) называется *определенным* *интегралом по фигуре* (Ф) *от скалярной функции* $u = f(P)$ и обозначается $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu$ (ОИФ).

Таким образом, по определению ОИФ: $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta\mu_i$.

Естественно возникает вопрос: для каких функций $f(P)$ существует определенный интеграл по фигуре (Ф)? Ответом служит теорема существования ОИФ, которую приведем без доказательства.

Теорема существования. Если функция $u = f(P)$ непрерывна на фигуре (Ф), то существует определенный интеграл $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu$.

Замечание. Определенный интеграл по фигуре может существовать не только для непрерывных функций, но и для кусочно-непрерывных функций.

В дальнейшем будем предполагать, что определенные интегралы по фигуре, о которых идет речь, существуют.

§3. Свойства определенного интеграла по фигуре.

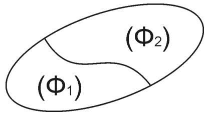
1. Свойство линейности. Определенный интеграл по фигуре от линейной комбинации функций $\alpha f(P)+\beta g(P)$ равен линейной комбинации интегралов от слагаемых функций по той же фигуре. То есть, $\int\limits_{(\Phi)}\left(\alpha f(P)+\beta g(P)\right)d\mu = \alpha\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu + \beta\int\limits_{(\Phi)} g(P)d\mu$, где α, β – константы.

Это свойство следует из определения ОИФ и свойств пределов:

$$\int\limits_{(\Phi)}\left(\alpha f(P)+\beta g(P)\right)d\mu = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha f(P_i)+\beta g(P_i)\right)\Delta\mu_i =$$

$$= \alpha\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\mu_i + \beta\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(P_i)\Delta\mu_i = \alpha\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu + \beta\int\limits_{(\Phi)} g(P)d\mu$$

2. Свойство аддитивности. Если фигура (Ф) состоит из скольких фигур, не имеющих общих внутренних точек, то ределенный интеграл по фигуре (Ф) равен сумме интегралов по составляющим ее частям.



То есть, если $(\Phi) = (\Phi_1) + (\Phi_2)$ (рис.1) ,то

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu = \int\limits_{(\Phi_1)} f(P)d\mu + \int\limits_{(\Phi_2)} f(P)d\mu .$$

3. *О вычислении меры фигуры.* Мера $\mu = \mu(\Phi)$ вычисляется по формуле: $\mu(\Phi) = \int\limits_{(\Phi)} d\mu$.

Это свойство следует из определения интеграла по фигуре (Ф) от функции $f(P) \equiv 1$: $\int\limits_{(\Phi)} 1 \cdot d\mu = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta\mu_i = \lim\limits_{\lambda \to 0} \mu = \mu$.

4. *Об интегрировании неравенств.* Если $f(P) \leq g(P), \forall P \in (\Phi)$, то $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu \leq \int\limits_{(\Phi)} g(P)d\mu$.

Действительно, так как $f(P) \leq g(P), \forall P \in (\Phi)$,

то $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\mu_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} g(P_i)\Delta\mu_i$ и поэтому

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\mu_i \leq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\Delta\mu_i = \int\limits_{(\Phi)} g(P)d\mu .$$

5. *Об оценке определенного интеграла по фигуре.* Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ на фигуре (Ф), то $m \cdot \mu \leq \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu \leq M \cdot \mu$.

Действительно, так как $m \leq f(P) \leq M$ на фигуре (Ф), то на основании свойств 4, 1, и 3 $m \cdot \mu = \int\limits_{(\Phi)} md\mu \leq \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu \leq \int\limits_{(\Phi)} Md\mu = M \cdot \mu$.

6. *Об оценке модуля определенного интеграла по фигуре.*

$$\left| \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu \right| \leq \int\limits_{(\Phi)} \left| f(P) \right| d\mu .$$

Эта оценка основана на свойстве модуля: $-\left|f(P)\right| \le f(P) \le \left|f(P)\right|$. Тогда из свойства 5 следует $-\int\limits_{(\Phi)} \left|f(P)\right| d\mu \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu \le \int\limits_{(\Phi)} \left|f(P)\right| d\mu$,

то есть: $\left|\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu\right| \le \int\limits_{(\Phi)} \left|f(P)\right| d\mu$.

7. Теорема о среднем значении определенного интеграла по фигуре. Если функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Ф), то найдется на фигуре (Ф) по крайней мере одна такая точка $P_0 \in (\Phi)$, что $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu = f(P_0)\cdot\mu$.

Действительно, на основании свойств функций, непрерывных на (Ф) и изложенных выше свойств ОИФ, получаем $m\cdot\mu \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu \le M\cdot\mu$, откуда $m \le \frac{1}{\mu}\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu \le M$. Так как $f(P)$ непрерывна на (Ф), то она принимает на этой фигуре все промежуточные значения между m и M. Это означает, что существует такая точка $P_0 \in (\Phi)$, что $f(P_0) = \frac{1}{\mu}\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu$, откуда $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\mu = f(P_0)\cdot\mu$.

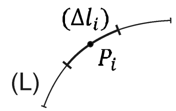
Замечание. Значение $f(P_0)$ из теоремы о среднем значении ОИФ называют *средним значением функции* $f(P)$ *на фигуре* (Ф).

§4. Конкретные виды определенного интеграла по фигуре от скалярной функции.

Рассматривая конкретные виды фигур: дугу кривой (L), плоскую область (S), поверхность (σ), пространственное тело (V), получим следующие конкретные виды определенных интегралов по фигуре.

1. *Криволинейный интеграл по длине дуги.*

Пусть фигура (Ф) – плоская или пространственная линия (L). Мера этой линии – длина $l = \mu(L)$. Обозначим меру элементарной дуги (ΔL_i) через $\Delta l_i, i=\overline{1,n}$, наибольший из диаметров элементарных дуг $\lambda = \max\{\Delta l_i\}$. В этом случае интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta\mu_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta l_i$.



Если существует конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta l_i$ при λ→0, который не зависит от способа разбиения дуги (L) на элементарные (ΔL_i) и от выбора точек P_i, то его называют *криволинейным интегралом по длине дуги (или криволинейным интегралом первого рода – КРИ–1)* и обозначают $\int\limits_{(L)} f(P)dl$.

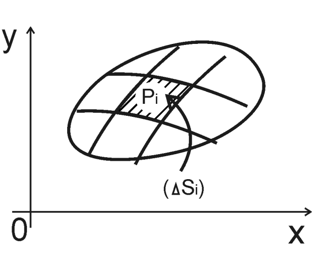
Таким образом, $\int\limits_{(L)} f(P)dl = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$.

Здесь (L) – линия интегрирования, dl – дифференциал длины дуги (L). Если $(L)\subset R^2$ – плоская дуга, то $f(P)=f(x,y)$, если $(L)\subset R^3$ – пространственная дуга, то $f(P)=f(x,y,z)$.

2. Двойной интеграл.

Пусть фигура (Ф) – плоская область (S), мерой μ такой фигуры является ее площадь $\mu(S)=S$. Меру элементарной фигуры (ΔS_i) обозначим $\Delta s_i, i=\overline{1,n}$, а максимальный диаметр – λ.

Если $P\in(S)\subset R^2$, то функция $f(P)=f(x,y)$. Тогда интегральная сумма функции $f(x,y)$ на плоской области (S) имеет вид: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta s_i$.



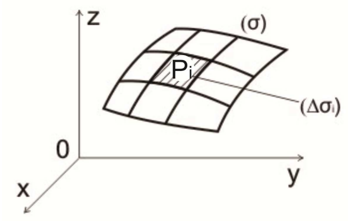
Если существует конечный предел $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$ при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения плоской области (S), на элементарные (ΔS_i) и от выбора точек $P_i(x_i, y_i)$, то его называют *двойным интегралом функции* $f(x, y)$ *по плоской области* (S) и обозначают $\iint\limits_{(S)} f(x, y)ds$.

Таким образом, $\iint\limits_{(S)} f(x, y)ds = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$.

Здесь (S) – область интегрирования, x, y – переменные интегрирования, ds – дифференциал площади плоской области (S).

3. *Поверхностный интеграл по площади поверхности.*

Пусть фигура (Ф) – поверхность (σ) в R^3. Мерой $\mu(\sigma) = \sigma$ является ее площадь σ. Меру элементарной фигуры $(\Delta\Phi_i)$ обозначим $\Delta\sigma_i, i = \overline{1, n}$, а максимальный диаметр элементарных фигур – λ.



Так как $P \in (\sigma) \subset R^3$, то функция $f(P) = f(x, y, z)$ – функция трех переменных. Тогда интегральная сумма функции $f(x, y, z)$ на поверхности (σ) имеет вид: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i$.

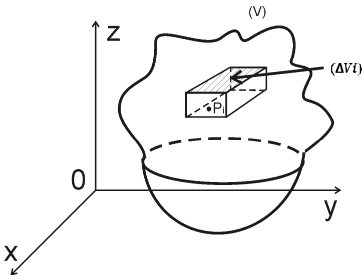
Если существует конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i$ при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения плоской области (σ) на элементарные $(\Delta\sigma_i)$ и от выбора точек $P_i(x_i, y_i, z_i) \in (\Delta\sigma_i)$, то он называется *поверхностным интегра-*

лом по площади поверхности σ (или поверхностным интегралом 1-го рода) от функции $f(x,y,z)$ и обозначают $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma$.

Таким образом, $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i$.

Здесь (σ) – поверхность интегрирования, x, y, z – переменные интегрирования, $d\sigma$ – дифференциал площади поверхности (σ).

4. Тройной интеграл.



Пусть фигура (Ф) – пространственная область $(V)\subset R^3$, ограниченная замкнутой поверхностью. Мерой $\mu(V)=V$ является ее объем V. Меру элементарной фигуры (ΔV_i) обозначим $\Delta v_i, i=\overline{1,n}$, а максимальный диаметр элементарных фигур – λ. Так как $P\in(V)\subset R^3$, то функция $f(P)=f(x,y,z)$ – функция трех переменных. Тогда интегральная сумма функции $f(x,y,z)$ по области (V) имеет вид: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta v_i$.

Если существует конечный предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta v_i$ при $\lambda\to 0$, который не зависит от способа разбиения области (V) на элементарные (ΔV_i) и от выбора точек $P_i(x_i,y_i,z_i)\in(\Delta V_i)$, то его (этот предел) называют *тройным интегралом от функции* $f(x,y,z)$ *по пространственной области* (V) и обозначают $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv$.

Таким образом $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$.

Здесь (V) – область интегрирования; x, y, z – переменные интегрирования; dv – дифференциал объема пространственной области (V) .

§5. Механический смысл определенного интеграла по фигуре от скалярной функции.

Рассмотрим материальную фигуру (Φ), то есть обладающую определенной массой m. Поставим задачу о вычислении массы m фигуры (Φ) .

Пусть в каждой точке $P \in (\Phi)$ задана переменная плотность $\gamma = \gamma(P)$ – функция точки P. Заметим, что если плотность $\gamma = const$, то масса фигуры (Φ) определяется формулой $m = \gamma \cdot \mu$, где μ – мера фигуры (Φ) . Для решения поставленной задачи применим следующий алгоритм:

1. Произвольно разобьём фигуру (Φ) на n элементарных фигур $(\Delta\Phi_i)$, меры которых $\mu(\Delta\Phi_i)$.
2. Произвольно на каждой элементарной фигуре $(\Delta\Phi_i)$ выберем точку $P_i \in (\Delta\Phi_i)$ и вычислим значение функции плотности $\gamma = \gamma(P_i)$ в этой точке.
3. Считая, что элементарная фигура $(\Delta\Phi_i)$ однородная, вычислим ее массу $\Delta m_i \approx \gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i)$.
4. Суммируя элементарные массы $\Delta m_i, i = \overline{1,n}$, получим приближенное значение искомой массы m: $m = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i)$.
5. Для определения точного значения массы материальной фигуры найдем предел полученной интегральной суммы при ус-

ловии, что максимальный диаметр фигур разбиения λ→0, а $n\to\infty$. Тогда $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i)$.

Согласно определению определенного интеграла по фигуре от скалярной функции получим формулу: $m=\int\limits_{(\Phi)}\gamma(P)d\mu$, которая иллюстрирует механический смысл определенного интеграла по фигуре от скалярной функции, являющейся функцией плотности материальной фигуры.

Для конкретного вида материальных фигур:

1. Масса материальной пространственной дуги *(L)*: $m=\int\limits_{(L)}\gamma(x,y,z)dl$.
2. Масса материальной пластины *(S)*: $m=\iint\limits_{(S)}\gamma(x,y)ds$.
3. Масса материальной поверхности *(σ)*: $m=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y,z)d\sigma$.
4. Масса материальной пространственной области (V): $m=\iiint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)dv$.

§6. Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги (КРИ – 1).

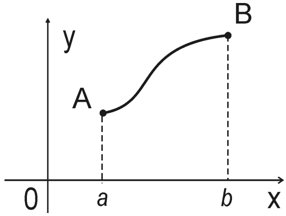
Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги $\int\limits_{(L)}f(P)dl$ сводится к вычислению определенного интеграла, для этого следует воспользоваться уравнением кривой *(L)* и формулами для нахождения дифференциала дуги *dl*.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть на плоскости дуга *AB* задана уравнением $y=y(x), x\in[a,b]$.

Будем предполагать, что $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны на $[a,b]$. В этом случае $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, тогда

$$\int\limits_{(\cup AB)} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\,.$$



Итак, для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_{(\cup AB)} f(P)dl$ по длине дуги *AB* с уравнением $y = y(x), x \in [a,b]$ необходимо:

1) заменить y в подынтегральной функции на его значение $y(x)$ на дуге;

2) заменить dl на $\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$;

3) вычислить получившийся определенный интеграл на отрезке $[a,b]$, который является проекцией дуги *AB* на ось *Ox*.

Замечание. Иногда удобно уравнение кривой использовать в виде $x = x(y), y \in [c,d]$, то в этом случае формула вычисления КРИ–1 будет иметь вид: $\int\limits_{(\cup AB)} f(x,y)dl = \int\limits_c^d f(x(y),y) \cdot \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$.

2. Пусть плоская дуга *AB* задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta$.

Будем считать $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ непрерывными на $[\alpha,\beta]$ и $x'(t) > 0$. В этом случае $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$, тогда

$$\int\limits_{(\cup AB)} f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,.$$

3. Пусть пространственная дуга *AB* задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \\ z = z(t) \end{cases} \alpha \le t \le \beta$.

Тогда аналогично предыдущему случаю: $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$ и

$$\int\limits_{(\cup AB)} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt .$$

Пример 1. Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$ от $A(1;0)$ до $B(e;1)$, если плотность в каждой точке задана функцией $\gamma(x,y) = \dfrac{y}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Масса m дуги кривой вычисляется по формуле $m = \int\limits_{(\cup AB)} \gamma(x,y)dl$. Найдем дифференциал дуги $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \sqrt{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}dx = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$, то

$$m = \int\limits_{(\cup AB)} \gamma(x,y)dl = \int\limits_{(\cup AB)} \frac{y}{x\sqrt{1+x^2}}dl = \int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx =$$

$= \int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}dx$. Интегрируя по частям, получаем $m = \int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \dfrac{2}{e}$.

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y,\ y \in [1;e]$.

Решение. Используем формулу длины дуги: $l = \int\limits_{(L)} dl$.

Так как уравнение дуги разрешено относительно *x*, найдем дифференциал дуги по формуле

$$dl = \sqrt{1+(x'(y))^2}dy = \sqrt{1+\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\right)^2}dy = \sqrt{\frac{4y^2 + y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2}}dy =$$

$$=\sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{4y^2}}dy=\frac{y^2+1}{2y}dy.$$ Таким образом $l=\int\limits_{(L)}dl=\int\limits_1^e\frac{y^2+1}{2y}dy=$

$$=\int\limits_1^e\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)dy=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}\ln|y|\right)\Bigg|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

Пример 3. Вычислить массу первого витка винтовой линии $x=a\cos t, y=a\sin t, z=t, 0\le t\le 2\pi$, если задана функция плотности $\gamma(x,y,z)=\dfrac{z^2}{x^2+y^2}$.

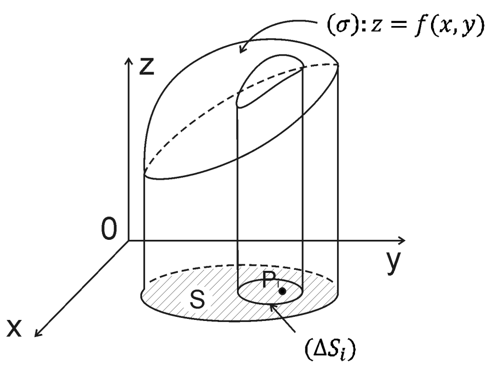
Решение. Используем формулу $m=\int\limits_{(L)}\gamma(x,y,z)dl$. Найдем дифференциал длины дуги $dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt=$

$=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+1}dt=\sqrt{1+a^2}dt$. Следовательно,

$$m=\int\limits_0^{2\pi}\frac{t^2}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{a^2+1}dt=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2}\int\limits_0^{2\pi}t^2dt=\frac{8\pi^3\sqrt{a^2+1}}{3a^2}.$$

§7. Геометрический смысл двойного интеграла. Задача об объеме криволинейного цилиндра.

Пусть $z=f(x,y)\ge 0$, непрерывная в замкнутой, ограниченной области (S) функция, определяет в трехмерном пространстве некоторую поверхность σ, проекция которой на плоскость xOy совпадает с областью (S).



Требуется найти объем тела (V), ограниченного сверху поверхностью (σ), снизу (в плоскости xOy) областью (S) и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей является граница области (S). Такое тело называют *криволинейным цилиндром,* а область (S) – *основанием* криволинейного цилиндра.

Для решения поставленной задачи выполним следующие операции:

1. Разобьем область (S) произвольно на n элементарных областей (ΔS_i), площадь каждой – Δs_i.

2. Через границу каждой (ΔS_i) построим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. В результате криволинейный цилиндр будет разбит на n элементарных цилиндрических тел с объемами Δv_i.

3. На каждой площадке (ΔS_i) произвольно выберем точки $P_i(x_i, y_i)$ и вычислим значения $z_i = f(P_i) = f(x_i, y_i)$.

4. Считая, что приближенно объем элементарного криволинейного цилиндра равен объему прямого цилиндра с основанием Δs_i и высотой $f(x_i, y_i)$, получим $\Delta v_i \approx f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$.

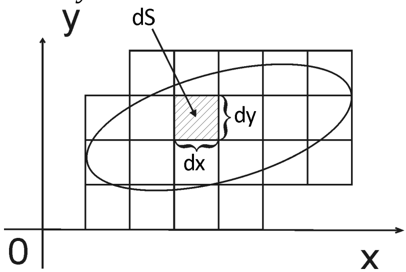
5. Тогда искомый объем приближенно будет равен $v \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$.

За объем криволинейного цилиндра принимают предел, полученной интегральной суммы при условии, что $\lambda \to 0$, где λ – максимальный диаметр элементарных площадок (ΔS_i). Таким образом $v = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$.

Так как по определению правая часть полученного равенства является двойным интегралом функции $f(x, y)$ по плоской области (S), то $v = \iint\limits_{(S)} f(x, y) ds$. Если $f(x, y) \geq 0$ – это объем криволинейного цилиндра с основанием (S) и сверху ограниченным поверхностью (σ), уравнение которой $z = f(x, y)$.

§8. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

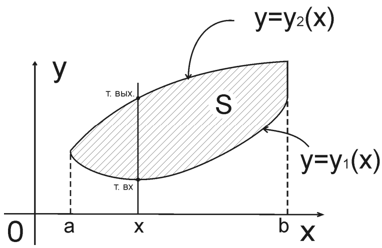
По определению двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x, y)ds$ не зависит от способа разбиения области (S) на элементарные, поэтому выполним разбиение этой области прямыми, параллельными координатным осям: $x = const, y = const$. Тогда элемент площади *ds* в декартовых координатах равен произведению дифференциалов независимых переменных *dx* и *dy*, то есть *ds=dxdy*.



В этом случае двойной интеграл примет вид

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)ds = \iint\limits_{(S)} f(x, y)dxdy.$$

Покажем, что вычисление двойного интеграла $\iint\limits_{(S)} f(x, y)dxdy$ осуществляется путем последовательного интегрирования по обеим переменным с последующим использованием формулы Ньютона-Лейбница. Рассмотрим случай, когда область интегрирования (S) является правильной областью в направлении оси *Oy*.



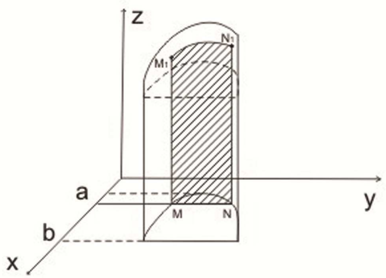
Определение. Плоская область (S), лежащая в плоскости *xOy* называется *правильной в направлении оси Oy*, если любая прямая, параллельная оси *Oy* и проходящая через внутренние точки области (S), пересекает ее границу не более чем в двух точках.

Пусть область *(S)* ограничена непрерывными линиями $y = y_1(x), y = y_2(x), a \le x \le b,$ причем $y_1(x) \le y_2(x), \forall x \in [a,b]$ и отрезками $x = a, x = b.$ Линия $y = y_1(x)$ – линия входа, $y = y_2(x)$ – линия выхода.

Обратимся к геометрическому смыслу двойного интеграла, если $f(x,y) \ge 0$, а область (S) – правильная в направлении оси *Oy*. Тогда $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ – выражает объем соответствующего криволинейного цилиндра: $v = \iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$.

С другой стороны этот объем можно вычислить, используя формулу объема тел по площадям поперечных сечений: $v = \int\limits_a^b Q(x)dx$.

Рассечем тело плоскостью $x = const, a \le x \le b$. В сечении получим криволинейную трапецию MM_1N_1N , площадь которой $Q(x)$.Независимая переменная *y* изменяется от ординаты точки *M* $y = y_1(x)$ до ординаты точки *N* $y = y_2(x)$, так как $x = const$, то $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, таким образом $Q(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. Следовательно $v = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$. Принято записывать:



$v = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, или получаем формулу

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy .$$

Интеграл, стоящий в правой части называют *повторным* или *двукратным интегралом*. Интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ называется *внутренним*, а интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ – *внешним интегралом*.

Порядок вычисления таков: сначала вычисляют внутренний интеграл по переменной *y*, при этом считают, что переменная *x* – фиксированная, получившийся результат является функцией *x*, который интегрируют по переменной *x*, применяя формулу Ньютона-Лейбница.

Таким образом, для вычисления $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ необходимо:

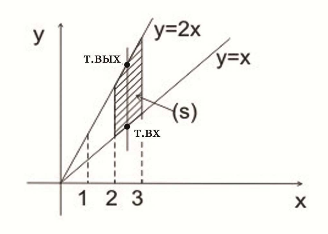
1. Построить область интегрирования (S) убедиться, что она правильная в направлении оси *Oy*; определить линию входа $y = y_1(x)$, линию выхода $y = y_2(x)$.

2. Записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле сначала расставить внутренние пределы интегрирования для этого нужно двигаться параллельно оси *Oy*. При этом *y* изменяется от $y_1(x)$ (ее ставим на нижнем пределе) до $y_2(x)$ (ее ставим на верхнем пределе).

3. Проецируя область (S) на ось *Ox* расставить внешние пределы интегрирования, которые всегда являются числами.

4. Вычислить внутренний интеграл при постоянном *x*, полученный результат проинтегрировать по *x*.

Пример. Вычислить $\iint\limits_{(S)} (x+2y)dxdy$, где область (S) ограничена линиями $y = x, y = 2x,$ $x = 2, x = 3.$



Решение. 1. Построим область интегрирования (S). Область *(S)* является правильной в направлении оси *Oy*: *y=x* – линия входа, *y=2x* – линия выхода.

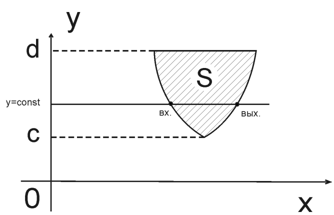
2. Значит, границы внутреннего интеграла по переменной *y* будут: нижняя – *x*, верхняя – *2x*: $\int\limits_x^{2x}(x+2y)dy$.

3. Проекцией области (S) на ось *Ox* является отрезок [2,3], значит границы внешнего интеграла по переменной *x* будут: нижняя – 2, верхняя – 3. Итак, $\iint\limits_{(S)}(x+2y)dxdy=\int\limits_2^3 dx\int\limits_x^{2x}(x+2y)dy$.

4. Вычислим внутренний интеграл, считая $x=const$: $\int\limits_x^{2x}(x+2y)dy=\left(xy+y^2\right)\Big|_x^{2x}=x\cdot 2x+4x^2-\left(x^2+x^2\right)=4x^2$.

Вычислим внешний интеграл: $\int\limits_2^3 4x^2dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_2^3=\frac{76}{3}$.

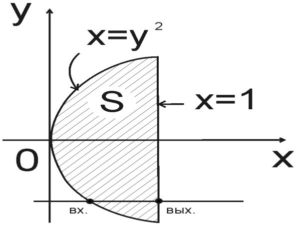
Замечание 1. Пусть область интегрирования (S) является правильной в направлении оси *Ox*, то есть любая прямая, проходящая через внутренние точки области, параллельно оси *Ox*, пересекает ее границу не более, чем в двух точках. Например, область (S) ограничена линиями $x=x_1(y), x=x_2(y), y\in[c,d]$, причем $x_1(y)\le x_2(y), \forall y\in[c,d]$.



В этом случае сведение двойного интеграла к повторному имеет вид: $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$

Пример 2. Вычислить массу пластины, ограниченной линиями $x=y^2, x=1,$ если плотность в каждой ее точке равна произведению квадратов ее координат.

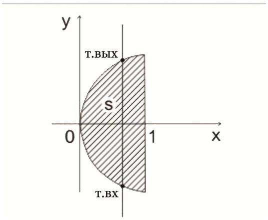
Решение. По условию задачи функция плотности $\gamma(x,y)=x^2y^2$. Тогда искомая масса m определится двойным интегралом $m=\iint\limits_{(S)}x^2y^2dxdy$.



1. Построим область интегрирования (S).
2. Область является правильной в направлении оси Ox: линия входа: $x=y^2$, линия выхода $x=1$. Следовательно, внутренний интеграл имеет вид: $\int\limits_{y^2}^{1}x^2y^2dx$.
3. Проекцией области (S) на ось Oy является отрезок $[-1,1]$, значит границы внешнего интеграла по переменной y: нижняя – -1, верхняя – 1.
4. Таким образом, $m=\iint\limits_{(S)}x^2y^2dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{y^2}^{1}x^2y^2dx=$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3}y^2\Big|_{y^2}^{1}\right)dy=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}y^8\right)dy=\frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^9}{9}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{27}.$$

Заметим, что в этой задаче область (S) является правильной и в направлении оси Oy.



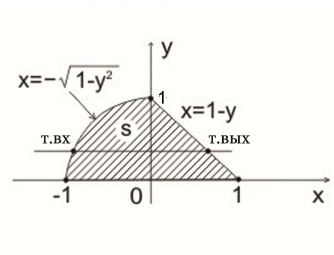
Следовательно, другой способ расстановки пределов интегрирования будет иметь вид: $m=\iint\limits_{(S)}x^2y^2dxdy=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}x^2y^2dy$. Вычисления дадут: $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}x^2y^2dy=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x^2y^3}{3}\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}\left(x^{\frac{7}{2}}+x^{\frac{7}{2}}\right)dx=\frac{4}{27}$.

Замечание 2. Если область интегрирования (S) не является правильной в направлении обеих осей координат, то ее разбивают на сумму правильных областей, и представляют интеграл в виде суммы интегралов по этим областям.

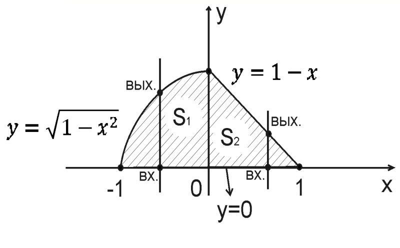
Замечание 3. Если для линии входа или выхода не существует единого аналитического задания, то используя свойства ОИФ, следует разбить область (S)на сумму областей $(S_i), i=\overline{1,k},$ прямыми, параллельными проектирующим прямым и проходящим через точки пересечении линий входа и выхода. Следовательно, интеграл по области (S) будет равен сумме интегралов по составляющим областям.

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

Решение. Прежде всего, восстановим область интегрирования (S): линия входа – $x=-\sqrt{1-y^2}$, линия выхода – $x=1-y$. Проекция области (S) на ось Oy – отрезок $[0,1]$. Значит, область (S) имеет вид:



Изменить порядок интегрирования – то есть, внешнее интегрирование выполнять по *x*, а внутреннее по *y*. Для нашей области (S), если рассекать ее прямой, параллельной оси Oy линия выхода имеет два различных аналитических выражения. Следовательно, через точку пересечения этих линий, необ-



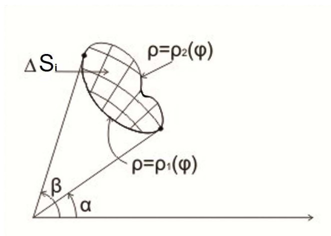
ходимо провести прямую, параллельную оси Oy, которая разбивает область (S) на две области (S_1) и (S_2). Для области (S_1): $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,0]$. Для области (S_2): $0 \le y \le 1-x, x \in [0,1]$.

Таким образом, $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy =$

$$= \iint\limits_{(S_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy$$

§9. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

Пусть в полярной системе координат плоская область (S) ограничена кривыми $\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, причем $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ и $\alpha \le \beta$.



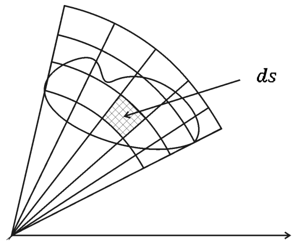
Определение. Плоская область (S) называется *правильной относительно полярной системы координат,* если любой луч, проходящий через внутренние точки области, пересекает ее границу не более чем в двух точках.

Пусть в правильной области (S) задана непрерывная функция $g(\varphi,\rho)$.

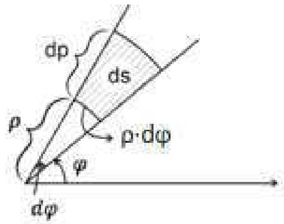
Разобьем произвольным образом область (S) на элементарные $(\Delta S_i), i=\overline{1,n}$. Произвольно на каждой (ΔS_i) выберем точку $P_i(\varphi_i,\rho_i)$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} g(\varphi_i,\rho_i)\cdot\Delta s_i$. В полученной интегральной сумме перейдем к пределу при условии, когда наибольший диаметр λ элементарных областей (ΔS_i) стремиться к нулю.

По определению этот предел является двойным интегралом от функции $g(\varphi,\rho)$ по области (S). Итак,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\varphi_i, \rho_i) \Delta s_i = \iint_{(S)} g(\varphi, \rho) ds .$$



Найдем выражение для элемента площади ds, используя тот факт, что двойной интеграл не зависит от способа разбиения области (S) на элементарные. Для этого область (S) разобьем на площадки концентрическими окружностями $\rho = const$ и лучами $\varphi = const, \alpha \le \varphi \le \beta$.

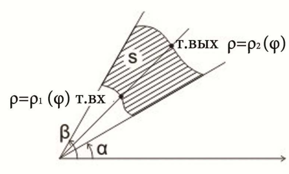


Рассмотрим одну из элементарных областей, ограниченную лучами $\varphi, \varphi + d\varphi$ и окружностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$. Полученный криволинейный четырехугольник приближенно можно принять за прямоугольник, стороны которого $\rho \cdot d\varphi$ и $d\rho$.

Тогда $ds = \rho d\varphi d\rho$, а двойной интеграл примет вид

$$\iint_{(S)} g(\varphi, \rho) ds = \iint_{(S)} g(\varphi, \rho) \rho d\varphi d\rho .$$

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, так же как и в декартовой, сводится к последовательному интегрированию по переменным ρ и φ.



Укажем правило расстановки пределов интегрирования для случая правильной плоской области (S), ограниченной линиями $\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta, \alpha \le \beta,\ \rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$.

Для этого случая имеет место формула:

$$\iint_{(S)} g(\varphi, \rho) ds = \iint_{(S)} g(\varphi, \rho) \rho d\varphi d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} g(\varphi, \rho) \rho d\rho .$$

Для использования этой формулы следует применить следующий алгоритм.

1. Построить область интегрирования (S).

2. В двойном интеграле $\iint\limits_{(S)} g(\varphi,\rho)ds$ заменить $ds=\rho d\varphi d\rho$.

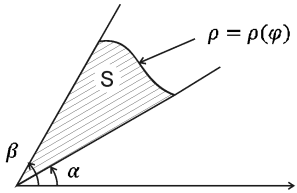
3. В повторном интеграле *сначала* расставить *внутренние* пределы интегрирования, то есть пределы изменения ρ. Для этого надо двигаться *по лучу*, выходящему из полюса; на нем ρ меняется от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$.

4. Расставить *внешние* пределы интегрирования, определив лучи $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$, между которыми заключена фигура (внешние пределы всегда числа).

5. Вычислить внутренний интеграл при постоянном φ, затем внешний интеграл.

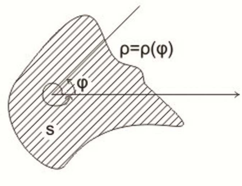
Рассмотрим два частных случая.

1. Область интегрирования (S) имеет вид:



Тогда $\iint\limits_{(S)} g(\varphi,\rho)ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} g(\varphi,\rho)\rho d\rho$.

2. Полюс содержится внутри области (S):



Для этого вида области (S):

$$\iint\limits_{(S)} g(\varphi,\rho)ds=\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} g(\varphi,\rho)\rho d\rho .$$

Замечание. Полярной системой координат удобно пользоваться, если область интегрирования является кругом или сектором, или линией, уравнение которой содержит выражение x^2+y^2. Поэтому в целях упрощения вычислений $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ переходят к полярным координатам, используя следующие формулы перехода:

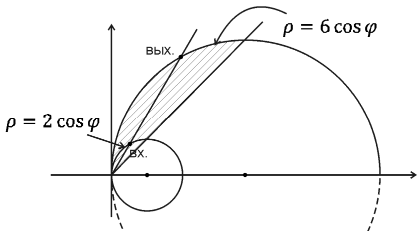
$$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\rho, ds=dxdy=\rho d\varphi d\rho, x^2+y^2=\rho^2 .$$

Таким образом

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\rho \\ y=\rho\sin\rho \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{matrix} \right| = \iint\limits_{(S)} f\left(\rho\cos\rho, \rho\sin\rho\right)\rho d\rho d\varphi .$$

Пример 1. Вычислить массу пластины, заданной неравенствами $2x \le x^2 + y^2 \le 6x, y \ge x$, если плотность в каждой ее точке равна ее абсциссе.

Решение. Масса плоской фигуры (S) с плотностью $\gamma(x,y)$ вычисляется по формуле $m = \iint\limits_{(S)} \gamma(x,y)dxdy$, так как по условию задачи $\gamma(x,y) = x$, то $m = \iint\limits_{(S)} xdxdy$.



1. Построим область (S). Границами области являются окружности $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=6x$ и прямая $y=x$.

$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1-$ это окружность с центром (1;0), радиуса 1.

$x^2+y^2=6x \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=9-$ это окружность с центром (3;0), радиуса 3.

2. Перейдем к полярным координатам. Уравнения границ: $\rho = 2\cos\varphi, \rho = 6\cos\varphi, \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $m = \iint\limits_{(S)} xdxdy =$

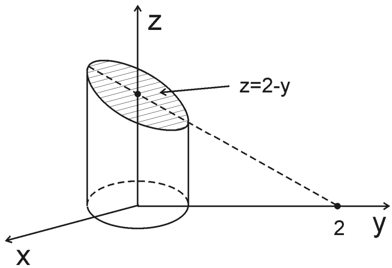
$$= \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\rho, y=\rho\sin\rho \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \\ \rho_{вх}=2\cos\varphi, \rho_{вых}=6\cos\varphi \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} \rho\cos\varphi\rho d\rho =$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi}\right)\cos\varphi d\varphi=\frac{6^3-2^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{208}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi=$$

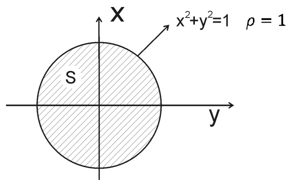
$$=\frac{52}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi=\frac{13(3\pi-8)}{6}.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1, y+z=2, z=0$.

Решение. Данное тело является криволинейным цилиндром, который ограничен круговой цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=1$, плоскостями $z=0, z=2-y$. Выполним построение.



Часть плоскости $z=2-y$, которая ограничивает криволинейный цилиндр сверху, проектируется в круг $x^2+y^2\le 1$ на плоскости $z=0(xOy)$. Следовательно, область тегрирования имеет вид:



Таким образом $v=\iint\limits_{(S)}(2-y)dxdy$, перейдем к полярным координатам.

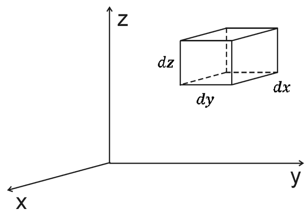
$$v=\iint\limits_{(S)}(2-y)dxdy=\left|\begin{matrix}x=\rho\cos\rho, y=\rho\sin\rho\\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\\ \rho_{вх}=0, \rho_{вых}=1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{matrix}\right|=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(2-\rho\sin\varphi)\rho d\rho=$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \right) \Bigg|_0^1 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \sin\varphi \right) d\varphi = \left(\varphi + \frac{1}{3} \cos\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi .$$

§ 10. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

Вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dv$ сводится к последовательному интегрированию по каждой из переменных x, y, z от которых зависит подынтегральная функция.

Так как по определению тройной интеграл не зависит от способа разбиения пространственной области (V) на элементарные, то выберем способ разбиения плоскостями $x = const, y = const, z = const,$ тогда дифференциал объема $dv = dxdydz$. Следовательно, тройной интеграл примет вид $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dv = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz$.



Рассмотрим способ расстановки пределов интегрирования в $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz$ для случая, если пространственная область (V) является правильной в направлении оси Oz.

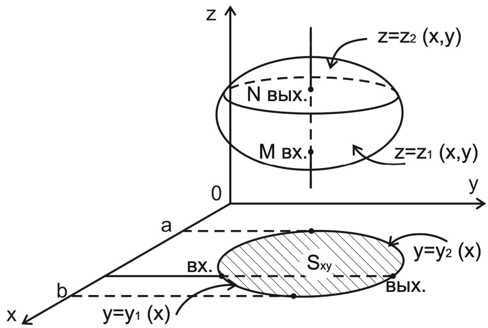
Определение. Пространственная область (V), ограниченная замкнутой поверхностью σ, называется *правильной в направлении оси* Oz, если выполняются следующие требования:

1) всякая прямая, проведенная параллельно оси Oz через внутренние точки области, пересекает поверхность σ в двух точках;

2) проекция области (V) на плоскость xOy плоская область (S_{xy}) является правильной в направлении одной из осей.

Итак, пусть правильная в направлении оси Oz пространственная область (V) ограничена снизу поверхностью σ_1, уравнение которой $z = z_1(x,y)$, сверху поверхностью σ_2 с уравнением $z = z_2(x,y)$.Соответственно, σ_1– поверхность входа, σ_2– поверхность выхода.

Проекция области (V) на плоскость xOy – плоская область (S_{xy}), ограниченная линиями $y = y_1(x)$ – линия входа, $y = y_2(x)$ – линия выхода в области (S_{xy}), причем $y_1(x) \le y_2(x)$. Проекцией плоской области (S_{xy}) на ось Ox является отрезок $[a,b]$.



Пусть в пространственной области (V)задана непрерывная функция $f(x,y,z)$. Расстановка пределов интегрирования в этом случае имеет вид $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz =$

$$= \iint\limits_{(S_{xy})} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \ .$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы называется трехкратным, причем $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ называют внутренним интегралом.

Вычисление трехкратного интеграла выполняют по следующему алгоритму:

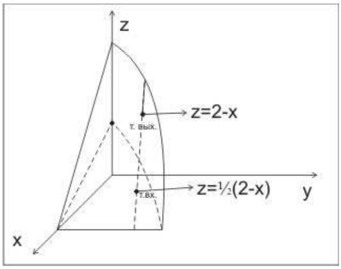
1). Вычисляют внутренний интеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, считая x, y – фиксированными. Результатом будет некоторая функция $\Phi(x,y)$.

2). Вычисляют средний интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \Phi(x,y)dy$, то есть функцию $\Phi(x,y)$ интегрируют по переменной y при фиксированном x. Результатом будет некоторая функция $F(x)$.

3). Вычисляют внешний интеграл $\int\limits_a^b F(x)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Замечание 1. Пространственную область (V) можно проектировать и на другие координатные плоскости, при этом меняется порядок интегрирования, что влечет за собой изменение пределов интегрирования по каждой из переменных, но численное значение интеграла сохраняется.

Замечание 2. Если область (V) не является правильной в направлении какой-либо оси, ее разбивают на сумму правильных областей; тогда интеграл будет равен сумме интегралов по составляющим областям.

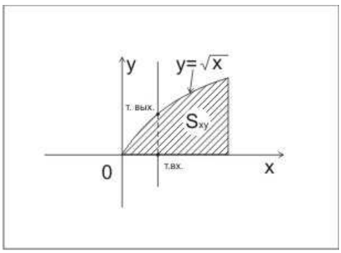


Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}, y=0, x+z=2, x+2z=2.$

Решение.

1. Построим поверхности, ограничивающие данное тело: $y=\sqrt{x}$ – цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz; $y=0$ – координатная плоскость xOz; $x+z=2$ – плоскость, параллельная оси Oy; $x+2z=2$ – плоскость, параллельная оси Oy.

2. Построим проекцию тела (V) на плоскость xOy – область (S_{xy}), которая имеет вид



Таким образом, искомый объем v определяется формулой:

$$v=\iiint\limits_{(V)}dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}dy\int\limits_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x}dz .$$

3. Вычисляем внутренний интеграл при фиксированном x:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x}dz=z\Big|_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x}=(2-x)-\frac{1}{2}(2-x)=\frac{1}{2}(2-x).$$

4. Вычисляем средний интеграл при фиксированном x:

$$\int\limits_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}(2-x)dy=\frac{1}{2}(2-x)y\Big|_0^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}(2-x)\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^3} .$$

3. Вычисляем внешний интеграл:

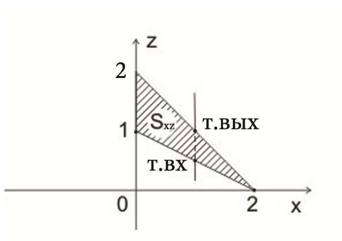
$$\int\limits_0^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^3}\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Кратко процесс вычисления можно записать:

$$v=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}dy\int\limits_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x}dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}\left(z\Big|_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x}\right)dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}(2-x)dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\frac{1}{2}(2-x)\cdot y\Big|_0^{\sqrt{x}}\right)dx=\int\limits_0^2\frac{1}{2}(2-x)\sqrt{x}dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Замечание. Если проектировать тело (V) на плоскость xOz, то проекция (S_{xz}) имеет вид:



Тогда расстановка пределов интегрирования будет:

$$v = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x} dz \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy .$$

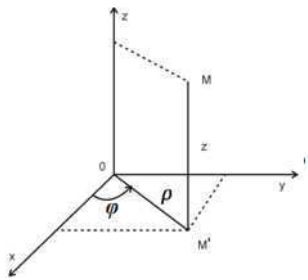
Вычисляя трехкратный интеграл, получим

$$v = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x} \left(y\Big|_0^{\sqrt{x}} \right) dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x} \sqrt{x} dz = \int\limits_0^2 \sqrt{x} \cdot z \Big|_{\frac{1}{2}(2-x)}^{2-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \sqrt{x} \frac{1}{2} (2-x) dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

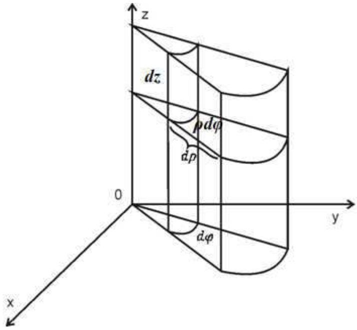
§ 11. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве можно характеризовать с помощью цилиндрических координат (ρ, φ, z), где ρ, φ – полярные координаты проекции точки M на плоскость $x0y$, z – аппликата точки M.



Цилиндрические координаты (ρ, φ, z) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) следующими формулами: $x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi, z = z$.

Для вычисления элемента объема dv в цилиндрических координатах разобьем область на элементарные объемы координатными поверхностями $\rho = const$ (круговые цилиндрические поверхности, осью которых является ось $0z$), $\varphi = const$ (полуплоскости, проходящие через ось $0z$), $z = const$ (плоскости, параллельные плоскости $x0y$. В качестве элементарного объема принимают параллелепипед со сторонами $\rho d\varphi, d\rho, dz,$ тогда $dv = \rho d\varphi d\rho dz$.



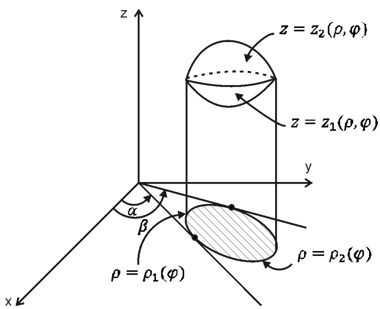
Формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам принимает вид:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\varphi d\rho dz .$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах сводится к последовательному интегрированию по φ, ρ, z .

Замечания.

1. К цилиндрическим координатам целесообразно переходить, когда уравнение поверхностей, ограничивающих тело, содержит $x^2 + y^2$.
2. Внутреннее интегрирование обычно удобно вести по z, среднее – по ρ и внешнее – по φ.
3. Для расстановки пределов область (V) проектируют на одну из координатных плоскостей, расставляют пределы по ρ и φ (как в двойном интеграле в случае вычисления его в полярных координатах), а затем определяют пределы по переменной z (от точки входа в область до точки выхода из нее). Для случая области (V), изображенной на рисунке, расстановка пределов интегрирования примет вид

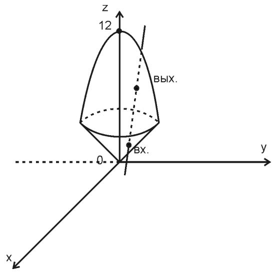


$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz .$$

Пример. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $z = 12 - x^2 - y^2, z^2 - x^2 - y^2 = 0, (z \geq 0)$, если плотность в каждой точке равна ее аппликате.

Решение. Тело ограничено поверхностями $z = 12 - x^2 - y^2$ – параболоид вращения; $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ – коническая поверхность.

В цилиндрической системе координат уравнения этих поверхностей имеют более простой вид: $z=12-\rho^2, z=\rho$. Решая систему $\begin{cases} z=12-\rho^2 \\ z=\rho \end{cases}$, найдем пересечение этих поверхностей – окружность $\rho=3$.



Вычислим массу тела, используя для вычисления интеграла цилиндрическую систему координат. Внутреннее интегрирование по z, z меняется от $z=\rho$ на конусе до $z=12-\rho^2$ на поверхности параболоида.

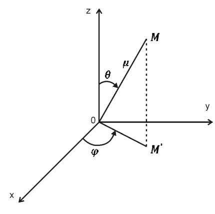
$$m=\iint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)dv=\iint\limits_{(V)}zdxdydz=\left|\begin{array}{c} dxdydz=\rho d\varphi d\rho dz \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 3 \\ \rho\le z\le 12-\rho^2 \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho d\rho\int\limits_\rho^{12-\rho^2}zdz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho d\rho\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_\rho^{12-\rho^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^3\left(\left(12-\rho^2\right)^2-\rho^2\right)\rho d\rho\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^3\left(\rho^5-25\rho^3+144\rho\right)d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(\frac{\rho^6}{6}-25\frac{\rho^4}{4}+144\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^3\right)d\varphi=\frac{1053}{4}\text{ (ед. массы).}$$

§ 12. Тройной интеграл в сферических координатах.

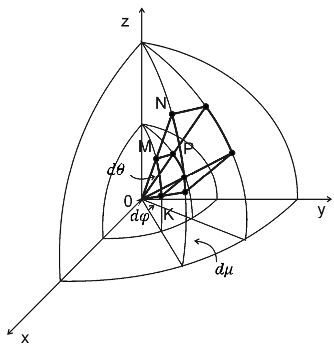


Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве можно определить сферическими координатами (r,φ,θ), где r - расстояние точки M от начала координат; φ - угол между осью $0x$ и проекцией радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость $x0y$; θ - угол между осью $0z$ и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M. Очевидно, что $0 \le r \le +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Связь между сферическими координатами (r, φ, θ) и декартовыми координатами (x, y, z) точки M определяется формулами: $x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta$.

Для вычисления элемента объема dv в сферических координатах разобьем область (V) на элементарные области координатными поверхностями: $r = const$ (концентрические сферы с центром в начале координат), $\varphi = cont$ (полуплоскости, проходящие через ось $0z$), $\theta = const$ (конические поверхности с вершиной в начале координат). За элементарный объем примем прямоугольный параллелепипед со сторонами $dr = MN$, $MK = r \cdot d\theta$, $MP = r \cdot \sin\theta d\varphi$; его объем равен

$$dv = r^2 \cdot \sin\theta d\varphi d\theta dr .$$



Таким образом, формула преобразований тройного интеграла к сферическим координатам имеет вид

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{(V)} f(r\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr .$$

Замечания.

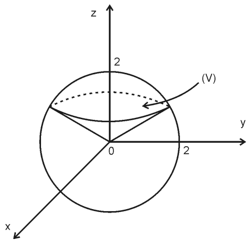
1. К сферическим координатам целесообразно переходить в том случае, когда тело ограничено сферой $r = const$, конусом $\theta = const$ или поверхностью, уравнение которой содержит выражение $x^2 + y^2 + z^2$.
2. Порядок расстановки пределов интегрирования в трехкратном интеграле (слева направо) – по φ, θ, r .

3. Сначала следует расставить пределы интегрирования по r (двигаясь получу, исходящему из начала координат), затем по θ (двигаясь по оси $0z$), потом - по φ.

Пример. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=3z^2, (z\geq 0)$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату ее аппликаты.

Решение. Масса тела вычисляется по формуле $m=\iint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)dxdydz$. В данной задаче функция плотности имеет вид $\gamma(x,y,z)=k\cdot z^2$, где $k>0$ - коэффициент пропорциональности.

Рассмотрим поверхности ограничивающие тело. $x^2+y^2+z^2=4$ - сфера с центром в начале координат, радиус которой равен 2. В сферических координатах уравнение сферы примет вид:



$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\theta=4\Rightarrow$$

$$r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2\cos^2\theta=4\Rightarrow r^2=4$$

или $r=2$.

Уравнение $x^2+y^2=3z^2$ определяет коническую поверхность. Переходя к сферическим координатам и выполнив преобразования, получим

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi=3r^2\cos^2\theta\Rightarrow tg^2\theta=3 \text{ или } \theta=\frac{\pi}{3}.$$

Используя сферические координаты, функция плотности примет вид $\gamma(x,y,z)=k\cdot z^2=kr^2\cos^2\theta$.

Таким образом

$$m=\iint\limits_{(V)}kr^2\cos^2\theta r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int\limits_0^2 r^4dr=$$

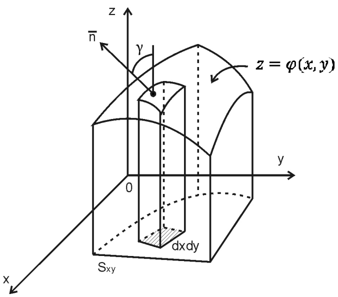
$$= -k\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d(\cos\theta) = -k\frac{32}{5}\cdot\varphi\Bigg|_0^{2\pi} \cdot \frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{56\pi k}{15} \text{ (ед.м)}$$

§13 Вычисление поверхностного интеграла по площади поверхности (первого рода).

Вычисление поверхностного интеграла по площади поверхности $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma$ сводится к вычислению двойного интеграла по плоской области (S), которая является проекцией поверхности (σ) на одну из координатных плоскостей.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Предположим, что поверхность (σ) такова, что любая прямая, параллельная оси $0z$, пересекает ее не более чем в одной точке. В этом случае уравнение поверхности может быть записано в виде $z=\varphi(x,y)$, здесь $\varphi(x,y), \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ непрерывны в области (S_{xy}), которая является проекцией (σ) на плоскость $x0y$.



К элементарной площадке $d\sigma$ проведем нормаль $\vec{n}$ так, чтобы она образовывала острый угол γ с осью oz. Тогда $d\sigma$ и ее проекция на плоскость $x0y$ связаны формулой $dxdy = d\sigma\cdot\cos\gamma$.

Так как косинус острого угла γ между нормалью $\vec{n}$ и осью $0z$ равен $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}$, следовательно $d\sigma = \dfrac{dxdy}{\cos\gamma} =$

$= \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$. Таким образом, получаем формулу сведения поверхностного интеграла к двойному:

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{(S_{xy})} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

2. Если уравнение поверхности (σ) можно записать в виде $y=\varphi_1(x,z)$, то проведя аналогичные рассуждения, получим $dxdz = d\sigma\cdot\cos\beta$, где β – острый угол между нормалью $\vec{n}_1$ к поверхности (σ), (S_{xz}) – проекция поверхности (σ) на плоскость $x0z$.

Формула для вычисления поверхностного интеграла имеет вид:

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{(S_{xz})} f(x,\varphi_1(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2}\,dxdz.$$

4. Если уравнение поверхности (σ) имеет вид $x=\varphi_2(y,z)$, то формула для вычисления поверхностного интеграла – $\iint_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma$ = $\iint_{(S_{yz})} f(\varphi_2(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)^2}\,dydz$, где (S_{yz}) – проекция поверхности (σ) на плоскость $y0z$.

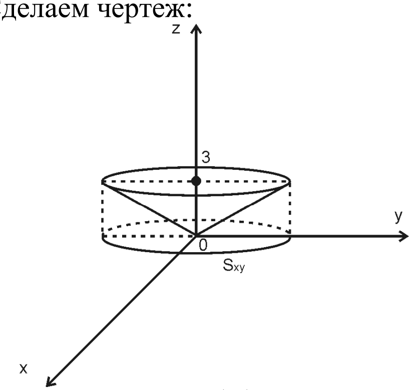
Пример 1. Найти массу конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, заключенной между плоскостями $z=0, z=3$, если плотность в каждой точке равна ее аппликате.

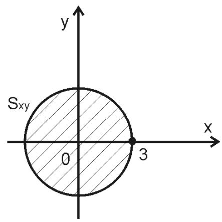
Решение. Согласно условию задачи плотность задана функцией $\gamma(x,y,z)=z$. Масса поверхности вычисляется по формуле $m=\iint_{(\sigma)}\gamma(x,y,z)d\sigma$, или в нашей задаче $m=\iint_{(\sigma)} zd\sigma$.

Преобразуем этот интеграл к двойному интегралу. Здесь удобно выразить z из уравнения конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Сделаем чертеж:





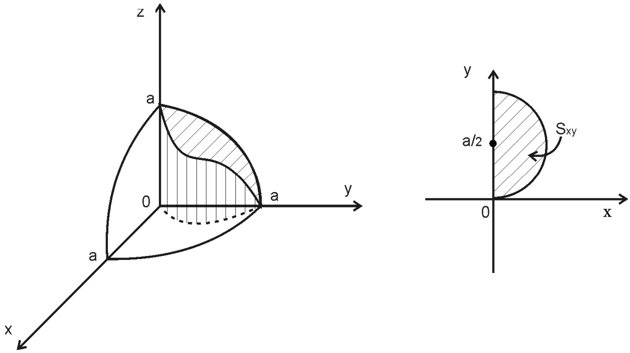
Проекцией (σ) на плоскость $x0y$ является круг $x^2+y^2\le 9-\left(S_{xy}\right)$.

Следовательно, $m=\iint\limits_{(S_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{(S_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Перейдем к полярным координатам: $m=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\cdot\rho\cdot d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^3 d\varphi=9\sqrt{2}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=18\sqrt{2}\pi$ (ед.массы).

Пример 2. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=ay$.

Решение. Выполним чертеж для части искомой площади, расположенной в первом октанте. Часть сферы, расположенная в первом октанте, проецируется в плоскости $x0y$ в полукруг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=ay$ и осью Oy.



Из уравнения сферы для первого октанта имеем: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Так как заданная поверхность расположена в четырех октантах, то, используя симметрию, получим $\sigma=4\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma=$

$=4\iint\limits_{(S_{xy})}\dfrac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. Для удобства вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi, dxdy=\rho d\varphi d\rho$. Здесь $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\rho\le a\sin\varphi$..

$$\sigma=4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=-\frac{4a}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}\frac{d\left(a^2-\rho^2\right)}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=$$

$$=-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{a^2-\rho^2}\Bigg|_0^{a\sin\varphi}=-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-a^2\sin^2\varphi}-\sqrt{a^2}\right)d\varphi=$$

$$=-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-1)d\varphi=-4a^2(\sin\varphi-\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-4a^2\left(1-\tfrac{\pi}{2}\right)=2a^2(\pi-2).$$

§ 14. Приложение интегралов по фигуре от скалярной функции к задачам механики.

Интегралы по фигуре от скалярной функции применяются при решении разнообразных задач механики. Основными являются следующие задачи:

1. вычисление массы фигуры;
2. нахождение статических моментов;
3. отыскание координат центра масс материальной фигуры;
4. вычисление моментов инерции.

Задача 1 о вычисление массы материальной фигуры рассмотрена в §5.

Задача 2 о вычислении статических моментов.

Для решения поставленной задачи используем следующие определения.

Определение1. Статическим моментом относительно оси l материальной точки, имеющей массу m и отстоящей от оси на расстоянии d называется величина $M_l = m \cdot d$.

Определение2. Статическим моментом относительно оси l системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots m_n$, лежащих в одной плоскости с осью и удаленных от нее соответственно на расстояниях $d_1, d_2, \ldots d_n$, называется сумма $M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot d_i$, причем расстояния точек, лежащих по одну сторону оси l, берутся со знаком (+), а по другую – со знаком (-).

Аналогично определяется статический момент системы материальных точек относительно плоскости.

Рассмотрим материальную фигуру (Φ), плотность в каждой точке $P \in (\Phi)$ задана функцией $\gamma = \gamma(P)$.

Выполним указанные процедуры по следующему алгоритму:

1. Произвольно разобъем фигуру (Ф) на n элементарных фигур $(\Delta\Phi_i)$, меры которых $\mu_i(\Delta\Phi_i), i = \overline{1,n}$.
2. Произвольно выберем на каждой элементарной фигуре $(\Delta\Phi_i)$ точки $P_i \in (\Delta\Phi_i)$ и вычислим значения плотности $\gamma(P_i)$ в каждой точке P_i.
3. Будем считать, что каждая элементарная фигура $(\Delta\Phi_i)$ является однородной с постоянной плотностью $\gamma(P_i)$ и рассматривать ее как материальную точку. Тогда масса ее будет равна $\Delta m_i \approx \gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i)$.
4. Согласно определению 1 статический момент материальной точки с массой Δm_i относительно оси l и отстоящей от нее на расстоянии d_i равен $(\Delta M_l)_i \approx d_i\cdot\gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i)$.
5. Рассматривая материальную фигуру (Ф) как систему материальных точек и используя определение 2, получим $M_l \approx \sum\limits_{i=1}^{n} d_i\cdot\gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i)$.
6. Для определения точного значения статического момента материальной фигуры относительно оси l, перейдем к пределу в полученной интегральной сумме $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i\cdot\gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i)$ при условии, что максимальный диаметр фигур разбиения $\lambda \to 0$, а $n \to \infty$.

Тогда $M_l = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} d_i\cdot\gamma(P_i)\cdot\mu(\Delta\Phi_i) = \int\limits_{(\Phi)} d\cdot\gamma(P)d\mu$.

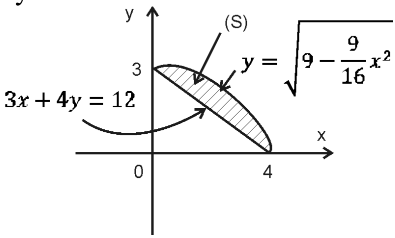
Полученную формулу конкретизируем для случая, когда статический момент материальной фигуры вычисляется относительно осей координат (для плоских фигур) или координатных плоскостей (для пространственных фигур).

1. Статические моменты материальной плоской дуги (L):
   - относительно оси Ox $M_x = \int\limits_{(L)} y \cdot \gamma(x, y) dl$,
   - относительно оси Oy $M_y = \int\limits_{(L)} x \cdot \gamma(x, y) dl$.
2. Статические моменты материальной пластины (S):
   - относительно оси Ox $M_x = \iint\limits_{(S)} y \cdot \gamma(x, y) ds$,
   - относительно оси Oy $M_y = \iint\limits_{(S)} x \cdot \gamma(x, y) ds$.
3. Статические моменты материальной пространственной дуги (L):
   - относительно плоскости xOy: $M_{xy} = \int\limits_{(L)} z \cdot \gamma(x, y, z) dl$,
   - относительно плоскости xOz: $M_{xz} = \int\limits_{(L)} y \cdot \gamma(x, y, z) dl$,
   - относительно плоскости yOz: $M_{yz} = \int\limits_{(L)} x \cdot \gamma(x, y, z) dl$.
4. Статические моменты материальной пространственной области (V):
   - относительно плоскости xOy: $M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z) dv$,
   - относительно плоскости xOz: $M_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z) dv$,
   - относительно плоскости yOz: $M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x \cdot \gamma(x, y, z) dv$.
5. Статические моменты материальной поверхности (σ):
   - относительно плоскости xOy: $M_{xy} = \iint\limits_{(\sigma)} z \cdot \gamma(x, y, z) d\sigma$,
   - относительно плоскости xOz: $M_{xz} = \iint\limits_{(\sigma)} y \cdot \gamma(x, y, z) d\sigma$,

- относительно плоскости yOz: $M_{yz}=\iint\limits_{(\sigma)} x\cdot\gamma(x,y,z)d\sigma$.

Пример. Вычислить статические моменты относительно координатных осей однородного сегмента эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, ограниченного прямой $3x+4y=12$, расположенного в первой четверти.

Решение. Выполним чертеж указанной плоской области.



Так как пластина однородная, то плотность $\gamma(x,y)=const=k, k>0$.

Статический момент относительно оси Ox однородной пластины (S) вычисляется по формуле $M_x=\iint\limits_{(S)} k\cdot y\cdot dxdy$.

В нашей задаче

$$M_x=k\int_0^4 dx\int_{3-\frac{3}{4}x}^{\sqrt{9-\frac{9}{16}x^2}} ydy=k\int_0^4 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{3-\frac{3}{4}x}^{\sqrt{9-\frac{9}{16}x^2}} dx=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^4\left(9-\frac{9}{16}x^2-\left(3-\frac{3}{4}x\right)^2\right)dx=\frac{k}{2}\left(\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{8}x^3\right)\Bigg|_0^4=6k.$$

Статический момент относительно оси Oy однородной пластины (S) вычисляется по формуле $M_y=\iint\limits_{(S)} k\cdot x\cdot dxdy$. В нашей задаче

$$M_y=k\int_0^4 dx\int_{3-\frac{3}{4}x}^{\sqrt{9-\frac{9}{16}x^2}} xdy=k\int_0^4\left(x\sqrt{9-\frac{9}{16}x^2}-x\left(3-\frac{3}{4}x\right)\right)dx=$$

$$= k\left(-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(9-\frac{9}{16}x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{4} \right)\Bigg|_0^4 = k(16-24+16) = 8k\,.$$

Задача 3 об определении координат центра масс материальной фигуры.

Центром масс материальной фигуры (Φ) *массой* m называют точку $C(x_c, y_c, z_c)$, координаты которой определяются следующими формулами:

- для плоской материальной фигуры

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} x\cdot\gamma(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)d\mu},\; y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} y\cdot\gamma(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)d\mu};$$

- для пространственной материальной фигуры:

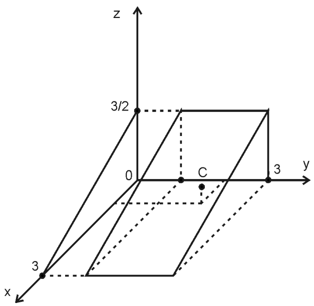
$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} x\cdot\gamma(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)d\mu},\; y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} y\cdot\gamma(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)d\mu},$$

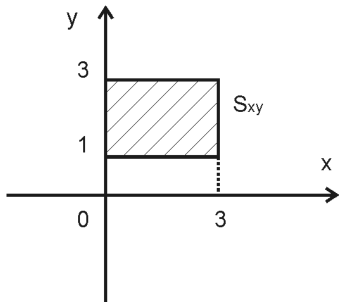
$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} z\cdot\gamma(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)d\mu}.$$

Замечание. Если материальная фигура однородная и имеет плоскость, ось или центр симметрии, то ее центр масс лежит на этой плоскости, оси или в этом центре.

Пример 1. Найти центр масс однородного призматического тела, ограниченного плоскостями $x = 0, z = 0, y = 1, y = 3, x + 2z = 3$.

Решение. Выполним чертеж пространственной области (V) и ее проекции на координатную плоскость $xOy - (S_{xy})$.





Формулы для расчета координат центра масс материального однородного тела $\left(\gamma(P)=k, k>0\right)$ имеют вид:

$$x_c=\frac{\iiint\limits_{(V)} kxdxdydz}{\iiint\limits_{(V)} kdxdydz}=\frac{\iiint\limits_{(V)} xdxdydz}{\iiint\limits_{(V)} dxdydz}, y_c=\frac{\iiint\limits_{(V)} kydxdydz}{\iiint\limits_{(V)} kdxdydz}=\frac{\iiint\limits_{(V)} ydxdydz}{\iiint\limits_{(V)} dxdydz},$$

$$z_c=\frac{\iiint\limits_{(V)} kzdxdydz}{\iiint\limits_{(V)} kdxdydz}=\frac{\iiint\limits_{(V)} zdxdydz}{\iiint\limits_{(V)} dxdydz}.$$

Знаменатели в записанных формулах – выражают объем материального тела. Объем призматического тела можно вычислить, используя элементарную формулу $v=S_{осн}\cdot h$, где h – высота призмы $h=2, S_{осн}=\text{S}_{\text{треуг.}}=\frac{1}{2}3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$. Итак, $v=\frac{9}{4}\cdot 2=\frac{9}{2}$.

Тогда $x_c=\frac{2}{9}\iiint\limits_{(V)} xdxdydz=\frac{2}{9}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dz=1$,

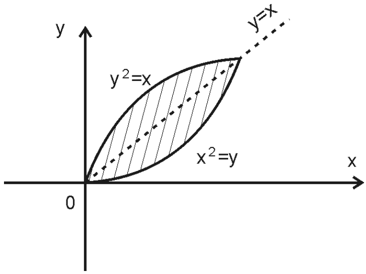
$$y_c=\frac{2}{9}\iiint\limits_{(V)} ydxdydz=\frac{2}{9}\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^3 ydy\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dz=2,$$

$$z_c=\frac{2}{9}\iiint\limits_{(V)} zdxdydz=\frac{2}{9}\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} zdz=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $C\left(1;2;\frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. Найти центр масс однородной пластины, ограниченной линиями $y^2 = x, x^2 = y$.

Решение. Выполним чертеж плоской области.



В данной задаче плоская область является однородной $(\gamma(P) = k, k > 0)$ и имеет ось симметрии $y = x$, поэтому центр масс $C(x_c, y_c)$ лежит на прямой $y = x$ то есть $x_c = y_c$.

Вычислим, например, $x_c = \dfrac{\iint\limits_{(S)} kxdxdy}{\iint\limits_{(S)} kdxdy}$.

Последовательно находим $m = k\iint\limits_{(S)} dxdy = k\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{k}{3}$;

$M_y = k\iint\limits_{(S)} xdxdy = k\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{3k}{20}$. Следовательно, координаты центра масс: $x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{9}{20}; y_c = \frac{9}{20}$, то есть $C\left(\frac{9}{20};\frac{9}{20}\right)$.

Задача 4 об определении моментов инерции материальной фигуры.

Для решения поставленной задачи используем следующие определения.

Определение 1. Моментом инерции относительно оси l материальной точки массой m и отстоящей от оси l на расстояние d, называется число $I_l = m \cdot d^2$.

Определение 2. Моментом инерции относительно оси l системы материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и отстоящих от оси l соответственно на расстояниях $d_1, d_2, \ldots, d_n$, называется сумма $I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot d_i^{\,2}$.

Решение задачи 4 осуществляется аналогично алгоритму, который использовался в задаче 2. В итоге получится формула $I_l = \int\limits_{(\Phi)} d^2 \gamma(P) d\mu$.

Если в качестве оси l принять одну из координатных осей, то в случае плоских фигур, получаем формулы:
для плоской материальной дуги (L)

- относительно оси Ox $I_x = \int\limits_{(L)} y^2 \cdot \gamma(x, y) dl$,
- относительно оси Oy $I_y = \int\limits_{(L)} x^2 \cdot \gamma(x, y) dl$;

для плоской материальной пластины (S)

- относительно оси Ox $I_x = \iint\limits_{(S)} y^2 \cdot \gamma(x, y) dxdy$,
- относительно оси Oy $I_y = \iint\limits_{(S)} x^2 \cdot \gamma(x, y) dxdy$.

Для пространственных фигур $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, если l – ось Oz, $d = \sqrt{x^2 + z^2}$, если l – ось Oy $d = \sqrt{y^2 + z^2}$, если l – ось Ox.

В частности:

моменты инерции материальной пространственной дуги (L)

- относительно оси Ox $I_x = \int\limits_{(L)} \left(y^2 + z^2\right) \cdot \gamma(x, y, z) dl$,
- относительно оси Oy $I_y = \int\limits_{(L)} \left(x^2 + z^2\right) \gamma(x, y, z) dl$,

- относительно оси *Oz* $I_z = \int\limits_{(L)} \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y, z)dl$;

моменты инерции материальной поверхности (σ)

- относительно оси *Ox* $I_x = \iint\limits_{(\sigma)} \left(y^2 + z^2\right)\cdot \gamma(x, y, z)d\sigma$,
- относительно оси *Oy* $I_y = \iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + z^2\right)\cdot \gamma(x, y, z)d\sigma$,
- относительно оси *Oz* $I_z = \iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + y^2\right)\cdot \gamma(x, y, z)d\sigma$;

моменты инерции материального тела (V)

- относительно оси *Ox* $I_x = \iiint\limits_{(V)} \left(y^2 + z^2\right)\cdot \gamma(x, y, z)dxdydz$,
- относительно оси *Oy* $I_y = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + z^2\right)\cdot \gamma(x, y, z)dxdydz$,
- относительно оси *Oz* $I_z = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + y^2\right)\cdot \gamma(x, y, z)dxdydz$.

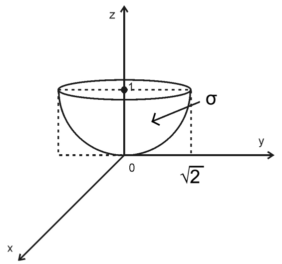
Замечание. В механике часто рассматривают полярные моменты – это моменты инерции относительно начала координат (I_0), которые определяются по следующим формулам:

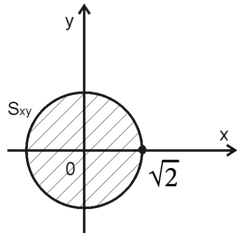
- для плоской фигуры $I_0 = I_x + I_y = \int\limits_{(\Phi)} \left(x^2 + y^2\right)\gamma(P)d\mu$;
- для пространственной фигуры

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right) = \int\limits_{(\Phi)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(P)d\mu .$$

Пример 1. Найти момент инерции однородного параболоида $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ относительно оси *Oz*, если $0 \le z \le 1$.

Решение. Выполним чертеж поверхности и ее проекции на плоскость xOy. Проекция части параболоида $\left(S_{xy}\right)$ – круг $x^2 + y^2 \le 2$.





Так как поверхность однородная, то плотность $\gamma(x,y,z)=const=k, k>0$. Момент инерции однородной поверхности относительно оси Oz вычисляется по формуле $I_z = k\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$. Найдем $d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=x; \frac{\partial z}{\partial y}=y$, тогда $d\sigma=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$. Сведем поверхностный интеграл к двойному, который будем вычислять, используя полярные координаты.

$$I_z = k\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y^2\right)d\sigma = k\iint\limits_{(S_{xy})}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$=\left|\begin{array}{c} x=\rho\cos\rho, y=\rho\sin\rho \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\rho\le\sqrt{2} \end{array}\right| = k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho .$$

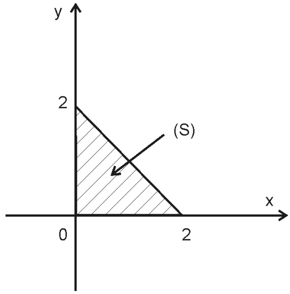
Отдельно вычислим внутренний интеграл с помощью подстановки $\sqrt{1+\rho^2}=t, t>0$: $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho = \left|\begin{array}{c} 1+\rho^2=t^2 \\ 2\rho d\rho = 2tdt \\ t_н=1, \mathrm{t_в}=\sqrt{3} \end{array}\right| =$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(t^2-1\right)t^2dt = \int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(t^4-t^2\right)dt = \left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}+2}{15}.$$

Окончательно $I_z = \frac{12\sqrt{3}+2}{15} k\varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi\left(1+6\sqrt{3}\right)}{15}$.

Пример 2. Вычислить полярный момент инерции однородной пластины, ограниченной прямыми $x+y=2, x=0, y=0$.

Решение. Выполним чертеж пластины (S).



Так как пластина однородная, то $\gamma(x,y)=const=k, k>0$. Полярный момент однородной пластины вычисляется по формуле $I_0 = k\iint\limits_{(S)}\left(x^2+y^2\right)dxdy$. В нашей задаче $I_0 = k\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x}\left(x^2+y^2\right)dy =$

$$= k\int\limits_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{2-x} dx = k\int\limits_0^2 \left(x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} \right)dx = \frac{8k}{3}.$$

Пример 3. Найти полярный момент полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2, (z \geq 0)$, если плотность $\gamma(x,y,z)=z$.

Решение. Полярный момент инерции поверхности найдем с помощью поверхностного интеграла $I_0 = \iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)d\sigma$.

На поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ плотность $\gamma(x,y,z)=z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому $I_0 = \iint\limits_{(\sigma)} R^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$.

Для вычисления этого интеграла разрешим уравнение поверхности относительно *z*, найдем $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и затем $d\sigma$: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=$$

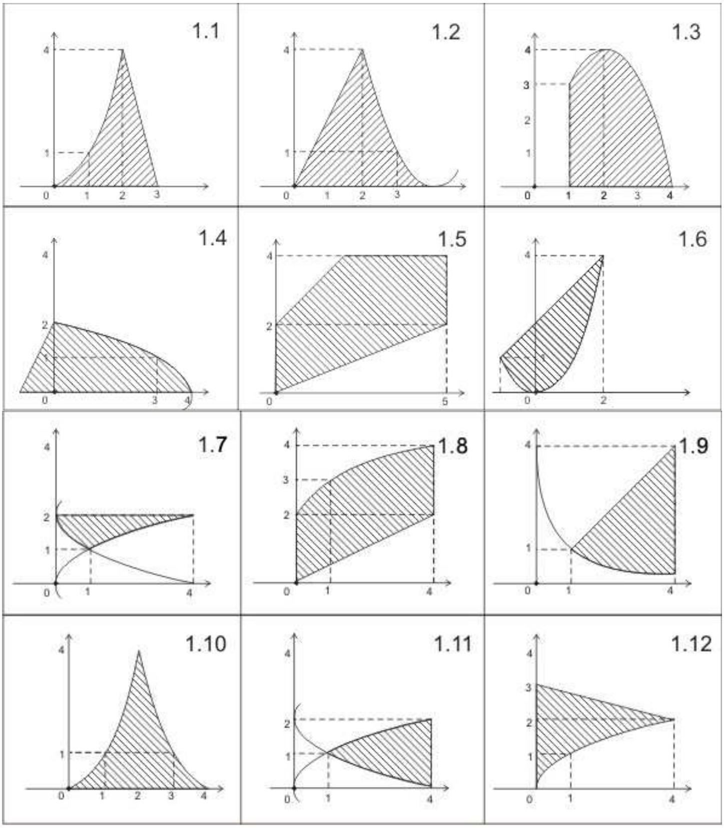
$=\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. Подставляя $d\sigma$ в интеграл, получим двойной интеграл по проекции (σ) на плоскость $xOy-(S_{xy})$, которая является кругом радиуса *R*. $I_0=\iint\limits_{(\sigma)}R^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=$

$$=R^2\iint\limits_{(S_{xy})}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R^3\iint\limits_{(S_{xy})}dxdy\,.$$

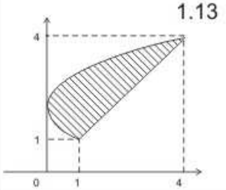
Интеграл $\iint\limits_{(S_{xy})}dxdy$ выражает площадь круга, поэтому $I_0=R^3\iint\limits_{(S_{xy})}dxdy=R^3\cdot\pi R^2=\pi R^5$.

Индивидуальные задания.

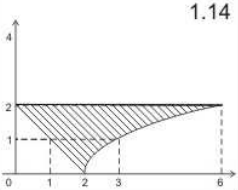
Задача 1. Записать по точкам уравнения линий – прямых и парабол, ограничивающих области интегрирования. Расставить пределы интегрирования по заштрихованной области в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint\limits_{(S)} f(x, y)dxdy$ и изменить порядок интегрирования. С помощью двойного интеграла записать и вычислить площадь заштрихованной фигуры.



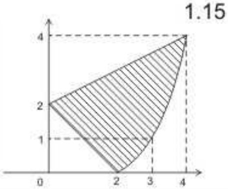
1.13



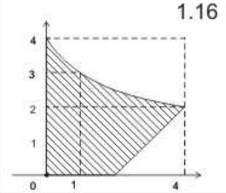
1.14



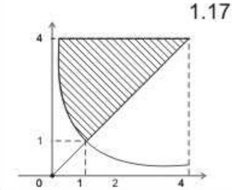
1.15



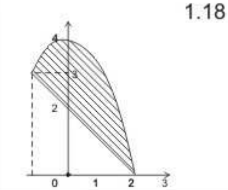
1.16



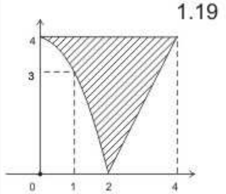
1.17



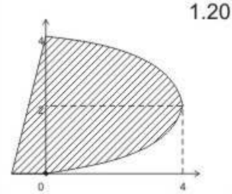
1.18



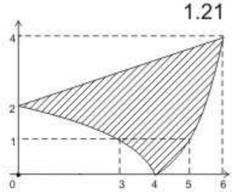
1.19



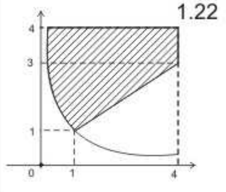
1.20



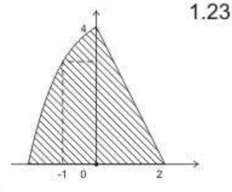
1.21



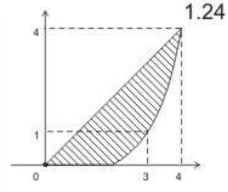
1.22



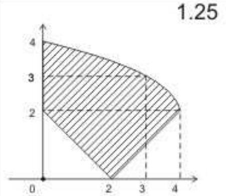
1.23



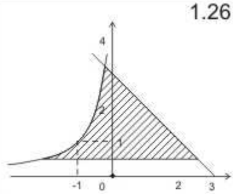
1.24



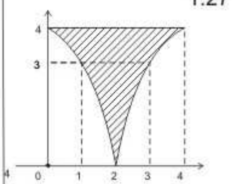
1.25



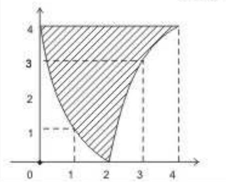
1.26



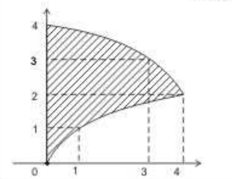
1.27



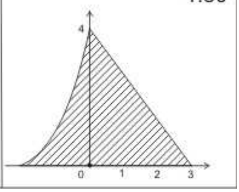
1.28



1.29



1.30



Задача 2. С помощью двойного интеграла вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.

2.1	$z = x^2, \quad z = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad x = -2, \quad x - 2y + 2 = 0$.
2.2	$z = x^2 + y^2 + 1, \quad z = 0, \quad y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 2$.
2.3	$z = 3x + 2y, \quad z = 0, \quad x - 2y + 2 = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad y = 1$.
2.4	$z = x - y, \quad z = 0, \quad x = \sqrt{y}, \quad x + y - 2 = 0, \quad x \ge 0$.
2.5	$z = x + y, \quad z = 0, \quad x - 2y - 3 = 0, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0$.
2.6	$z = 2x - y, \quad z = 0, \quad y = \sqrt{x}, \quad x + y - 6 = 0, \quad y = 0$.
2.7	$z = 9 - y^2, \quad z = 0, \quad y = -x^2, \quad y \le 2x^2 - 2, \quad x \le 0$.
2.8	$z = 1 + y, \quad z = 0, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x + y - 8 = 0, \quad x = 0$.
2.9	$z = 2 - x + y, \quad z = 0, \quad x + y - 1 = 0, \quad y + 1 = \sqrt{x}, \quad y = 1$.
2.10	$z = 1 - x + y, \quad z = 0, \quad x + y - 2 = 0, \quad x = \sqrt{y - 2}, \quad x = 2$.
2.11	$z = 6 - 3x - y, \quad z = 0, \quad y = x, \quad x = \sqrt{6 - y}, \quad x = 0$.
2.12	$z = 2x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 3, \quad y = 2\sqrt{x}$.
2.13	$z = 2x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad 3x - y = 0, \quad 3x - y - 3 = 0 \quad y = 3$.

2.14	$z=2y-x+2,\quad z=0,\quad y=x^3,\quad x+y-2=0\quad y=0$.
2.15	$z=x^2+y^2,\quad z=0,\quad x=-\sqrt{y},\quad x-y+2=0\quad y=0$.
2.16	$z=4-y,\quad z=0,\quad y=x^2,\quad x-y+2\geq 0$.
2.17	$z=1+x,\quad z=0,\quad x-y+2=0,\quad x=\sqrt{y},\quad x=3,\quad y=0$.
2.18	$z=1+x^2+y^2,\quad z=0,\quad y^2=4-x,\quad x=0\quad x=3$.
2.19	$x=20\sqrt{2y},\quad x=5\sqrt{2y},\quad z=0,\quad z+y=\frac{1}{2}$.
2.20	$x=\frac{5}{2}\sqrt{y},\quad x=\frac{5}{6}y,\quad z=0,\quad z=\frac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right)$.
2.21	$x^2+y^2=2,\quad x=\sqrt{y},\quad x=0,\quad z=0,\quad z=30y$.
2.22	$x+y=2,\quad x=\sqrt{y},\quad z=\frac{12x}{5},\quad z=0$.
2.23	$y=17\sqrt{2x},\quad y=2\sqrt{2x},\quad z=0,\quad x+z=\frac{1}{2}$.
2.24	$y=\frac{5\sqrt{x}}{3},\quad y=\frac{5x}{9},\quad z=0,\quad z=\frac{5\left(3+\sqrt{x}\right)}{9}$.
2.25	$x^2+y^2=8,\quad y=\sqrt{2x},\quad y=0,\quad z=0,\quad z=\frac{15x}{11}$.

2.26	$x+y=4,\quad y=\sqrt{2x},\quad z=3y,\quad z=0$.
2.27	$x=\frac{5}{6}\sqrt{y},\quad x=\frac{5}{18}y,\quad z=0,\quad z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{y}\right).$
2.28	$x=19\sqrt{2y},\quad x=4\sqrt{2y},\quad z=0,\quad z+y=2$.
2.29	$x^2+y^2=8,\quad x=\sqrt{2y},\quad x=0,\quad z=0,\quad z=\frac{30x}{11}$.
2.30	$x+y=4,\quad x=\sqrt{2y},\quad z=\frac{3x}{5},\quad z=0$.

Задача 3.

3.1. Вычислить статический момент относительно оси абсцисс однородной плоской пластины, ограниченной осью *Ox* и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=4$.

3.2. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $\rho=4\left(1+\cos\varphi\right),\quad \rho=4$, и расположенной вне кардиоиды, плотность которой равна радиус-вектору точки.

3.3. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=6\left(1+\cos\varphi\right)$.

3.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho=a,\quad \rho^2=a^2\cos 2\varphi$, расположенную внутри окружности.

3.5. Вычислить массу кольца, расположенную между двумя окружностями радиусов 1 и 2, если плотность пластины равна $\gamma(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

3.6. Найти момент инерции кардиоиды $\rho = a\left(1+\cos\varphi\right)$ относительно полюса.

3.7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\left(1+\cos\varphi\right), \quad \rho = 2$, содержащую полюс.

3.8. Найти координаты центра масс кругового сектора радиуса a с углом при вершине 2α, осью симметрии которого является полярная ось, а плотность равна абсциссе точки.

3.9. Найти момент инерции относительно оси абсцисс кольца, расположенного между окружностями радиусов a и $2a$, если плотность равна расстоянию точки от центра.

3.10. Найти массу плоской фигуры, расположенной над осью абсцисс, и ограниченной линией $\rho = 2a\sin 2\varphi$, если ее плотность равна ординате точки.

3.11. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 6x = 0, \quad x^2 + y^2 - 6y = 0$.

3.12. Вычислить статический момент относительно полярной оси однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2a\sin 2\varphi,$ $r = a$, расположенной вне окружности.

3.13. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 0, \; y = 0, \; y = 4, \quad x = \sqrt{25 - x^2}$, если ее плотность равна абсциссе точки.

3.14. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi, \quad \rho = a\cos\varphi$.

3.15. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4y = 0$.

3.16. Найти момент инерции относительно полюса плоской фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\left(1+\cos\varphi\right), \quad \rho = 2$, расположенной вне кардиоиды.

3.17. Найти массу плоского кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями радиусов a и $2a$, плотность которого обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей и на окружности внутреннего радиуса равна единице.

3.18. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3$.

3.19. Найти момент инерции относительно полярной оси однородного кругового сектора радиуса с углом α при вершине, совпадающей с началом координат.

3.20. Вычислить статические моменты плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2\geq 1$, $x^2+y^2\leq 4$, $y\geq x$, $y\leq x\sqrt{3}$, если плотность ее равна $\gamma=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

3.21. Найти координаты центра масс плоской фигуры, не содержащей полюса, ограниченной линиями $\rho=4(1-\cos\varphi)$, $\rho=4$, плотность которой равна радиус-вектору точки.

3.22. Вычислить массу кольца, расположенного между окружностями радиусов 1 и *e*, плотность которого равна $\gamma(x,y)=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

3.23. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линией $\rho=6\sin 3\varphi$, плотность которой равна расстоянию до полюса.

3.24. Найти момент инерции относительно оси ординат однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $\left(x^2+y^2\right)^2=$ $=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $x^2+y^2-2ax=0$.

3.25. Найти статический момент полукруга $x^2+y^2-4y=0$, $x\geq 0$, относительно диаметра, если плотность его равна ординате точки.

3.26. Найти массу части круга $x^2+y^2-2x=0$, расположенного между прямыми $y=\pm\sqrt{3x}$, если плотность его равна ординате точки.

3.27. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^3=x^4+y^4$.

3.28. Найти момент инерции лемнискаты $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$ относительно оси, перпендикулярной к ее плоскости в полюсе.

3.29. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной петлей кривой $\rho = a\sin 2\varphi$, лежащей в первой четверти.

3.30. Вычислить статистический момент относительно оси абсцисс однородной фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $y - x \le 0$, $y + x \le 0$.

Задача 4. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$, ограниченного указанными поверхностностями. Область интегрирования и данное тело изобразить на чертежах.

4.1	$\gamma = x \cdot y;\quad z = 1 + x^2 + y^2,\quad z = 9 - x^2 - y^2,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0.$
4.2	$\gamma = (1 + x)\, z;\quad z = 0,\quad z = 2x,\quad x + y = 3,\quad x = \sqrt{\frac{y}{2}}.$
4.3	$\gamma = y \cdot z;\quad z = 2,\quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0.$
4.4	$\gamma = (2 + x)\, y;\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad x + y = 2,\quad y = \sqrt{2 - z}.$
4.5	$\gamma = 2 + y \cdot z;\quad z = 0,\quad z = 1 - x^2,\quad y = 0,\quad x + y - 3 = 0.$
4.6	$\gamma = z - x + y;\quad z = y^2,\quad x + z - 4 = 0,\quad x - z + 4 = 0.$
4.7	$\gamma = x\,(y + z);\quad z = 0,\quad y = x^2,\quad z = \sqrt{1 - y}.$
4.8	$\gamma = x + 2y;\quad z = 0,\quad x + z - 2 = 0,\quad x = 1,\quad y^2 = x.$
4.9	$\gamma = x + y + z;\quad x - 2z = 0,\quad x = \sqrt{z},\quad y = 3,\quad y = 0,\quad x = 2.$
4.10	$\gamma = x^2 + z;\quad z = 0,\quad x = 0,\quad z = y^2,\quad 2x + 3y = 6.$

4.11	$\gamma = 2 + x + y;\quad z = x^2,\quad y + z - 4 = 0,\quad y - z + 4 = 0.$
4.12	$\gamma = y^2 + 2x;\quad z = 0,\quad z = y^2,\quad y = 2x,\quad x = 1.$
4.13	$\gamma = (1 + x)(2 + y);\quad z = 0,\quad z = x^2 + y^2,\quad y = x^2,\quad y = 1.$
4.14	$\gamma = y\,(x + z);\quad x^2 + y^2 = 4,\quad x + z - 2 = 0,\quad x - z + 8 = 0.$
4.15	$\gamma = y\,z;\quad 4x^2 + 9y^2 = 36,\quad z = x\quad (x \geq 0),\quad z = 0.$
4.16	$\gamma = (x + y)\cdot z;\quad z = \sqrt{x},\quad z = 2\sqrt{x},\quad x = 4,\quad y = 0,\quad y = 2.$
4.17	$\gamma = x\cdot(1 + y);\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad x + y = 1,\quad z = x^2 + 3y^2.$
4.18	$\gamma = 1 + x\cdot y;\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ x + y = 2,\ z = x^2 + \frac{1}{2}y^2.$
4.19	$\gamma = (1 + x);\quad z = 4 - x^2 - y^2,\quad x + z - 2 = 0.$
4.20	$\gamma = (1 + x)(1 + y);\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad y + z^2 = 1,\quad x = y^2 + 1.$
4.21	$\gamma = x\cdot y;\quad z = 4 - x^2 - y^2,\quad y + z - 2 = 0,\quad x \geq 0.$
4.22	$\gamma = x\cdot z;\quad z^2 = 4 - y,\quad x^2 + y^2 = 4y,\quad z \geq 0.$
4.23	$\gamma = (2 + x)\cdot z;\quad z = 0,\quad z = \sqrt{y},\quad x = 1,\quad y = x.$
4.24	$\gamma = (4 + x)\cdot y;\quad z = 0,\quad y = \sqrt{9 - x^2},\quad z = 5x,\quad y = 0.$

4.25	$\gamma = (2+x)\cdot y\cdot z;\ \ x^2+y^2-z^2=0,\ \ 4\left(x^2+y^2\right)-z^2=0,$ $x^2+y^2=1,\ \ z>0.$
4.26	$\gamma = (x+z)\cdot y; \quad z=0, \quad z=4-x^2, \quad x^2+y^2=4, \quad y=0.$
4.27	$\gamma = (1+z)\cdot y; \quad z=0, \quad z=1-y^2, \quad x=y^2, \quad x=2y^2+1.$
4.28	$\gamma = y\cdot z; \quad x^2+y^2-z^2=0, \quad 9\left(x^2+y^2\right)-z^2=0,$ $x^2+y^2=4, \quad z>0, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0.$
4.29	$\gamma = x^2+y^2; \quad z=0, \quad z=2-x, \quad y=2\sqrt{x}, \quad 4y=x^2.$
4.30	$\gamma = x+y^2; \quad z=0, \quad z=x^2, \quad 2x-y=0, \quad x+y=9.$

Задача 5.

5.1. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$ расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=9ax, \quad a>0$.

5.2. Вычислить площадь части плоскости $6x+12y+3z-4=0$, вырезаемой цилиндром $x^2=4y, \quad y=1$.

5.3. Вычислить массу части параболоида $2y=x^2+z^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+z^2=1$, если поверхностная плотность обратно пропорциональна радиус-вектору точки.

5.4. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, вырезаемой цилиндром с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которого служит кардиоида $\rho = 4(1+\cos\varphi)$.

5.5. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности части сферы, заключенной в первом октанте.

5.6. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$, $z \geq 0$.

5.7. Вычислить массу части поверхности $z^2 = 4x$, вырезаемую цилиндром $y^2 = 4x$ и плоскостью $x = 1$, если ее поверхностная плотность равна корню квадратному из абсциссы точки.

5.8. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

5.9. Вычислить момент инерции относительно оси Oz боковой поверхности однородного конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 2$.

5.10. Вычислить момент инерции части однородной плоскости $3x + 2y + z = 6$, расположенной в первом октанте относительно координатных плоскостей.

5.11. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = 4x$.

5.12. Найти момент инерции относительно начала координат однородной поверхности куба: $x = \pm a,\ y = \pm a,\ z = \pm a$.

5.13. Вычислить массу части поверхности $2z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность равна аппликате точки.

5.14. Вычислить площадь той части плоскости $x + y + z = 4$, которая лежит в первом октанте и ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

5.15. Вычислить площадь части поверхности конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 4z$.

5.16. Вычислить площадь части параболоида $2z = x^2 + y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

5.17. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности части параболоида $x^2 + z^2 = 2y$, отсеченной плоскостью $y = 2$.

5.18. Вычислить массу части поверхности конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, отсеченную плоскостями $y = 2x$, $y = 4x$, $x = 1$, если поверхностная плотность равна произведению абсциссы и ординаты точки.

5.19. Вычислить площадь поверхности цилиндра $2z = x^2$, отсеченной плоскостями $y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x, \quad x = 2\sqrt{2}$.

5.20. Вычислить площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной между плоскостями $z = \frac{\sqrt{3}}{3} y$ и $z = y \quad (z \geq 0,\ y \geq 0)$.

5.21. Вычислить массу поверхности тетраэдра, ограниченного поверхностями $x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$, если поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x + y)^2}$.

5.22. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, отсеченной плоскостью $z = 1$.

5.23. Вычислить массу конической поверхности $x^2 = y^2 + z^2$, $0 \leq x \leq 1$, если ее плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от оси конуса, с коэффициентом пропорциональности равным 3.

5.24. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

5.25. Найти координаты центра тяжести конической поверхности $y^2 = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$, если ее плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от оси конуса.

5.26. Вычислить площадь части поверхности конуса $y^2 + z^2 = x^2$, $x \geq 0$, расположенной внутри цилиндра $z^2 + y^2 + 4z = 0$.

5.27. Вычислить площадь части плоскости $x + y + z + 4 = 0$, вырезаемой цилиндром $y^2 = x, \quad x = 9$.

5.28. Вычислить массу поверхности куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, если поверхностная плотность в точке равна произведению координат этой точки.

5.29. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, отсеченной плоскостями $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 2$.

5.30. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, вырезаемой цилиндром с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которого служит трехлепестковая роза $\rho = \sin 3\varphi$.

Учебное издание

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ФИГУРЕ ОТ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ

Методические указания

С о с т а в и т е л и :
ГУРИНА Татьяна Николаевна
ЯБЛОНСКАЯ Людмила Алексеевна

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 28.08.2014. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,09. Тираж 50. Заказ 570.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.