

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Детали машин, подъемно-транспортные машины  
и механизмы»

В.Л.Николаенко

МЕХАНИКА

Учебное пособие к семестровым заданиям для студентов  
немашиностроительных специальностей вузов

В 2-х частях

Часть 1

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом  
Белорусского национального технического университета*

Минск 2003

УДК 621.01 (075.8)  
Н 63

Под редакцией А.Т.Скойбеды

Рецензенты:

А.Н.Орда, В.М.Сурин

**Николаенко В.Л.**  
**Н 63** Механика: Учеб. пособие к семестровым заданиям для студ. машиностроительных спец. вузов. В 2 ч. Ч. 1 / В.Л.Николаенко; Под ред. А.Т.Скойбеды. – Мн.: БНТУ, 2004. – 266 с.

ISBN 985-479-057-7.

Издание предназначено для студентов, изучающих курс механики. В пособии представлены задачи для самостоятельного решения и типовые примеры, знакомящие студентов с методикой решения задач, теоретические сведения.

Пособие может быть полезно лицам, изучающим механику самостоятельно или обучающимся на заочных отделениях вузов.

**УДК 621.01 (075.8)**

ISBN 985-479-051-7 (Ч. 1)  
ISBN 985-479-050-9

© Николаенко В.Л., 2004

## О г л а в л е н и е

	Номер решенного примера	Номер задачи	
П р е д и с л о в и е . . . . .	—	—	4
Раздел I			
СТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ			
Глава 1. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ (ПССС) . . . . .	—	—	4
1.1. Основные положения статики. . . . .	—	—	4
1.2. Определение усилий в стержнях фермы по способу вырезания узлов. . . . .	—	—	12
<input type="checkbox"/> Вопросы для самопроверки. . . . .	—	—	13
Примеры. . . . .	1-22	—	16
Задачи к заданиям. . . . .	—	1-3	54
Глава 2. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ. . . . .	—	—	59
<input type="checkbox"/> Вопросы для самопроверки. . . . .	—	—	61
Примеры. . . . .	23-49	—	61
Задачи к заданиям. . . . .	—	4-6	91
Глава 3. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ (ПСПРС) . . . . .	—	—	95
3.1. Момент силы относительно точки. . . . .	—	—	95
3.2. Равновесие твердых тел под действием ПСПРС. . . . .	—	—	96
3.3. Статически определенные и статически неопределенные задачи. . . . .	—	—	100
3.4. Определение усилий в стержнях по способу Риттера. . . . .	—	—	102
<input type="checkbox"/> Вопросы для самопроверки. . . . .	—	—	104
Примеры. . . . .	50-96	—	105
Задачи к заданиям. . . . .	—	7-10	191
Глава 4. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ (ПрСС) . . . . .	—	—	197
4.1. Момент силы относительно оси. . . . .	—	—	197
4.2. Приведение силы к центру. . . . .	—	—	198
4.3. Равновесие твердых тел под действием пространственной системы сил. . . . .	—	—	199
<input type="checkbox"/> Вопросы для самопроверки. . . . .	—	—	200
Примеры. . . . .	97-119	—	201
Задачи к заданиям. . . . .	—	11-15	258
Л и т е р а т у р а . . . . .	—	—	265

## Предисловие

Это пособие предназначено для студентов, изучающих курс механики по программе, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь для высших учебных заведений.

В пособии кроме задач для самостоятельного решения и типовых примеров, знакомящих студентов с методикой решений задач, в каждой главе помещено краткое изложение теории и приведены вопросы для самопроверки.

На основании личного многолетнего опыта ведения занятий автор настоятельно рекомендует всем, начинающим изучать механику, следующий порядок работы:

1) изучить теорию соответствующего раздела по учебным пособиям, рекомендованным Министерством образования Республики Беларусь;

2) прочитать краткое изложение теории, приведенное в прорабатываемой главе сборника, и ответить на вопросы для самопроверки;

3) **лично** полностью проделать все подсчеты по примерам, решенным в данной главе, придерживаясь текста пособия;

4) приступить к систематическому решению задач – по указанию преподавателя или по личному выбору.

Издание могут использовать также лица, изучающие механику самостоятельно или обучающиеся на заочных отделениях в институтах, университетах, академиях.

Наличие в сборнике значительного числа задач облегчает выбор материала для семестровых, контрольных, домашних и экзаменационных заданий, в чем особенно нуждаются начинающие преподаватели.

## Раздел 1. СТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

### Глава 1. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ (ПССС)

#### 1.1. Основные положения статики

Решение задач статики возможно лишь после того, как хорошо изучены аксиомы статики.

Аксиомы статики — это основные положения, на которых основана теория равновесия. Они устанавливают основные свойства сил, приложенных к телу.

Особое внимание следует обратить на аксиому о равенстве сил действия и противодействия. Эта аксиома рассматривает взаимодействие двух сил. Сила действия приложена к одному телу, а сила противодействия — к другому, поэтому они не могут уравновесиваться, так как эффект действия сил различен для каждого тела. На основании аксиомы о равенстве действия и противодействия опоры тел или, как говорят, их связи, можно заменить силами. Одной из важнейших задач при этом является умение правильно определить направление силы реакции опоры. Для этого нужно внимательно разобраться в устройстве той или иной опоры и схематически изобразить опорные поверхности.

**Гибкая нерастяжимая нить** (трос, канат, цепь, ремень). Реакции  $R_A$  и  $R_B$  направлены вдоль нити к точке подвеса (рис. 1.1).

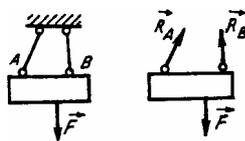


Рис. 1.1. Реакции гибких нитей

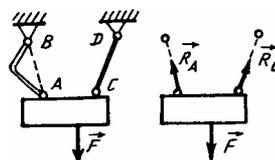


Рис. 1.2. Реакции при шарнирном закреплении стержня

**Невесомый жесткий стержень.** Невесомым называется стержень, массой которого можно пренебречь. Связь выполняется с помощью жесткого стержня, концы которого закреплены шарнирно, например, как стержни  $AB$  и  $CD$  на рис. 1.2. Реакции  $R_A$  и  $R_B$  направлены вдоль прямой, соединяющей центры шарниров.

**Гладкая поверхность.** Поверхности называют гладкими, если силами трения, возникающими в точках их контакта, можно пренебречь. Реакция  $R$  гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям тел в точке их касания и приложена в той же точке (рис. 1.3, а).

Если одна из соприкасающихся поверхностей является точкой, имеет заострение или ребро, то реакция  $R_A$  ( $R_B$  или  $R_C$ ) направлена по нормали к другой поверхности (рис. 1.3, б).

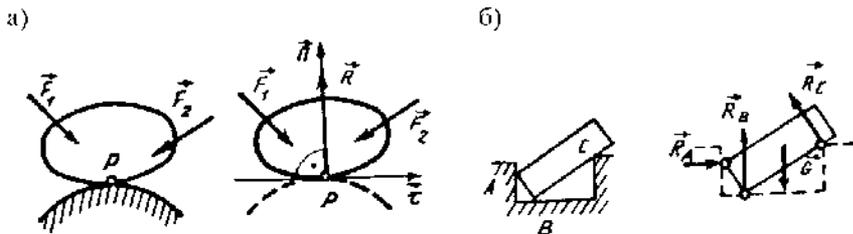


Рис. 1.3. Реакции при свободном опирании тел

**Шероховатая поверхность** (рис. 1.4). Направление реакции  $R$  такой связи заранее неизвестно, поэтому обычно определяют две ее составляющие: нормальную реакцию  $R_n$  и касательную — силу трения  $F_f$ .

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{F}_f. \quad (1.1)$$

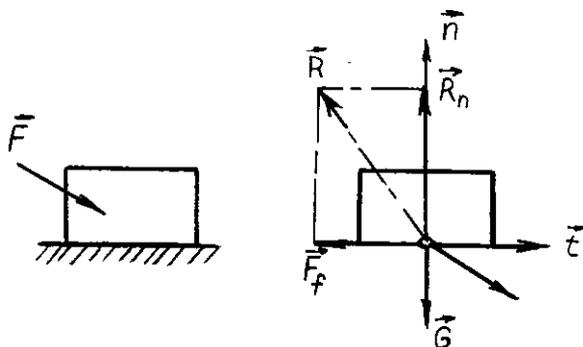


Рис. 1.4. Нормальная реакция  $R_n$  шероховатой поверхности и сила трения  $F_f$

Сила трения действует в плоскости, касательной к соприкасающимся поверхностям в точке их контакта, и направлена в сторону, противоположную той, куда активные силы стремятся сдвинуть тело. Сила трения может принимать любые значения от нуля до максимального значения, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия:

$$0 \leq F_f \leq F_{f \max}. \quad (1.2)$$

Максимальная сила трения скольжения равна произведению статического коэффициента трения  $f$  на нормальную реакцию:

$$F_{f \max} = f \cdot R_n. \quad (1.3)$$

При скольжении одного тела по поверхности другого сила трения направлена в сторону, противоположную направлению движения, и равна произведению динамического коэффициента трения  $f_v$  на нормальную реакцию:

$$F_f = f_v \cdot R_n. \quad (1.4)$$

Значения коэффициентов трения для различных материалов приводятся в справочниках.

При практических расчетах рассматривают предельное равновесие тела, когда сила трения равна  $F_{f \max}$ . При этом уравнения равновесия дополняют равенством (1.3).

Определив реакции связей из уравнений равновесия тела, получают исходные данные, необходимые, например, для расчета элементов конструкции на прочность.

**Заделки.** Глухая заделка, или жесткое защемление (рис. 1.5, а), исключает любые перемещения тела. Примером такой связи является соединение двух стержней с гарантированным натягом. При действии на балку плоской системы сил в заделке возникают пара сил с реактивным моментом  $M_A$  и произвольно направленная реакция  $R_A$  с составляющими  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ .

Скользящая заделка (рис. 1.5, б) допускает осевое перемещение стержня, система реакций состоит из силы  $R_A$  и пары сил с моментом  $M_A$ .

Свободная заделка (рис. 1.5, в) не препятствует перемещениям стержней вдоль своих осей, но исключает возможность их поворота. Поэтому, если не учитывать массу балки, в такой заделке возникает только реактивный момент  $M_A$ .

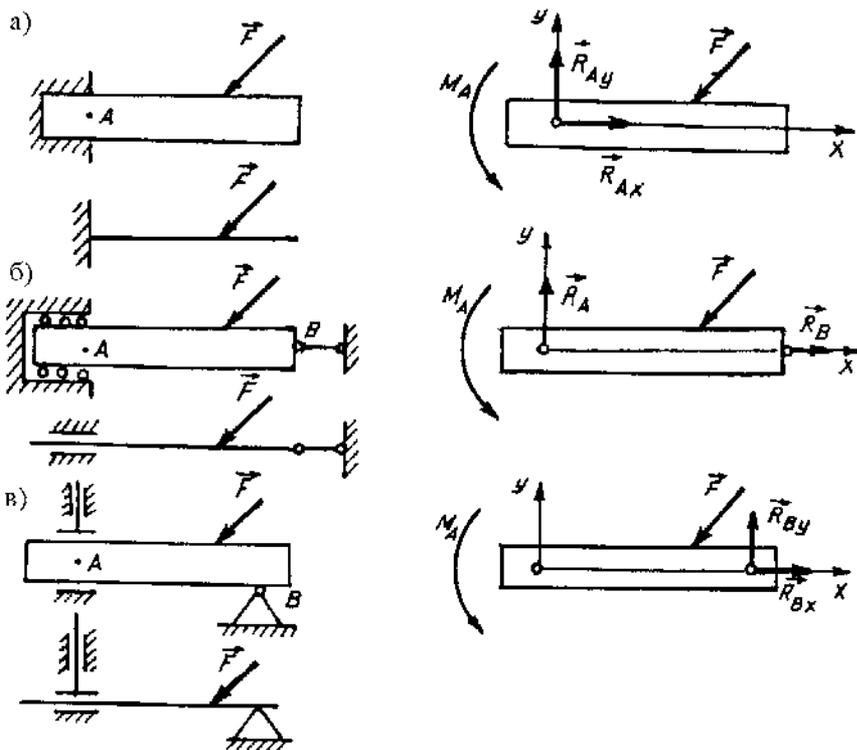


Рис. 1.5. Заделка глухая (а), скользящая, или подвижная (б), свободная (в), их условные изображения и направления реакций при действии плоской системы сил

**Подвижный шарнир** (шарнирно-подвижная опора). Нижняя обойма в опоре  $A$  (рис.1.6, а) установлена на цилиндрические катки. Поэтому балка  $AB$  имеет возможность поворачиваться относительно оси шарнира и перемещаться вдоль опорной плоскости катков. Реакция связи  $R_A$  направлена перпендикулярно к опорной плоскости катков.

Условные изображения шарнирно-подвижной опоры показаны на рис. 1.6, б.

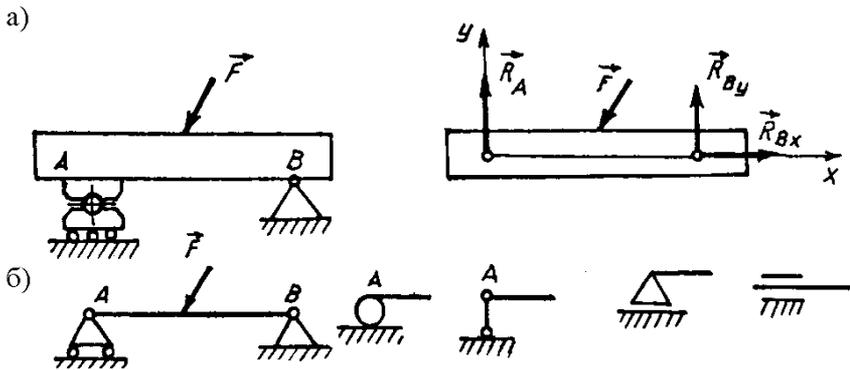


Рис. 1.6. Шарнирно-подвижная опора:  
а – схемы и направления реакций; б – условные изображения

**Неподвижный шарнир** (шарнирно-неподвижная опора). Такая опора состоит из двух обойм, между которыми расположен цилиндрический стержень. Одна обойма (рис. 1.7, а) закреплена на балке  $AB$ , а другая - на неподвижном основании. Кроме того, шарнирное соединение может выполняться с помощью пальца  $O$ , вставленного в цилиндрические отверстия стержня  $C$  и опоры  $D$  (рис. 1.7, б). Балка  $AB$  и стержень  $C$  могут только поворачиваться относительно оси шарнира. Другие перемещения исключены.

Направление реакции связи заранее неизвестно. Реакция связи действует в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира. Для неподвижного шарнира она может быть представлена двумя составляющими по координатным осям:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} . \quad (1.5)$$

Условные изображения шарнирно-неподвижной опоры показаны на рис. 1.7, в.

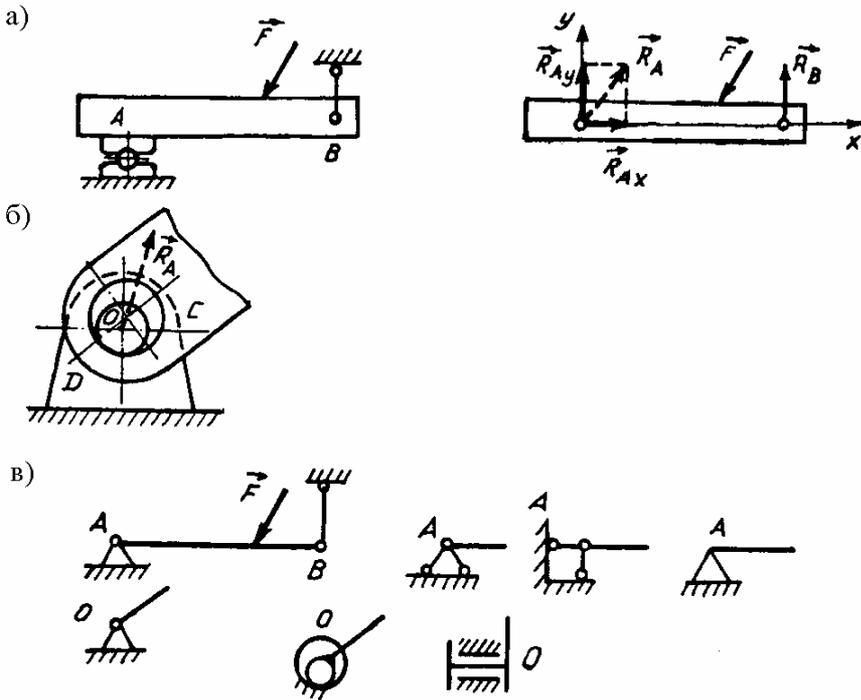


Рис. 1.7. Шарнирно-неподвижная опора:  
а, б – схемы и направления реакций; в – условные изображения

**Решение задач на равновесие геометрическим методом** — построением силовых многоугольников — целесообразно лишь в том случае, если к телу приложено не более трех сил. Более удобным и универсальным методом решения задач на равновесие является аналитический метод. Он основан на составлении и решении уравнений равновесия. Для равновесия плоской системы сходящихся сил достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций сил на каждую ось координат равнялась нулю:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0. \quad (1.6)$$

В различных учебниках можно встретить и другие формы записи этих же уравнений. Например:

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0. \quad (1.7)$$

В Международной системе единиц силы измеряются в ньютонах (Н). В ряде учебников и другой технической литературе встречается и другая единица измерения – килограмм-сила (кгс). В этом случае, при необходимости, приходится делать перевод старых единиц измерения в единицы СИ, пользуясь следующими соотношениями:  $1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н}$ ;  $1 \text{ тс} = 9,81 \text{ кН}$  ( $1 \text{ кН} = 1000 \text{ Н}$ ).

Напоминаем, что проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус ее острого угла с осью (рис. 1.8). Знак проекции (рис. 1.8) определяется совпадением направлений проекции и оси (направление проекции – от  $a$  к  $b$ ).

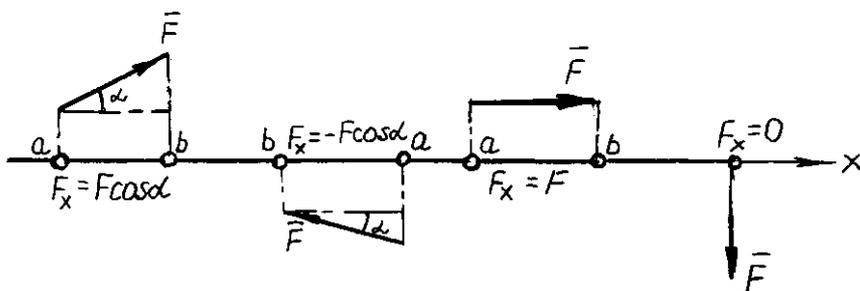


Рис.1.8. Проекция силы на ось

Обращаем внимание на возможность упростить решение подобных задач путем рационального выбора направления координатных осей.

Решив задачу аналитическим методом, следует затем проверить правильность решения:

- а) с помощью графоаналитического метода (если система состоит из трех сил);
- б) с помощью графического метода (если в системе более трех сил).

## 1.2. Определение усилий в стержнях фермы по способу вырезания узлов

Этот способ состоит в том, что мысленно вырезают узлы фермы, прикладывают к ним соответствующие внешние силы и реакции стержней и составляют уравнения равновесия сил, приложенных к каждому узлу. Так как в начале расчета фермы неизвестно, какие стержни фермы растянуты и какие сжаты, то условно предполагают, что все стержни растянуты (реакции стержней направлены от узлов).

Если в результате вычислений получают ответ со знаком «минус», то соответствующий стержень сжат.

Найденные реакции стержней равны по модулю внутренним усилиям в стержнях.

Последовательность рассмотрения узлов обычно определяется условием, что число неизвестных сил, приложенных к узлу, не должно превышать числа уравнений равновесия сил (двух для плоской фермы и трех для пространственной). Тогда эти неизвестные определяются сразу из уравнений равновесия сил, действующих на этот узел.

Если ферма плоская, то можно проверить правильность вычислений, построив многоугольники сил, приложенных к ее узлам. Эти многоугольники должны быть замкнутыми.

Усилия в отдельных стержнях загруженной фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни принято называть нулевыми. Рассмотрим леммы, пользуясь которыми можно определить нулевые стержни плоской фермы, не производя ее расчета.

*Л е м м а 1. Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю (рис. 1.9):*

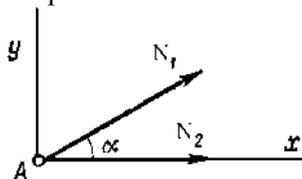


Рис. 1.9. К лемме 1

$$\sum X_i = 0; N_2 + N_1 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; N_1 \cos(90^\circ - \alpha) = 0; N_1 = 0, N_2 = 0.$$

**Лемма 2.** Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Усилия в первых двух стержнях равны между собой (рис.1.10).

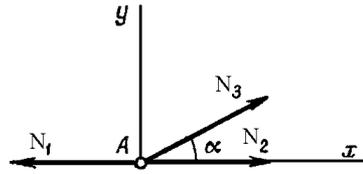


Рис. 1.10. К лемме 2

$$\sum X_i = 0; \quad -N_1 + N_2 + N_3 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0, \quad N_3 \cos(90^\circ - \alpha) = 0; \quad N_3 = 0 \text{ и } N_1 = N_2.$$

**Лемма 3.** Если в узле плоской фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю (рис. 1.11):

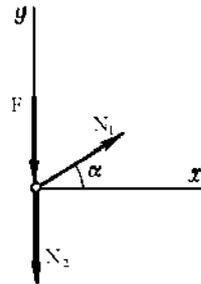


Рис. 1.11. К лемме 3

$$\sum X_i = 0; \quad N_1 \cos \alpha = 0; \quad N_1 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -F - N_2 + N_1 \sin \alpha = 0; \quad N_2 = -F.$$



### Вопросы для самопроверки

1. Что такое материальная точка?
2. Что такое абсолютно твердое тело?
3. Что такое сила?
4. Какими приборами измеряют численное значение силы?
5. Какими единицами измеряется сила в Международной системе (СИ)?

6. Что такое система сил?
7. Какие системы сил называются эквивалентными?
8. Что такое равнодействующая и уравнивающая сила?
9. В чем сходство между равнодействующей и уравнивающей сил и чем они друг от друга отличаются?
10. Сформулируйте первую, вторую, третью и четвертую аксиомы статики.

11. К двум различным точкам твердого тела (рис. 1.12) приложены две непараллельные, но действующие в одной плоскости силы. Можно ли для сложения этих сил применить правило параллелограмма?

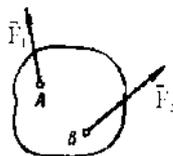


Рис. 1.12. К вопросу 11

12. Можно ли силу в 50 Н разложить на две силы, например, по 200 Н?
13. Сформулируйте пятую аксиому статики.
14. Какие разновидности связей рассматриваются в статике?

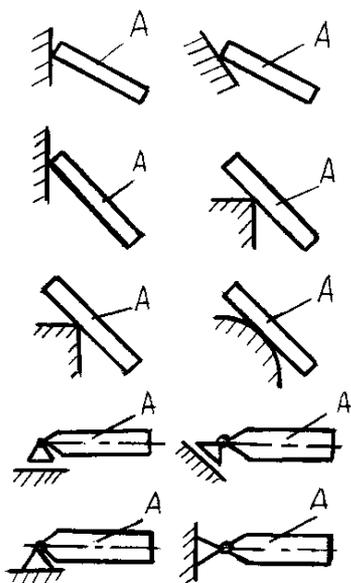


Рис. 1.13. К вопросу 15

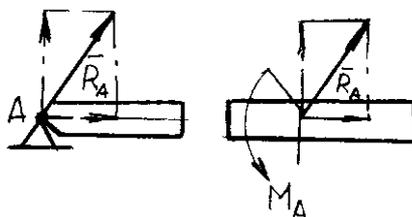


Рис. 1.14. К вопросу 16

15. Изменится ли направление реакций связей, если, не меняя положение бруса  $A$ , изображенные на рис. 1.13, а опоры (связи) заменить опорами (связями), как показано на рис. 1.13, б? (Трение не учитывать, т. е. связи считать идеальными).

16. Почему со стороны неподвижного шарнира на брус действует только сила  $R_A$  (реакция шарнира), а при жесткой заделке бруса на него действуют и сила  $R_A$ , и реактивный момент  $M_A$  заделки (рис. 1.14)?

17. Какая система сил называется сходящейся?

18. Как определить равнодействующую системы сходящихся сил путем построения силового многоугольника?

19. Сформулируйте геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.

20. Какой из силовых многоугольников на рис. 1.15 относится к уравновешенной системе сходящихся сил?

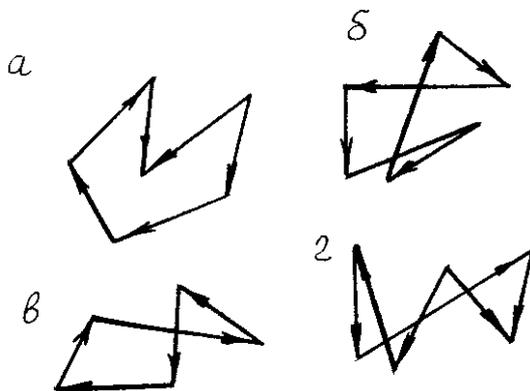


Рис. 1.15. К вопросу 20

21. Какие уравнения и сколько их можно составить для уравновешенной плоской системы сходящихся сил?

22. Сформулируйте теорему о равновесии трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости.

23. Невесомый груз нагружен силой  $F$ , как показано на рис. 1.16. Определите (воспользовавшись, если нужно, только калькулятором), под каким углом к брусу направлена реакция шарнира  $A$ . (Ответ: а)  $45^\circ$ ; б)  $145^\circ$ ).

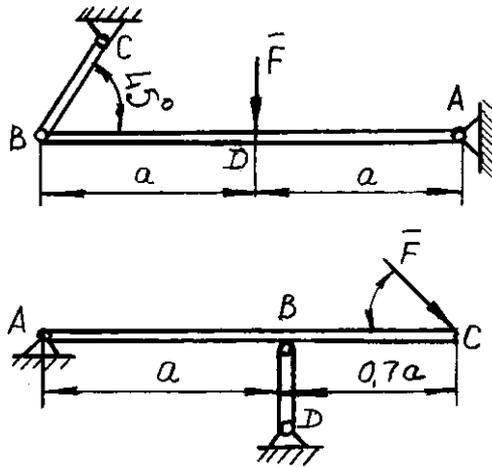


Рис. 1.16. К вопросу 23

24. Обязательно ли будет находиться в равновесии тело, если на него в одной плоскости действуют три силы и линии их действия пересекаются в одной точке?

### Примеры

**Пример 1.** Стержни  $AC$  и  $BC$  (рис. 1.17, а) соединены между собой шарниром  $C$ , а с вертикальной стеной — посредством шарниров  $A$  и  $B$ . В шарнире  $C$  приложена сила  $F = 1260$  Н. Требуется определить реакции  $N_1$  и  $N_2$  стержней действующие на шарнир  $C$ , если  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ .

**Решение.** Рассматриваем равновесие точки  $C$ , которая считается несвободной, так как на нее наложены связи в виде стержней  $AC$  и  $BC$ . Освобождаем точку  $C$  от связей и заменяем их силами реакций связей, считая, что стержень  $AC$  растягивается, а стержень  $BC$  сжимается под действием силы  $F$ . Обозначим реакцию стержня  $AC$  через  $N_1$ , а реакцию стержня  $BC$  через  $N_2$ . В итоге точка  $C$  становится свободной, находясь под действием плоской системы трех сходящихся сил: активной силы  $F$  и сил реакций  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 1.17, б). Приняв точку  $O$  за начало координат, перенесем силы  $F$ ,  $N_1$  и  $N_2$  параллельно самим себе в эту точку (рис. 1.17, в) и составляем урав-

нения проекций сил на оси координат:

$$\sum X = 0; \quad -N_1 \cdot \sin 30^\circ + N_2 \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cdot \cos 30^\circ + N_2 \cdot \cos 60^\circ - F = 0$$

или

$$-N_1 \frac{1}{2} + N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (1.8)$$

и

$$N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2 \frac{1}{2} = F. \quad (1.9)$$

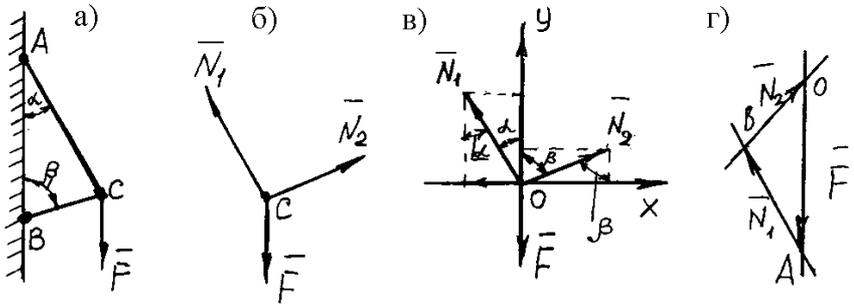


Рис. 1.17. К примеру 1

Умножим уравнение (1.8) на  $\sqrt{3}$ , получим

$$-N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2 \frac{3}{2} = 0; \quad (1.10)$$

$$N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2 \frac{1}{2} = F. \quad (1.11)$$

После сложения уравнений (1.10) и (1.11) получим

$$\frac{3}{2} \cdot N_2 + \frac{1}{2} \cdot N_2 = F,$$

откуда  $2N_2 = F$  или  $N_2 = \frac{F}{2} = \frac{1260}{2} = 630$  Н. Из уравнения (1.8) получаем, что

$$N_1 = 630 \cdot \sqrt{3} \text{ или } N_1 = 630 \cdot 1,73 = 1089,9 \text{ Н.}$$

**Графический метод.** Для решения задачи этим методом выбираем масштаб силы  $F$  (например,  $10 \text{ Н} = 1 \text{ мм}$ ) и строим замкнутый треугольник сил (рис. 1.17, г). Из произвольной точки  $O$  проводим прямую, параллельную вектору  $F$ , и откладываем на этой прямой в выбранном масштабе вектор  $\vec{F}$ . Из конца вектора  $\vec{F}$  (точка  $A$ ) проводим прямую, параллельную вектору  $\vec{N}_1$ , а из точки  $O$  — прямую, параллельную вектору  $\vec{N}_2$ . Пересечение этих прямых дает точку  $B$ . Получили замкнутый треугольник сил  $OAB$ , стороны которого в выбранном масштабе изображают силы, сходящиеся в точке  $C$ . Величины сил  $N_1$  и  $N_2$  определим после измерения сторон  $AB$  и  $BO$  треугольника  $OAB$ .

**Ответ:**  $N_1 = 1089,9 \text{ Н}$ ;  $N_2 = 630 \text{ Н}$

**Пример 2.** К вертикальной стене  $AB$  на тросе  $AC$  подвешен шар с центром  $O$  (рис. 1.18, а) и весом  $F = 120 \text{ Н}$ . Трос составляет со стеной угол  $\alpha = 30^\circ$ . Определить реакции  $N$  натяжения троса и давления шара в точке  $D$  стены  $AB$ .

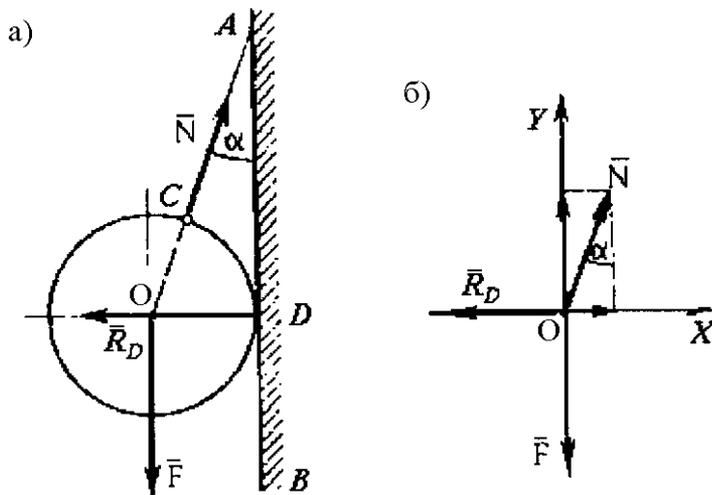


Рис. 1.18. К примеру 2

**Решение.** Рассмотрим равновесие точки  $O$ . Освобождая ее от связей (трос  $AC$  и стена  $AB$ ), получим в этой точке плоскую систему трех сходящихся уравновешенных сил:  $F$ ,  $N$  и  $R_D$ , при этом реакция  $N$  направлена по тросу, а реакция  $R_D$  - перпендикулярно стене  $AB$ . Приняв точку  $O$  за начало координат, перенесем в эту точку силы  $F$ ,  $N$  и  $R_D$  параллельно самим себе и спроецируем силы на оси  $X$  и  $Y$  (рис. 1.18, б). Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\sum X = 0; \quad N \cdot \sin \alpha - R_D = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N \cdot \cos \alpha - F = 0$$

или

$$N \cdot \sin 30^\circ - R_D = 0; \tag{1.12}$$

$$N \cdot \cos 30^\circ - F = 0; \tag{1.13}$$

Из уравнения (1.13)

$$N = \frac{F}{\cos 30^\circ} = \frac{120 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{240}{\sqrt{3}} \text{ Н} = 138,6 \text{ Н.}$$

Из уравнения (1.12)

$$R_D = N \cdot \sin 30^\circ = \frac{240}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 69,3 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $N = 138,6 \text{ Н}$ ;  $R_D = 69,3 \text{ Н}$ .

**Пример 3.** Два жестких стержня  $AB$  и  $AC$  имеют общую шарнирную точку  $A$  и шарнирные опоры  $B$  и  $C$  (рис. 1.19, а). Сила  $F = 500 \text{ Н}$  приложена к шарнирному валику в точке  $A$ . Стержни  $AB$  и  $AC$  образуют углы  $\alpha$  по  $30^\circ$  с линией действия силы  $F$ . Определить усилия в стержнях.

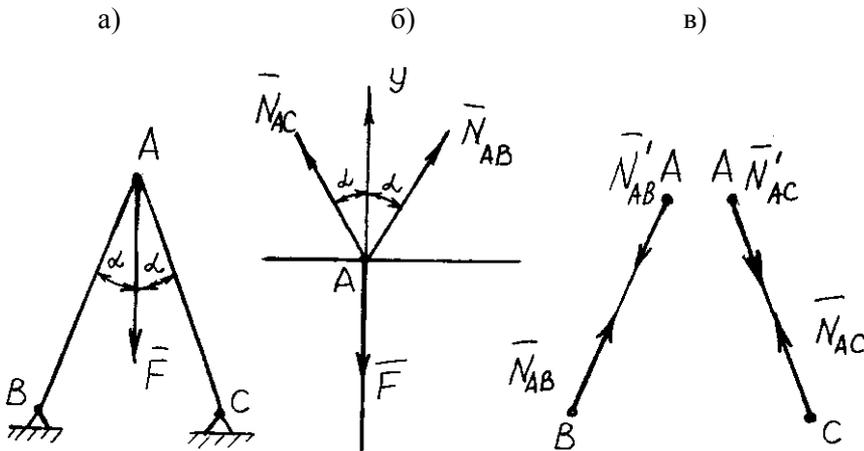


Рис. 1.19. К примеру 3

**Решение.** Сила  $F$  приложена в точке  $A$ , которая находится в равновесии под действием силы  $F$  и реакции стержней  $AB$  и  $AC$ . Реакции стержней направлены вдоль их осей.

Рассмотрим равновесие точки  $A$ . Отбросив связи точки  $A$  и заменив их реакциями стержней  $AB$  и  $AC$  (рис. 1.19, б), получим систему сходящихся сил. Из точки  $A$  проведём координатные оси. Ось  $X$  на-

правим перпендикулярно силе  $F$ . Составим уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на ось  $X$  равна нулю):

$$\sum X = 0; \quad N_{AB} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - N_{AC} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 0,$$

откуда

$$N_{AB} = N_{AC}.$$

Сумма проекций всех сил на ось  $Y$  также равна нулю:

$$\sum Y = 0; \quad -F + N_{AC} \cdot \cos\alpha + N_{AB} \cdot \cos\alpha = 0,$$

откуда

$$N_{AB} = N_{AC} = \frac{F}{2 \cdot \cos\alpha} = \frac{500}{2 \cdot \cos 30^\circ} = 288,7 \text{ Н.}$$

В данном примере силы  $N_{AC}$  и  $N_{AB}$  получились со знаком «плюс» (+), следовательно, действительное направление сил совпадает с тем, которое предполагалось при составлении уравнения. Если сила получится со знаком «минус» (-), то это значит, что ее действительное направление противоположно тому, которое было намечено при составлении уравнений равновесия.

Мы определили величину, а также направление реакций стержней, приложенных к точке  $A$ . К верхним концам стержней приложены такие же по величине силы, но противоположно направленные. К нижним концам стержней приложены силы реакции опор  $B$  и  $C$ , равные по величине силам, приложенным к верхним концам, и направленные им навстречу (рис. 1.19, в). Следовательно, оба стержня сжимаются силами

$$N_{AC} = N_{AB} = 288,7 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $N_{AC} = N_{AB} = 288,7 \text{ Н.}$

**Пример 4.** Определить силы, нагружающие стержни  $AB$  и  $AC$  кронштейна, удерживающего в равновесии груз  $F = 6 \text{ кН}$  и растянутую пружину, сила упругости которой  $F_1 = 2 \text{ кН}$ . Весом частей конструкции, а также трением на блоке пренебречь (рис. 1.20, а).

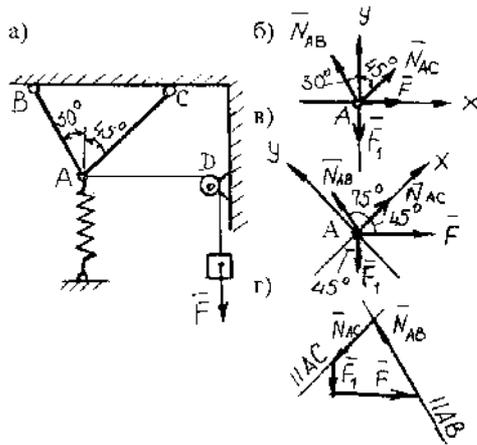


Рис. 1.20. К примеру 4

**Решение.** Задачу решаем аналитическим методом. Рассматриваем равновесие точки схода  $A$ . К ней приложены заданные активные силы – сила натяжения троса  $AD$ , равная весу груза  $F$ , и сила упругости пружины  $F_1$ . Так как и трос, и пружина растянуты, то эти силы направлены от точки  $A$ . Рассматривая точку  $A$  как свободную, отбрасываем связи (стержни  $AB$  и  $AC$ ), заменяя их действие реакциями  $N_{AB}$  и  $N_{AC}$ . Реакции стержней направляем от точки  $A$ , так как предварительно полагаем стержни растянутыми (действительные направления реакций стержней в начале решения неизвестны). Если наше предположение окажется неверным, то искомая реакция стержня получится в ответе со знаком «минус»; это говорит о том, что стержень сжат и истинное направление реакции – к точке  $A$ . Полученная расчетная схема изображена на рис. 1.20, б.

Принимаем обычное вертикально-горизонтальное направление координатных осей. Для полученной плоской системы сходящихся сил составляем два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum F_x = 0; \quad & F + N_{AC} \cdot \cos 45^0 - N_{AB} \cdot \cos 60^0 = 0; \\
 & 6 + N_{AC} \cdot 0,707 - N_{AB} \cdot 0,5 = 0. \\
 2) \quad \sum F_y = 0; \quad & N_{AC} \cdot \cos 45^0 + N_{AB} \cdot \cos 30^0 - F_1 = 0; \\
 & N_{AC} \cdot 0,707 + N_{AB} \cdot 0,866 - 2 = 0.
 \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, находим  $N_{AB} = 5,86 \text{ кН}$  и  $N_{AC} = -4,34 \text{ кН}$ . Искомые силы, нагружающие стержни, по модулю равны найденным реакциям стержней, а по направлению противоположны им. Замечаем, что в соответствии с изложенным правилом стержень  $AB$  оказался растянутым, а стержень  $AC$  – сжатым.

Следует отметить, что каждое из полученных уравнений равновесия содержало оба неизвестных, чего можно избежать, направив координатные оси по-другому — совместив одну из осей с известной силой (рис. 1.20, в). При этом в уравнении равновесия для другой оси окажется лишь одно неизвестное:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N_{AC} + F \cdot \cos 45^0 + N_{AB} \cdot \cos 75^0 - F_1 \cdot \cos 45^0 = 0;$$

$$N_{AC} + 6 \cdot 0,707 + N_{AB} \cdot 0,259 - 2 \cdot 0,707 = 0.$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_{AB} \cdot \cos 15^0 - F \cdot \cos 45^0 - F_1 \cdot \cos 45^0 = 0;$$

$$N_{AB} \cdot 0,966 - 6 \cdot 0,707 - 2 \cdot 0,707 = 0,$$

откуда

$$N_{AB} = 5,86 \text{ кН} \text{ и } N_{AC} = -4,34 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности решения применяем графический метод – в выбранном масштабе строим замкнутый силовой многоугольник (рис. 1.20, г). От произвольной точки откладываем вектор заданной силы  $F_1$ , от конца вектора  $\vec{F}_1$  – вектор заданной силы  $\vec{F}$ .

Затем через начало и конец вектора проводим известные направления искомых реакций стержней  $AB$  и  $AC$ . Стрелки, изображающие направления сил  $N_{AB}$  и  $N_{AC}$ , ставим таким образом, чтобы в векторном многоугольнике было единое направление обхода – в данном случае против часовой стрелки. Измеряя искомые векторы с учетом принятого масштаба, получаем  $N_{AB} \approx 5,9 \text{ кН}$  и  $N_{AC} \approx 4,3 \text{ кН}$ . (Точность графического решения будет тем выше, чем крупнее принят масштаб построения). Следует отметить, что векторный многоугольник показывает действительное, а не предполагаемое направление искомых сил.

**Ответ:**  $N_{AB} = 5,86 \text{ кН}$ ;  $N_{AC} = -4,34 \text{ кН}$ .

**Пример 5.** Определить силу натяжения троса, удерживающего в равновесии шар весом  $G = 20 \text{ Н}$ , а также силу давления шара на наклонную опорную плоскость (рис. 1.21, а).

**Решение.** Задачу решаем аналитическим методом. К шару приложена заданная активная сила – вес шара  $G$ . Отбрасываем связи (трос  $BC$  и опорная плоскость), заменяя их действие реакциями  $N_{BC}$ ,  $R_A$ . Реакцию растянутого троса направляем от шара, а реакцию опорной плоскости – по нормали к ней в сторону к шару (рис. 1.21, б). Рассматриваем равновесие точки  $O$  схода всех сил. Полученная расчетная схема изображена на рис. 1.21, в.

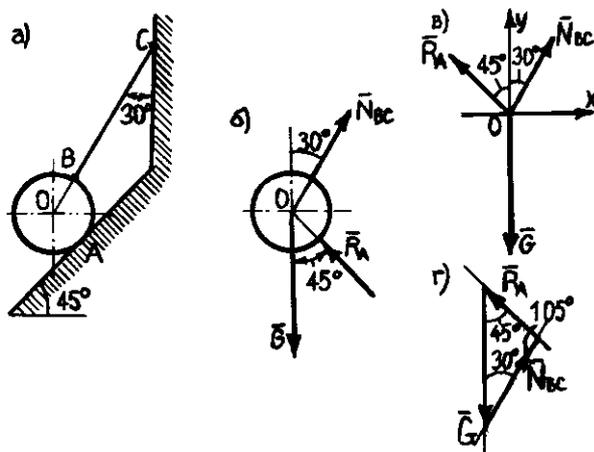


Рис. 1.21. К примеру 5

Принимаем обычное вертикально-горизонтальное направление координатных осей. Для полученной плоской системы сходящихся сил составляем два уравнения равновесия:

$$1) \sum F_{ix} = 0; N_{BC} \cdot \cos 60^\circ - R_A \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$N_{BC} \cdot 0,5 - R_A \cdot 0,707 = 0.$$

$$2) \sum F_{iy} = 0; N_{BC} \cdot \cos 30^\circ + R_A \cdot \cos 45^\circ - G = 0;$$

$$N_{BC} \cdot 0,866 + R_A \cdot 0,707 - 20 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим  $R_A = 10,3\text{Н}$  и  $N_{BC} = 14,6\text{Н}$ . Искомая сила натяжения троса и сила давления шара на плоскость соответственно равны найденным реакциям, а по направлению противоположны им.

Решение задачи при другом, более рациональном направлении координатных осей советуем выполнить самим учащимся.

Для проверки правильности решения применяем графоаналитический метод – строим замкнутый силовой треугольник (рис. 1.21, г). От произвольной точки откладываем вектор заданной силы  $G$ , через начало и конец которого проводим известные направления искомых реакций троса и опоры. Построенный графическим методом силовой треугольник решаем аналитическим методом – здесь удобно применить известную из математики теорему синусов:

$$\frac{G}{\sin 105^{\circ}} = \frac{N_{BC}}{\sin 45^{\circ}} = \frac{R_A}{\sin 30^{\circ}};$$

$$\frac{20}{0,967} = \frac{N_{BC}}{0,707} = \frac{R_A}{0,5}.$$

Решая пропорции, получаем

$$N_{BC} = 20 \cdot 0,707 / 0,967 = 14,6 \text{ кН};$$

$$R_A = 20 \cdot 0,5 / 0,967 = 10,3 \text{ кН}.$$

Применение графоаналитического метода решения целесообразно лишь для системы, состоящей из трех сил.

**Ответ:**  $N_{BC} = 14,6 \text{ кН}$ ;  $R_A = 10,3 \text{ кН}$ .

**Пример 6.** Определить усилия в стержнях  $AB$  и  $BC$  (рис. 1.22, а), если сила  $F$ , действующая на шарнир  $B$ , равна 50 кН; вес груза  $G = 60 \text{ кН}$ .

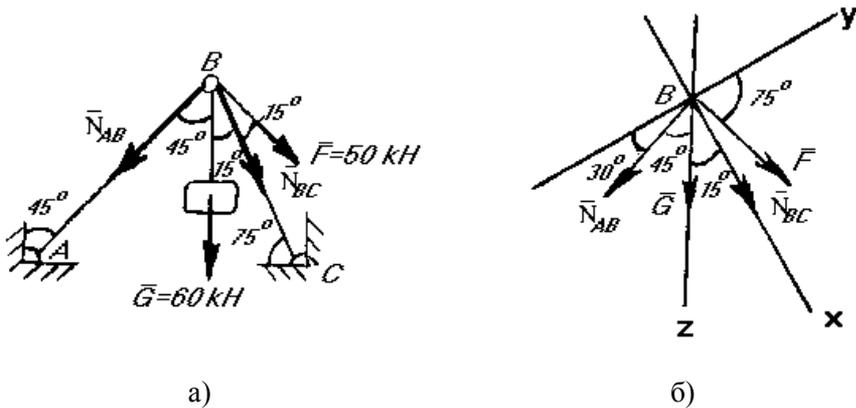


Рис. 1.22. К примеру 6

**Решение.** Задачу решаем аналитическим методом. К шарниру приложены активные силы — вес груза  $G$  и сила  $F$ . Отбрасываем связи (стержни  $AB$  и  $BC$ ), заменяя их действие реакциями  $N_{AB}$  и  $N_{BC}$ . Реакции стержней направляем от точки  $B$  к точкам  $A$  и  $C$  соответственно, так как предварительно полагаем стержни растянутыми (действительные направления реакций стержней в начале решения неизвестны). Если наше предположение окажется неверным, то искомая реакция стержня получится в ответе со знаком «минус»; это говорит о том, что стержень сжат и истинное направление реакции противоположно. Рассматриваем равновесие точки  $B$  схода всех сил. Выбираем систему координат так, чтобы одна из осей совпала с неизвестной силой. Полученная расчетная схема изображена на рис. 1.22, б.

Для полученной плоской системы сходящихся сил составляем два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum F_{ix} = 0; \quad N_{BC} + G \cdot \cos 15^\circ + N_{AB} \cdot \cos 60^\circ + F \cdot \cos 15^\circ = 0; \\
 2) \quad \sum F_{iy} = 0; \quad -G \cdot \cos 75^\circ - N_{AB} \cdot \cos 30^\circ + F \cdot \cos 75^\circ = 0.
 \end{aligned}$$

Решая систему, получаем:

$$N_{AB} = \frac{-G \cdot \cos 75^\circ + F \cdot \cos 75^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{-60 \cdot 0,26 + 50 \cdot 0,26}{0,87} = -2,99 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} N_{BC} &= -G \cdot \cos 15^\circ - N_{AB} \cdot \cos 60^\circ - F \cdot \cos 15^\circ = \\ &= -60 \cdot 0,97 + 2,99 \cdot 0,5 - 50 \cdot 0,97 = -104,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Искомые силы, нагружающие стержни, по модулю равны найденным реакциям стержней, а по направлению противоположны им. Замечаем, что в соответствии с изложенным правилом стержни  $BA$  и  $BC$  оказались растянутыми.

*Проверка.* Так как шарнир  $B$  находится в равновесии, то

$$\begin{aligned} \sum F_{iz} &= 0; N_{BC} \cdot \cos 15^\circ + G - N_{AB} \cdot \cos 45^\circ + F \cdot \cos 30^\circ = \\ &= -104,8 \cdot 0,966 + 60 - 2,99 \cdot 0,707 + 50 \cdot 0,866 \approx 0. \end{aligned}$$

Мы получили верное равенство, значит, задача решена верно.

**Ответ:**  $N_{AB} = -2,99$  кН;  $N_{BC} = -104,8$  кН.

**Пример 7.** Определить силу давления ступенчатой колонны (рис. 1.23, а) на горизонтальную опору и силы взаимодействия частей колонны по сечению А-А. Сила тяжести (вес) верхней части колонны  $F_1 = 30$  кН, нижней  $F_2 = 60$  кН.

**Решение.** По условию задачи надо рассмотреть равновесие колонны. Точки приложения сил  $F_1$  и  $F_2$  – в центре тяжести каждой части колонны. Действуют эти силы по одной вертикальной прямой – вниз, их модули заданы.

Опора колонны – горизонтальная плоскость, препятствующая ее перемещению по вертикали вниз. Действие опоры заменяем реакцией  $R$ , направленной вертикально вверх (рис. 1.23, б). Рассматриваемое тело находится в равновесии под действием трех сил, направленных по одной прямой. Для определения неизвестной силы реакции опоры применим уравнение равновесия.

Удобнее всего расположить оси координат таким образом, чтобы

одна ось совпадала по направлению с силами  $R$ ,  $F_1$  и  $F_2$ , тогда получится одно уравнение равновесия (на ось  $X$  все силы проектируются в точку):

$$\sum Y = 0; \quad R - F_1 - F_2 = 0,$$

следовательно,

$$R = F_1 + F_2 = 30 + 60 = 90 \text{ кН.}$$

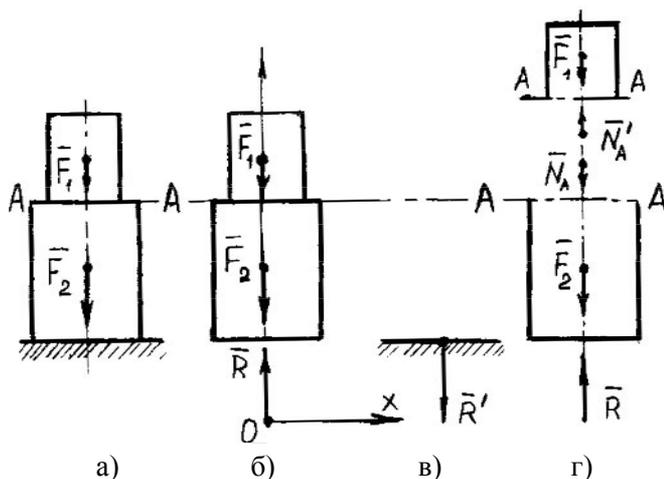


Рис. 1.23. К примеру 7

Сила давления колонны на опору  $R'$  (в соответствии с аксиомой о том, что действие равно противодействию) равна по модулю реакции  $R$ , но направлена в противоположную ей сторону – вниз (рис. 1.23, в). Чтобы определить силы взаимодействия частей колонны по сечению А–А, мысленно разделим обе части колонны и действие одной части на другую заменим силами, как показано на рис. 1.23, г.

Рассмотрим равновесие одной части колонны, например верхней:

$$\sum Y = 0; \quad N'_A - F_1 = 0; \quad N'_A = F_1 = 30 \text{ кН.}$$

На основании аксиомы о равенстве действия и противодействия сила  $N'_A = N_A = 30$  кН. Тот же результат получится, если рассмотреть равновесие нижней части колонны:

$$\sum Y = 0; \quad -N_A - F_2 + R = 0;$$

$$N_A = R - F_2 = 90 - 60 = 30 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R = 90$  кН;  $N'_A = N_A = 30$  кН.

**Пример 8.** Определить опорные реакции, возникающие при действии на брус силы  $F = 50$  кН (силой тяжести бруса можно пренебречь). Расстояние между опорами  $l = 2$  м. Сила приложена посредине между опорами под углом  $45^\circ$  к оси бруса в точке  $D$  (рис. 1.24, а).

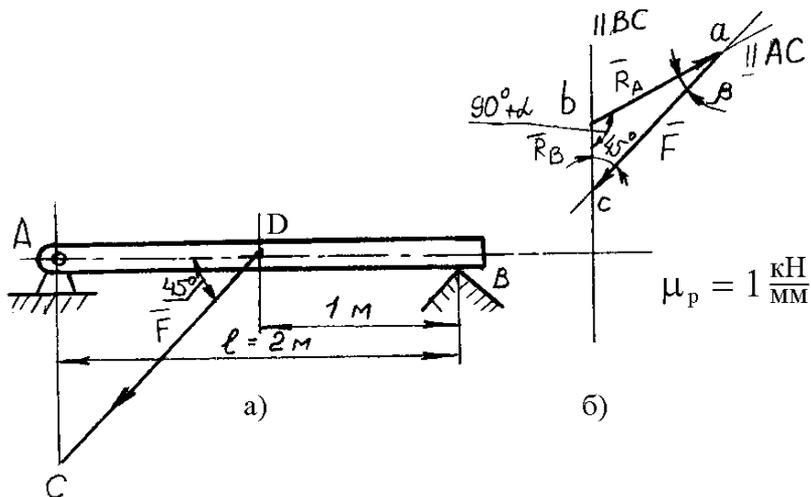


Рис. 1.24. К примеру 8

**Решение.** Рассмотрим равновесие бруса, опирающегося на вершину угла  $B$  и шарнир  $A$ . Действие опор заменим реакциями. Направление опорной реакции  $R_B$  перпендикулярно опорной плоскости

сти. Точка  $C$  – пересечение линии действия силы  $F$  и направления опорной реакции  $R_B$ .

Направление опорной реакции  $A$  определяется на основании того, что тело может находиться в равновесии под действием трех непараллельных сил только в случае, если линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Следовательно, опорная реакция шарнира  $A - R_A$  будет направлена по линии  $AC$ . Так как тело находится в равновесии под действием трех сил, силовой треугольник должен быть замкнутым (геометрическое условие равновесия). На рис. 1.24, б выполнено построение силового треугольника и графически определены опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ .

Масштаб построения силового треугольника  $\mu_p = 1 \text{ кН/мм}$ , т. е. 1 мм соответствует силе в 1 кН. Для определения сил следует длину стороны треугольника умножить на масштаб:

$$R_A = ab \cdot \mu_p = 40 \text{ мм} \cdot 1 \text{ кН/мм} = 40 \text{ кН}.$$

$$R_B = cb \cdot \mu_p = 18 \text{ мм} \cdot 1 \text{ кН/мм} = 18 \text{ кН}.$$

Графическое решение можно проверить вычислением. Для этого надо найти стороны  $ab$  и  $bc$  силового треугольника  $abc$ . Прежде всего определим углы  $\alpha$  и  $\beta$ .

Угол  $\alpha$  можно определить из треугольника  $cab$  (рис. 1.24, б). Согласно построению этот треугольник прямоугольный, а из треугольника  $CBD$  видно, что  $CB = BD = \ell / 2 = 1 \text{ м}$ . Следовательно, можно написать  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{cb}{ab} = \frac{1}{2}$  (рис. 1.24, б), отсюда  $\alpha = 26^\circ 30'$  и угол  $\beta = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ - \alpha = 45^\circ - 26^\circ 30' = 18^\circ 30'$ .

На основании теоремы синусов для треугольника  $abc$  можно написать:

$$\frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_B}{\sin \beta} = \frac{F}{\sin(90^\circ + \alpha)};$$

$$R_A = F \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\cos 26^\circ 30'} = 50 \cdot \frac{0,707}{0,896} = 39,5 \text{ кН};$$

$$R_B = F \cdot \frac{\sin 18^{\circ}30'}{\cos 26^{\circ}30'} = 50 \cdot \frac{0,317}{0,896} = 17,5 \text{ кН.}$$

Небольшое расхождение в величине опорных реакций объясняется меньшей точностью графического метода решения.

**Ответ:**  $R_A = 39,5 \text{ кН}$ ;  $R_B = 17,5 \text{ кН}$ .

**Пример 9.** Определить реакции стержней  $AB$  и  $CB$ , общий шарнир  $B$  которых нагружен, как показано на рис. 1.25, а, силами  $F_1 = 0,5 \text{ кН}$  и  $F_2 = 1 \text{ кН}$ .

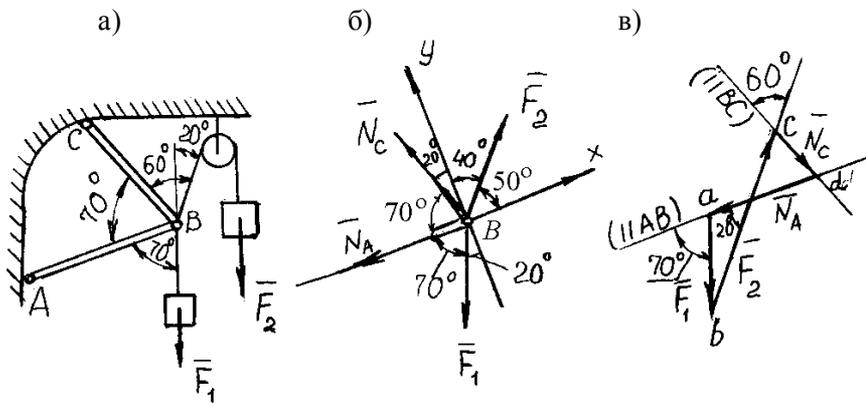


Рис. 1.25. К примеру 9

### Решение

1. Выделим точку, равновесие которой следует рассмотреть, чтобы определить неизвестные реакции стержней. Здесь такой точкой является шарнир  $B$ . Изобразим его отдельно на рис. 1.25, б.

2. Изобразим действующие на точку  $B$  активные силы (нагрузки)  $F_1$  и  $F_2$ , действующие на шарнир  $B$  вдоль нитей, к которым прикреплен каждый из грузов.

3. Мысленно освободим шарнир  $B$  от связей (стержней) и заменим действие связей их реакциями  $N_A$  и  $N_C$ , направленными вдоль стержней  $BA$  и  $BC$  соответственно. Не всегда заранее можно опре-

делить, какой из стержней растянут или сжат. Например, в данном случае груз  $F_1$  сжимает стержень  $BA$  и растягивает стержень  $BC$ , а груз  $F_2$  – наоборот: растягивает стержень  $BA$  и сжимает стержень  $BC$ . Поэтому существует общепринятое правило считать предположительно все стержни растянутыми. В соответствии с этим правилом реакции  $N_A$  и  $N_B$  стержней на рис. 1.25, б направлены от шарнира  $B$  к связям.

4. Приняв точку  $B$  за начало координат, выберем положение осей  $X$  (ось абсцисс) и  $Y$  (ось ординат) таким образом, чтобы по крайней мере одна из них совпала с линией действия неизвестной силы, т. е. совместив одну из осей координат с осью какого-либо стержня. В данном случае (рис. 1.25, б) ось  $X$  совмещена с осью стержня  $AB$  (можно было бы ось  $Y$  совместить с осью стержня  $BC$ ).

5. Определив при помощи данных на рис. 1.25, а углы, образуемые силами  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $N_A$ ,  $N_C$  с осями  $X$  и  $Y$ , определим проекции всех сил на каждую из осей и составим из этих проекций уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0; \quad -N_A - N_C \cdot \sin 20^\circ + F_2 \cdot \sin 40^\circ - F_1 \cdot \sin 20^\circ = 0; \quad (1.14)$$

$$\sum Y = 0; \quad N_C \cdot \sin 70^\circ + F_2 \cdot \sin 50^\circ - F_1 \cdot \sin 70^\circ = 0. \quad (1.15)$$

6. Решаем получившуюся систему уравнений. Благодаря тому, что ось  $X$  совпадает с осью стержня  $AB$ , ось  $Y$  перпендикулярна к этому стержню. Проекция  $N_A$  (реакция стержня  $AB$ ) на ось  $Y$  равняется нулю, и второе уравнение содержит только одно неизвестное.

Из уравнения (1.15) имеем:

$$N_C = F_1 - F_2 \frac{\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ} = 0,5 - 1 \frac{0,766}{0,9397} = -0,315 \text{ кН.}$$

Знак «минус» перед численным значением  $N_C$  показывает, что вектор  $N_C$  (рис. 1.25, б) должен быть направлен в противоположную сторону, т. е. стержень  $BC$  не растянут, как предполагалось, а сжат силой 0,315 кН (315Н).

Из уравнения (1.14) имеем:

$$\begin{aligned} N_A &= F_2 \cdot \sin 40^\circ - (F_1 + N_C) \cdot \sin 20^\circ = \\ &= 1 \cdot \sin 40^\circ - (0,5 - 0,315) \cdot \sin 20^\circ, \end{aligned}$$

откуда  $N_A = 0,6$  кН.

Численное значение  $N_A$  положительно, значит, предположительно выбранное направление вектора  $N_A$  соответствует действительному и стержень  $BA$  растянут силой  $0,6$  кН ( $600$  Н).

7. Решение задачи обязательно следует проверить. Лучшим способом проверки может быть либо решение с помощью иного выбора осей координат (решите эту задачу, совместив ось  $Y$  с осью стержня  $BC$ ), либо решение задачи иным методом, например, графически.

Графическое решение задачи (оно показано на рис. 1.25, в) выполнять очень просто с помощью линейки с миллиметровой шкалой и транспортира. Из произвольной точки  $a$  откладываем вертикально вниз (так направлена сила  $F_1$ ) вектор  $ab$ , который в некотором масштабе  $\mu_{\text{сил}} = F_1 / ab$ , кН/мм, изображает силу  $F_1$ . Из точки  $b$  параллельно действию силы  $F_2$  на шарнир  $B$  в том же масштабе откладываем вектор  $bc$ , изображающий силу  $F_2$  ( $bc = \mu_{\text{сил}} F_2$ ). Затем из точек  $a$  и  $c$  проводим прямые, параллельные соответственно стержню  $AB$  и стержню  $BC$ . Эти прямые пересекаются в точке  $d$ . Образовался замкнутый многоугольник  $abcd$ , в котором сторона  $cd$  изображает реакцию стержня  $BC$ , а сторона  $da$  – реакцию стержня  $BA$  ( $N_A = \mu_{\text{сил}} \cdot da$ ;  $N_C = \mu_{\text{сил}} \cdot dc$ ). Причем стрелки у этих сторон показывают, который из стержней сжат или растянут.

**Ответ:**  $N_A = 0,6$  кН;  $N_C = 0,315$  кН.

**Пример 10** (рис. 1.26, а). Определить силу  $F$ , при которой цилиндр весом  $500$  Н начнет вкатываться на наклонную плоскость, а также реакцию наклонной плоскости. Трением пренебречь. *Указание:* в момент начала вкатывания цилиндр отрывается от горизонтальной опорной плоскости.

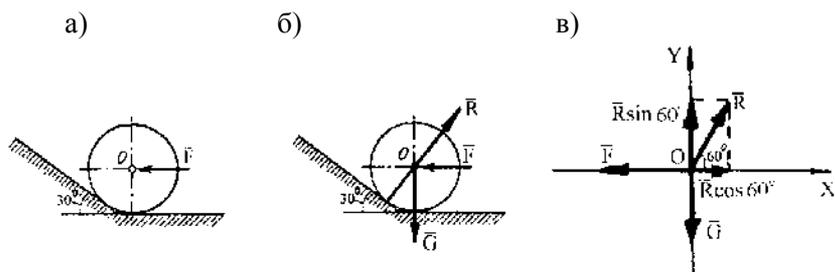


Рис. 1.26. К примеру 10

**Решение.** Освобождаем тело (цилиндр) от связей (наклонная плоскость), заменяя их действие на тело реакциями  $G$  и  $R$  (рис. 1.26, б). Рассмотрим равновесие точки  $O$ . В этой точке получим плоскую систему трёх сходящихся уравновешенных сил:  $F$ ,  $G$  и  $R$ , при этом реакция  $R$  направлена перпендикулярно наклонной плоскости (рис. 1.26, в). Приняв точку  $O$  за начало координат, перенесём в эту точку силы  $F$ ,  $G$  и  $R$  параллельно самим себе и спроецируем силы на оси  $X$  и  $Y$ . Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\sum X = 0; \quad -F + R \cos 60^\circ = 0; \quad (1.16)$$

$$\sum Y = 0; \quad R \sin 60^\circ - G = 0. \quad (1.17)$$

Выразив из найденного уравнения (1.17) неизвестное  $R$ , получим

$$R = \frac{G}{\sin 60^\circ} = \frac{500}{\sin 60^\circ} = 577,35 \text{ Н.}$$

Тогда, подставив значение  $R$  в уравнение (1.16), получим

$$F = R \cdot \cos 60^\circ = 577,37 \cdot \cos 60^\circ = 288,68 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F = 288,68 \text{ Н}$ ;  $R = 577,35 \text{ Н}$ .

**Пример 11** (рис. 1.27, а). Кулачковый механизм состоит из кулачка треугольной формы, движущегося равномерно под действием силы  $F = 80$  Н и получающего вертикальное перемещение толкателя с роликом на конце. В данном положении механизма ролик касается гипотенузы в ее середине. Определить реакцию горизонтальной опорной поверхности и силу давления кулачка на ролик. Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

**Решение.** Освобождаем тело (кулачок) от связей (толкатель с роликом и опорная поверхность), заменяя их действие на тело реакциями (рис. 1.27, б) и рассмотрим равновесие точки  $D$ . Получим в ней плоскую систему трёх сходящихся уравновешенных сил:  $F$ ,  $R_D$ , и  $R_{оп}$ , при этом реакция  $R_{оп}$  направлена перпендикулярно опорной поверхности, а реакция  $R_D$  – перпендикулярно гипотенузе кулачка (рис. 1.27, в). Принимаем точку  $D$  за начало координат и переносим в эту точку силы  $F$ ,  $R_D$  и  $R_{оп}$ , спроецировав их на оси  $X$  и  $Y$ . Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\sum X = 0; -F + R_D \sin 30^0 = 0; \quad (1.18)$$

$$\sum Y = 0; R_{оп} - R_D \cos 30^0 = 0. \quad (1.19)$$

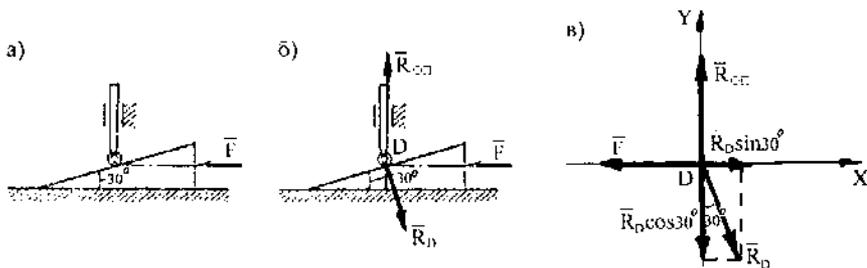


Рис. 1.27. К примеру 11

Из уравнения (1.18)

$$R_D = \frac{F}{\sin 30^0} = \frac{80}{\sin 30^0} = 160 \text{ Н.}$$

Из уравнения (1.19)

$$R_{оп} = R_D \cos 30^0 = 160 \cdot \cos 30^0 = 138,56 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_D = 160 \text{ Н}$ ;  $R_{оп} = 138,56 \text{ Н}$ .

**Пример 12** (рис. 1.28, а). Груз  $F = 17 \text{ кН}$  равномерно поднимается с помощью троса, перекинутого через блок  $B$  и наматываемого на барабан  $D$  лебедки. Определить силы, нагружающие стержни  $AB$  и  $CB$  кронштейна. Радиусом блока, весом частей конструкции и трением на блоке пренебречь.

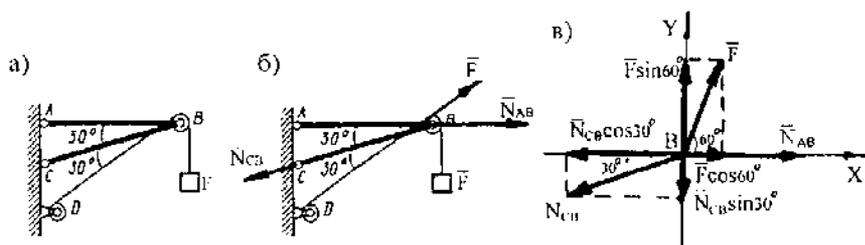


Рис. 1.28. К примеру 12

**Решение.** Сила  $F$  приложена в точке  $B$ . Реакция стержня  $AB$  направлена вдоль её оси, а стержня  $BC$  – по оси к точке  $C$  (рис. 1.28, б).

Рассмотрим равновесие точки  $B$ . Отбросив связи точки  $B$  и заменив их реакциями силы  $F$  и стержней  $AB$  и  $BC$ , получим систему сходящихся сил с началом координат в точке  $B$  (рис. 1.28, в). Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; N_{AB} + F \cdot \cos 60^0 - N_{CB} \cdot \cos 30^0 = 0,$$

откуда

$$N_{AB} = -F \cdot \cos 60^0 + N_{CB} \cdot \cos 30^0. \quad (1.20)$$

$$\sum Y = 0; -N_{CB} \cdot \sin 30^0 + F \cdot \sin 60^0 = 0,$$

откуда

$$N_{CB} = \frac{F \cdot \sin 60^0}{\sin 30^0} = \frac{17 \cdot 10^3 \cdot \sin 60^0}{\sin 30^0} = 29444,86 \text{ Н} \approx 29,445 \text{ кН.}$$

Подставляем полученное значение  $N_{CB}$  в уравнение (1.20):

$$N_{AB} = -17 \cdot 10^3 \cdot \cos 60^0 + 29444,86 \cdot \cos 30^0 = 17 \cdot 10^3 \text{ Н} = 17 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $N_{AB} = 17 \text{ кН}; N_{CB} = 28,445 \text{ кН.}$

**Пример 13** (рис. 1.29, а). Под действием расположенной параллельно наклонной плоскости сжатой пружины, сила упругости которой равна 3 Н, шарик перекрывает проходное отверстие пневматического клапана. Определить силу  $F$  давления сжатого воздуха, при которой проходное отверстие откроется, а также реакцию наклонной опорной поверхности. Весом частей механизма, а также трением пренебречь. *Указания:* в момент начала отжатия шарик отрывается от стенок проходного отверстия.

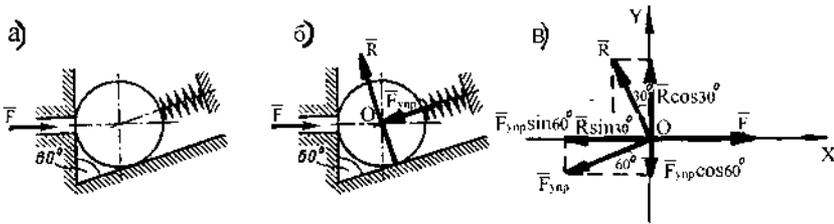


Рис. 1.29. К примеру 13

**Решение.** Освобождаем тело (шарик) от связей (опорная поверхность и пружина), заменяя их действие на тело реакциями  $R$  и  $F_{упр}$  (рис. 1.29, б). Рассмотрим равновесие точки  $O$ , получим в ней плоскую систему трех сходящихся уравновешенных сил:  $F$ ,  $R$  и  $F_{упр}$ , при этом реакция  $R$  направлена перпендикулярно наклонной плоскости. Принимаем точку  $O$  за начало координат и, перенеся в эту точку силы  $F$ ,  $R$  и  $F_{упр}$ , проецируем их на оси  $X$  и  $Y$  (рис. 1.29, в). Уравнение равновесия запишется в виде

$$\sum X = 0; F - R \cdot \sin 30^0 - F_{\text{ymp}} \cdot \sin 60^0 = 0. \quad (1.21)$$

$$\sum Y = 0; R \cdot \cos 30^0 - F_{\text{ymp}} \cos 60^0 = 0. \quad (1.22)$$

Из уравнения (1.22)

$$R = \frac{F_{\text{ymp}} \cos 60^0}{\cos 30^0} = \frac{3 \cdot \cos 60^0}{\cos 30^0} = 1,73 \text{ Н.}$$

Из уравнения (1.21)

$$F = R \cdot \sin 30^0 + F_{\text{ymp}} \cdot \sin 60^0 = 1,73 \cdot \sin 30^0 + 3 \cdot \sin 60^0 = 3,463 \text{ Н.}$$

Ответ:  $F = 3,463 \text{ Н}$ ;  $R = 1,73 \text{ Н}$ .

**Пример 14** (рис. 1.30, а). Груз весом  $G = 6 \text{ кН}$  с помощью наматываемого на барабан троса равномерно перемещается вниз по наклонной плоскости. Приняв силу сопротивления движению (силу трения)  $F_{\text{тр}} = 0,16 G$ , определить силу натяжения троса, а также нормальную реакцию опорной плоскости.

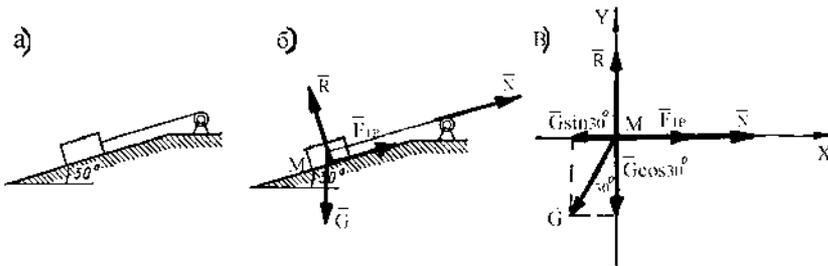


Рис. 1.30. К примеру 14

**Решение.** Освобождаем тело (груз) от связи (наклонная плоскость), заменяя её действие на тело реакцией  $R$  (рис. 1.30, б). Рассмотрим равновесие точки  $M$  и получим в ней плоскую систему четырех сходящихся уравновешенных сил:  $G$ ,  $R$ ,  $F_{\text{тр}}$  и  $N$ . Так же мы освободились и от связи троса  $N$ . Точку  $M$  принимаем за начало координат, перенеся в эту точку силы  $G$ ,  $R$ ,  $F_{\text{тр}}$  и  $N$  параллельно самим себе и спроецировав их на оси  $X$  и  $Y$ , при этом реакция  $N$  на-

правлена по тросу, а реакция  $R$  – перпендикулярно наклонной плоскости (рис. 1.30, в). Ось  $X$  направляем вдоль реакции  $N$ . Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; F_{\text{тр}} + N - G \cdot \sin 30^{\circ} = 0,$$

откуда

$$N = G \cdot \sin 30^{\circ} - F_{\text{тр}} = 6 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^{\circ} - 0,16 \cdot 6 \cdot 10^3 = 2040 \text{ Н};$$

$$\sum Y = 0; R - G \cdot \cos 30^{\circ} = 0,$$

откуда

$$R = G \cdot \cos 30^{\circ} = 6 \cdot 10^3 \cdot \cos 30^{\circ} = 5196,15 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $N = 2040 \text{ Н}; R = 5196,15 \text{ Н}.$

**Пример 15** (рис. 1.31, а). Определить силы, нагружающие стержни  $AB$  и  $CB$  кронштейна, удерживающего груз  $F = 11 \text{ кН}$ . Весом частей конструкции пренебречь.

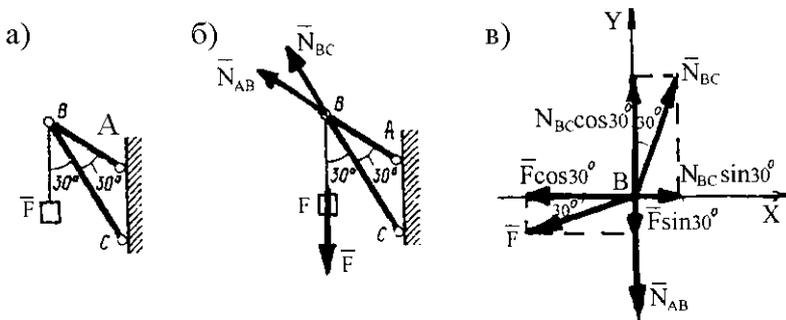


Рис. 1.31. К примеру 15

**Решение.** Сила  $F$  приложена к точке  $B$ . Отбрасываем связи от точки  $B$ , заменяем их реакциями стержней  $AB$  и  $CB$ , направленными вдоль их осей (рис. 1.31, б), и получаем систему сходящихся сил (рис. 1.31, в). Точка  $B$  является началом координат. Ось  $X$  направляем перпендикулярно реакции  $R_{AB}$ . Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; N_{BC} \cdot \sin 30^{\circ} - F \cdot \cos 30^{\circ} = 0. \quad (1.23)$$

$$\sum Y = 0; -N_{AB} + N_{BC} \cdot \cos 30^0 - F \sin 30^0 = 0. \quad (1.24)$$

Из уравнения (1.23)

$$N_{BC} = \frac{F \cdot \cos 30^0}{\sin 30^0} = \frac{11 \cdot 10^3 \cdot \cos 30^0}{\sin 30^0} = 19052,56 \text{ Н} \approx 19,053 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1.24)

$$\begin{aligned} N_{AB} &= N_{BC} \cdot \cos 30^0 - F \cdot \sin 30^0 = \\ &= 19052,56 \cdot \cos 30^0 - 11 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^0 = 11 \cdot 10^3 \text{ Н} = 11 \text{ кН.} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $N_{AB} = 11 \text{ кН}$ ;  $N_{BC} = 19,053 \text{ кН}$ .

**Пример 16** (рис. 1.32, а). Из-за разной длины стропильных тросов  $AB$  и  $CB$  равномерный подъем трубы  $AC$  весом  $3 \text{ кН}$  происходит с перекосом, причем трос  $CB$  оказался расположенным горизонтально. Определить силы натяжения стропильных тросов. *Указание:* центр тяжести трубы лежит на вертикали, проходящей через точку  $B$ .

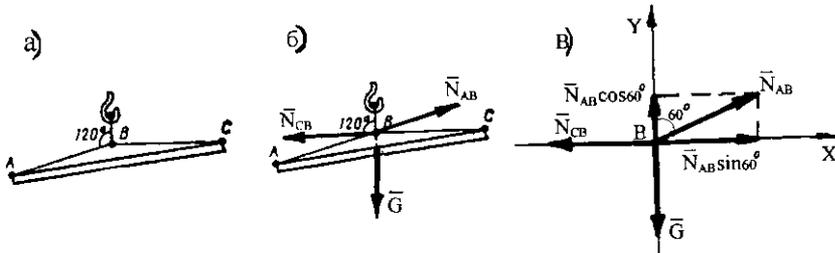


Рис. 1.32. К примеру 16

**Решение.** Освобождаем тело (крюк) от связей (стропильные тросы  $AB$  и  $AC$ ), заменяя их действие на тело реакциями  $N_{AB}$  и  $N_{CB}$  (рис. 1.32, б). Рассмотрим равновесие точки  $B$ , получим в этой точке плоскую систему трёх сходящихся сил:  $G$ ,  $N_{AB}$  и  $N_{CB}$  и спроецируем их на оси  $X$  и  $Y$  (рис. 1.32, в). Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\sum X = 0; -N_{CB} + N_{AB} \cdot \sin 60^0 = 0. \quad (1.25)$$

$$\sum Y = 0; N_{AB} \cdot \cos 60^0 - G = 0. \quad (1.26)$$

Из уравнения (1.26)

$$N_{AB} = \frac{G}{\cos 60^0} = \frac{3 \cdot 10^3}{\cos 60^0} = 6 \cdot 10^3 \text{ Н} = 6 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1.25)

$$N_{BC} = N_{AB} \cdot \sin 60^0 = 6 \cdot 10^3 \cdot \sin 60^0 = 5196,15 \text{ Н} \approx 5,196 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $N_{AB} = 6 \text{ кН}$ ;  $N_{CB} = 5,196 \text{ кН}$ .

**Пример 17** (рис. 1.33, а). С помощью опорного троса  $AB$  и двух блоков удерживаются в равновесии три груза. Определить вес груза  $F_1$  и силу натяжения опорного троса, если  $F_2 = 5 \text{ кН}$  и  $F_3 = 7 \text{ кН}$ . Трением на блоках пренебречь.

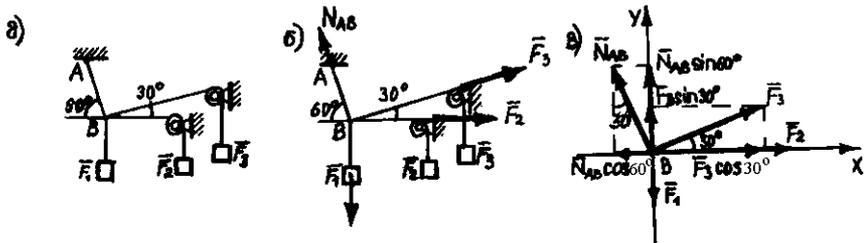


Рис. 1.33. К примеру 17

**Решение.** Рассмотрим равновесие точки схода  $B$ . К ней приложены силы  $F_2$  и  $F_3$ , направленные от точки. Освобождаем точку  $B$  от связи (трос  $AB$ ), при этом реакция  $N_{AB}$  направлена вдоль троса (рис. 1.33, б). В точке  $B$  получим плоскую систему четырех сходящихся уравновешенных сил:  $N_{AB}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  (рис. 1.33, в). Точка  $B$  является началом координат. Спроецируем силы на оси  $X$  и  $Y$ . Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; F_2 + F_3 \cdot \cos 30^\circ - N_{AB} \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

откуда

$$N_{AB} = \frac{F_2 + F_3 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 22124,36 \text{ Н} \approx 22,124 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0; -F_1 + N_{AB} \cdot \sin 60^\circ + F_3 \cdot \sin 30^\circ = 0,$$

откуда

$$F_1 = N_{AB} \cdot \sin 60^\circ + F_3 \cdot \sin 30^\circ = 22124,36 \cdot \sin 60^\circ + 7 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^\circ = 22660,2 \text{ Н} \approx 22,66 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $F_1 = 22,66 \text{ кН}$ ;  $N_{AB} = 22,127 \text{ кН}$ .

**Пример 18** (рис. 1.34, а). Тело весом  $G = 4 \text{ Н}$  под действием горизонтальной силы  $F$  равномерно перемещается вверх по наклонной плоскости. Приняв силу сопротивления движению (силу трения)  $F_{\text{тр}} = 0,13 G$ , определить значение силы  $F$ , а также нормальную реакцию опорной плоскости.

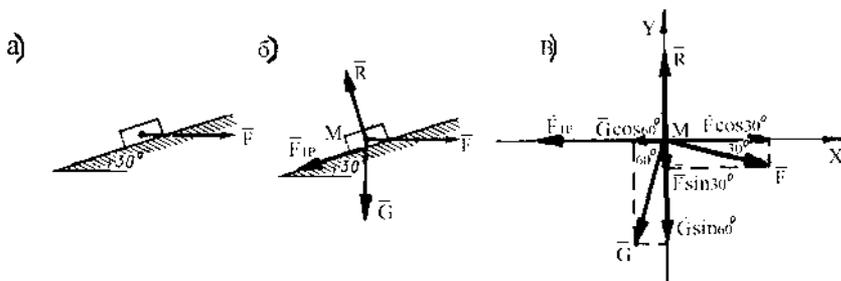


Рис. 1.34. К примеру 18

**Решение.** Освобождаем тело от связи (наклонная плоскость), заменяя её действие на тело реакцией  $R$  (рис. 1.34, б). Рассмотрим равновесие точки  $M$  и получим плоскую систему четырех сходящихся уравновешенных сил:  $R$ ,  $F$ ,  $G$  и  $F_{\text{тр}}$ . При этом реакция  $R$  направлена перпендикулярно наклонной плоскости. Приняв точку  $M$  за начало координат, перенесём в эту точку силы  $R$ ,  $F$ ,  $G$  и  $F_{\text{тр}}$  и

спроецируем их на оси  $X$  и  $Y$  (рис. 1.34, в). Ось  $X$  направим перпендикулярно реакции  $R$ . Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; -F_{\text{тр}} - G \cdot \cos 60^\circ + F \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (1.27)$$

$$\sum Y = 0; R - G \cdot \sin 60^\circ - F \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (1.28)$$

Из уравнения (1.27)

$$F = \frac{F_{\text{тр}} + G \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{0,13 \cdot 4 + 4 \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 2,91 \text{ Н.}$$

Из уравнения (1.28)

$$R = G \cdot \sin 60^\circ + F \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \sin 60^\circ + 2,91 \cdot \sin 30^\circ = 4,919 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F = 2,91 \text{ Н}$ ;  $R = 4,919 \text{ Н}$ .

**Пример 19** (рис. 1.35, а). Четыре стержня, приваренные к косынке, образуют узел фермы строительной конструкции. Стержень 2 расположен вертикально. Силы в стержнях 1 и 2 известны и равны соответственно  $F_1 = 12 \text{ кН}$  и  $F_2 = 7 \text{ кН}$ . Определить силы  $N_3$  и  $N_4$  в стержнях 3 и 4. Весом частей конструкции пренебречь.

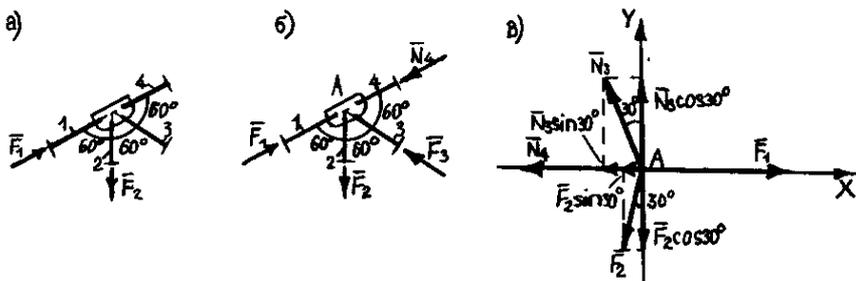


Рис. 1.35. К примеру 19

**Решение.** К косынке приложены четыре активные силы:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $N_3$  и  $N_4$  (рис. 1.35, б). Рассмотрим равновесие точки  $A$ . Получаем плоскую систему сходящихся уравновешенных сил. Приняв точку  $A$  за начало координат, перенесём в неё силы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $N_3$  и  $N_4$  и спроецируем их на оси  $X$  и  $Y$  (рис. 1.35, в). Ось  $X$  направим вдоль стержней 1 и 4, которые лежат на одной прямой. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad -N_4 - N_3 \cdot \sin 30^\circ + F_1 - F_2 \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (1.29)$$

$$\sum Y = 0; \quad N_3 \cdot \cos 30^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (1.30)$$

Из уравнения (1.30)

$$N_3 = \frac{F_2 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = F_2 = 7 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1.29)

$$\begin{aligned} N_4 &= -N_3 \cdot \sin 30^\circ + F_1 - F_2 \cdot \sin 30^\circ = \\ &= -7 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^\circ + 12 \cdot 10^3 - 7 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^\circ = \\ &= 12 \cdot 10^3 - 2 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot 10^3 \text{ Н} = 5 \text{ кН.} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $N_3 = 7$  кН;  $N_4 = 5$  кН.

**Пример 20.** Определить по способу вырезания узлов усилия в стержнях фермы, изображенной на рис. 1.36, а, если к узлу  $E$  фермы приложена вертикальная сила  $F = 60$  кН.

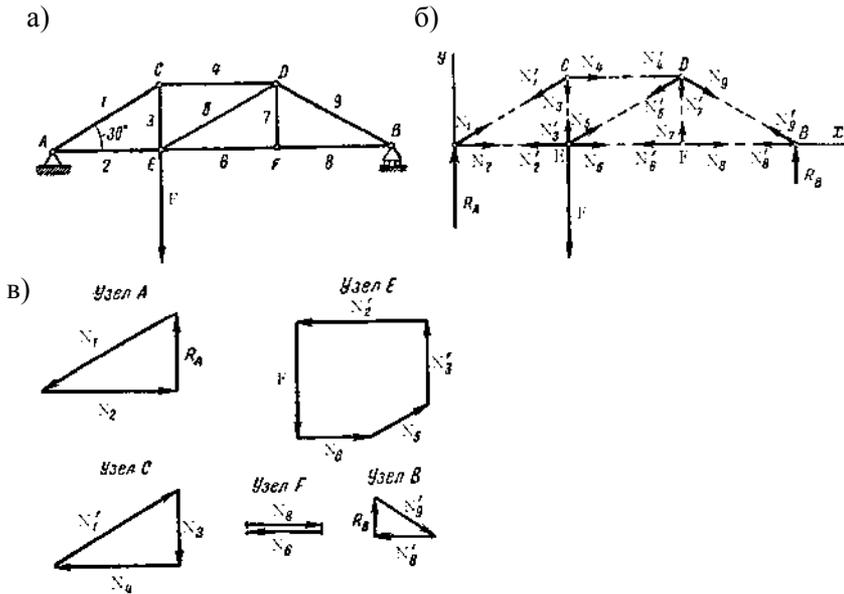


Рис. 1.36. К примеру 20

**Решение.** Так как сила  $F = 60$  кН, приложенная к узлу  $E$  фермы, вертикальна и реакция шарнирно-подвижной опоры  $B$ , перпендикулярная к опорной плоскости, тоже вертикальна, то линия действия реакции шарнирно-неподвижной опоры  $A$  должна быть параллельна им, т. е. тоже должна быть вертикальна. Согласно этому примечанию для трех параллельных взаимно уравновешивающихся сил  $R_A$ ,  $R_B$  и  $F$  имеем:

$$R_A + R_B = 60 \text{ кН}; R_A / R_B = BE / AE = 2,$$

откуда

$$R_A = 40 \text{ кН и } R_B = 20 \text{ кН.}$$

Составим по два уравнения равновесия сил, приложенных к каждому из узлов фермы (рис. 1.36, б), и для проверки правильности произведенных вычислений построим многоугольники сил, которые должны быть замкнутыми. При построении многоугольников все силы отложим в некотором масштабе по их истинным направ-

лениям, соответствующим растяжению или сжатию, руководствуясь результатами вычислений (рис. 1.36, в).

Расчет начнем с узла  $A$ , к которому приложены лишь две неизвестные силы  $N_1$  и  $N_2$ .

У з е л А

$$\sum X_i = 0; \quad N_2 + N_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A + N_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$N_1 = -\frac{R_A}{\cos 60^\circ} = -80 \text{ кН}; \quad N_2 = -N_1 \cos 30^\circ = 69,2 \text{ кН}.$$

У з е л С

$$\sum X_i = 0; \quad -N'_1 \cos 30^\circ + N_4 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -N'_1 \cos 60^\circ - N_3 = 0;$$

$$N_3 = -N'_1 \cos 60^\circ = -40 \text{ кН}; \quad N_4 = N'_1 \cos 30^\circ = -69,2 \text{ кН}.$$

У з е л Е

$$\sum X_i = 0; \quad -N'_2 + N_6 + N_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N'_3 - F + N_5 \cos 60^\circ = 0;$$

$$N_5 = \frac{F - N'_3}{\cos 60^\circ} = 40 \text{ кН}; \quad N_6 = N'_2 - N_5 \cos 30^\circ = 34,6 \text{ кН}.$$

У з е л F

$$\sum X_i = 0; \quad -N'_6 + N_8 = 0; \quad N_8 = N'_6 = 34,6 \text{ кН}.$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_7 = 0.$$

У з е л В

$$\sum Y_i = 0; R_B + N'_9 \cos 60^\circ = 0; N'_9 = -\frac{R_B}{\cos 60^\circ} = -40 \text{ кН.}$$

Результаты расчётов сводим в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

Результаты расчётов

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N$ , кН	-80	69,2	-40	-69,2	40	34,6	0	34,6	-40

Приведенная табл. 1.1 усилий показывает, что верхний пояс фермы сжат, нижний – растянут.

**Пример 21.** Пример имеет своим прототипом схему по расчёту усилий в раскосах и поясах мачтовых опор ЛЭП.

Для фермы (рис. 1.37, а) определить усилия в стержнях, если в узле  $E$  приложена сила  $F = 1800 \text{ Н}$ , в узле  $C$  – сила  $2F$ , а угол  $\alpha = 37^\circ$  ( $\sin \alpha = 0,6$  и  $\cos \alpha = 0,8$ ).

Размеры стержня указаны на чертеже.

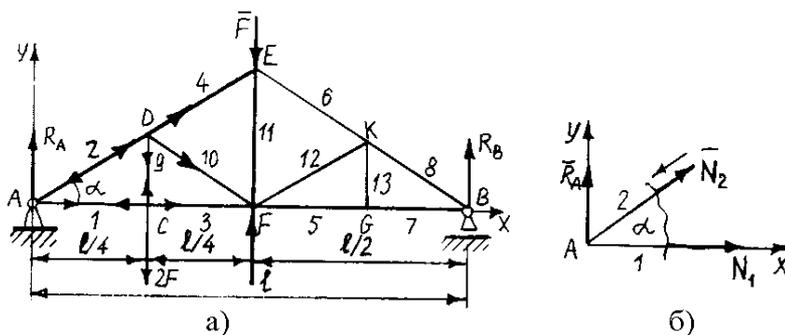


Рис.1.37. К примеру 21

**Решение.** От действия на ферму сил  $F$  и  $2F$  реакции опор соответственно будут  $R_A = 2F$  и  $R_B = F$ . Обратимся к определению усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов. Определение

усилий начинают с узла, в котором сходятся только два стержня (узлы  $A$  и  $B$ ). В дальнейшем выбирают такие узлы фермы, в которых также будут неизвестными два усилия, и так до тех пор, пока не будут определены усилия во всех стержнях фермы.

У з е л  $A$ . Вырезав узел (рис. 1.37, б), приложим к нему неизвестные усилия  $N_1$  (в стержне 1),  $N_2$  (в стержне 2) и реакцию опоры в точке  $A$  -  $R_A$ . В итоге на узел подействует плоская система трех сходящихся сил. Для определения неизвестных усилий  $N_1$  и  $N_2$  составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Неизвестные усилия будем всегда принимать растягивающими – усилия направлены от узла. Если в результате вычисления усилие окажется отрицательным, то принятое направление усилия следует заменить на обратное (сжатие).

Выберем систему координат через точку  $A$  так, чтобы ось  $X$  совпадала с линией действия усилия  $N_1$ . В этом случае уравнения равновесия принимают вид

$$\sum Y = 0; \quad N_2 \cdot \sin \alpha + R_A = 0,$$

откуда

$$N_2 = -\frac{R_A}{\sin \alpha} = -\frac{2F}{\sin 37^\circ} = -\frac{2 \cdot 1800}{0,6} = -6000 \text{ Н (сжатие)}.$$

Знак «минус» для усилия  $N_2$  указывает на то, что стержень не растянут, а сжат (следует изменить на рис. 1.37, б направление усилия  $N_2$ ). После этого изменения уравнение  $\sum X = 0$  принимает вид  $N_1 - N_2 \cdot \cos \alpha = 0$ , откуда  $N_1 = N_2 \cdot \cos \alpha$ , или  $N_1 = 6000 \cdot 0,8 = 4800 \text{ Н}$  (растяжение).

У з е л  $C$ . Вырезав узел (рис. 1.38, а), приложим к нему неизвестные усилия  $N_3$  (в стержне 3) и  $N_9$  (в стержне 9). В итоге в узле  $C$  действует плоская система четырех сходящихся сил, из которых неизвестными усилиями являются  $N_3$  и  $N_9$ . Выбрав через точку  $C$  систему координат  $X$  и  $Y$ , напишем уравнения равновесия:  $\sum X = 0$ ;  $N_3 - N_1 = 0$ , откуда  $N_3 = N_1 = 4800 \text{ Н}$  (растяжение);  $\sum Y = 0$ ;  $N_9 - 2F = 0$ , откуда  $N_9 = 2F = 3600 \text{ Н}$  (растяжение).

У з е л *D*. Вырезав узел (рис. 1.38, б), приложим к нему неизвестные усилия  $N_4$  (в стержне 4) и  $N_{10}$  (в стержне 10). В итоге в узле *D* действует плоская система четырех сходящихся сил, из которых неизвестными являются усилия  $N_4$  и  $N_{10}$ .

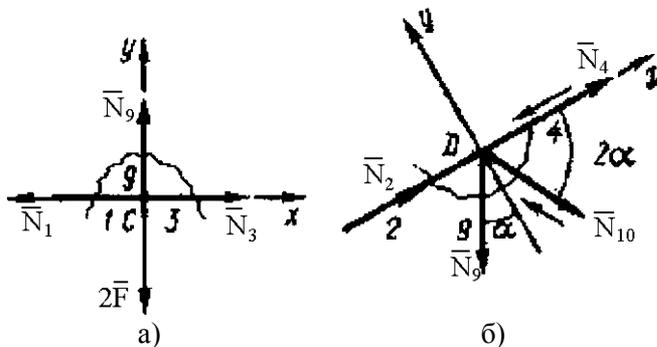


Рис. 1.38. К примеру 21

Выберем через точку *D* систему координат *X* и *Y* так, чтобы ось *X* проходила по стержню 4, уравнения равновесия принимают вид

$$\sum Y = 0; \quad -N_9 \cdot \cos \alpha - N_{10} \cdot \sin 2\alpha = 0,$$

или

$$-2 \cdot 1800 \cdot 0,8 = N_{10} \cdot 0,96,$$

или

$$N_{10} = -\frac{3600 \cdot 0,8}{0,96} = -3000 \text{ Н (сжатие)}.$$

Направление усилия  $N_{10}$  следует изменить на обратное (рис. 1.38, б).

$$\sum X = 0; \quad N_4 + N_2 - N_{10} \cdot \cos 2\alpha - N_9 \cdot \sin \alpha = 0,$$

или

$$N_4 = -6000 + 3000 \cdot 0,28 + 2 \cdot 1800 \cdot 0,6,$$

$$N_4 = -3100 \text{ Н (сжатие)}.$$

Направление усилия  $N_4$  также следует изменить на обратное (рис. 1.38, б).

У з л Е. Вырезав узел (рис. 1.39, а), приложим к нему неизвестные усилия  $N_6$  (в стержне 6) и  $N_{11}$  (в стержне 11). В итоге в узле  $E$  действует плоская система четырех сходящихся сил:  $F$ ,  $N_4$ ,  $N_6$ ,  $N_{11}$ . Через точку  $E$  проводим систему координат  $X$  и  $Y$  так, чтобы ось  $Y$  проходила по стержню 11. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad N_6 \cdot \cos \alpha - N_4 \cdot \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$N_6 = \frac{N_4 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = N_4 = 3100 \text{ Н (растяжение)}$$

$$\sum Y = 0; \quad -F - N_{11} - N_6 \cdot \sin \alpha - N_4 \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} N_{11} &= -F - N_6 \cdot \sin \alpha - N_4 \cdot \sin \alpha = \\ &= -1800 - 3100 \cdot 0,6 - 3100 \cdot 0,6 = -5520 \text{ Н (сжатие)}. \end{aligned}$$

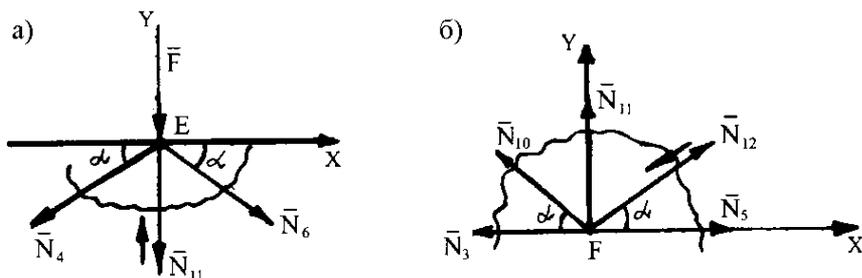


Рис. 1.39. К примеру 21

Направление усилия  $N_{11}$  следует направить в обратную сторону (см. рис. 1.39, а).

У з л Ф. Вырезав узел (рис. 1.39, б), приложим к нему неизвестные усилия  $N_5$  (в стержне 5) и  $N_{12}$  (в стержне 12). В итоге в узле  $F$  получаем плоскую систему пяти сходящихся сил, из которых неизвестными усилиями являются  $N_5$  и  $N_{12}$ . Выбрав через точку  $F$

систему координат  $X$  и  $Y$ , напишем уравнения равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad N_{10} \cdot \sin \alpha + N_{11} + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$N_{12} = \frac{-N_{10} \sin \alpha - N_{11}}{\sin \alpha} = \frac{-3000 \cdot 0,6 - 5520}{0,6} = -12200 \text{ Н (сжатие)}.$$

Направление усилия  $N_{12}$  следует изменить на обратное (см. рис. 1.39, б).

$$\sum X = 0; \quad -N_3 - N_{10} \cdot \cos \alpha + N_{12} \cdot \cos \alpha + N_5 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} N_5 &= N_3 + N_{10} \cdot \cos \alpha - N_{12} \cdot \cos \alpha = \\ &= 4800 + 3000 \cdot 0,8 + 12200 \cdot 0,8 = 16960 \text{ Н (растяжение)}. \end{aligned}$$

У з е л К. Вырезав узел (рис. 1.40, а), приложим к нему неизвестные усилия  $N_8$  (в стержне 8) и  $N_{13}$  (в стержне 13). В итоге в узле F получаем плоскую систему четырех сходящихся сил:  $N_6$ ,  $N_{12}$ ,  $N_{13}$  и  $N_8$ . Через точку  $K$  проводим систему координат  $X$  и  $Y$ , так, чтобы ось  $Y$  проходила по стержню  $B$ . Составляем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad -N_6 \cdot \cos \alpha - N_{12} \cdot \cos \alpha + N_8 \cdot \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} N_8 &= \frac{N_6 \cdot \cos \alpha + N_{12} \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = N_6 + N_{12} = 3100 + 12200 = \\ &= 15300 \text{ Н (растяжение)}. \end{aligned}$$

$$\sum Y = 0; \quad N_6 \cdot \sin \alpha - N_{12} \cdot \sin \alpha - N_{13} - N_8 \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; \quad N_{13} &= \sin \alpha (N_6 - N_{12} - N_8) = \\ &= 0,6(3100 - 12200 - 15300) = -14640 \text{ Н (сжатие)}. \end{aligned}$$

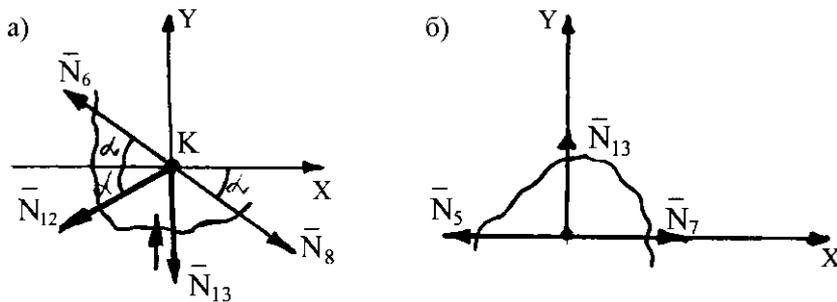


Рис. 1.40. К примеру 21

Направление усилия  $N_{13}$  следует изменить на обратное (рис. 1.40, а).

У з е л Г. Вырезав узел (рис. 1.40, б), приложим к нему неизвестное усилие  $N_7$  (в стержне 7). В итоге в узле  $G$  получаем систему трех сходящихся сил с неизвестным усилием  $N_7$ . Выбрав через точку  $G$  систему координат  $X$  и  $Y$ , запишем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; N_7 - N_5 = 0,$$

откуда

$$N_7 = N_5 = 16960 \text{ Н (растяжение)}.$$

Т а б л и ц а 1.2

Результаты расчётов

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7
$N$ , кН	4,8	6	4,8	3,1	16,96	3,1	16,96
№ стержня	8	9	10	11	12	13	
$N$ , кН	15,3	3,6	3	5,52	12,2	14,64	

**Пример 22.** Применить леммы о нулевых стержнях к определению незагруженных стержней ферм, изображенных вместе с действующими на них внешними силами и реакциями опор (рис. 1.41 - 1.45).

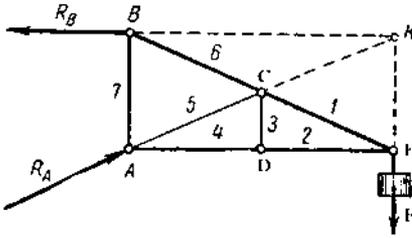


Рис. 1.41. К примеру 22

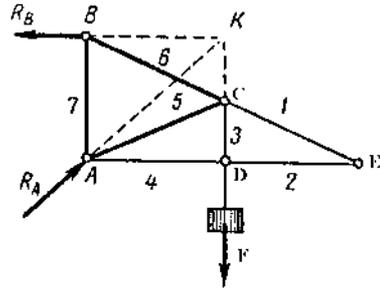


Рис. 1.42. К примеру 22

Применяя лемму 2 к узлу  $D$  фермы, изображенной на рис. 1.41, устанавливаем, что  $N_3 = 0$ . Мысленно отбрасывая стержень 3, применяем эту же лемму к узлу  $C$  и находим, что  $N_5 = 0$ . Рассматривая ферму, изображенную на рис. 1.42, применяем лемму 1 к узлу  $E$  и заключаем, что  $N_1 = 0$  и  $N_2 = 0$ . Затем применяем лемму 3 к узлу  $D$  и устанавливаем, что  $N_4 = 0$ .

На рис. 1.43 рассматриваем узлы  $C, D, E$  и находим:  $N_{11} = 0$ ,  $N_9 = 0$ ,  $N_3 = 0$ . Рассматривая узлы  $C$  и  $D$  (рис. 1.44), можно заключить, что  $N_{11} = 0$  и  $N_9 = 0$ .

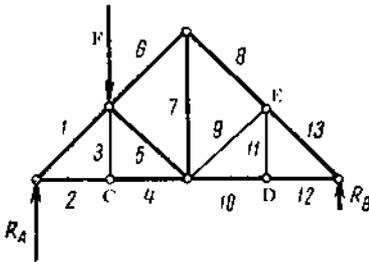


Рис. 1.43. К примеру 22

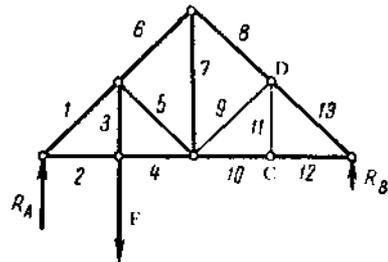


Рис. 1.44. К примеру 22

Рассматривая последовательно узлы  $C - M$  фермы, изображенной на рис. 1.45, находим:

$$N_{15} = 0; N_{13} = 0; N_{11} = 0; N_9 = 0; N_7 = 0; N_5 = 0; N_3 = 0.$$

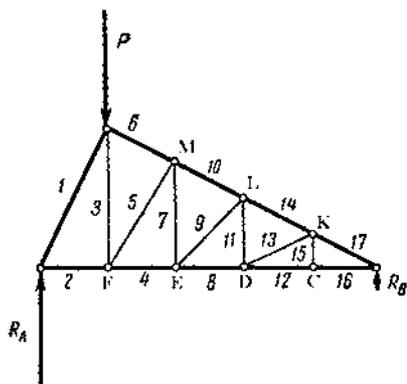


Рис. 1.45. К примеру 22

### Задачи к заданиям

**Задача 1.** Определить аналитически усилия  $N_1$  и  $N_2$  в стержнях 1 и 2 узла фермы (рис. 1.46). Исходные данные, необходимые для решения своего варианта задачи, выбрать из табл. 1.3 (силы  $F$  заданы в килоньютонах, углы  $\alpha$  - в градусах).

Т а б л и ц а 1.3

### Исходные данные к задаче 1

№ варианта	$F$	$F'$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha$
1	10,4	9,4	6,8	4,2	5,2	10	60	45	60	40
2	10,8	9,6	5,0	4,4	5,4	15	45	35	50	45
3	12,2	9,8	4,2	4,6	5,6	35	50	55	55	40
4	12,6	10,0	7,8	4,8	5,8	15	30	60	45	55
5	13,0	10,4	8,0	5,0	6,0	10	45	50	70	50
6	12,8	8,2	5,4	5,2	6,2	15	60	40	60	40
7	12,4	8,6	6,0	5,4	6,4	10	35	45	65	45
8	12,0	9,2	7,0	5,6	6,8	45	50	40	55	40
9	11,6	10,2	7,2	5,8	6,6	10	30	60	40	60
10	11,4	10,6	7,6	6,0	7,0	15	35	50	75	50

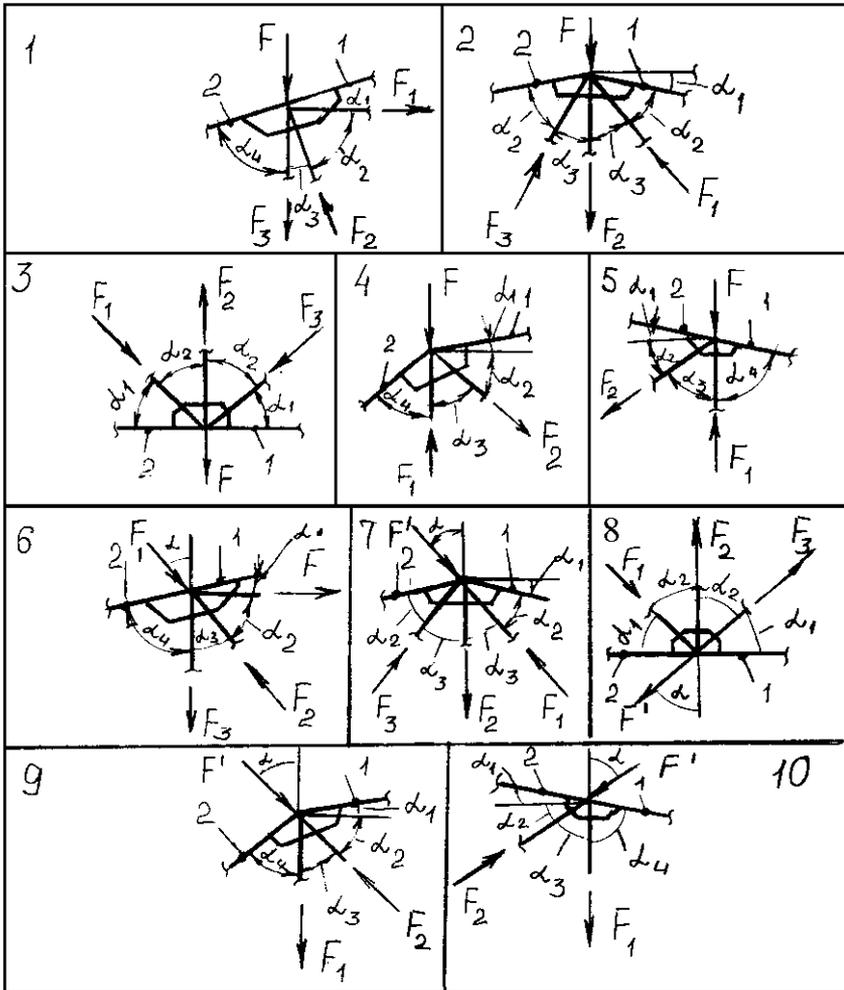


Рис. 1.46. К задаче 1

**Задача 2.** Стержни  $AB$  и  $CB$  соединены шарниром  $B$ , на ось которого действуют две нагрузки  $F_1$  и  $F_2$ , как показано на рис. 1.47. Крепления стержней в точках  $A$  и  $C$  шарнирные. Определить усилия в стержнях. Аналитическое решение проверить графическим построением. Схемы нагружения стержней в задачах и числовые значения сил  $F_1$  и  $F_2$  для своего варианта взять из табл. 1.4.

Т а б л и ц а 1.4

Исходные данные к задаче 2

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1$ , кН	0,4	0,3	0,6	0,2	0,5	0,8	0,4	1,2	0,8	0,9
$F_2$ , кН	0,5	0,8	0,4	0,5	0,8	0,4	0,2	0,8	1,0	0,6

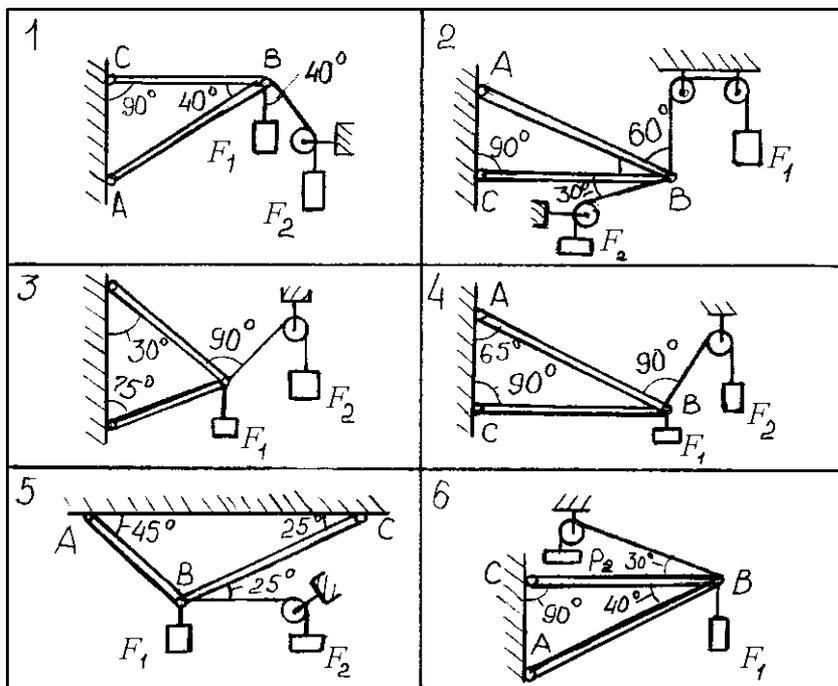


Рис. 1.47. К задаче 2

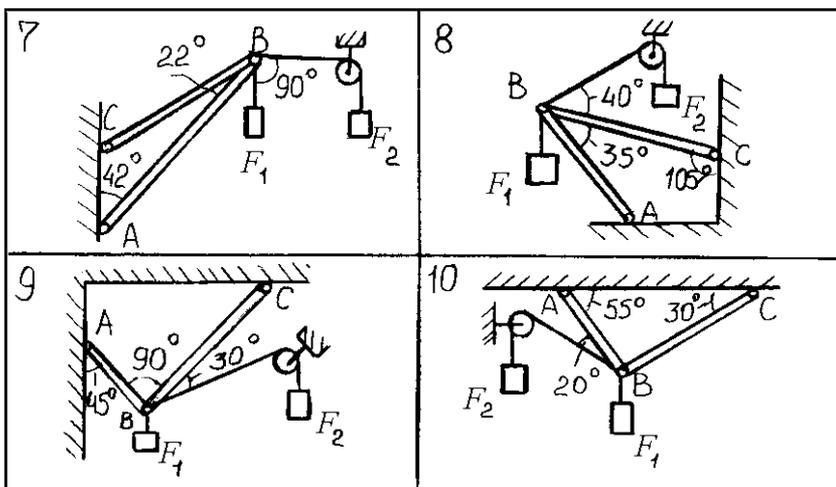


Рис. 1.47(окончание). К задаче 2

**Задача 3.** Для заданных плоских ферм, к узлам которых приложены силы  $F$ , определить реакции в опорах и усилия во всех стержнях. Для решения использовать метод вырезания узлов. Схемы ферм и данные к задаче – см. рис. 1.48 и табл. 1.5.

Т а б л и ц а 1.5

Исходные данные к задаче 3

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кН	8	7	10	5	12	8	5	4	10	6

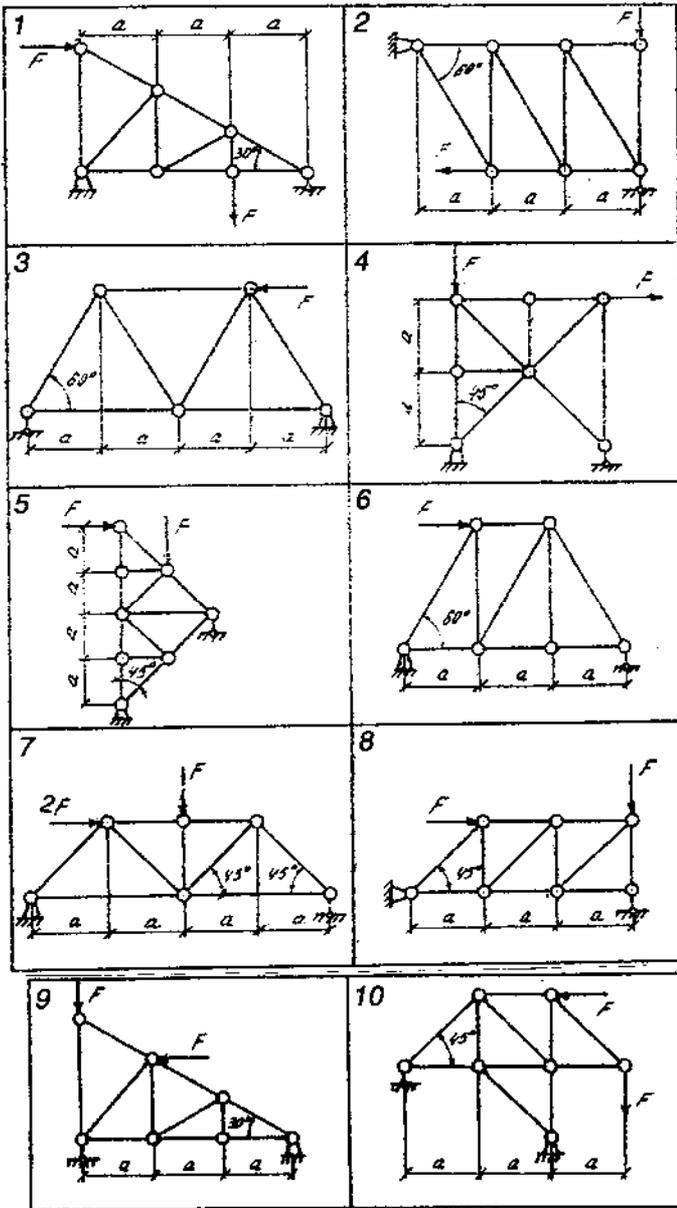


Рис. 1.48

Порядок решения задачи:

1. Вычертить в масштабе расчётные схемы и приложить к ним действующие активные и реактивные силы. Пронумеровать стержни. Реактивные силовые факторы в опорах представлять компонентами по положительным направлениям осей. Усилия в стержнях направлять от узла, а в ответе записывать с соответствующим знаком.
2. Проверить жёсткость и статическую определимость фермы.
3. Составить необходимое количество уравнений для определения компонент реактивных сил и усилий в стержнях.
4. Определить реакции в опорах, усилия в стержнях и сделать проверку.
5. Результаты расчётов свести в табл. 1.6.

Т а б л и ц а 1.6

Результаты расчётов фермы

$R_{AX}$ , кН	$R_{AY}$ , кН	$R_{BX}$ , кН	$R_{BY}$ , кН	$N_1$ , кН	$N_2$ , кН	$N_{n-1}$ , кН	$N_n$ , кН

## Глава 2. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

Действие пары сил на тело (рис. 2.1) нужно знать хорошо, так как с эффектом действия на тело пары сил приходится встречаться довольно часто. Пары сил возникают не только при непосредственном приложении к телу двух равных по величине и противоположно направленных параллельных сил, но и как результат приведения произвольно расположенных сил к силе и паре сил. Такое преобразование сил приходится производить при решении многих задач.

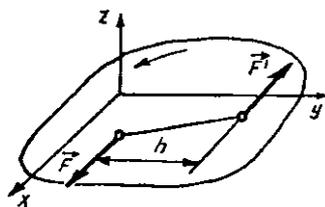


Рис. 2.1. Пара сил

Пара сил производит на тело вращательное действие. **Вращательный эффект пары** определяется произведением модуля одной из сил на её плечо:

$$M = \pm F \cdot h. \quad (2.1)$$

Знак «плюс» принимается (рис. 2.2), если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки.

Из определения момента пары сил следует, что можно:

- как угодно переносить и поворачивать пару сил в плоскости ее действия;

- перемещать ее в любую параллельную плоскость;

- не нарушая состояния тела, изменять одновременно силы и плечо пары так, чтобы момент пары оставался постоянным:

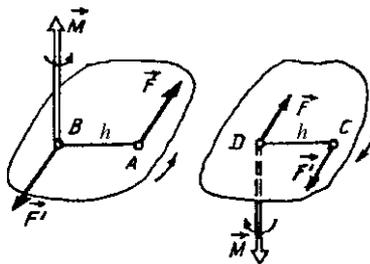


Рис. 2.2. Направление момента пары сил

$$\left| \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}') \right| = F_1 \cdot h_1 = F_2 \cdot h_2 ;$$

- несколько пар сил с моментами  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), произвольно расположенных в пространстве, заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов всех пар сил:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i . \quad (2.2)$$

Отметим, что пара сил может быть уравновешена только парой сил.

Для уравновешенности системы  $n$  пар, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов этих пар была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0 . \quad (2.3)$$



## Вопросы для самопроверки

1. Что такое пара сил?
2. Можно ли заменить действие пары сил на тело одной силой?
3. Имеет ли пара сил равнодействующую?
4. Каким образом можно уравновесить действие на тело пары сил?
5. Что такое момент пары сил?
6. Изменяются ли моменты пар сил, если положения сил, показанные на рис. 2.3, а, изменить на положения, показанные на рис. 2.3, б?
7. Какие пары называются эквивалентными?
8. Эквивалентны ли пары сил, изображенные на рис. 2.4?
9. Каким образом производится сложение пар сил?
10. Сформулируйте условие равновесия пар сил.

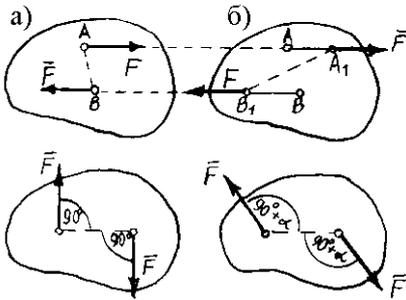


Рис. 2.3. Моменты пар сил

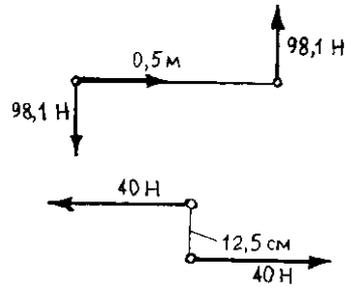


Рис.2.4. Эквивалентность пар сил

## Примеры

**Пример 23.** Определить крутящие моменты в сечениях вала, расчетная схема которого показана на рис. 2.5,а. Вращающие моменты равны:

$$|T_1| = |T_2| = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

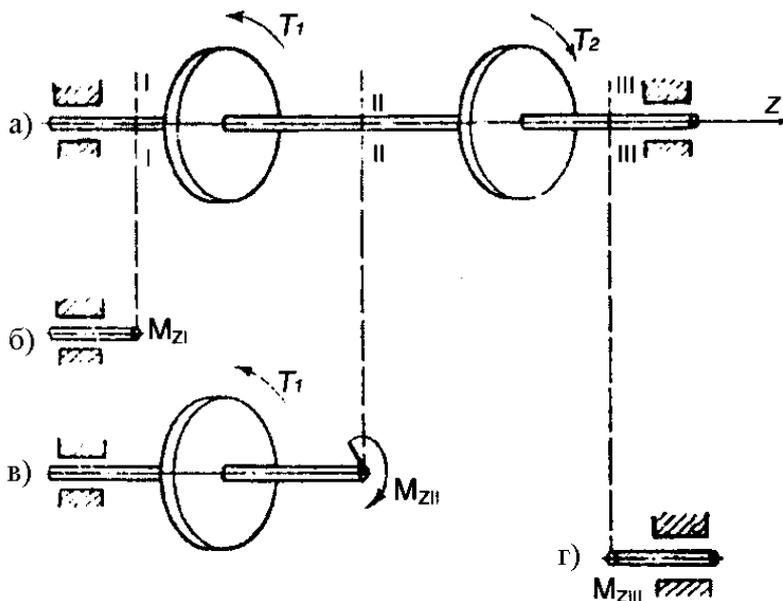


Рис. 2.5. К примеру 23

**Решение.** Для выявления моментов внутренних сил в сечениях вала мысленно отбросим одну часть вала (например, правую часть от сечения I-I) и рассмотрим равновесие оставшейся части (рис. 2.5, б). Эта часть вала свободна от действия вращающих моментов, и поэтому в рассматриваемом сечении I-I не будет возникать крутящий момент  $M_{zI} = 0$ .

Аналогично поступим для определения крутящего момента в сечении II-II. Рассматриваемая часть вала находится в равновесии (сумма моментов равна нулю), следовательно,

$$\sum M_i = 0; \quad -T_1 + M_{zII} = 0.$$

Отсюда

$$M_{zII} = T_1 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

В сечении III-III крутящий момент равен нулю ( $M_{zIII} = 0$ ), так как в правой части вала от этого сечения не приложены моменты внеш-

них сил (рис. 2.5, г).

При решении задач методом сечения удобнее отбрасывать ту часть тела, в которой приложено больше внешних сил.

**Ответ:**  $M_{ZI} = 0$ ;  $M_{ZII} = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $M_{ZIII} = 0$ .

**Пример 24.** Определить опорные реакции балки (рис.2.6,а), концы которой шарнирно закреплены. Балка нагружена парой сил с моментом  $M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

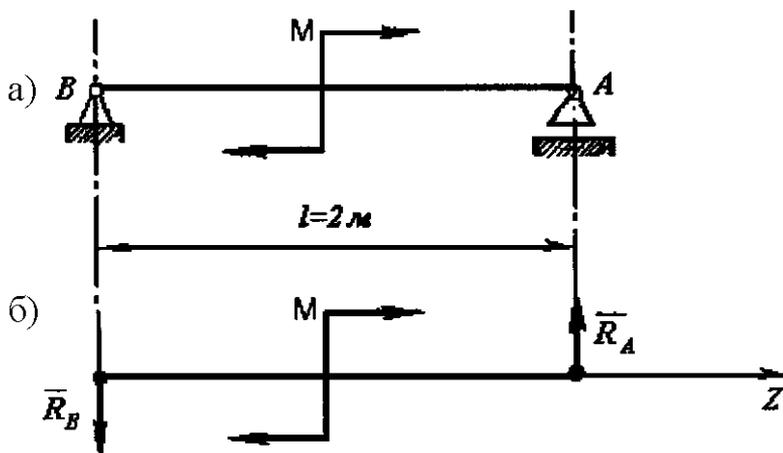


Рис.2.6. К примеру 24

**Решение.** Прежде всего необходимо наметить направление реакций опор (рис. 2.6, б). Так как к балке приложена пара сил, то и уравновесить ее можно только парой сил. Следовательно, реакции опор равны между собой по величине, параллельны, но противоположно направлены. Заменим действие опор их реакциями. Правая опора A - плоскость, следовательно, направление опорной реакции  $R_A$  перпендикулярно этой плоскости, а опорная реакция  $R_B$  ей параллельна и противоположно направлена. Балка находится в равновесии, поэтому сумма моментов пар сил, приложенных к ней, равна нулю:

$$\sum M_i = 0; \quad M - R_A \cdot l = 0,$$

откуда

$$R_A = M / l = 100 / 2 = 50 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = R_B = 50 \text{ кН.}$

**Пример 25.** Брус  $AB$  с левой шарнирно-подвижной опорой и правой шарнирно-неподвижной нагружен тремя парами (рис. 2.7), моменты которых  $M_1 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $M_2 = 36 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $M_3 = -50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Определить реакции опор.

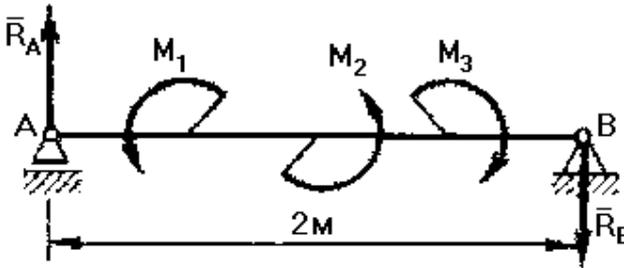


Рис. 2.7. К примеру 25

### Решение

1. На брус действуют пары сил, следовательно, и уравновесить их можно только парой, т. е. в точках  $A$  и  $B$  со стороны опор на брус должны действовать реакции опор, образующие пару сил. В точке  $A$  у бруса шарнирно-подвижная опора, значит, реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности, т. е. в данном случае перпендикулярно брусу. Обозначим эту реакцию  $R_A$  и направим ее вверх. Тогда в точке  $B$  со стороны шарнирно-неподвижной опоры действует также вертикальная сила  $R_B$ , но вниз.

2. Исходя из выбранного направления сил пары  $(R_A, R_B)$  ее момент  $M_0 = -R_A \cdot AB$  (или  $M_0 = -R_B \cdot BA$ ).

3. Составим уравнение равновесия пар сил:

$$\sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + M_0 = 0.$$

Подставив в это уравнение значения моментов, получим

$$24 + 36 - 50 - R_A \cdot 2 = 0.$$

Отсюда  $R_A = 5$  кН. Так как силы  $R_A$  и  $R_B$  образуют пару, то  $R_B = R_A = 5$  кН.

**Ответ:**  $R_A = R_B = 5$  кН.

**Пример 26.** Груз весом  $G = 500$  Н подвешен к канату, намотанному на барабан радиусом  $r = 10$  см. Барабан удерживается парой сил, приложенных к концам рукоятки длиной  $l = 1,25$  м, скрепленной с барабаном и лежащей в одной плоскости с веревкой. Определить реакцию оси  $O$  барабана и силы пары  $F, F'$ , если они перпендикулярны к рукоятке (рис. 2.8, а).

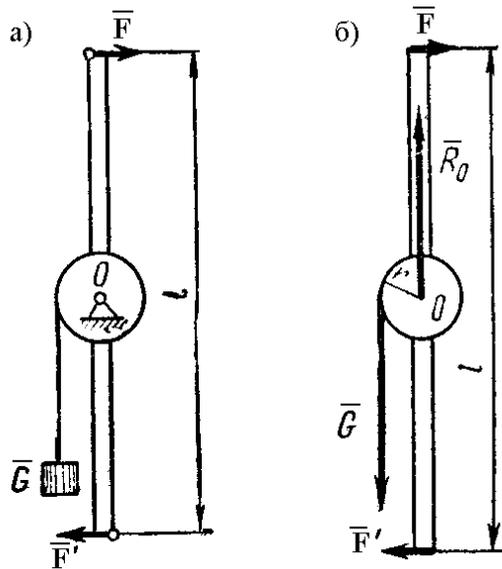


Рис. 2.8. К примеру 26

**Решение.** Рассмотрим равновесие сил, приложенных к барабану: вертикальной силы веса  $G$ , пары, составленной силами  $F$  и  $F'$ , и реакции  $R_o$  цилиндрического шарнира  $O$ , величина и линия действия которой неизвестны. Так как пару сил может уравновесить только пара сил, лежащая в той же плоскости, то силы  $G$  и  $R_o$  должны составлять пару сил, уравновешиваемую парой  $F, F'$ . Линия действия

силы  $G$  известна, реакцию  $R_o$  шарнира  $O$  направим параллельно силе  $G$  в противоположную ей сторону (рис. 2.8, б). Модули сил должны быть равны, т. е.

$$R_o = G = 500 \text{ Н.}$$

Алгебраическая сумма моментов двух пар сил, приложенных к барабану, должна быть равна нулю:

$$\sum M_i = 0; \quad -F \cdot l + R_o \cdot r = 0,$$

где  $l$  – плечо пары  $F, F'$ ;

$r$  – плечо пары  $G, R_o$ .

Находим модули сил  $F$ :

$$F = \frac{R_o \cdot r}{l} = \frac{500 \cdot 0,1}{1,25} = 40 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_o = 500 \text{ Н}; F = F' = 40 \text{ Н.}$

**Пример 27.** Балка длиной  $AB = 10 \text{ м}$  имеет шарнирно-неподвижную опору  $A$  и шарнирно-подвижную опору  $B$  с наклонной опорной плоскостью, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . На балку действуют три пары сил, лежащие в одной плоскости, абсолютные величины моментов которых:

$$|M_1| = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad |M_2| = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad |M_3| = 7 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Определить реакции опор (рис. 2.9, а).

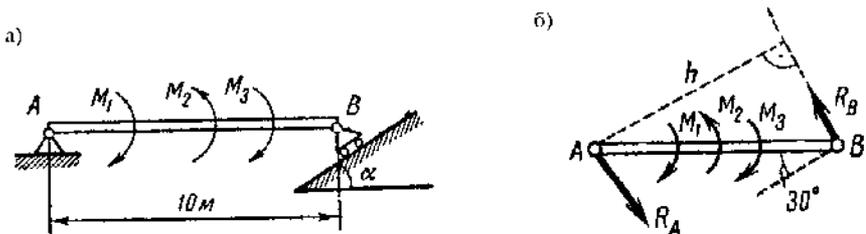


Рис. 2.9. К примеру 27

**Решение.** Рассмотрим равновесие сил, приложенных к балке  $AB$ : трех пар сил, реакции опоры  $R_B$ , направленной перпендикулярно к опорной плоскости, и реакции опоры  $R_A$ , линия действия которой неизвестна (рис. 2.9, б). Так как нагрузка состоит только из пар сил, лежащих в одной плоскости, то реакции опор  $R_A$  и  $R_B$  должны составить пару сил, лежащую в той же плоскости и уравновешивающую задаваемые пары сил.

Направим реакцию  $R_A$  параллельно реакции  $R_B$ , чтобы силы  $R_A$  и  $R_B$  составили пару сил, направленную в сторону, обратную вращению часовой стрелки (рис. 2.9, б).

Для четырех пар сил, приложенных к балке, используем условие равновесия пар сил, лежащих в одной плоскости:

$$\sum M_i = 0; \quad -|M_1| + |M_2| - |M_3| + R_B h = 0,$$

где

$$h = AB \cos 30^\circ.$$

Отсюда

$$R_B = \frac{|M_1| - |M_2| + |M_3|}{AB \cos 30^\circ} = \frac{8 - 10 + 7}{10\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58 \text{ кН}.$$

Знак «плюс» в ответе указывает, что принятое направление реакций опор  $R_A$  и  $R_B$  совпадает с истинным:

$$R_A = R_B = 0,58 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $R_A = R_B = 0,58 \text{ кН}$ .

**Пример 28.** Два диска диаметрами  $D_1 = 200$  мм и  $D_2 = 100$  мм закреплены на валу (рис. 2.10). Ось вала перпендикулярна их плоскости. Диски вращаются с постоянной угловой скоростью. Силы  $F_1$  и  $F_2$  расположены в плоскости дисков и направлены по касательной к ним. Определить силу  $F_2$ , если  $F_1 = 500$  Н.

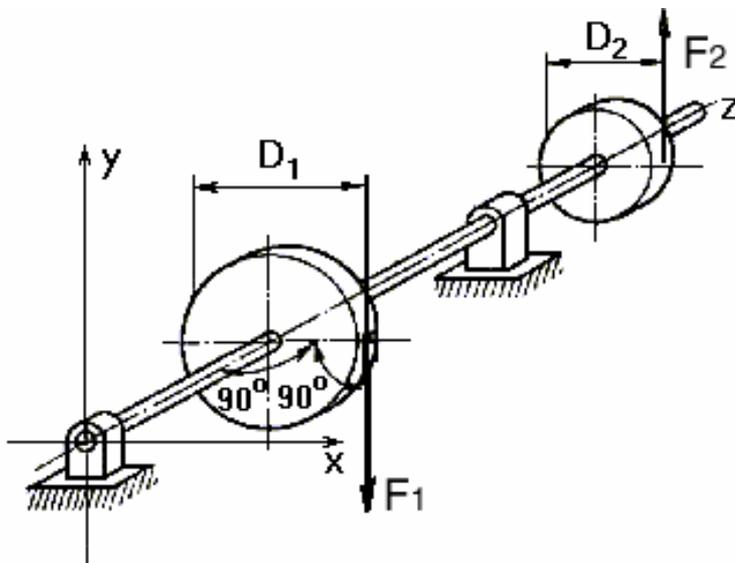


Рис. 2.10. К примеру 28

**Решение.** Вал с дисками, согласно условию задачи, вращается с постоянной угловой скоростью, следовательно, вращающие моменты должны быть уравновешены, т. е.  $T_1 + T_2 = 0$ . Так как ось вала перпендикулярна плоскости действия сил, то

$$T_1 = F_1 \frac{D_1}{2}; \quad T_2 = -F_2 \frac{D_2}{2}.$$

(Знак «минус» показывает направление момента против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси со стороны ее положительного направления).

$$F_1 \frac{D_1}{2} - F_2 \frac{D_2}{2} = 0,$$

отсюда

$$F_2 = F_1 \frac{D_1}{D_2} = \frac{500 \cdot 200}{100} = 1000 \text{ Н.}$$

При расчете на прочность валов приходится определять моменты внутренних сил в сечениях, перпендикулярных оси вала. Результирующий момент внутренних сил относительно продольной оси вала принято называть крутящим моментом и обозначать отлично от моментов внешних сил, которые принято называть вращающими моментами.

**Ответ:**  $F_2 = 1000 \text{ Н.}$

**Пример 29.** К прямоугольному параллелепипеду, длина ребер которого  $a = 100 \text{ см}$ ,  $b = 120 \text{ см}$ ,  $c = 160 \text{ см}$ , приложены три взаимно уравновешивающиеся пары сил  $F_1, F'_1, F_2, F'_2$  и  $F_3, F'_3$ . Силы первой пары имеют модуль  $F_1 = F'_1 = 4 \text{ Н}$ . Определить модули остальных сил (рис. 2.11).

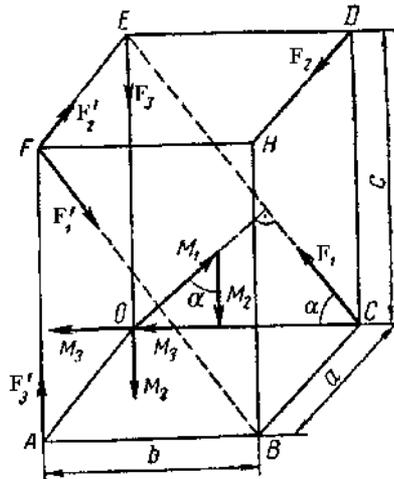


Рис. 2.11. К примеру 29

**Решение.** При равновесии трех пар сил, не лежащих в одной плоскости, геометрическая сумма моментов этих пар должна быть равна нулю, т. е. треугольник их моментов должен быть замкнут:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0.$$

Строим в точке  $O$  момент каждой пары сил, направляя его перпендикулярно к плоскости действия пары так, чтобы, смотря ему навстречу, видеть соответствующую пару сил стремящейся вращать эту плоскость в сторону, обратную вращению часовой стрелки:

$$\vec{M}_1 \perp BCEF; \vec{M}_2 \perp EDHF; \vec{M}_3 \perp OAFE.$$

Модули моментов:

$$M_1 = F_1 \cdot BC = 4 \cdot 100 = 400 \text{ Н}\cdot\text{см};$$

$$M_2 = F_2 \cdot ED = F_2 \cdot 120.$$

$$M_3 = F_3 \cdot AO = F_3 \cdot 100.$$

Строим замкнутый треугольник моментов пар сил.

Из  $\triangle EOC$

$$\sin \alpha = \frac{EO}{EC} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{160}{\sqrt{120^2 + 160^2}} = \frac{160}{200} = 0,8;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,64} = 0,6.$$

Из треугольника моментов

$$M_2 = M_1 \cos \alpha = 400 \cdot 0,6 = 240 \text{ Н}\cdot\text{см};$$

$$M_3 = M_1 \sin \alpha = 400 \cdot 0,8 = 320 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Модули сил, составляющих пары:

$$F_2' = F_2 = \frac{M_2}{120} = \frac{240}{120} = 2 \text{ Н};$$

$$F_3' = F_3 = \frac{M_3}{100} = \frac{320}{100} = 3,2 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $F_2 = F_2' = 2 \text{ Н}; F_3' = 3,2 \text{ Н}.$

**Пример 30.** Концы балки шарнирно закреплены в точках  $A$  и  $B$  (рис. 2.12, а). К балке приложены пары сил, моменты которых равны  $M_1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_2 = -26 \text{ кН}\cdot\text{м}.$  Ось балки  $AB$  совпадает с плоскостью действия пары сил. Расстояние между опорами  $\ell = 3 \text{ м}.$  Определить опорные реакции балки, не учитывая силу тяжести балки.

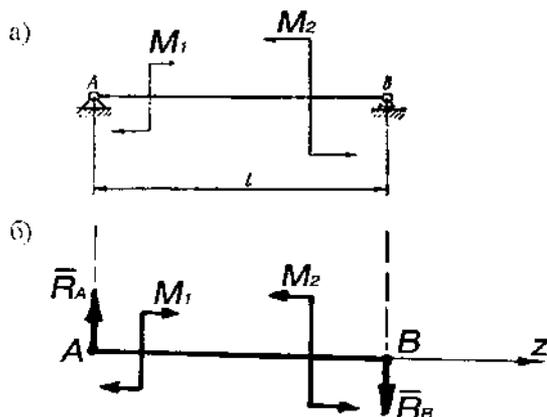


Рис. 2.12. К примеру 30

**Решение.** Так как к балке приложены 2 пары сил, то уравновесить их можно только парой сил. Значит, реакции опор равны между собой по величине, параллельны, но противоположно направлены. Заменяем действия опор их реакциями (рис. 2.12, б). Балка находит-

ся в равновесии, поэтому сумма моментов пар сил, противоположных к ней, равна нулю:

$$\sum M_i = 0;$$

$$M_1 + M_2 + R_A \cdot \ell = 0;$$

$$R_A = -\frac{M_1 + M_2}{\ell} = -\frac{20 - 26}{3} = 2 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = R_B = 2 \text{ кН.}$

**Пример 31.** Вал, на котором закреплены три зубчатых колеса, вращается вокруг неподвижной оси. Силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  расположены в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и направлены по касательным к окружностям зубчатых колес, как схематически показано на рис. 2.13. Силы  $F_2 = 400 \text{ Н}$ ,  $F_3 = 200 \text{ Н}$ . Диаметры зубчатых колес  $D_1 = 100 \text{ мм}$ ,  $D_2 = 200 \text{ мм}$ ,  $D_3 = 400 \text{ мм}$ . Вычислить величину моментов сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  относительно оси вращения и модуль силы  $F_1$ , приложенной к диску диаметром  $D_1$ .

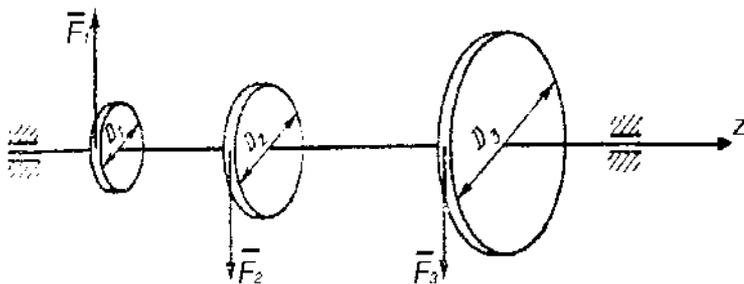


Рис. 2.13. К примеру 31

**Решение.** Так как ось вала перпендикулярна плоскости действия сил, то:

$$T_1 = -F_1 \frac{D_1}{2}, \quad T_2 = F_2 \frac{D_2}{2}, \quad T_3 = F_3 \frac{D_3}{2};$$

$$T_2 = 400 \cdot \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2} = 40 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$T_3 = 200 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-3}}{2} = 40 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

(Знак «минус» для момента  $T_1$  показывает направление момента по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси со стороны её положительного направления).

Вращающие моменты должны быть уравновешены:

$$T_1 + T_2 + T_3 = 0,$$

тогда

$$T_1 = -T_2 - T_3, \quad T_1 = -40 - 40 = -80 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$F_1 = \frac{-2T_1}{D_1}, \quad F_1 = \frac{-2 \cdot (-80)}{100 \cdot 10^{-3}} = 1600 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $T_1 = -80$  Н·м,  $T_2 = 40$  Н·м,  $T_3 = 40$  Н·м,  $F_1 = 1600$  Н.

**Пример 32.** Груз  $G$  при помощи рычага создает прижимное усилие  $F$  на деталь  $A$  (рис. 2.14, а). Плечи рычага  $a = 300$  мм,  $b = 900$  мм. Определить силу тяжести груза, если прижимное усилие равно 400 Н.

**Решение.** На расчётной схеме рычага (рис. 2.14, б) к точке  $A$  приложен вес груза  $G$ , к точке  $B$  – сила реакции шарнира  $R_B$ , к точке  $C$  приложена сила реакции  $R_C$ , равная по модулю прижимному усилию  $F$  (3-й закон Ньютона).

Составим уравнение равновесия рычага относительно точки  $B$ :

$R_C \cdot CB - G \cdot AB = 0$ , при этом момент силы  $R_B$  относительно точки  $B$  равен 0.

$$G = R_C \frac{CB}{AB}, \quad G = F \frac{a}{b}, \quad G = 400 \cdot \frac{300}{900} = 133,3 \text{ Н}.$$

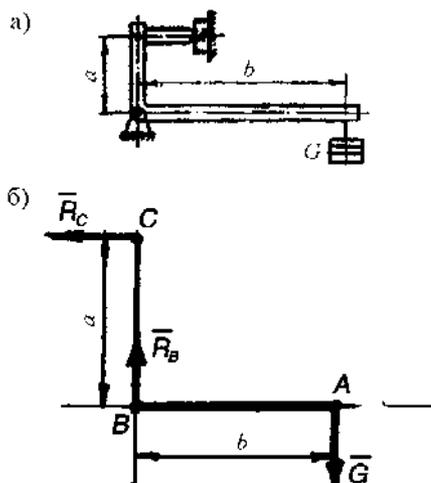


Рис. 2.14. К примеру 32

**Ответ:**  $G = 133,3 \text{ Н}$ .

**Пример 33.** Определить прижимное усилие  $F$  на деталь  $A$  (рис. 2.15, а), создаваемое при помощи рычага и груза  $G = 300 \text{ Н}$ . Отношение плеч рычага  $b/a = 3$ .

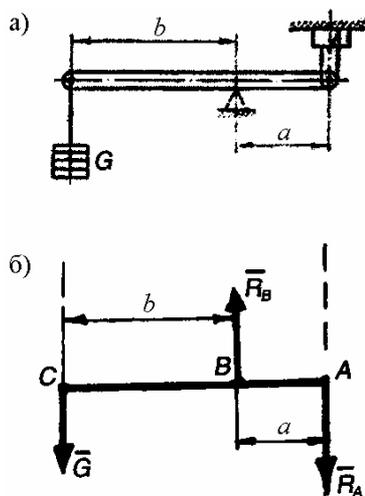


Рис. 2.15. К примеру 33

**Решение.** Будем рассматривать равновесие рычага. Для этого действие опор заменим их реакциями (рис. 2.15, б).

Прижимное усилие  $F$  на деталь  $A$  по модулю равно силе реакции  $\vec{R}_A$  (это следует из 3-го закона Ньютона).

Запишем условие равновесия рычага относительно точки  $B$ :

$$G \cdot CB - R_A \cdot AB = 0, \quad R_A = G \frac{CB}{AB}, \quad R_A = G \cdot (b/a),$$

$$F = R_A, \quad F = 300 \cdot 3 = 900 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F = 900 \text{ Н.}$

**Пример 34.** Три диска жестко закреплены на валу (рис. 2.16, а). Ведущий диск 1 передает момент  $T_1 = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Момент, приложенный к ведомому диску 2,  $T_2 = -200 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Диаметры дисков  $D_1 = 0,2 \text{ м}$ ,  $D_2 = 0,4 \text{ м}$ ,  $D_3 = 0,6 \text{ м}$ . Определить величину и направление момента на диске 3 при условии, что вал вращается равномерно. Вычислить также окружные силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ , приложенные к соответствующим дискам. Эти силы направлены по касательным к окружности диска и расположены в плоскостях, перпендикулярных оси вала.

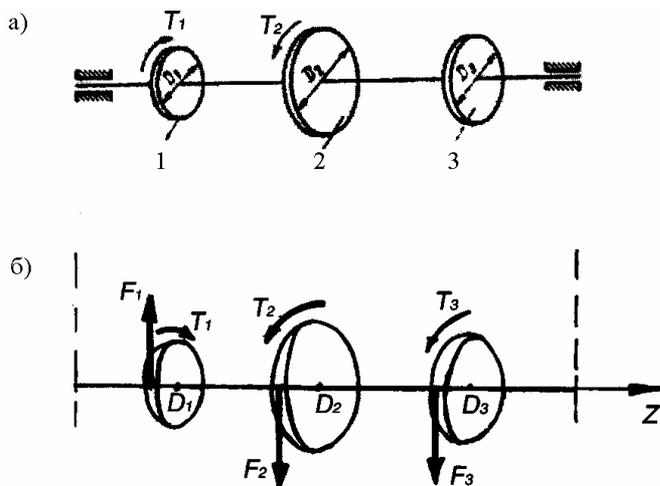


Рис. 2.16. К примеру 34

**Решение.** Вал с дисками, согласно условию задачи, вращается равномерно, следовательно, вращающие моменты должны быть уравновешены (рис. 2.16, б):

$$T_1 + T_2 + T_3 = 0, \quad T_3 = -T_1 - T_2, \quad T_3 = -400 - (-200) = -200 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определим окружные силы  $F_1, F_2, F_3$ :

$$T_1 = F_1 \frac{D_1}{2}, \quad F_1 = \frac{2T_1}{D_1}, \quad F_1 = \frac{2 \cdot 400}{0,2} = 4000 \text{ Н}, \quad F_1 = 4 \text{ кН};$$

$$T_2 = -F_2 \frac{D_2}{2}, \quad F_2 = -\frac{2T_2}{D_2}, \quad F_2 = -\frac{2 \cdot (-200)}{0,4} = 1000 \text{ Н}, \quad F_2 = 1 \text{ кН};$$

$$T_3 = -F_3 \frac{D_3}{2}, \quad F_3 = -\frac{2T_3}{D_3}, \quad F_3 = -\frac{2 \cdot (-200)}{0,6} = 666,7 \text{ Н}, \quad F_3 = 666,7 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $T_3 = -200 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $F_1 = 4000 \text{ Н}$ ,  $F_2 = 1000 \text{ Н}$ ,  $F_3 = 666,7 \text{ Н}$ .

**Пример 35.** К стержню, опирающемуся в точках  $A$  и  $B$  (рис. 2.17, а), приложены две пары сил, моменты которых  $M_1 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$  и  $M_2 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Расстояние  $a = 0,4 \text{ м}$ . Определить реакции упоров  $A$  и  $B$ , не учитывая силы тяжести стержня. Плоскость действия пар сил совпадает с осью стержня.

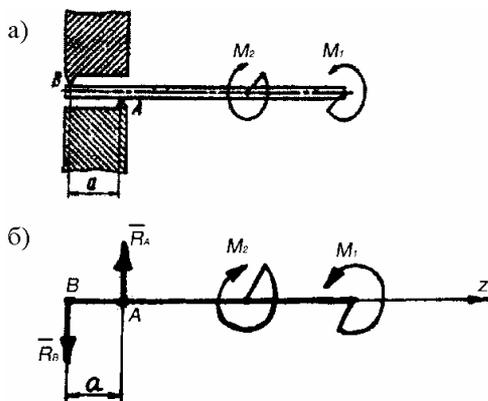


Рис. 2.17. К примеру 35

**Решение.** Так как к стержню приложены только пары сил, то уравновесить их можно только парой сил. Значит, реакции опор равны между собой по величине, но противоположно направлены (рис. 2.17, б).

Стержень находится в равновесии, поэтому

$$M_1 - M_2 + R_A \cdot \alpha = 0, \quad R_A = \frac{-M_1 + M_2}{\alpha},$$

$$R_A = \frac{-6 + 18}{0,4} = 30 \text{ кН},$$

знак «минус» указывает на направление момента пар сил  $R_A$  и  $R_B$ .

**Ответ:**  $R_A = 30 \text{ кН}$ ,  $R_B = 30 \text{ кН}$ .

**Пример 36.** На рычаг в точке  $C$  действует сила  $F = 250 \text{ Н}$  (рис. 2.18, а). Определить силу, приложенную к тормозным дискам в точке  $A$ , если длина рычага  $CB = 900 \text{ мм}$ , расстояние  $CD = 600 \text{ мм}$ .

**Решение.** Заменяем действия опор на рычаг их реакциями (рис. 2.18, б). Уравнение равновесия рычага:

$$M_D(F_K) = 0; \quad -F \cdot CD + R_B \cdot BD = 0;$$

$$R_B = F \frac{CD}{BD}, \quad R_B = F \frac{CD}{CB - CD};$$

$$R_B = 250 \frac{600}{900 - 600} = 500 \text{ Н}.$$

Сила, приложенная к тормозным дискам в точке  $A$ , равна по модулю  $R_B$  (по третьему закону Ньютона).

**Ответ:**  $R_B = 500 \text{ Н}$ .

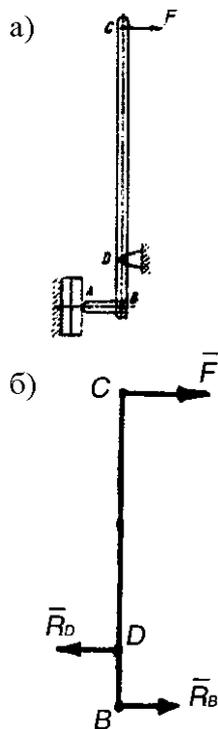


Рис. 2.18. К примеру 36

**Пример 37.** Колодочный тормоз удерживает в покое вал, к которому приложена пара сил с моментом  $M = 800$  Н·м. Диаметр тормозного диска  $D = 400$  мм (рис. 2.19, а). Определить, с какой силой надо прижимать колодки к тормозному диску, чтобы вал оставался в покое. Коэффициент трения покоя между тормозным диском и колодками принять  $f = 0,15$ .

**Решение.** Чтобы вал оставался в покое, необходимо равенство моментов  $M$  и  $M_{TP}$  (рис. 2.19, б):

$$\sum M_i = 0; M_{TP} - M = 0,$$

$$M_{TP} = M,$$

где  $M_{TP}$  - момент, создаваемый парой сил трения.

$$M_{TP} = F_{TP} \frac{D}{2}.$$

Силу трения определим, зная коэффициент трения  $f$  покоя между тормозным диском и колодками:

$$F_{TP} = f \cdot F.$$

Тогда

$$M = fF \frac{D}{2}, F = \frac{2M}{fD}.$$

$$F = \frac{2 \cdot 800}{0,15 \cdot 400 \cdot 10^{-3}} \approx 26700 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $F = 26,7$  кН.

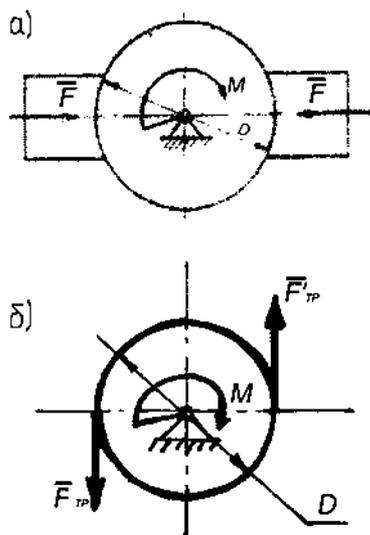


Рис. 2.19. К примеру 37

**Пример 38.** На валу жестко закреплены два диска диаметрами  $D_1 = 220$  мм и  $D_2 = 340$  мм (рис. 2.20, а). К первому диску приложена сила  $F_1 = 500$  Н. Линия действия силы расположена в плоскости, перпендикулярной оси вала. Определить величину и направление силы, которую надо приложить ко второму диску, чтобы вал вращался равномерно. Вычислить вращающие моменты на каждом диске.

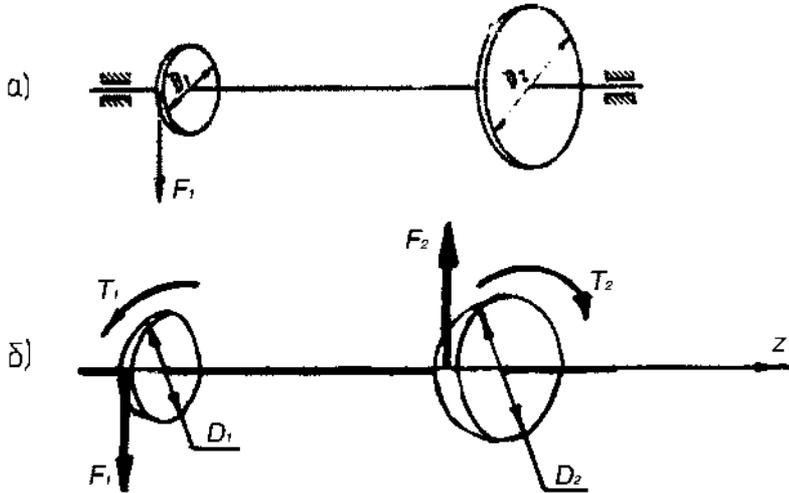


Рис. 2.20. К примеру 38

**Решение.** Вращающие моменты на дисках:

$$T_1 = F_1 \frac{D_1}{2}, \quad T_2 = -F_2 \frac{D_2}{2}.$$

(Знак «минус» для момента  $T_2$  показывает направление момента против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси со стороны её положительного направления).

Так как вал вращается равномерно, то вращающие моменты должны быть уравновешены (рис. 2.20, б):

$$\sum T_i = 0, \quad T_1 + T_2 = 0, \quad T_2 = -T_1.$$

$$T_1 = 500 \frac{0,22}{2} = 55 \text{ Н}\cdot\text{м}, T_2 = -55 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$T_1 = -T_2, F_1 D_1 = F_2 D_2, F_2 = F_1 \frac{D_1}{D_2}, F_2 = 500 \frac{220}{340} = 324 \text{ Н}.$$

Направление силы  $\vec{F}_2$  противоположно направлению силы  $\vec{F}_1$ .

Ответ:  $T_1 = 55 \text{ Н}\cdot\text{м}, T_2 = -55 \text{ Н}\cdot\text{м}, F_2 = 324 \text{ Н}.$

**Пример 39** (рис. 2.21, а). Груз  $F = 11 \text{ кН}$ , поднятый с помощью троса, намотанного на барабан диаметром  $d_\sigma = 0,14 \text{ м}$ , удерживается в покое храповым механизмом, состоящим из зубчатого колеса с расчётным диаметром  $d = 0,24 \text{ м}$  и упорного рычага. Весом частей механизма, а также трением пренебречь. Определить силу, нагружающую упорный рычаг.

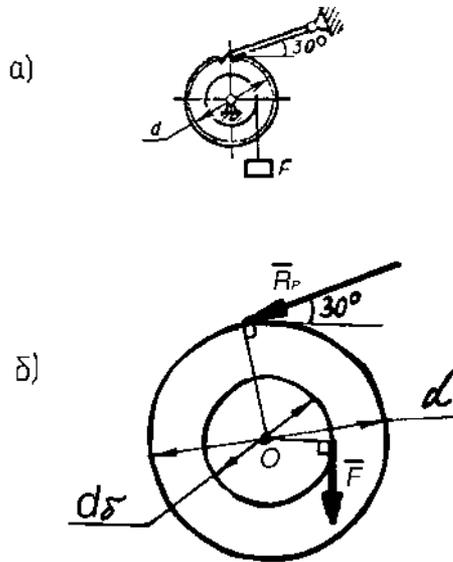


Рис. 2.21. К примеру 39

**Решение.** Будем рассматривать равновесие блока. На него нало-

жена внешняя связь – упорный рычаг. Заменяем её реакцией  $R_p$ . В данной задаче одна неизвестная  $F_p$ , которая по третьему закону Ньютона равна реакции  $R_p$  (рис. 2.21, б).

Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_0(\vec{F}_i) = 0, -F \cdot \frac{d_6}{2} + R_p \frac{d \cos 30^0}{2} = 0,$$

откуда имеем:

$$R_p = F \frac{d_6}{d \cos 30^0}, R_p = 11 \frac{0,14}{0,24 \cdot 0,886} = 7,41 \text{ кН.}$$

$$F_p = R_p = 7,41 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_p = 7,41$  кН.

**Пример 40** (рис. 2.22, а). Сила, приложенная человеком к концу рукоятки ручного рычажного пресса, равна  $F = 120$  Н. Приняв  $AC = 220$  мм и  $AB = 40$  мм, определить силу давления поршня на прессуемый материал. Крепление в точках  $A$  и  $B$  шарнирное. Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

**Решение.** Сила давления поршня  $F_g$  равна силе реакции  $R_B$ , действующей со стороны поршня на рукоятку (рис. 2.22, б). Составим уравнение моментов сил для рукоятки:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0;$$

$$F \cdot AC - R_B \cdot AB \cdot \cos 30^0 = 0,$$

$$R_B = \frac{F \cdot AC}{AB \cos 30^0}.$$

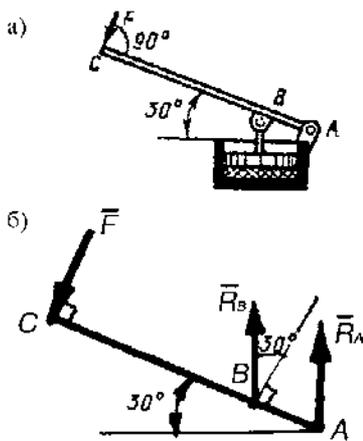


Рис. 2.22. К примеру 40

$$R_B = \frac{120 \cdot 220}{40 \cos 30^\circ} = 762 \text{ Н.}$$

$$F_g = R_B = 762 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_g = 762 \text{ Н.}$

**Пример 41** (рис. 2.23, а). В лентопротяжном механизме прибора лента держится в натянутом состоянии с помощью двуплечего рычага  $ABC$ . На одном конце рычага расположен нажимной ролик, другой конец оттянут пружинной лентой с силой упругости 4 Н. Определить силу давления ролика на ленту, считая, что общая нормаль в точке их касания расположена вертикально. Принять  $AB = 50 \text{ мм}$  и  $BC = 10 \text{ мм}$ . Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

**Решение.** На рычаг  $ABC$  наложены внешние связи. Освободимся от них, заменяя их действие силами реакции (рис. 2.23, б). В данной задаче одна неизвестная – сила давления ролика на ленту  $\vec{F}$ , которая равна силе реакции  $\vec{R}_A$ :

$$F = R_A.$$

Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0,$$

$$F_{\text{упр}} \cdot BC - R_A \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Откуда имеем:

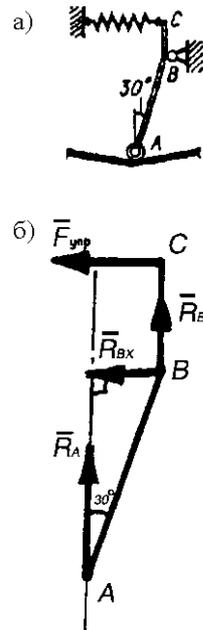


Рис. 2.23. К примеру 41

$$R_A = \frac{F_{\text{уп}} \cdot BC}{AB \sin 30^0};$$

$$R_A = \frac{4 \cdot 10}{50 \sin 30^0} = 1,6 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F = 1,6 \text{ Н.}$

**Пример 42** (рис. 2.24). Груз весом 950 Н равномерно поднимается при помощи ворота, состоящего из барабана диаметром 0,14 м и рукоятки с плечом 0,4 м. Для данного положения механизма определить силу  $F$ , прикладываемую рабочим, считая ее направленной вертикально. Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

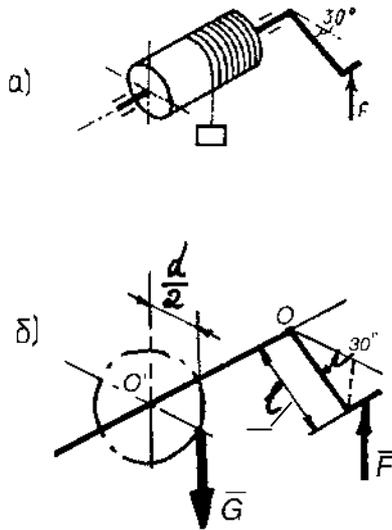


Рис. 2.24. К примеру 42

**Решение.** В данной задаче одна неизвестная – сила  $\vec{F}$  (рис. 2.24, б). Для её нахождения напишем уравнение моментов сил:

$$\sum M_{O_1}(\vec{F}_i) = 0, G \cdot \frac{d}{2} - F \cdot l \cos 30^0 = 0, F = \frac{Gd}{2l \cos 30^0}.$$

$$F = \frac{950 \cdot 0,14}{2 \cdot 0,4 \cos 30^0} = 192 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F = 192 \text{ Н.}$

**Пример 43** (рис. 2.25, а). Для перевода однородной колонны  $AB$  из горизонтального положения в вертикальное один ее конец зацепили тросом подъемного крана, а к другому концу приставили упор. Определить силу натяжения троса в момент начала подъема колонны, если ее вес  $3 \text{ кН}$  и длина  $4 \text{ м}$ .

**Решение.** Для нахождения силы натяжения троса  $\vec{N}$  составим уравнение моментов сил (рис. 2.25, б):

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0;$$

$$-N \cdot AB \cos 30^0 + G \frac{AB}{2} = 0;$$

$$N = \frac{G}{2 \cos 30^0};$$

$$N = \frac{3}{2 \cos 30^0} = 1,73 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $N = 1,73 \text{ кН.}$

**Пример 44** (рис. 2.26, а). Под действием передаваемого зубчатым колесом вращающего момента  $T = 5 \text{ Н·м}$  вал с насаженным на него кулачком равномерно вращается. Кулачок, надавливая на тарельчатый конец подпружиненного толкателя, сообщает ему вертикальное перемещение. Для данного положения кулачкового механизма определить силу упругости сжатой пружины, если плечо кулачка  $OA = 40 \text{ мм}$ . Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

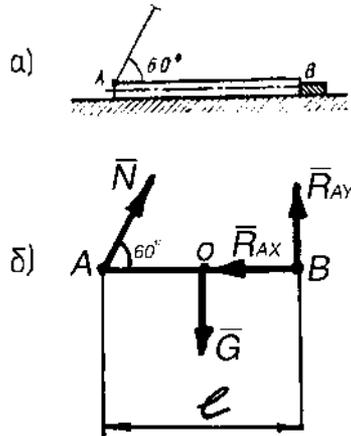


Рис. 2.25. К примеру 43

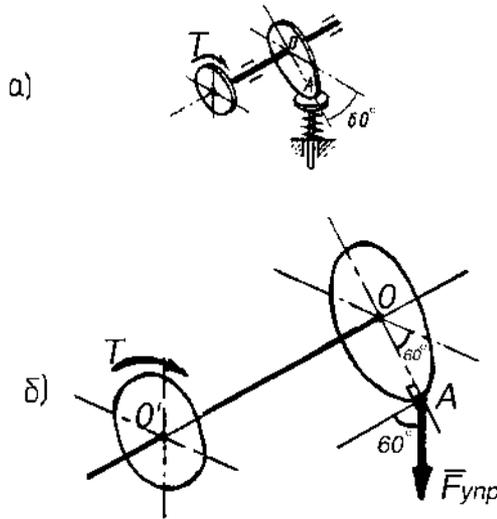


Рис. 2.26. К примеру 44

**Решение.** В данной задаче одна неизвестная величина – сила упругости  $\vec{F}_{упр}$  (рис. 2.26, б). Для её нахождения составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_{oo'}(\vec{F}_i) = 0,$$

$$T - F_{упр} \cdot OA \cos 60^\circ = 0.$$

Откуда имеем:

$$F_{упр} = \frac{T}{OA \cdot \cos 60^\circ},$$

$$F_{упр} = \frac{5}{40 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 60^\circ} = 250 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F_{упр} = 250 \text{ Н.}$

**Пример 45** (рис. 2.27, а). В измерительном приборе рычаг  $AC$ , несущий груз весом  $1,2 \text{ Н}$ , удерживается в горизонтальном положении с помощью растянутой пружины. Определить силу упругости пружины, приняв  $AB = 20 \text{ мм}$  и  $BC = 80 \text{ мм}$ . Весом частей механизма пренебречь.

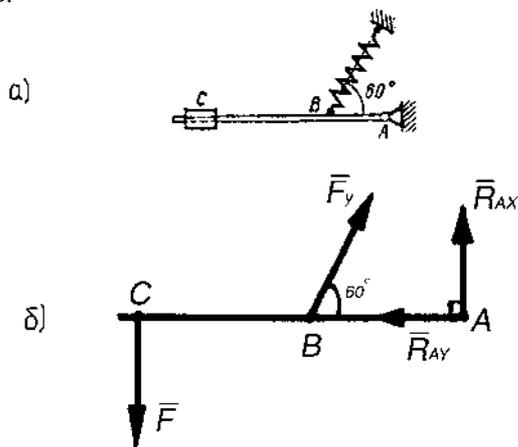


Рис. 2.27. К примеру 45

**Решение.** На рычаг  $AC$  наложены внешние связи – шарнир  $A$  и пружина. Заменим их реакциями, при этом реакцию шарнира представим через его составляющие  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ , а силу упругости пружины  $\vec{F}_y$  направим вдоль оси пружины (рис. 2.27, б).

Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad F \cdot CA - F_y \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$F_y = F \frac{CA}{BA \cdot \cos 30^\circ};$$

$$F_y = F \frac{AB + BC}{AB \cdot \cos 30^\circ}; \quad F_y = 1,2 \frac{20 + 80}{20 \cdot \cos 30^\circ} = 6,93 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $F_y = 6,93 \text{ Н}$ .

**Пример 46** (рис. 2.28, а). Поплавковый регулятор уровня, состоящий из двуплечего рычага  $ABC$  с поплавком  $D$  и запирающего трубопровод клапана  $E$ , служит для перекрытия трубопровода в момент заполнения бака водой. В этот момент плечо  $AB$  рычага располагается горизонтально. Приняв  $AB = 300$  мм,  $BC = 30$  мм и силу давления воды на клапан  $F_1 = 60$  Н, определить значение действующей на поплавок подъемной силы  $F_2$ . Весом частей механизма пренебречь.

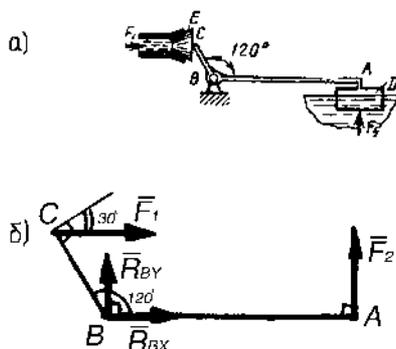


Рис. 2.28. К примеру 46

**Решение.** На рычаг  $ABC$  действуют две силы – сила давления воды  $\vec{F}_1$  и подъемная сила  $\vec{F}_2$  (рис. 2.28, б).

Составим уравнение моментов сил относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0;$$

$$-F_1 \cdot BC \cos 30^\circ + F_2 \cdot AB = 0.$$

Откуда имеем:

$$F_2 = F_1 \frac{BC \cos 30^\circ}{AB};$$

$$F_2 = 60 \frac{30 \cos 30^\circ}{300} = 5,2 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F_2 = 5,2$  Н.

**Пример 47** (рис. 2.29, а). Кулачковый механизм состоит из кулачка, равномерно вращающегося под действием момента  $M = 0,8$  кН·м, и горизонтально перемещающегося подпружиненного толкателя. Для данного положения механизма определить силу давления кулачка на толкатель, если плечо кулачка  $OA = 30$  мм. Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

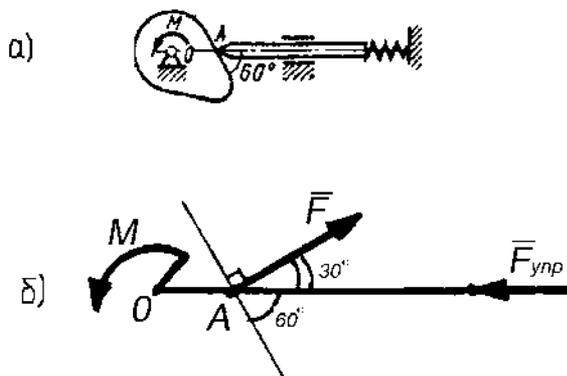


Рис. 2.29. К примеру 47

**Решение.** В данной задаче одна неизвестная величина – сила  $\bar{F}$  (рис. 2.29, б). Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_0(\bar{F}_i) = 0;$$

$$M = F \cdot OA \cos 60^\circ$$

Откуда имеем:

$$F = \frac{M}{OA \cdot \cos 60^\circ},$$

$$F = \frac{0,8}{30 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 60^\circ} = 53,3 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $F = 53,3$  кН.

**Пример 48.** (рис. 2.30, а). Для данного положения заводной рукоятки автомобиля определить силу давления человека на рукоятку  $F_1$ , считая ее приложенной вертикально. Принять плечо рукоятки  $l = 0,24$  м, плечо крестовицы  $h = 50$  мм и силу сопротивления на крестовине  $F_2 = 1,2$  кН. Вращение рукоятки считать равномерным. Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

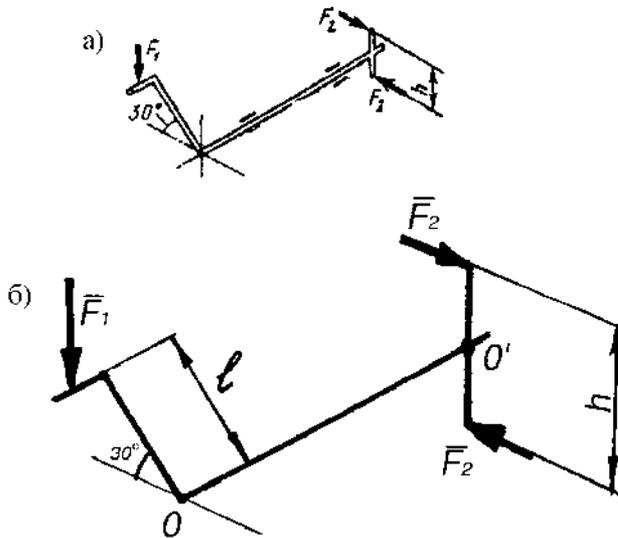


Рис. 2.30. К примеру 48

**Решение.** В данной задаче одна неизвестная величина – сила  $\vec{F}_1$  (рис. 2.30, б). Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_{O'}(\vec{F}_i) = 0,$$

$$F_1 \cdot l \cos 30^\circ - F_2 \frac{h}{2} = 0.$$

Откуда имеем:

$$F_1 = F_2 \frac{h}{2l \cdot \cos 30^\circ};$$

$$F_1 = 1,2 \frac{50 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,24 \cdot \cos 30^0} = 0,144 \text{ кН}, F_1 = 144 \text{ Н}.$$

Ответ:  $F_1 = 144 \text{ Н}$ .

**Пример 49.** Для предохранения воздухопровода от повышения давления сверх расчетного установлен предохранительный клапан  $A$  (рис. 2.31, а). Прижимное усилие на клапан создается грузом  $G$  и рычагом  $CD$ . Определить, какой груз надо повесить в точке  $D$ , чтобы клапан  $A$  открывался при избыточном давлении в сети  $p = 4 \text{ Н/мм}^2$ . Диаметр клапана  $d = 50 \text{ мм}$ . Длина рычага  $CD = 800 \text{ мм}$ , расстояние  $CB = 100 \text{ мм}$ .

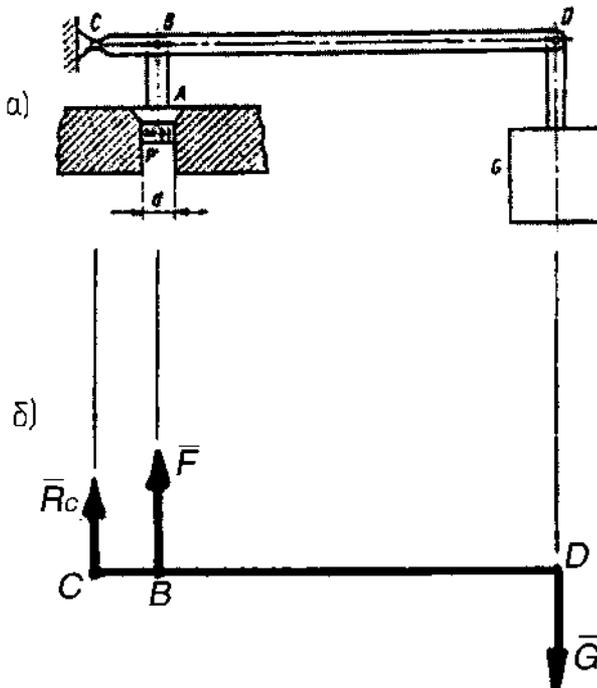


Рис. 2.31. К примеру 49

**Решение.** Рассмотрим рычаг  $CD$ . Заменяем действия опор их реакциями. В результате избыточного давления в сети на рычаг в точке  $B$  действует сила  $F$ .

$$F = pS, S = \frac{\pi d^2}{4}, F = \frac{\pi d^2 p}{4}.$$

Рассмотрим равновесие рычага:

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = 0; F \cdot CB - G \cdot CD = 0,$$

$$G = F \frac{CB}{CD}, G = F \frac{100}{800} = \frac{F}{8};$$

$$G = \frac{\pi p d^2}{32}, G = \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 50^2}{32} = 981,25 \text{ Н.}$$

Если вес груза будет 980 Н, то при избыточном давлении  $p = 4 \text{ Н/мм}^2$  клапан откроется, т. к. нарушится равновесие рычага.

$$G = gm, m = \frac{G}{g} = \frac{980}{9,8} = 100 \text{ кг.}$$

**Ответ:** Груз массой  $m = 100$  кг.

#### Задачи к заданиям

**Задача 4.** Клапан (рис. 2.32) предназначен для установки на стационарном паровом котле или других подобных резервуарах и служит для выпуска излишка рабочей среды при повышении давления сверх нормы. Определить, какой груз необходимо подобрать к клапану, чтобы он открывался при избыточном давлении  $\Delta P$ . Исходные данные взять из табл. 2.1.

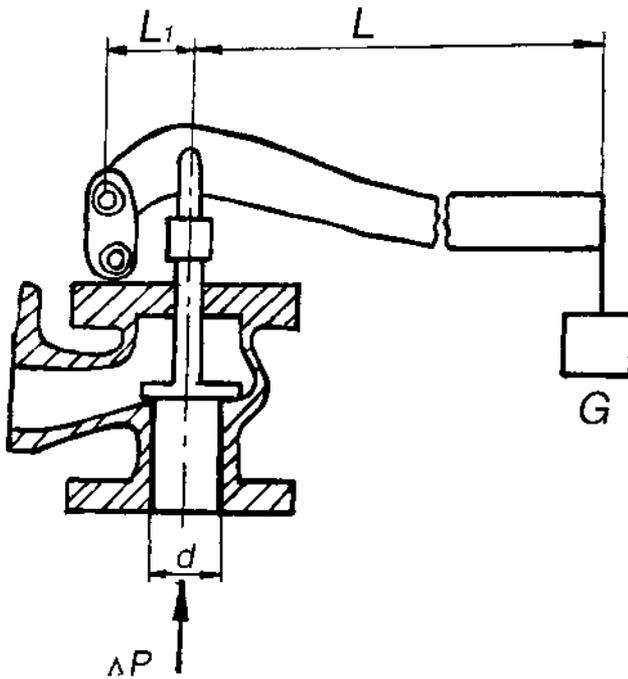


Рис. 2.32. К задаче 4

Т а б л и ц а 2.1

Исходные данные к задаче 4

№ варианта	$L_1$ , мм	$L$ , мм	$d$ , мм	$\Delta P$ , МПа
1	145	850	50	0,1
2	135	800	80	0,2
3	130	750	50	0,3
4	140	800	80	0,4
5	150	850	50	0,5
6	135	750	80	1,0
7	140	700	50	0,9
8	125	700	80	0,8
9	145	800	50	0,7
10	135	750	80	0,6

**Задача 5.** Определить силу, с которой натянут трос  $AB$  (рис. 2.33), если вес изоляторов вместе с проводами равен  $G$ , а вес железной конструкции  $DBC - G_e$  на каждый метр длины. Исходные данные взять из табл. 2.2.

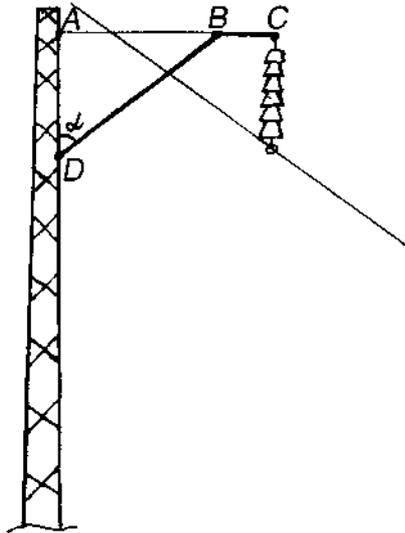


Рис. 2.33. К задаче 5

Т а б л и ц а 2.2

Исходные данные к задаче 5

№	$G$ , Н	$G_e$ , Н/м	$AB$ , м	$AC$ , м	$\alpha$ , град
1	65	10,5	2,0	3,0	25
2	70	9,5	2,1	2,6	35
3	60	11	2,2	2,8	60
4	85	11,5	2,3	2,7	65
5	55	10	2,4	2,6	25
6	65	7,5	2,5	2,8	40
7	75	8	2,2	2,7	30
8	70	8,5	2,3	2,6	45
9	60	9,5	2,4	3,0	55
10	80	10	2,5	2,7	30

**Задача 6.** Платформа находится на четырёх железобетонных основаниях (рис. 2.34). Рассчитать фундаментальные болты у опор, если известно, что у каждой опоры их восемь, а также вес платформы со всеми конструкциями  $G$ . Исходные данные взять из табл. 2.3.

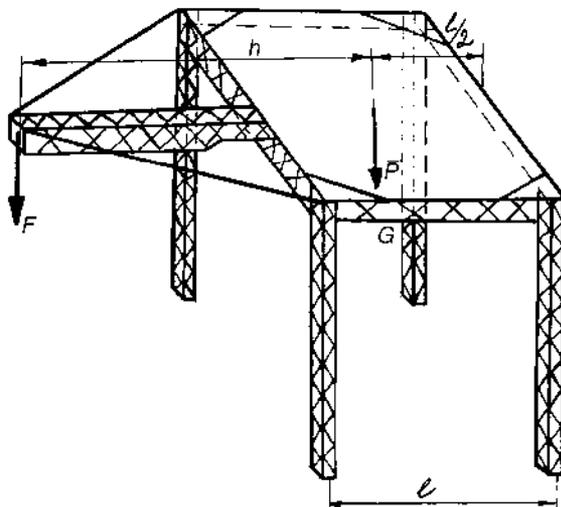


Рис. 2.34. К задаче 6

Т а б л и ц а 2.3

Исходные данные к задаче 6

№ варианта	$F$ , кН	$G$ , кН	$h$ , м	$l$ , м
1	2,5	1,2	6	4
2	2,2	1,0	6,5	3,7
3	2,7	2,4	7,2	5,1
4	2,0	0,5	4,5	2,3
5	2,5	1,5	6,5	4,5
6	2,1	1,3	6,4	4,2
7	2,7	1,6	7,2	5,3
8	2,8	1,7	7,8	5,4
9	3,0	2,0	8,0	7,0
10	3,5	2,5	9,0	8,0



## Глава 3. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ (ПСПРС)

### 3.1. Момент силы относительно точки

**Моментом силы  $F$**  (рис. 3.1) относительно точки или некоторого центра  $O$  называется величина, равная произведению радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из данной точки в точку приложения силы, на эту силу:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \cdot \vec{F}.$$

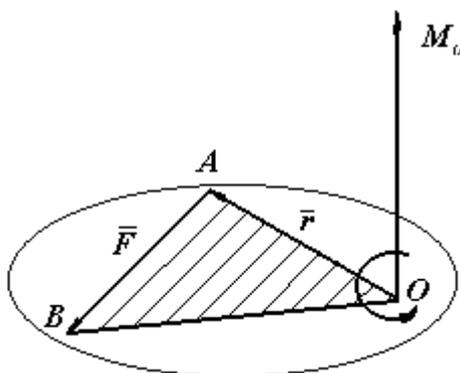


Рис.3.1. Момент силы относительно точки

Момент силы относительно заданной точки является мерой вращательного действия этой силы на тело.

Расстояние от точки  $O$  до линии действия силы называется **плечом силы** и обозначается  $h$ .

**Если действующие силы находятся в одной плоскости**, то моментом силы относительно точки называется произведение модуля силы на плечо, т. е. на длину перпендикуляра, восстановленного из точки, относительно которой берется момент, к линии действия силы. Момент принято считать положительным, если он стремится повернуть тело против часовой стрелки (рис.3.2, а), и отрицательным (рис. 3.2, б), если вращение направлено в противоположную сторону.

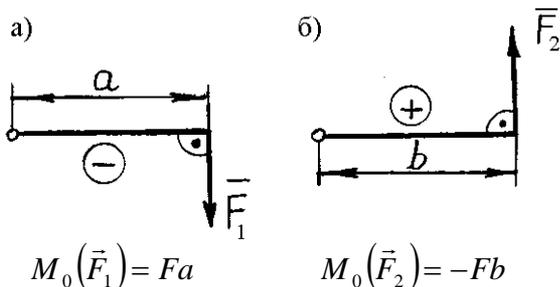


Рис. 3.2. Правило знаков момента силы относительно точки в плоскости действия силы

Необходимо отметить следующее:

- момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия;
- момент силы относительно точки равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через эту точку;
- момент силы численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , или удвоенной площади треугольника  $OAB$  (см. рис. 3.1).

### 3.2. Равновесие твёрдых тел под действием ПСПРС

До сих пор были рассмотрены частные случаи равновесия сил:

- а) когда к телу приложены силы, направленные по одной прямой;
- б) когда к телу приложено несколько сил, но линии их действия обязательно пересекались в одной точке;
- в) когда к телу приложены пары сил.

В реальных условиях тело может находиться в равновесии под действием произвольно расположенной системы сил (рис. 3.3). **Условием равновесия** является равенство нулю главного момента и главного вектора. На основании этого условия можно составить три уравнения равновесия сил, расположенных в одной плоскости. В зави-

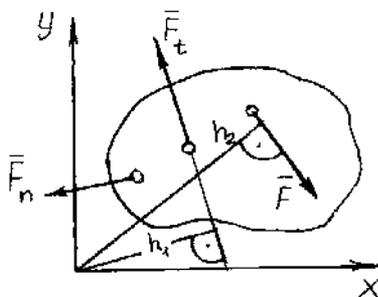


Рис. 3.3. Произвольная плоская система сил

симости от конкретных условий задачи эти три уравнения могут быть составлены по-разному.

Поясним это следующим примером. На рис. 3.4 показана балка, нагруженная силами  $F_1$ ,  $F_2$ . Требуется определить опорные реакции  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_B$ .

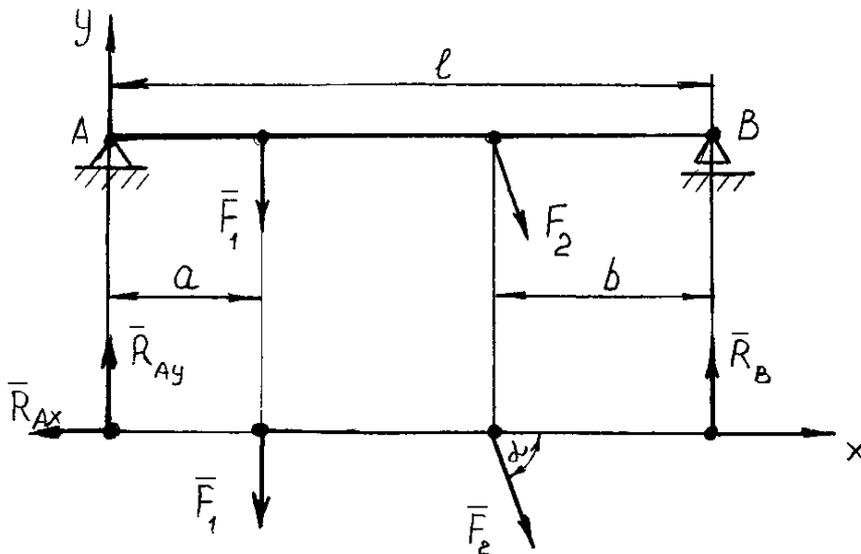


Рис. 3.4. К рассмотрению вопроса об уравнениях равновесия сил

Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; F_2 \cdot \cos \alpha - R_{Ax} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; F_1 \cdot a + F_2 \cdot (l - b) \sin \alpha - R_B \cdot l = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; -F_2 \cdot b \cdot \sin \alpha - F_1 \cdot (l - a) - R_{Ay} \cdot l = 0.$$

Уравнения равновесия можно было бы составить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0; F_2 \cdot \cos \alpha - R_{AX} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; R_{AY} - F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha + R_B = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; F_1 \cdot a + F_2 \cdot (l - b) \sin \alpha - R_B \cdot l = 0.$$

Первый вид уравнений (3.1) более выгодный для решения задач, так как в каждое уравнение входит только одна неизвестная сила, которая может быть определена независимо от других неизвестных сил.

Существует третий вид уравнений (уравнения трёх моментов):

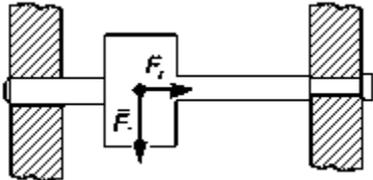
$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.3)$$

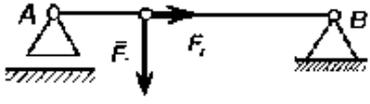
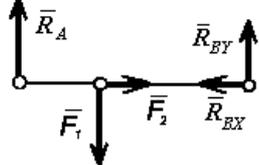
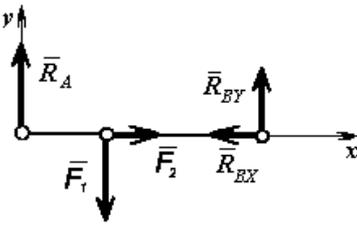
здесь любые три точки  $A, B, C$  не должны лежать на одной прямой.

При решении задач на равновесие рекомендуется соблюдать **последовательность действий**, указанную в табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1

Последовательность действий при решении задач на равновесие плоской системы произвольно расположенных сил

Что нужно делать	Иллюстрация действия
1	2
1. Выделить тело (точку), равновесие которого надо рассмотреть	

1	2
2. Изобразить расчётную схему, условно изобразить опоры и заданные силы	
3. Отбросить опоры (связи), а направление их реакций изобразить на схеме	
4. Провести оси координат так, чтобы одна ось была перпендикулярна некоторым неизвестным силам. Наметить центры моментов в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил или на линии действия одной неизвестной силы	
5. Составить уравнения равновесия объекта исследования	$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0;$ $\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0;$ $\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0$
6. Решить уравнения равновесия и определить неизвестные силы	$R_A = \dots$ $R_{BX} = \dots$ $R_{BY} = \dots$
7. Проверить правильность решения задачи по уравнению равновесия, которое не было использовано при решении задачи	$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0$

**Плоская система параллельных сил** (рис. 3.5). Пусть линии действия всех сил параллельны оси  $OY$ . Тогда уравнения равновесия записываются в виде

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0 \quad (3.4)$$

или

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.5)$$

причём точки  $A$  и  $B$  не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.

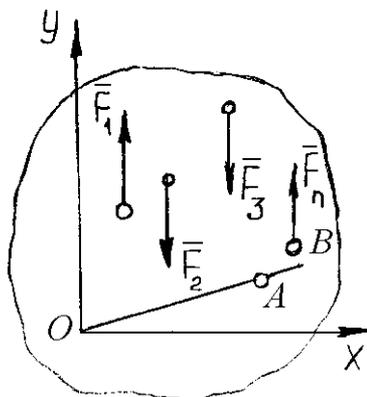


Рис. 3.5. Плоская система параллельных сил

### 3.3. Статически определённые и статически неопределённые задачи

**Статически определёнными** называют задачи, которые можно решать методами статики твёрдого тела, т. е. задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия сил.

**Статически неопределёнными** называют задачи с числом неизвестных, превышающим число уравнений равновесия сил, т. е. задачи, которые нельзя решать методами статики твёрдого тела и для решения которых нужно учитывать деформации тела, обусловленные внешними нагрузками.

К статически неопределённым задачам относятся задачи по определению реакций опор составных конструкций (рис. 3.6).

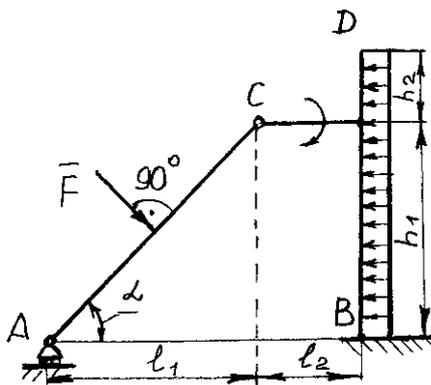


Рис.3.6. Составная конструкция

### План решения задачи на определение реакций опор составной конструкции

1. К конструкции прикладывают все задаваемые силы.
2. Отбрасывают внешние связи, заменяя их соответствующими реакциями.
3. Заметив, что число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, которые можно составить для полученной системы сил, конструкцию расчленяют, заменяя внутренние связи соответствующими реакциями (рис. 3.7).
4. Каждое из тел, входящих в состав конструкции, рассматривают как свободное, находящееся под действием задаваемых сил и реакций внешних и внутренних связей.
5. Сопоставляя общее число неизвестных величин и число всех уравнений равновесия сил, которые могут быть составлены после расчленения конструкции, устанавливают, является ли задача статически определенной.
6. Составляют уравнения равновесия сил, приложенных к каждому телу.

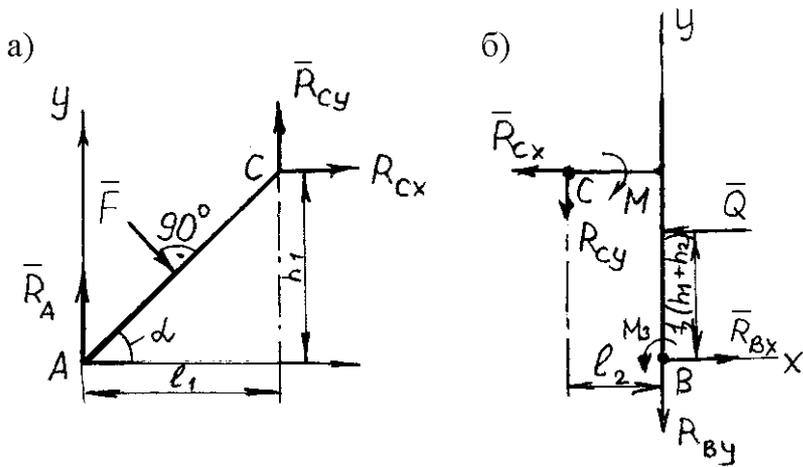


Рис. 3.7. Расчленённая составная конструкция

7. Если задача статически определена, то, решая полученную систему уравнений, определяют все неизвестные величины.

### 3.4. Определение усилий в стержнях по способу Риттера

Используем метод сечений для нахождения усилий в стержнях плоских ферм. Рассмотрим ферму, изображённую на рис. 3.8. На ферму действуют вертикальные внешние силы: реакции опор  $R_A = 40$  кН и  $R_B = 20$  кН и нагрузка  $F = 60$  кН.

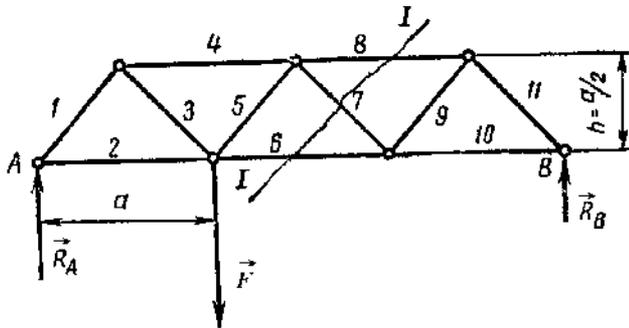


Рис. 3.8. Схема фермы

При определении усилий все стержни фермы условимся считать растянутыми, знак «минус» в ответе будет означать, что стержень сжат. Допустим, требуется определить усилие в стержне 6 фермы. Для этого проводим сечение I-I, рассекая не более трех стержней, в том числе стержень 6, усилие в котором определяется. Мысленно отбрасываем левую часть фермы, заменяя ее действие на оставшуюся правую часть усилиями  $N_6$ ,  $N_7$  и  $N_8$ , приложенными в соответствующих сечениях стержней и направленными в сторону отброшенной части (рис. 3.9).

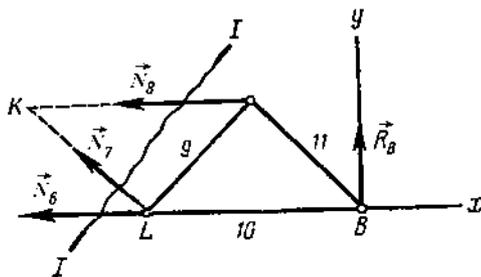


Рис. 3.9. Оставшаяся часть фермы

Чтобы определить усилие  $N_6$  независимо от усилий  $N_7$  и  $N_8$ , составляем уравнение моментов сил, действующих на правую часть фермы, относительно точки  $K$ , в которой пересекаются линии действия сил  $N_7$  и  $N_8$ . Эту точку называют **точкой Риттера**:

$$\sum_{i=1}^n M_K(\vec{F}_i) = 0;$$

$$-N_6 \cdot h + R_B \cdot 1,5a = 0.$$

Так как  $h = 0,5a$ , то

$$N_6 = R_B \cdot 1,5a / 0,5a = 60 \text{ кН}.$$

Вспользуемся тем же сечением для определения усилия  $N_7$ , независимо от усилий  $N_6$  и  $N_8$ . Спроецируем все силы, действующие

на правую часть фермы, на вертикальную ось  $Y$ , так как проекции сил  $N_6$  и  $N_8$  на эту ось равны нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; R_B + N_7 \cdot \cos 45^\circ = 0; N_7 = -R_B / \cos 45^\circ = -28,3 \text{ кН.}$$

Для определения усилия  $N_8$  составим уравнение моментов этих же сил относительно точки Риттера  $L$ , в которой пересекаются линии действия сил  $N_6$  и  $N_7$ :

$$\sum_{i=1}^n M_L(\vec{F}_i) = 0; N_8 \cdot h + R_B \cdot a = 0; N_8 = -R_B \cdot a / h = -40 \text{ кН.}$$

Знаки полученных ответов показывают, что стержень 6 растянут, а стержни 7 и 8 сжаты.

Такой способ определения усилий в стержнях фермы предложен Риттером и носит название *способа Риттера*.



### Вопросы для самопроверки

1. Что такое момент силы относительно точки?
2. Будет ли изменяться момент силы относительно точки, если, не меняя направления, переносить силу вдоль линии ее действия?
3. На тело действуют две силы  $F_1 = 40 \text{ Н}$  и  $F_2 = 50 \text{ Н}$ , как показано на рис. 3.10 ( $a = 0,5 \text{ м}$ ,  $b = 0,8 \text{ м}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ). Какая из сил создает больший момент относительно точки  $O$ ?

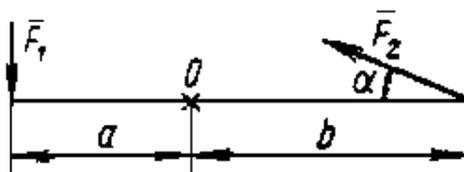


Рис. 3.10. К вопросу 3

4. Что такое главный вектор и главный момент плоской системы сил?
5. Как аналитически найти главный вектор и главный момент данной плоской системы сил?
6. В чем сходство и в чем различие между главным вектором плоской системы сил и ее равнодействующей?
7. Сформулируйте теорему Вариньона.
8. Какие уравнения (и сколько) можно составить для уравновешенной произвольной плоской системы сил?
9. Перечислите различные виды нагрузок на балку.
10. Какие виды опор балок вы знаете?
11. Сформулируйте основной закон трения. Что такое коэффициент трения, угол трения и от чего зависит их значение?
12. Брус находится в равновесии, опираясь на гладкую вертикальную стену и шероховатый горизонтальный пол; центр тяжести бруса находится в его середине. Можно ли определить направление полной реакции пола?

### Примеры

**Пример 50.** Горизонтальная балка и рама, длина которой равна  $l$ , у одного конца закреплена шарнирно, а у другого конца  $B$  подвешена к стене посредством тяги  $BC$ , угол наклона которой к балке  $AB$  равен  $\alpha$ . По балке перемещается груз  $F$ , положение которого определяется переменным расстоянием  $x$  от шарнира  $A$ . Определить натяжение  $N$  тяги  $BC$  в зависимости от положения груза. Весом балки пренебречь (рис. 3.11).

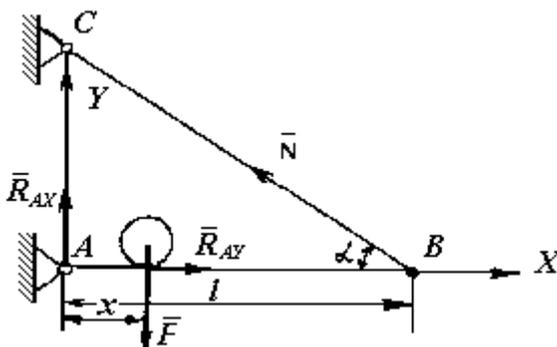


Рис. 3.11. К примеру 50

**Решение.** На балку наложены внешние связи – шарнир  $A$  и тяга  $BC$ . Заменим их реакциями. Реакцию шарнира  $A$  представим через его составляющие  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ , а реакцию тяги  $N$  направим вдоль линии  $BC$  (см. рис. 3.11).

В данной задаче одна неизвестная величина – реакция  $N$ . Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0;$$

$$-F \cdot x + N \cdot \sin \alpha \cdot \ell = 0.$$

Откуда имеем:

$$N = \frac{F \cdot x}{\ell \cdot \sin \alpha}.$$

**Ответ:**  $N = \frac{F \cdot x}{\ell \cdot \sin \alpha}.$

**Пример 51.** С помощью рычага-гвоздодера  $ABC$  из деревянного бруса вытаскивают гвоздь (рис. 3.12, а). Какой должна быть сила  $F$ , прикладываемая рабочим в начальный момент отжимания гвоздя, если сила сопротивления движению гвоздя составляет 1730 Н? Принять  $DB = 35$  мм и  $BC = 350$  мм. Весом рычага пренебречь.

**Решение.** В момент начала отжимания гвоздя рычаг под действием силы  $F$  начинает поворот вокруг опорной точки  $B$ . Со стороны шляпки гвоздя на лапку  $AB$  рычага в точке  $D$  действует нормальная реакция  $R = 1730$  Н. Реакция опорной точки  $B$  из рассмотрения равновесия рычага исключается. Полученная расчетная схема изображена на рис. 3.12, б.

Рычаг находится в равновесии, если сумма моментов действующих на него сил относительно точки вращения рычага (опорной точки) равна нулю:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad F \cdot BE - R \cdot DB = 0,$$

где  $DB$  – плечо силы  $R$ ,

$BE = BC \cos 30^\circ$  – плечо силы  $F$  относительно точки  $B$ .

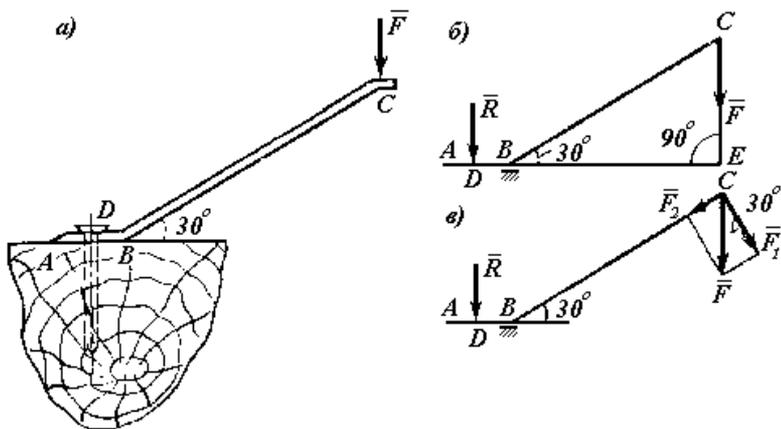


Рис. 3.12. К примеру 51

Получаем:

$$F \cdot BC \cdot \cos 30^{\circ} - R \cdot DB = 0;$$

$$F \cdot 350 \cdot 10^{-3} \cdot 0,866 - 1730 \cdot 35 \cdot 10^{-3} = 0,$$

отсюда  $F = 200$  Н. Здесь  $BC = 350$  мм =  $350 \cdot 10^{-3}$  м;  $DB = 35$  мм =  $35 \cdot 10^{-3}$  м.

В большинстве задач удобнее определять момент силы относительно точки, пользуясь разложением силы на составляющие и теоремой Вариньона, согласно которой момент равнодействующей силы равен сумме моментов ее составляющих. Поясним сказанное на примере (рис. 3.12, в).

Здесь  $F_2$  – составляющая силы  $F$  по направлению  $BC$ ;  $F_1$  – составляющая по направлению нормали к  $BC$ . Легко заметить, что составляющая  $F_2$  относительно точки  $B$  момента не создает, так как линия ее действия проходит через эту точку (плечо силы равно нулю). Плечом же составляющей  $F_1 = F \cdot \cos 30^{\circ}$  является  $BC$ . При решении задач разложение силы на составляющие можно не изображать на чертеже, а выполнять это действие мысленно.

Итак, получаем  $\sum M_B(\vec{F}_i) = 0$ ;  $F \cdot \cos 30^{\circ} \cdot BC - R \cdot DB = 0$ , отсюда  $F = 200$  Н.

**Ответ:**  $F = 200$  Н.

**Пример 52.** Телескопическая стрела  $AB$  автокрана (рис. 3.13, а) весом  $G = 4$  кН с центром тяжести в точке  $C$  несет на конце груз  $F = 15$  кН. Стрела удерживается в равновесии с помощью гидравлического домкрата  $DE$ . Принимая  $AB = 20$  м,  $AC = 7$  м и  $AD = 1,5$  м, определить реакции опорного шарнира  $A$  и силу, нагружающую шток домкрата.

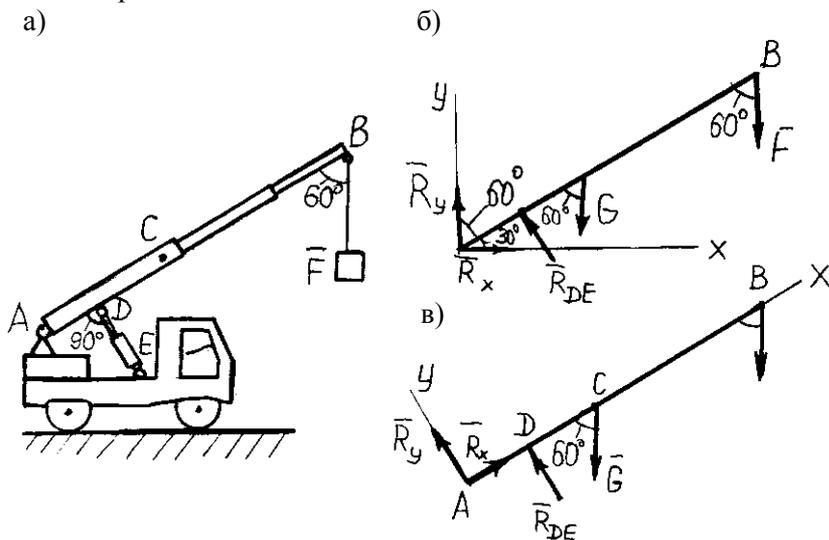


Рис. 3.13. К примеру 52

**Решение.** Рассматриваем равновесие стрелы  $AB$ . К ней приложены заданные активные силы – вес груза  $F$  и вес стрелы  $G$ . Рассматривая тело  $AB$  как свободное, отбрасываем связи (стержень домкрата  $DE$  и шарнирно-неподвижную опору  $A$ ), заменяя их действие реакциями. Реакция  $R_{DE}$  стержня направлена вдоль него к телу  $AB$  (так как очевидно, что в нашем случае стержень сжат). Реакция опоры  $A$  заранее по направлению неизвестна, поэтому заменяем ее двумя составляющими  $R_x$  и  $R_y$  по осям координат, принимая обычное вертикально-горизонтальное направление координатных осей. Расчетная схема изображена на рис. 3.13, б. Для полученной плоской произвольной системы сил составляем три уравнения равновесия (напоминаем, что в качестве центра моментов целесообразно выбирать точку пересечения двух неизвестных сил – в нашем случае точку  $A$ ):

$$\begin{aligned}
 1) \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0; \\
 -R_{DE} \cdot AD + G \cdot \cos 30^\circ \cdot AC + F \cdot \cos 30^\circ \cdot AB &= 0; \\
 -R_{DE} \cdot 1,5 + 4 \cdot 0,866 \cdot 7 + 15 \cdot 0,866 \cdot 20 &= 0,
 \end{aligned}$$

отсюда

$$R_{DE} = 189 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned}
 2) \sum F_{iX} &= 0; \\
 R_X - R_{DE} \cos 60^\circ &= 0; \quad R_X - 189 \cdot 0,5 = 0,
 \end{aligned}$$

откуда

$$R_X = 94,5 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned}
 3) \sum F_{iY} &= 0; \quad R_Y + R_{DE} \cos 30^\circ - G - F = 0; \\
 R_Y + 189 \cdot 0,866 - 4 - 15 &= 0,
 \end{aligned}$$

откуда

$$R_Y = -145 \text{ кН.}$$

Составляем проверочное уравнение равновесия, в качестве которого может быть принято любое уравнение проекций или моментов, кроме уже использованных в решении. Возьмем, например:

$$\begin{aligned}
 \sum M_B(\vec{F}_i) &= R_Y \cdot \cos 30^\circ \cdot AB - R_X \cdot \cos 60^\circ \cdot AB + \\
 &\quad + R_{DE} \cdot DB - G \cdot \cos 30^\circ \cdot CB = \\
 &= (-145) \cdot 0,866 \cdot 20 - 94,5 \cdot 0,5 \cdot 20 + 189 \cdot 18,5 - 4 \cdot 0,866 \cdot 13 = \\
 &= -3490 + 3480 \approx 0.
 \end{aligned}$$

Полученное небольшое расхождение в третьем знаке допустимо, так как объясняется погрешностью счета. Следовательно, реакции  $R_X$ ,  $R_Y$  и  $R_{DE}$  определены верно. Реакция  $R_Y$  получилась отрицательной; это указывает на то, что ее действительное направление проти-

воположно предварительно выбранному. Искомая сила, нагружающая шток домкрата  $DE$ , по модулю равна найденной реакции, а по направлению противоположна ей.

В двух из трех уравнений равновесия, использованных в решении, содержалось более чем по одному из неизвестных, чего можно было избежать, направив координатные оси по-другому (рис. 3.13, в). При этом уже две точки ( $A$  и  $D$ ) будут точками пересечения двух неизвестных сил (так как изменилось направление составляющих реакций опоры  $A$ ), что позволит применить другую систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \\
 & -R_{DE} \cdot AD + G \cdot \cos 30^\circ \cdot AC + F \cdot \cos 30^\circ \cdot AB = 0; \\
 & -R_{DE} \cdot 1,5 + 4 \cdot 0,866 \cdot 7 + 15 \cdot 0,866 \cdot 20 = 0.
 \end{aligned}$$

Это уравнение осталось без изменений. Получаем

$$R_{DE} = 189 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sum M_D(\vec{F}_i) = 0; \\
 & R_Y \cdot AD + G \cdot \cos 30^\circ \cdot DC + F \cdot \cos 30^\circ \cdot DB = 0; \\
 & R_Y \cdot 1,5 + 4 \cdot 0,866 \cdot 5,5 + 15 \cdot 0,866 \cdot 18,5 = 0,
 \end{aligned}$$

отсюда

$$R_Y = -173 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \sum F_{ix} = 0; \\
 & R_X - G \cdot \cos 60^\circ - F \cdot \cos 60^\circ = 0; \\
 & R_X - 4 \cdot 0,5 - 15 \cdot 0,5 = 0,
 \end{aligned}$$

отсюда

$$R_X = -173 \text{ кН.}$$

Составляем проверочное уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{iy} &= R_Y + R_{DE} - G \cdot \cos 30^\circ - F \cdot \cos 30^\circ = \\ &= -173 + 189 - 4 \cdot 0,866 - 15 \cdot 0,866 = 0.\end{aligned}$$

Во втором варианте решения иным направлениям составляющих реакций  $R_X$  и  $R_Y$  опоры  $A$  соответствуют и иные их значения. Полная реакция опоры  $R_A$  не зависит от направления ее составляющих, в чем легко убедиться с помощью расчета:

$$R_A = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2};$$

$$R_A = \sqrt{(94,5)^2 + (-145)^2} = 173,2 \text{ кН} - \text{ для первого варианта.}$$

$$R_A = \sqrt{(9,5)^2 + (-173)^2} = 173,2 \text{ кН} - \text{ для второго варианта.}$$

**Ответ:**  $R_{DE} = 189 \text{ кН}$ ;  $R_A = 173,2 \text{ кН}$ .

**Пример 53.** Однородная балка (рис. 3.14, а), сила тяжести которой 2 кН, закреплена в точке  $A$  с помощью шарнирно-неподвижной опоры и опирается в точке  $B$  на ребро стены. Найти реакции опор, если  $AD = 4 \text{ м}$ ,  $BD = 1 \text{ м}$ .

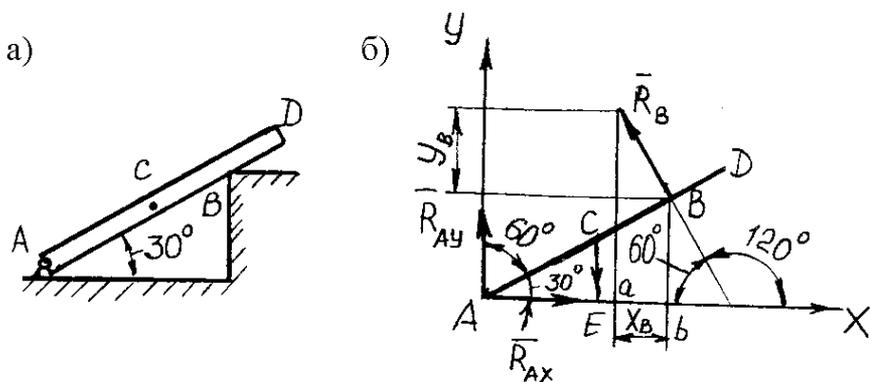


Рис. 3.14. К примеру 53

**Решение.** На балку действует одна активная сила - сила тяжести. Сила тяжести однородной балки приложена в ее середине (точка  $C$ ). Освободим балку от связей, приложив к ней вместо связей силы реакций (рис. 3.14, б). В точке  $A$  к балке надо приложить неизвестную по модулю и направлению реакцию  $R_A$ . Разложим ее на две составляющие  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$ . В точке  $B$  балка опирается на ребро. В таком случае реакция  $R_B$  должна быть перпендикулярна балке  $AD$ .

Сила тяжести вместе с реактивными силами представляет уравновешенную систему сил, произвольно расположенных в плоскости, для которой можно составить три независимых уравнения равновесия.

Составим два уравнения проекций и одно уравнение моментов. Поместим начало осей координат в точке  $A$  и для упрощения уравнений направим оси  $X$  и  $Y$  по неизвестным составляющим  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$  силы реакции.

Спроецируем все силы на ось  $X$  и получим первое уравнение равновесия:

$$\sum F_{iX} = R_{AX} - R_B \cdot \cos 60^\circ = 0. \quad (3.6)$$

Сила тяжести  $G$  и составляющая  $R_{AY}$  в уравнение не вошли, так как они перпендикулярны оси  $X$  и их проекции равны нулю. Проекция силы  $R_B$  взята со знаком «минус», так как соответствующий ей отрезок  $ab$  оси  $X$  направлен в сторону, противоположную положительному направлению оси  $X$ .

Спроецируем все силы на ось  $Y$ :

$$\sum F_{iY} = R_{AY} - G + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (3.7)$$

Сила  $G$  полностью проецируется на ось  $Y$ , так как она ей параллельна.  $R_{AY}$  проецируется полностью по той же причине. Проекция силы  $R_B$  взята со знаком «плюс», так как она совпадает с положительным направлением оси  $Y$ .

Для составления уравнения моментов в качестве центра моментов может быть выбрана любая точка плоскости, но для получения более простого уравнения следует воспользоваться следующей рекомендацией: в качестве центра моментов надо выбирать ту точку,

через которую проходит большее число неизвестных сил. В таком случае уравнения неизвестных сил в уравнение моментов не войдут, так как их моменты окажутся равными нулю. Из рисунка видно, что в качестве центра моментов следует взять точку  $A$ . Тогда третье уравнение будет иметь вид

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = G \cdot AE - R_B \cdot AB = 0,$$

где

$$AE = AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{AD}{2} \cdot \cos 30^\circ.$$

Перепишем уравнение моментов:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = G \cdot \frac{AD}{2} \cdot \cos 30^\circ - R_B \cdot AB = 0. \quad (3.8)$$

Момент силы тяжести взят с положительным знаком в силу того, что он направлен по часовой стрелке. Момент реакции  $R_B$  направлен против часовой стрелки, поэтому он взят со знаком «минус».

Из уравнения (3.8)

$$R_B = G \cdot \frac{AD \cdot \cos 30^\circ}{2 \cdot AB} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 0,866}{2 \cdot 3} = 1,15 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.7) получим:

$$R_{AY} = G - R_B \cdot \cos 30^\circ = 2 - 1,15 \cdot 0,866 = 1 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.6) найдем

$$R_{AX} = R_B \cdot \cos 60^\circ = 1,15 \cdot 0,5 = 0,58 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности решения воспользуемся уравнением моментов относительно точки  $C$ :

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = R_{AY} \cdot AC \cdot \cos 30^\circ - R_{AX} \cdot AC \cdot \sin 30^\circ - R_B \cdot BC = 0.$$

Если после подстановки значений  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_B$  уравнение превратится в тождество вида  $0 = 0$ , то, значит, задача решена верно. Подставив числовые значения, получим  $1 \cdot 2 \cdot 0,866 - 0,58 \cdot 2 \cdot 0,5 - 1,15 \cdot 1 = 0$ , т. е.  $0 = 0$ . Задача решена правильно.

Полная реакция опоры  $R_A$  :

$$R_A = \sqrt{1^2 + 0,58^2} = 1,16 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 1,16 \text{ кН}$ ;  $R_B = 1,15 \text{ кН}$ .

**Пример 54.** Однородная балка (рис. 3.15, а), сила тяжести которой  $G = 600 \text{ Н}$ , прикреплена к полу в точке  $A$  с помощью шарнирно-неподвижной опоры; в точке  $B$  поддерживается стержнем, имеющим на концах шарниры. К концу балки  $C$  прикреплена веревка, перекинутая через блок и несущая груз  $F = 200 \text{ Н}$ . Найти реакции опор, если  $AC = 6 \text{ м}$ ,  $AB = 4 \text{ м}$ . Трением на блоке пренебречь.

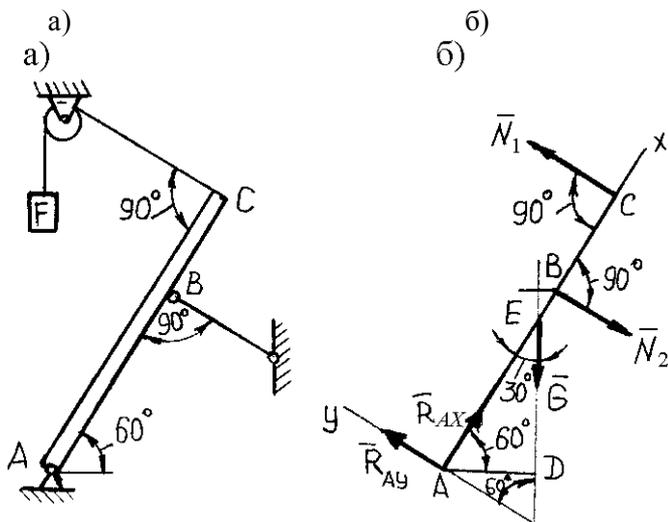


Рис. 3.15. К примеру 54

**Решение.** Освободим балку от связей, отбросив все связи и заменив их силами реакций (рис. 3.15, б).

В точке  $A$  балка имеет шарнирно-неподвижную опору, направленные реакции которой неизвестно ни по модулю, ни по направлению. Разложим ее на две неизвестные составляющие  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ , направив их вдоль выбранных осей координат.

В точке  $C$  балка имеет связь в виде гибкой нити, реакция которой всегда направлена вдоль нити в сторону от рассматриваемого тела. Известно, что блок изменяет лишь направление силы, не меняя ее числового значения, значит,  $N_1 = F = 200$  Н.

Опора в точке  $B$  представляет собой стержень с шарнирами на концах. Его реакция направлена по прямой, соединяющей центры шарниров, т. е. по стержню. Если реакция нити всегда направлена от тела, то реакция стержня может быть направлена как от тела, так и к телу. Если стержень растягивается, то его реакция направлена от рассматриваемого тела, при сжатии - в сторону от стержня к телу. При составлении уравнения равновесия все стержневые связи условно считаются растянутыми. Если в результате решения задачи реакция какого-либо стержня окажется отрицательной, то это означает, что данный стержень не растянут, а сжат.

На балку действует плоская система произвольно расположенных сил. Составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_A(\vec{F}_i) = 0.$$

Начало осей координат поместим в точку  $A$ , направив ось  $X$  вдоль балки, а  $Y$  - перпендикулярно к балке. В качестве центра моментов по-прежнему возьмем точку  $A$ . Тогда уравнение проекций на ось  $X$  примет вид

$$\sum F_{ix} = R_{AX} - G \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (3.9)$$

Силы  $N_2$ ,  $N_1$  не вошли в уравнение, так как они перпендикулярны оси  $X$ .

Спроецируем силы на ось  $Y$ :

$$\sum F_{iy} = R_{AY} + N_1 - N_2 - G \cdot \cos 60^\circ = 0. \quad (3.10)$$

Составляющая  $R_{AX}$  не вошла в данное уравнение, так как она перпендикулярна оси  $Y$ .

Составим уравнение моментов относительно точки  $A$ . Для нахождения плеч сил опустим из точки  $A$  перпендикуляры на линии действия всех сил. Плечом силы  $G$  будет отрезок  $AD$ , плечом силы  $N_2$  будет отрезок  $AB$ , плечом силы  $N_1$  будет отрезок  $AC$ .

Уравнение моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = G \cdot AD + N_2 \cdot AB - N_1 \cdot AC = 0. \quad (3.11)$$

Моменты сил  $G$  и  $N_2$  направлены по часовой стрелке, поэтому они вошли в уравнение с положительным знаком. Момент силы  $R_C$  направлен против часовой стрелки, поэтому имеет знак «минус».

Из уравнения (3.11)

$$N_2 = (N_1 \cdot AC - G \cdot AD) / AB.$$

Из рис. 3.15, б видно, что  $AD = (AC/2) \cdot \cos 60^\circ = (6/2) \cdot 0,5 = 1,5$  м.

Подставив числовые значения и вспомнив, что  $N_1 = F = 200$  Н, получим:

$$N_2 = (200 \cdot 6 - 600 \cdot 1,5) / 4 = 75 \text{ Н.}$$

Из уравнения (3.10)

$$R_{AY} = N_2 + G \cdot \cos 60^\circ - N_1.$$

Подставив значения сил, получим:

$$R_{AY} = 75 + 600 \cdot 0,5 - 200 = 175 \text{ Н.}$$

Из уравнения (3.9)

$$R_{AX} = G \cdot \cos 30^\circ = 600 \cdot 0,866 = 520 \text{ Н.}$$

Проверим правильность решения задачи, составив уравнение моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = R_{AY} \cdot AB - G \cdot BE - N_1 \cdot BC = 0.$$

Из рис. 3.15, б видно, что  $BE = 1 \cdot \sin 30^\circ = 0,5$  м, тогда

$$\begin{aligned} \sum M_B(\vec{F}_i) &= 175 \cdot 4 - 600 \cdot 0,5 - 200 \cdot 2 = 0; \\ 700 - 700 &= 0; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

При подстановке получили тождество  $0 = 0$ , значит, задача решена верно.

Полная реакция опоры  $R_A$  :

$$R_A = \sqrt{175^2 + 520^2} = 548,66 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 548,66$  кН;  $R_B = 75$  кН.

**Пример 55.** Брус (рис. 3.16, а) шарнирно закреплен в точке  $A$ , а в точке  $B$  опирается на выступ стенки, образуя с горизонтальной плоскостью угол  $30^\circ$ . В точке  $C$  на расстоянии  $AC = 1$  м брус нагружен перпендикулярной к нему силой  $F = 800$  Н. Определить реакцию шарнира  $A$  и выступа, если  $AB = 2,4$  м.

**Решение.** Порядок решения этой задачи может быть следующим:

1. Изобразим заданный груз вместе с нагрузками на рисунке, соблюдая при этом угол наклона бруса и масштаб для размеров по его длине (рис. 3.16, б).

2. Освободим брус от связей (в точках  $A$  и  $B$ ), заменив эти связи их реакциями. Нужно помнить, что при свободном опирании тела о связь реакция связи направлена от связи к телу перпендикулярно либо поверхности тела, либо поверхности связи. В данном случае конец бруса  $B$  опирается на выступ стены, значит, реакция выступа направлена перпендикулярно брусу (рис. 3.16, б и 3.16, в). Направ-

ление реакции неподвижного шарнира  $A$ , как правило, заранее неизвестно, и поэтому эту реакцию заменяем ее составляющими, направленными вдоль выбранных координатных осей  $X$  и  $Y$ . Приняв за начало координат точку  $A$ , можно придать осям обычное горизонтально-вертикальное положение (рис. 3.16, б), тогда реакция  $R_A$  шарнира  $A$  заменяется составляющими  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$ . Но можно выбрать иное направление осей, например: ось  $X$  совместить с брусом  $AB$ , а ось  $Y$  направить перпендикулярно брусу (рис. 3.16, в), тогда реакция шарнира  $A$  заменяется составляющими  $R'_{AX}$  и  $R'_{AY}$ .

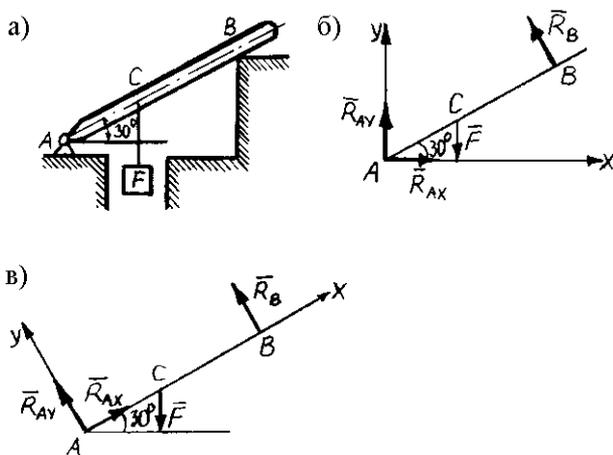


Рис. 3.16. К примеру 55

3. Для получившейся расчетной схемы действия на брус плоской системы четырех сил составим три уравнения равновесия. Если задача решается по схеме на рис. 3.16, б, то целесообразно составить уравнения:

а)  $\sum F_{iX} = 0$  – алгебраическую сумму проекций всех сил на ось  $X$ ;

б)  $\sum F_{iY} = 0$  – алгебраическую сумму проекций всех сил на ось  $Y$ ;

в)  $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0$  – алгебраическую сумму моментов всех сил относительно шарнира  $A$ .

Если задача решается по схеме на рис. 3.16, в, то целесообразно составить уравнения:

- а')  $\sum F_{iX} = 0$  – алгебраическую сумму проекций всех сил на ось  $X$ ;  
 б')  $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0$  – алгебраическую сумму моментов всех сил относительно точки  $A$  (неподвижного шарнира);  
 в')  $\sum M_B(\vec{F}_i) = 0$  – алгебраическую сумму моментов всех сил относительно точки  $B$ .

4. Решить уравнения и найти численные значения сил  $R_B$ ,  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$  (или  $R'_{AX}$  и  $R'_{AY}$ ).

5. Сложить по правилу параллелограмма составляющие  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$  (или  $R'_{AX}$  и  $R'_{AY}$ ) и найти численное значение  $R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}$  и направление вектора  $R_A$  относительно бруса  $AB$  ( $R_A$ ,  $AB$ ). Вектор  $R_A$  изобразить на рисунке.

6. Проверить правильность решения задачи. В данном случае проверку решения следует выполнить, используя теорему о равенстве трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости: изобразить брус  $AB$ , точно соблюдая требования, содержащиеся в условии задачи, провести линии действия данной силы  $F$  и найденной реакции  $R_A$  (эти линии пересекутся в какой-то точке  $D$ ). Если задача решена правильно, то линия действия реакции  $R_A$ , проведенная под найденным углом  $\varphi = (R_A, AB)$ , пройдет также через точку  $D$ .

Для бруса, изображенного на рис. 3.16, а, решение выглядит так.

По схеме на рис. 3.16, б уравнения имеют вид:

- а)  $\sum F_{iX} = 0$ ;  $R_{AX} - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0$ ;  
 б)  $\sum F_{iY} = 0$ ;  $R_{AY} - 800 + R_B \cdot \sin 60^\circ = 0$ ;  
 в)  $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0$ ;  $R_B \cdot 2,4 - 800 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = 0$ .

Из уравнения (в) получаем:

$$R_B = \frac{800 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ}{2,4} = 289 \text{ Н.}$$

Из уравнения (а) получаем:

$$R_{AX} = 289 \cdot \sin 30^\circ = 144,5 \text{ Н.}$$

Из уравнения (б) получаем:

$$R_{AY} = 800 - 289 \cdot \sin 60^\circ = 550 \text{ Н.}$$

Численные значения  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$  получились положительными, значит, они в действительности направлены так, как показано на рисунке, т. е.  $R_{AX}$  вправо вдоль оси  $X$ , а  $R_{AY}$  – вверх вдоль оси  $Y$  (рис. 3.17, а). Если бы какая-либо из составляющих получилась отрицательной, это означало бы, что она направлена в противоположную сторону относительно направления, указанного на рисунке.

Определяем численное значение реакции шарнира  $A$ :

$$R_A = \sqrt{144,5^2 + 550^2} = 568,6 \text{ Н} \approx 569 \text{ Н.}$$

Определяем угол  $\varphi$ , образуемый вектором  $R_A$  с осью  $X$  (рис. 3.17):

$$\cos \varphi = \frac{R_{AX}}{R_A} = \frac{144,5}{569} = 0,254; \quad \varphi = 75^\circ 15' \approx 75^\circ.$$

Таким образом угол  $\varphi = (R_A, AB) = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ .

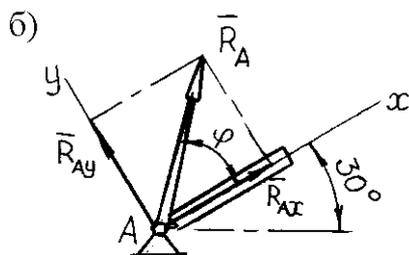
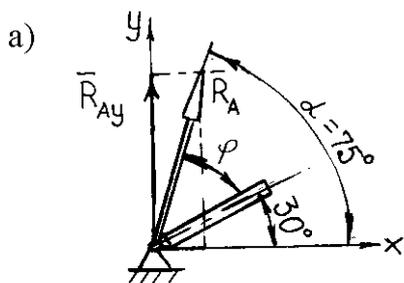


Рис. 3.17. К примеру 55

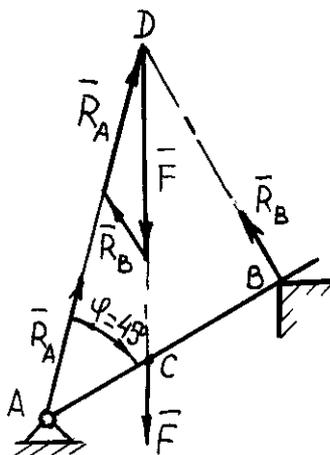


Рис. 3.18. К примеру 55

Решая задачу по схеме на рис. 3.16, в, получим такие уравнения:

$$a') \sum F_{iX} = 0; R'_{AX} - 800 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$б') \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; R_B \cdot 2,4 - 800 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$в') \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; 800 \cdot 1,4 \cdot \sin 60^\circ - R'_{AY} \cdot 2,4 = 0.$$

Последовательно из уравнений (а'), (б') и (в') находим:

$$R_B = 289 \text{ Н}; R'_{AX} = 400 \text{ Н и } R'_{AY} = 403 \text{ Н}.$$

Значит, в этом случае направления составляющих  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$  совпадают с положительным направлением осей (рис. 3.17, б).

Численное значение реакции шарнира  $A$

$$R_A = \sqrt{400^2 + 403^2} = 567,8 \text{ Н};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R'_{AX}}{R'_{AY}} = \frac{403}{400} = 1,01 \approx 1; \quad \varphi = (R_A, AB) \approx 45^\circ.$$

Как видим, результаты обоих решений полностью совпадают. Незначительные различия в ответах лежат в пределах, допустимых при подсчете. Проверив решение (см. п. 6), увидим (см. рис. 3.18), что линии действия трех сил  $F$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  пересекаются в одной точке. Значит, задача решена правильно.

**Ответ:**  $R_A = 567,8 \text{ Н}; R_B = 289 \text{ Н}.$

**Пример 56.** Однородный брус  $AB$  весом  $G = 16 \text{ Н}$  опирается концом  $A$  на гладкий горизонтальный пол и промежуточной точкой на ребро  $D$ . Брус удерживается под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонтали веревкой  $EF$ , перпендикулярной к оси бруса, причем  $BD = DE = EA$ . Определить натяжение веревки  $EF$  и реакции опор  $A$  и  $D$  (рис. 3.19, а).

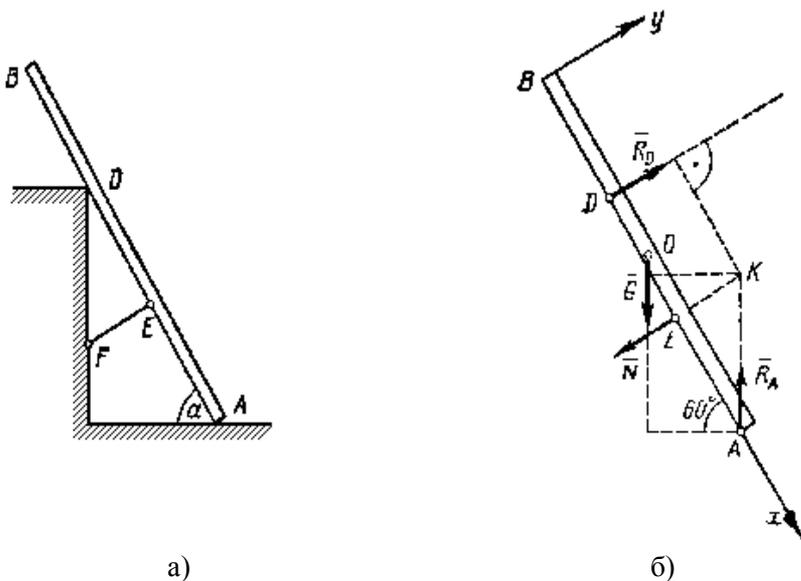


Рис. 3.19. К примеру 56

**Решение.** Прикладываем к брусу в середине его длины  $O$  вес бруса  $G$  (рис. 3.19, б). Освобождаем брус от трех связей и заменяем их реакциями  $R_A$ ,  $N$  и  $R_D$ . Направления этих реакций известны, а их модули получим из системы трех уравнений равновесия.

В рассматриваемом примере нет точки приложения двух неизвестных сил, относительно которой, как правило, составляется уравнение моментов.

Найдем точку пересечения линий действия двух неизвестных сил, например,  $N$  и  $R_A$ , и примем ее за центр моментов. Тогда силы  $N$  и  $R_A$  не будут иметь моментов относительно этой точки  $K$ . Плечи сил  $R_D$  и  $G$  найдем, опустив перпендикуляр из точки  $K$  на линии действия этих сил. Обозначим длину бруса  $L$ , тогда:

$$BD = DE = EA = L / 3, \quad AO = L / 2.$$

Проведем оси координат через точку  $B$  (рис. 3.19, б).  
Уравнения равновесия сил:

$$\sum M_K(\vec{F}_i) = 0; G \cdot L/2 \cdot \cos 60^\circ - R_D \cdot L/3 = 0,$$

откуда

$$R_D = 3/2 \cdot G \cdot \cos 60^\circ = 3/2 \cdot 16 \cdot 0,5 = 12 \text{ Н.} \quad (3.12)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_A \cdot \cos 60^\circ - N - G \cdot \cos 60^\circ + R_D = 0; \quad (3.13)$$

$$\sum F_{ix} = 0; -R_A \cdot \cos 30^\circ + G \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.14) получим:

$$R_A = G = 16 \text{ Н.}$$

Подставим в уравнение (3.13) значение  $R_A = 16 \text{ Н}$ .

Имеем

$$-N + R_D = 0 \text{ и } N = R_D = 12 \text{ Н.}$$

Из анализа результатов решения увидим, что силы  $G$  и  $R_A$  составляют пару сил, а силы  $R_D$  и  $N$  – другую пару. Моменты этих пар равны по величине и противоположны по знаку, что позволяет брусу находиться в равновесии.

**Ответ:**  $R_D = 12 \text{ кН}$ ;  $R_A = 16 \text{ кН}$ ;  $N = 12 \text{ кН}$ .

**Пример 57.** Определить реакции опор консольной балки  $AB$  весом  $G = 15 \text{ кН}$ , находящейся под действием сил  $F_1 = 40 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 30 \text{ кН}$  и пары с моментом  $|M| = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Размеры балки:  $AB = 9 \text{ м}$ ;  $AC = 1,5 \text{ м}$ ;  $CD = 6 \text{ м}$ ;  $CE = 2 \text{ м}$  (рис. 3.20, а).

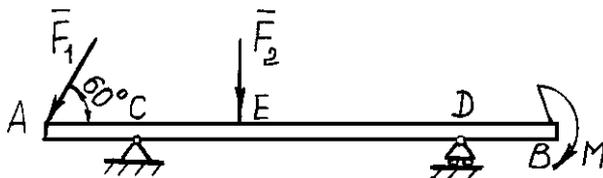


Рис. 3.20. К примеру 57

**Решение.** Решаем задачу согласно общей методике решения равновесных задач:

1. Рассматриваем равновесие плоской системы сил, действующих на балку  $AB$ .

2. Показываем действующие на балку заданные силы:  $F_1$ ,  $F_2$ , пару сил с моментом  $M$ , а также вес балки  $G$ , приложенный в середине длины  $AB$ .

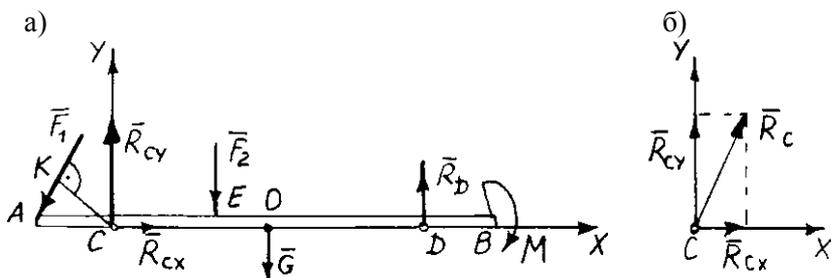


Рис. 3.21. К примеру 57

3. Мысленно отбрасываем связи балки: шарнирно-подвижную опору  $D$  и шарнирно-неподвижную опору  $C$ , заменяя их действие соответствующими реакциями (рис. 3.21, б). Направление реакции опоры  $C$  неизвестно, поэтому представим реакцию  $R_C$  в виде двух составляющих  $R_{Cx}$  и  $R_{Cy}$  по осям координат  $X$  и  $Y$ . Выбор направления осей обусловлен характером задачи, оси могут иметь любое направление. Реакция опоры  $R_D$  направлена вертикально.

4. Для плоской системы сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G$ ,  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$ ,  $R_D$  и пары сил с моментом  $M$  составим систему из трех уравнений равновесия:

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0.$$

При составлении первого уравнения за центр моментов  $O$  принимается, как правило, точка, относительно которой моменты наибольшего числа неизвестных сил равны нулю. Такой точкой в задаче является точка  $C$ .

Уравнения равновесия системы сил:

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad F_1 \cdot CK - F_2 \cdot CE - G \cdot CO + R_D \cdot CD - M = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -F_1 \cdot \cos 60^\circ + R_{Cx} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -F_1 \cdot \cos 30^\circ + R_{Cy} - F_2 - G + R_D = 0.$$

Перпендикуляр  $CK = AC \cdot \sin 60^\circ = 1,5 \cdot 0,866 = 1,3$  м.

5. Из трех уравнений равновесия определяем искомые реакции:

$$R_D = \frac{-F_1 \cdot CK + F_2 \cdot CE + G \cdot CO + M}{CD} =$$

$$= \frac{-40 \cdot 1,3 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 30}{6} = 13,8 \text{ кН.}$$

Из уравнений, составленных выше:

$$R_{Cx} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ кН;}$$

$$R_{Cy} = F_1 \cdot \cos 30^\circ + F_2 + G - R_D = 40 \cdot 0,866 + 30 + 15 - 13,8 =$$

$$= 65,8 \text{ кН.}$$

Все ответы имеют знак «плюс», следовательно, принятые направления сил  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$ ,  $R_D$  совпадают с действительными.

Определим модуль и направление реакции  $R_C$  опоры  $C$ .

$$R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2} = \sqrt{20^2 + 65,8^2} = 68,8 \text{ кН;}$$

$$\cos(\vec{R}_C, \vec{i}) = \frac{R_{Cx}}{R_C} = \frac{20}{68,8} = 0,291;$$

$$\cos(\vec{R}_C, \vec{j}) = \frac{R_{Cy}}{R_C} = \frac{65,8}{68,8} = 0,956;$$

$$\angle(\vec{R}_C, \vec{i}) \approx 73^\circ; \angle(\vec{R}_C, \vec{j}) \approx 17^\circ.$$

**Ответ:**  $R_D = 13,8$  кН;  $R_C = 68,8$  кН.

**Пример 58.** Горизонтально расположенный вал установлен в подшипниках (рис. 3.22, а) На валу закреплены зубчатые колеса 1 и 2. Зубчатые колеса передают на вал в точках  $C$  и  $D$  силы, направленные вертикально вниз:  $F_1 = 400$  Н и  $F_2 = 80$  Н. Определить опорные реакции.

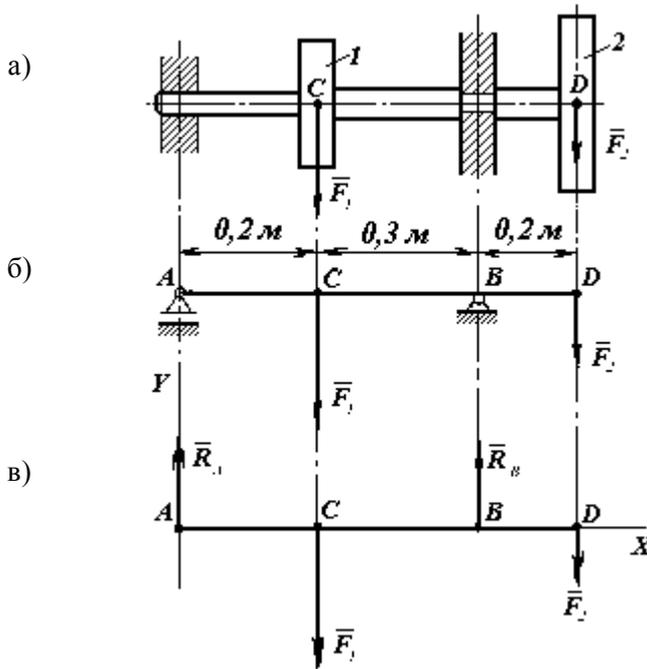


Рис. 3.22. К примеру 58

**Решение.**

1. Выполним расчетную схему. На рис. 3.22, а видно, что левый подшипник не препятствует валу перемещаться вдоль его оси, поэтому на схеме (рис. 3.22, б) изображаем его шарнирно-подвижной опорой. Правый подшипник препятствует перемещению вала вдоль

его продольной оси. На схеме этот подшипник изображаем шарнирно-неподвижной опорой. Вал заменяем одной линией – его осью. Реакции подшипников распределены по поверхности соприкосновения подшипника и вала. На схеме эти силы можно изобразить сосредоточенными в точках  $A$  и  $B$ . Так как заданные силы направлены перпендикулярно оси вала вниз, то реакции опор будут направлены перпендикулярно вверх. По условию задачи силы  $F_1$  и  $F_2$  приложены в точках  $C$  и  $D$ .

2. Отбросим опоры, а их действие заменим реакциями  $R_A$  и  $R_B$  (рис. 3.22, в). Получаем систему параллельных сил, расположенных в одной плоскости.

3. Составим уравнения равновесия сил, приложенных к валу. Сумма моментов всех сил относительно точки  $B$  равна нулю:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad R_A \cdot 0,5 - F_1 \cdot 0,3 + F_2 \cdot 0,2 = 0.$$

Подставляя известные значения, получим:

$$R_A \cdot 0,5 - 400 \cdot 0,3 + 80 \cdot 0,2 = 0; \quad R_A = \frac{104}{0,5} = 208 \text{ Н.}$$

Аналогично найдем сумму моментов всех сил относительно точки  $A$  (см. рис. 3.22, в):

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad F_2 \cdot 0,7 - R_B \cdot 0,5 + F_1 \cdot 0,2 = 0.$$

Подставляя известные значения, получим:

$$80 \cdot 0,7 - R_B \cdot 0,5 + 400 \cdot 0,2 = 0; \quad R_B = \frac{136}{0,5} = 272 \text{ Н.}$$

4. Произведем проверку правильности определения опорных реакций. Для этого воспользуемся уравнением  $\sum F_{iY} = 0$ ;  $R_A - F_1 + R_B - F_2 = 208 - 400 + 272 + 80 = 0$ .

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

**Ответ:**  $R_A = 208 \text{ Н}$ ;  $R_B = 272 \text{ Н}$ .

**Пример 59.** (рис. 3.23, а). Однородная стрела  $AB$  настенного кра- на весом  $1,6$  кН, несущая груз весом  $8$  кН, удерживается в равнове- сии тросом  $CD$ . Приняв  $AB = 2,6$  м и  $CB = 0,8$  м, определить реак- ции опорного шарнира  $A$  и силу натяжения троса  $CD$ .

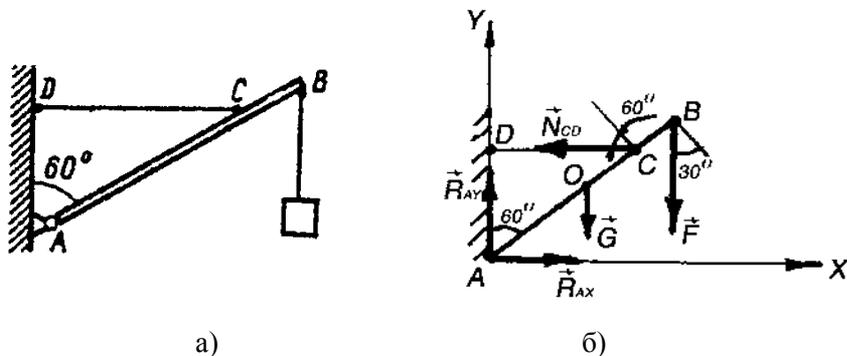


Рис. 3.23. К примеру 59

**Решение.** На стрелу наложены внешние связи – шарнир  $A$  и тяга  $CD$ . Заменим их реакциями. Реакцию шарнира  $A$  представим через его составляющие  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ , а реакцию тяги  $N_{CD}$  направим вдоль линии  $CD$  (рис. 3.23, б).

Запишем уравнения равновесия для стрелы  $AB$ :

$$\begin{cases} \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0. \end{cases}$$

$$N_{CD} \cdot CA \cdot \cos 60^\circ - F \cdot AB \cdot \cos 30^\circ - G \cdot AO \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$R_{Ax} - N_{CD} = 0;$$

$$R_{Ay} - G - F = 0.$$

Из первого уравнения

$$\begin{aligned}
 N_{CD} &= \frac{F \cdot AB \cdot \cos 30^0 + G \cdot AO \cdot \cos 30^0}{CA \cdot \cos 60^0} = \\
 &= \frac{F \cdot AB \cdot \cos 30^0 + G \frac{AB}{2} \cos 30^0}{(AB - CB) \cos 60^0}; \\
 N_{CD} &= \frac{8 \cdot 2,6 \cdot \cos 30^0 + 1,6 \frac{2,6}{2} \cos 30^0}{(2,6 - 0,8) \cos 60^0} = 22 \text{ кН}; \\
 R_{AX} &= N_{CD} = 22 \text{ кН};
 \end{aligned}$$

$$R_{AY} = G + F; \quad R_{AY} = 1,6 + 8 = 9,6 \text{ кН.}$$

Реакция опорного шарнира:

$$\begin{aligned}
 R_A &= \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; \\
 R_A &= \sqrt{22^2 + 9,6^2} = 24 \text{ кН.}
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $R_A = 24$  кН;  $N_{CD} = 22$  кН.

**Пример 60.** Кран для подъема небольших грузов имеет вертикальную ось вращения  $AB$  (рис. 3.24, а). Высота крана  $H = 4$  м, расстояние центра тяжести  $C$  до оси вращения  $\alpha = 0,6$  м. Сила тяжести крана  $3,2$  кН. Груз  $F = 8$  кН подвешен в точке  $D$ . Расстояние между осью вращения  $AB$  и линией действия силы тяжести груза  $\ell = 2,5$  м. Определить реакции подшипника  $A$  и подпятника  $B$ .

**Решение.** Будем рассматривать равновесие крана. Действие подшипника и подпятника заменим их реакциями (рис. 3.24,б). Запишем уравнение равновесия крана:

$$\sum M_A(F_K) = 0; \quad -F \cdot AD - G \cdot AC + R_{BX} \cdot AB = 0$$

(линии действия сил  $R_A$  и  $R_{BY}$  проходят через точку  $A$ , поэтому их моменты относительно этой точки равны нулю)

$$-F \cdot \ell - G \cdot \alpha + R_{BX} \cdot H = 0, \quad R_{BX} = \frac{F \cdot \ell + G \cdot \alpha}{H};$$

$$R_{BX} = \frac{8 \cdot 2,5 + 3,2 \cdot 0,6}{4} = 5,48 \text{ кН.}$$

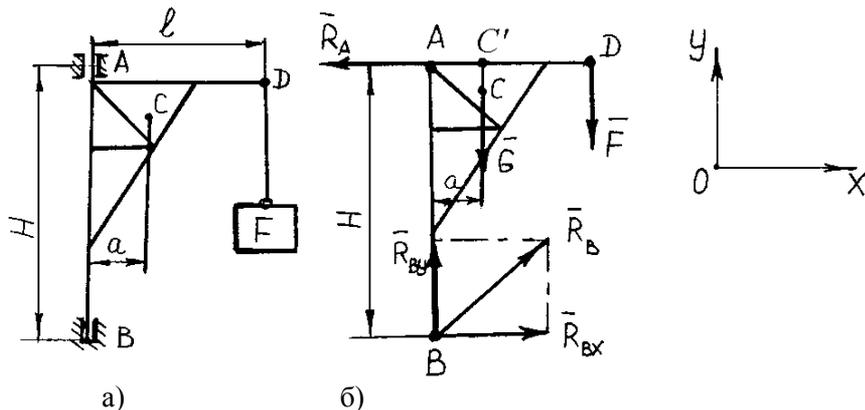


Рис. 3.24. К примеру 60

Спроецируем силы на оси  $OX$  и  $OY$ :

$$\sum F_{Kx} = 0; \quad -R_A + R_{BX} = 0; \quad R_A = R_{BX}; \quad R_A = 5,48 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{Ky} = 0; \quad R_{BY} - G - F = 0; \quad R_{BY} = G + F,$$

$$R_{BY} = 3,2 + 8 = 11,2 \text{ кН.}$$

Сила реакции подпятника  $B$ :

$$R_B = \sqrt{R_{BX}^2 + R_{BY}^2}; \quad R_B = \sqrt{5,48^2 + 11,2^2} = 12,49 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 5,48 \text{ кН}; R_B = 12,49 \text{ кН.}$

**Пример 61.** Однородная балка шарнирно закреплена в точке  $A$  и удерживается в горизонтальном положении тросом, прикрепленным одним концом к балке в точке  $B$ , а другим - к вертикальной стенке в точке  $C$ . Тележка с грузом находится на балке в указанном на рис. 3.25, а положении. Расстояние  $\ell = 8$  м,  $a = 3$  м,  $b = 1,8$  м. Угол  $\alpha = 30^\circ$ . Силу тяжести балки не учитывать. Сила тяжести тележки с грузом  $G = 20$  кН. Вычислить натяжение троса  $CB$  и реакции шарнирной опоры  $A$ .

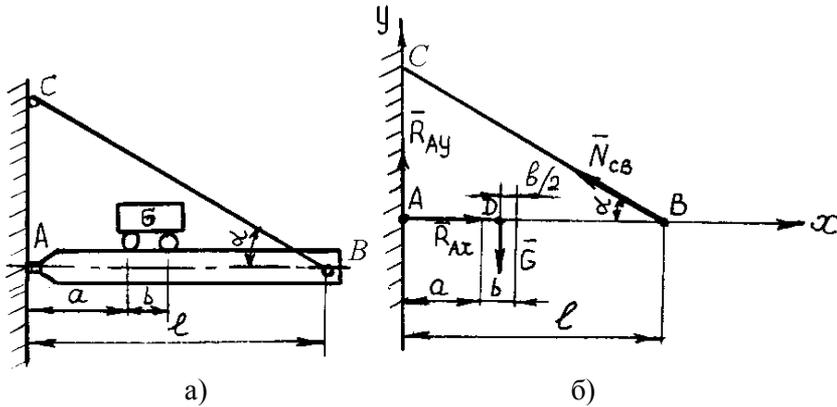


Рис. 3.25. К примеру 61

**Решение.** Заменяем действия опор их реакциями. Рассмотрим балку, которая находится в равновесии (рис. 3.25, б). Моменты сил относительно точки  $A$  скомпенсированы:

$$\sum M_A(F_K) = 0, \quad N_{CB} \cdot AB \cdot \sin \alpha - G \cdot AD = 0.$$

Плечи сил  $\vec{R}_{Ax}$  и  $\vec{R}_{Ay}$  относительно точки  $A$  равны нулю.

$$N_{CB} \cdot \ell \cdot \sin \alpha - G \left( a + \frac{b}{2} \right) = 0, \quad N_{CB} = G \frac{a + \frac{b}{2}}{\ell \cdot \sin \alpha};$$

$$N_{CB} = 20 \frac{3 + \frac{1,8}{2}}{8 \cdot \sin 30^\circ} = 19,5 \text{ кН.}$$

Спроецируем силы, действующие на балку, на оси  $OX$  и  $OY$ :

$$\sum X_i = 0; R_{AX} - N_{CB} \cos \alpha = 0; R_{AX} = N_{CB} \cos \alpha, \\ R_{AX} = 19,5 \cos 30^\circ = 16,9 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_i = 0; R_{AY} + N_{CB} \sin \alpha - G = 0; R_{AY} = G - N_{CB} \sin \alpha. \\ R_{AY} = 20 - 19,5 \sin 30^\circ = 10,25 \text{ кН.}$$

Сила реакции шарнирной опоры  $A$ :

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; \\ R_A = \sqrt{16,9^2 + 10,25^2} = 19,8 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $N_{CB} = 19,5$  кН;  $R_A = 19,8$  кН.

**Пример 62.** Автомобильный кран, схематически изображенный на рис. 3.26, а, удерживает в поднятом положении груз  $F = 20$  кН. Сила тяжести металлической конструкции крана равна  $6,2$  кН и приложена в точке  $C$ . Кран опирается на шарнирную опору в точке  $B$  и удерживается в равновесии упором в точке  $D$ . Расстояние от линии действия груза  $F$  до вертикальной оси  $\ell = 2,4$  м. Расстояние от центра тяжести  $C$  до вертикальной оси  $a = 0,4$  м. Точка упора  $B$  расположена на расстоянии  $b = 0,6$  м от вертикальной оси  $KB$ . Определить реакции упора  $D$  и шарнирной опоры  $B$ .

**Решение.** Обозначим все силы, действующие на кран. При этом заменим действие упора  $D$  и опоры  $B$  на кран их реакциями  $\vec{R}_D$  и  $\vec{R}_B$  (рис. 3.26, б).

Запишем дважды уравнение равновесия для крана – сначала относительно точки  $B$ , потом – для точки  $D$ :

1.  $\sum M_B(\vec{F}_K) = 0$ ,  $R_D \cdot b - G \cdot a - F \cdot \ell = 0$ , плечо силы  $\vec{R}_B$  равно нулю.

2.  $\sum M_D(\vec{F}_K) = 0$ ;  $R_B \cdot b - G(a + b) - F(\ell + b) = 0$ , плечо силы  $\vec{R}_D$  равно нулю.

Из первого уравнения

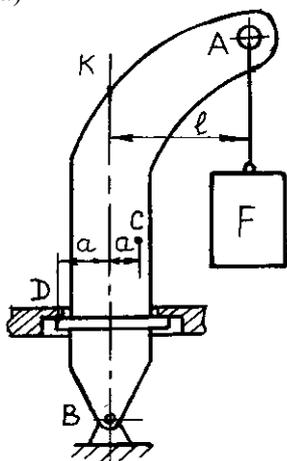
$$R_D = \frac{G \cdot a + F \cdot \ell}{b}; R_D = \frac{6,2 \cdot 0,4 + 20 \cdot 2,4}{0,6} = 84,13 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения

$$R_B = \frac{G(a+b) + F(\ell+b)}{b},$$

$$R_B = \frac{6,2(0,4+0,6) + 20(2,4+0,6)}{0,6} = 110,33 \text{ кН.}$$

а)



б)

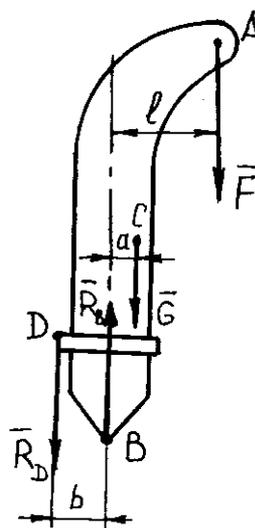


Рис. 3.26. К примеру 62

Ответ:  $R_B = 110,33 \text{ кН}$ ;  $R_D = 84,13 \text{ кН}$ .

**Пример 63.** Рычаг  $AB$  имеет шарнирную опору  $A$  и в точке  $D$  опирается на гладкую цилиндрическую поверхность (рис. 3.27, а). К рычагу в точке  $B$  прикреплен горизонтально направленный канат, натянутый силой  $F = 15$  кН. Длина  $\ell = 800$  мм. Угол  $\alpha = 45^\circ$ . Вычислить реакции в точке  $D$  и шарнира  $A$ . Сила тяжести рычага  $AB$  равна 600 Н.

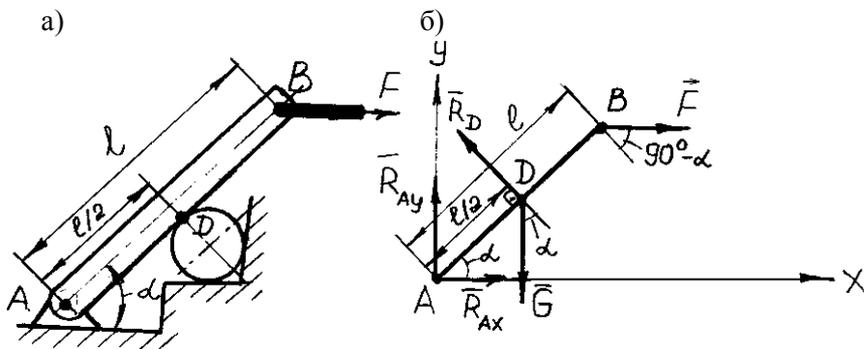


Рис. 3.27. К примеру 63

**Решение.** Действие опор заменяем их реакциями, при этом реакцию шарнира  $A$  раскладываем на 2 составляющие:  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$  (рис. 3.27, б). Рычаг находится в равновесии, поэтому моменты всех сил скомпенсированы. Запишем уравнение равновесия для точки  $A$ :

$$\sum M_A(F_K) = 0; R_D \cdot \frac{\ell}{2} - G \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\ell}{2} - F \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \ell = 0;$$

$$R_D = 2F \sin \alpha + G \cos \alpha,$$

$$R_D = 2 \cdot 15 \sin 45^\circ + 0,6 \cdot \cos 45^\circ = 21,64 \text{ кН.}$$

Спроецируем все силы на оси  $OX$  и  $OY$ :

$$\sum F_{KX} = 0; R_{AX} + F - R_D \cdot \sin \alpha = 0; R_{AX} = R_D \cdot \sin \alpha - F,$$

$$R_{AX} = 21,64 \cdot \sin 45^\circ - 15 = 0,3 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0; R_{AY} + R_D \cdot \cos \alpha - G = 0; R_{AY} = G - R_D \cdot \cos \alpha,$$

$R_{AY} = 0,6 - 21,64 \cdot \cos 45^{\circ} = -14,7$  кН (знак «минус» показывает, что направление силы  $\vec{R}_{AY}$  противоположно выбранному).

Реакция шарнира А

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{0,3^2 + 14,7^2} = \sqrt{216,2} = 14,7 \text{ кН.}$$

Ответ:  $R_D = 21,64$  кН;  $R_A = 14,70$  кН.

**Пример 64.** Брус  $AB$  прикреплен к стенке шарниром  $B$  и свободно опирается на гладкую наклонную плоскость в точке  $A$  (рис. 3.28, а). Угол  $\alpha = 30^{\circ}$ . Длина  $\ell = 1,5$  м. В точке  $D$  к брусу приложена сила  $F = 30$  кН. Найти реакции шарнира  $B$  и опорной плоскости в точке  $A$ , учитывая собственную силу тяжести бруса, равную 400 Н.

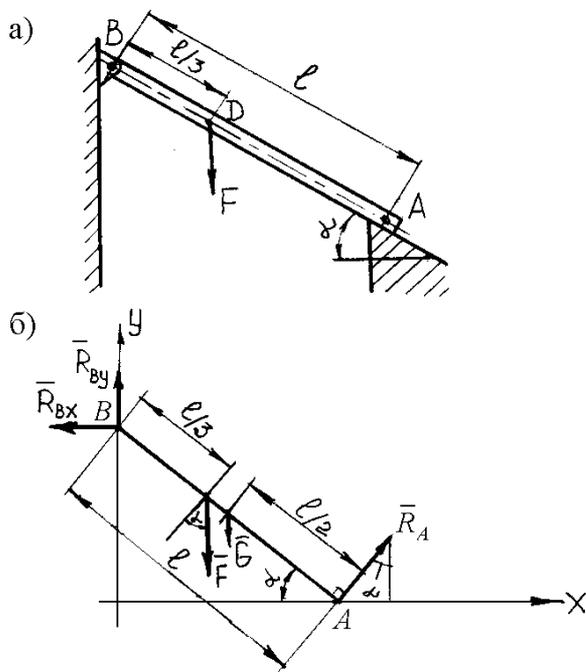


Рис. 3.28. К примеру 64

**Решение.** Заменяем действие на брус шарнира  $B$  и плоскости  $A$  их реакциями  $\vec{R}_B$  и  $\vec{R}_A$ , причём  $\vec{R}_B = \vec{R}_{BX} + \vec{R}_{BY}$  (рис. 3.28, б).

Брус находится в равновесии, поэтому:

$$\sum M_B(F_K) = 0; R_A \cdot \ell - F \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\ell}{3} - G \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\ell}{2} = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{3} F \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} G \cdot \cos \alpha;$$

$$R_A = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot \cos 30^\circ = 8,83 \text{ кН.}$$

Спроецируем силы, действующие на брус на координатные оси:

$$\sum F_{KX} = 0; -R_{BX} + R_A \cdot \sin \alpha = 0; R_{BX} = R_A \cdot \sin \alpha;$$

$$R_{BX} = 8,83 \cdot \sin 30^\circ = 4,42 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0; R_{BY} + R_A \cdot \cos \alpha - F - G = 0;$$

$$R_{BY} = F + G - R_A \cdot \cos \alpha;$$

$$R_{BY} = 30 + 0,4 - 8,83 \cdot \cos 30^\circ = 22,75 \text{ кН.}$$

Реакция шарнира:

$$R_B = \sqrt{R_{BX}^2 + R_{BY}^2}; R_B = \sqrt{4,42^2 + 22,75^2} = 23,18 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_B = 23,18 \text{ кН}; R_A = 8,83 \text{ кН.}$

**Пример 65.** Балка  $AB$  длиной  $\ell = 4 \text{ м}$  расположена горизонтально. В точке  $A$  балка прикреплена к стенке при помощи шарнира, а другим концом в точке  $B$  удерживается тросом  $BC$  (рис. 3.29, а). Угол, образованный направлением троса и осью балки  $\alpha = 45^\circ$ . К балке приложены две силы: в точке  $B - F_1 = 20 \text{ кН}$ , в точке  $D - F_2 = 8 \text{ кН}$ . Вычислить реакцию шарнира  $A$  и натяжение троса  $BC$ . Вес балки не учитывать.

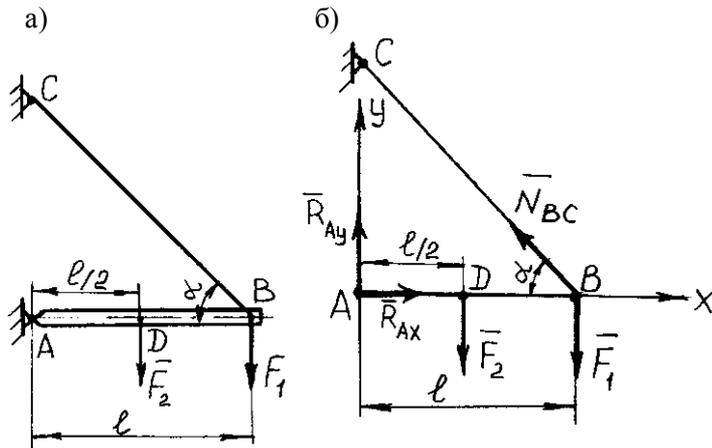


Рис. 3.29. К примеру 65

**Решение.** Рассмотрим равновесие бруса (рис. 3.29, б). Моменты всех сил, действующих на брус, скомпенсированы, т. е.

$$\sum M_A(F_K) = 0; N_{BC} \cdot l \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \frac{l}{2} - F_1 \cdot l = 0;$$

$$N_{BC} = \frac{F_1 + 0,5F_2}{\sin \alpha}; N_{BC} = \frac{20 + 0,5 \cdot 8}{\sin 45^\circ} = 33,94 \text{ кН.}$$

Спроецируем все силы, действующие на балку, на координатные оси:

$$\sum F_{KX} = 0; R_{AX} - N_{BC} \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$R_{AX} = N_{BC} \cdot \cos \alpha; R_{AX} = 33,94 \cdot \cos 45^\circ = 24 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0; R_{AY} + N_{BC} \cdot \sin \alpha - F_1 - F_2 = 0;$$

$$R_{AY} = F_1 + F_2 - N_{BC} \cdot \sin \alpha; R_{AY} = 20 + 8 - 33,94 \cdot \sin 45^\circ = 4 \text{ кН.}$$

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; R_A = \sqrt{24^2 + 4^2} = 24,33 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 24,33 \text{ кН}; N_{CB} = 33,94 \text{ кН.}$

**Пример 66.** Брус  $AB$  длиной  $\ell = 4$  м и силой тяжести  $0,4$  кН закреплён шарнирно в точке  $A$  и опирается на выступ стены в точке  $C$  (рис. 3.30, а). К концу стержня в точке  $B$  подвешен груз  $F = 0,6$  кН. Ось бруса образует с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . Точки  $A$  и  $E$  расположены на одной горизонтальной прямой. Высота  $EC = 1,2$  м. Определить реакцию в точке  $C$  и реакции шарнирной опоры  $A$ .

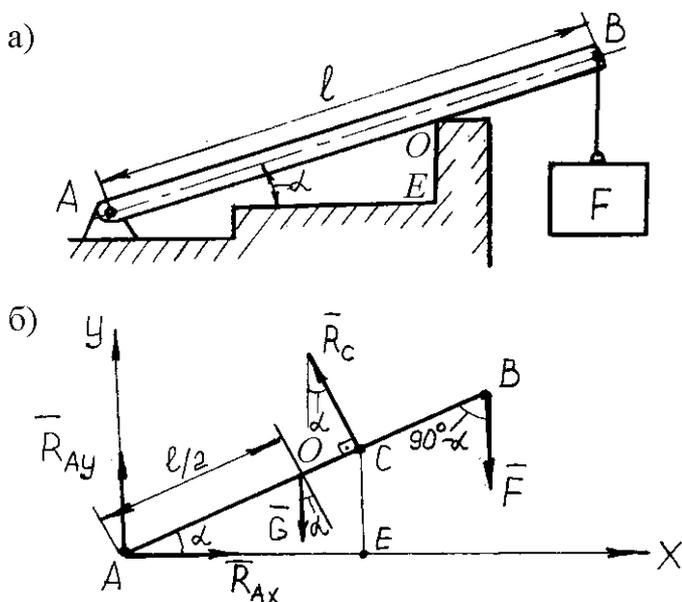


Рис. 3.30. К примеру 66

**Решение.** Обозначим все силы, действующие на брус. Реакцию шарнирной опоры  $R_A$  разложим на две составляющие  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  (рис. 3.30, б). Так как брус находится в равновесии, то моменты сил скомпенсированы:

$$\sum M_A(F_K) = 0; R_C \cdot AC - G \cdot AO \cdot \cos \alpha - F \cdot AB \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$R_C \cdot \frac{EC}{\sin \alpha} - G \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \cos \alpha - F \cdot \ell \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$R_C = \frac{(G \frac{\ell}{2} + F \cdot \ell) 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2EC}; R_C = \frac{(0,5G + F)}{2EC} \ell \cdot \sin 2\alpha;$$

$$R_C = \frac{(0,5 \cdot 0,4 + 0,6)}{2 \cdot 1,2} 4 \cdot \sin 60^\circ = 1,15 \text{ кН.}$$

Спроецируем все силы, действующие на брус, на координатные оси:

$$\sum F_{KX} = 0; R_{AX} - R_C \sin \alpha = 0; R_{AX} = R_C \sin \alpha;$$

$$R_{AX} = 1,15 \sin 30^\circ = 0,58 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0; R_{AY} + R_C \cos \alpha - G - F = 0;$$

$$R_{AY} = -R_C \cos \alpha + G + F;$$

$$R_{AY} = -1,15 \cos 30^\circ + 0,4 + 0,6 = 0,004 \text{ кН.}$$

Реакция шарнира  $A$ :

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; R_A = \sqrt{0,58^2 + 0,004^2} = 0,58 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_C = 1,15 \text{ кН}; R_A = 0,58 \text{ кН.}$

**Пример 67.** Стержень  $AB$  длиной  $\ell = 2 \text{ м}$  и силой тяжести  $0,5 \text{ кН}$  опирается одним концом  $A$  на горизонтальную гладкую плоскость, образуя с горизонтом угол  $\beta = 45^\circ$  (рис. 3.31, а). Стержень удерживается в равновесии тросом  $OC$ , наклоненным к горизонту под углом  $\alpha = 30^\circ$ . Определить реакцию в точках  $A$  и  $B$  и натяжение троса  $OC$ .

**Решение.** Обозначим силы, действующие на стержень  $AB$  (рис. 3.31, б). Стержень находится в равновесии. Сумма проекций всех сил на ось  $X$  и  $Y$  равна нулю. Моменты всех сил относительно любой точки скомпенсированы.

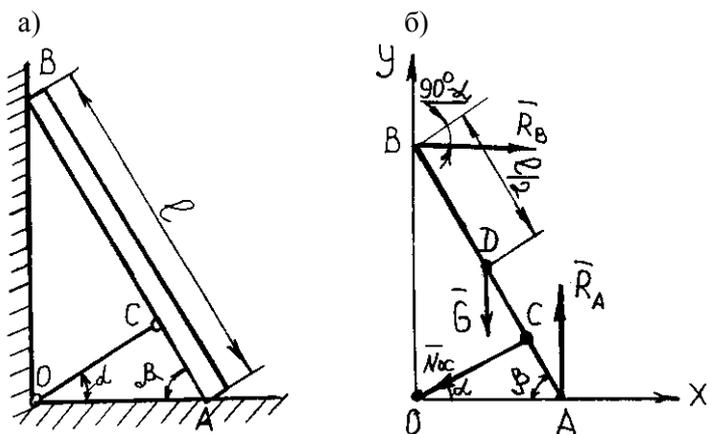


Рис. 3.31. К примеру 67

Для нахождения трёх неизвестных ( $R_A$ ,  $N_{OC}$ ,  $R_B$ ) составим систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} \sum M_A(F_K) = 0; \\ \sum F_{KX} = 0; \\ \sum F_{KY} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_B \cos(90^\circ - \alpha) \cdot AB + G \cos \alpha \cdot AO + \\ + N_{OC} \cos(90^\circ - (\alpha + \beta)) \cdot AC = 0; \\ R_B - N_{OC} \cos \alpha = 0; \\ -G + R_A - N_{OC} \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Из 2-го и 3-го уравнений:

$$R_B = N_{OC} \cos \alpha,$$

$$R_A = G + N_{OC} \sin \alpha \text{ — подставим в 1-е уравнение}$$

$$-N_{OC} \cos \alpha \sin \alpha \cdot \ell + G \cos \alpha \cdot \frac{\ell}{2} + N_{OC} \sin(\alpha + \beta) \cdot AC = 0.$$

$AC$  найдём из  $\triangle OCA$ : по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}, \quad \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{\ell \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$AC = \frac{\ell \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$-N_{OC} \cdot \ell \sin \alpha \cos \alpha + G \cos \alpha \cdot \frac{\ell}{2} + N_{OC} \cdot \sin(\alpha + \beta) \frac{\ell \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 0;$$

$$-N_{OC} \cdot \sin \alpha \cos \alpha + 0,5 \cdot G \cos \alpha + N_{OC} \cdot \sin \alpha \cos \beta = 0.$$

$$N_{OC} \cdot \sin \alpha (\cos \alpha - \cos \beta) = 0,5 \cdot G \cos \alpha,$$

$$N_{OC} = \frac{G}{2 \operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - \cos \beta)}.$$

$$N_{OC} = \frac{0,5}{2 \operatorname{tg} 30^\circ (\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)} = 2,72 \text{ кН}.$$

Определим  $R_B$  и  $R_A$ :

$$R_B = N_{OC} \cos \alpha, \quad R_B = 2,72 \cos 30^\circ = 2,36 \text{ кН}.$$

$$R_A = G + N_{OC} \sin \alpha \quad R_A = 0,5 + 2,72 \sin 30^\circ = 1,86 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $R_A = 1,86$  кН;  $R_B = 2,36$  кН;  $N_{OC} = 2,72$  кН.

**Пример 68.** Кран-мачта при подъеме груза  $F = 30$  кН находится в положении, указанном на рис. 3.32, а. Нижний конец стрелы шарнирно опирается в точке  $A$ , а верхний конец стрелы удерживается в равновесии при помощи троса, прикрепленного в точках  $B$  и  $C$ . Сила тяжести стрелы 2 кН. Точки  $A$  и  $C$  расположены на одной горизонтальной прямой. Длина стрелы крана  $AB = 10$  м. Угол  $\alpha = 45^\circ$  и угол  $\beta = 30^\circ$ . Вычислить реакции шарнирной опоры  $A$  и натяжение троса  $CB$ .

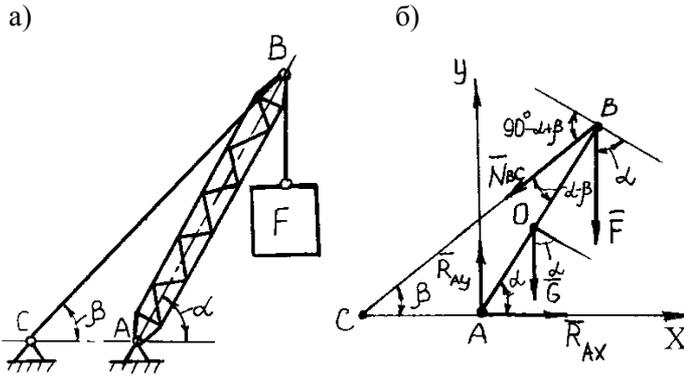


Рис. 3.32. К примеру 68

**Решение.** Обозначим все силы, действующие на стрелу крана (рис. 3.32, б). Моменты этих сил относительно точки  $A$  скомпенсированы, т. к. стрела находится в равновесии.

$$\sum M_A(F_K) = 0;$$

$$N_{BC} \cdot AB \cdot \cos(90^\circ - \alpha + \beta) - F \cdot AB \cdot \cos \alpha - G \cdot AO \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$N_{BC} \cdot AB \cdot \cos(\alpha - \beta) - F \cdot AB \cdot \cos \alpha - G \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$N_{BC} = \frac{(F + 0,5G) \cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad N_{BC} = \frac{(50 + 0,5 \cdot 2) \cos 45^\circ}{\cos 15^\circ} = 139,3 \text{ кН.}$$

Алгебраическая сумма проекций всех сил на оси равна нулю:

$$\sum F_{KX} = 0; \quad R_{AX} - N_{BC} \cos \beta = 0; \quad R_{AX} = N_{BC} \cos \beta;$$

$$R_{AX} = 139,3 \cos 30^\circ = 120,6 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0; \quad R_{AY} - G - F - N_{BC} \sin \beta = 0;$$

$$R_{AY} = G + F + N_{BC} \sin \beta;$$

$$R_{AY} = 2 + 50 + 139,3 \sin 30^\circ = 121,7 \text{ кН.}$$

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; \quad R_A = \sqrt{120,6^2 + 121,7^2} = 171,3 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 171,3 \text{ кН}; \quad N_{BC} = 139,3 \text{ кН.}$

**Пример 69.** Вешалка укреплена шарнирно в точке  $A$  и упирается в гладкую вертикальную стенку в точке  $B$  (рис. 3.33, а). На равном расстоянии друг от друга  $a = 0,15$  м подвешены пять грузов силой тяжести по 40 Н. Длина вешалки  $\ell = 2$  м, расстояние  $\ell_1 = 0,8$  м, угол  $\alpha = 60^\circ$ . Вычислить реакции шарнира  $A$  и опоры в точке  $B$ .

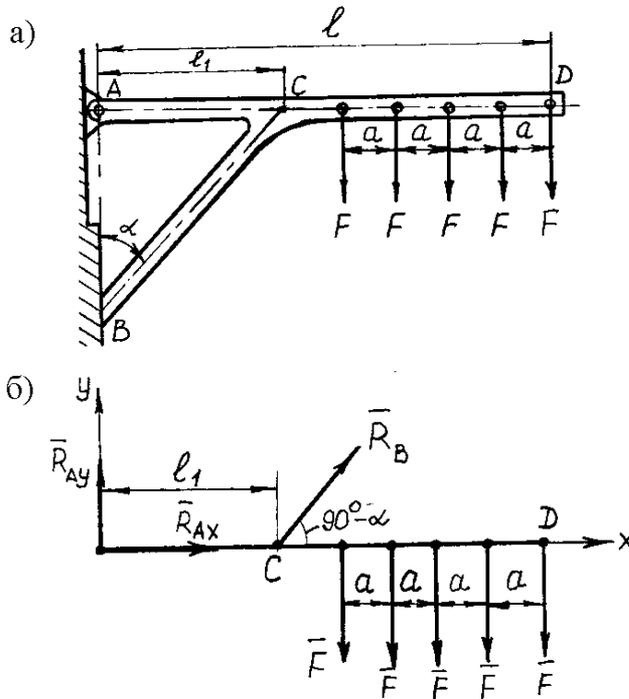


Рис. 3.33. К примеру 69

**Решение.** Вешалка по условию задачи находится в равновесии. Обозначим все силы, действующие на вешалку, заменяя при этом действие опоры  $B$  и шарнира  $A$  реакциями  $R_B$  и  $R_A$   $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$  (рис. 3.33, б).

Моменты всех сил скомпенсированы:

$$\sum M_A(F_k) = 0;$$

$$R_B \cos \alpha \cdot AC - F(AD - 4a) - F(AD - 3a) - F(AD - 2a) - F(AD - a) - F \cdot AD = 0;$$

$$R_B \cdot \ell_1 \cdot \cos \alpha - F(5\ell - 10a) = 0;$$

$$R_B = \frac{5F(\ell - 2a)}{\ell_1 \cdot \cos \alpha}; R_B = \frac{5 \cdot 40 \cdot (2 - 0,15)}{0,8 \cdot \cos 60^\circ} = 850 \text{ Н.}$$

Сумма проекций всех сил на координатную ось ( $X$  или  $Y$ ) равна нулю.

$$\sum F_{KX} = 0; R_{AX} + R_B \sin \alpha = 0; R_{AX} = -R_B \sin \alpha;$$

$$R_{AX} = -850 \cdot \sin 60^\circ = -736 \text{ Н}$$

(знак «минус» указывает на то, что направление силы  $\vec{R}_{AX}$  противоположно выбранному).

$$\sum F_{KY} = 0; R_{AY} + R_B \cos \alpha - 5F = 0; R_{AY} = 5F - R_B \cos \alpha;$$

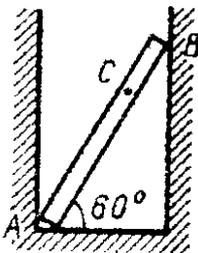
$$R_{AY} = 5 \cdot 40 - 850 \cdot \cos 60^\circ = -225 \text{ Н.}$$

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{736^2 + 225^2} = 770 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 770 \text{ Н}$ ;  $R_B = 850 \text{ Н}$ .

**Пример 70** (рис. 3.34, а). Однородная лестница  $AB$  весом  $140 \text{ Н}$  опирается на пол и стены прямка. В точке  $C$  на лестнице стоит человек весом  $800 \text{ Н}$ . Приняв  $AB = 3,6 \text{ м}$  и  $AC = 2,2 \text{ м}$ , определить опорные реакции в точках  $A$  и  $B$ . Трением пренебречь.

а)



б)

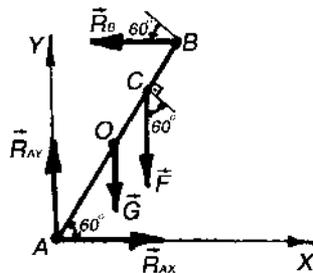


Рис. 3.34. К примеру 70

**Решение.** Заменяем внешние связи в точках  $A$  и  $B$  их реакциями. Реакцию в точке  $A$  представим через составляющие  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$ . Сила тяжести лестницы  $\vec{G}$  приложена в точке  $O$ ,  $OA = OB$  (рис. 3.34, б).

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0;$$

$$R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot AB - F \cdot \cos 60^\circ \cdot AC - G \cos 60^\circ \cdot OA = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot AC + G \cdot AO}{AB \cdot \cos 30^\circ} \cos 60^\circ;$$

$$R_B = \frac{800 \cdot 2,2 + 140 \cdot 1,8}{3,6 \cdot \cos 30^\circ} \cos 60^\circ = 323 \text{ Н.}$$

$$\sum F_{ix} = 0; R_{AX} - R_B = 0; R_{AX} = R_B; R_{AX} = 323 \text{ Н.}$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{AY} - G - F = 0; R_{AY} = G + F;$$

$$R_{AY} = 140 + 800 = 940 \text{ Н.}$$

Реакция в точке  $A$

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2};$$

$$R_A = \sqrt{323^2 + 940^2} = 994 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 994 \text{ Н}; R_B = 323 \text{ Н.}$

**Пример 71** (рис. 3.35, а). Однородная стрела  $AB$  платформенного подъемного крана весом  $5 \text{ кН}$ , несущая на своем конце груз весом  $22 \text{ кН}$ , удерживается в равновесии с помощью троса  $CD$  барабанной лебедки  $D$ . Приняв  $AB = 5 \text{ м}$  и  $BC = 1,7 \text{ м}$ , определить реакции опорного шарнира  $A$  и силу натяжения троса  $CD$ .

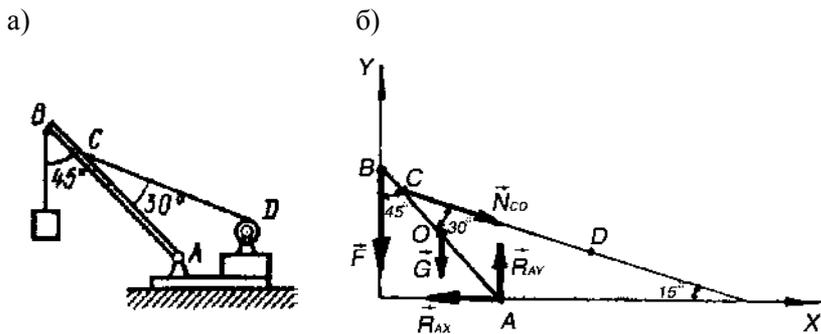


Рис. 3.35. К примеру 71

**Решение.** Рассмотрим силы, действующие на стрелу  $AB$ . Сила тяжести  $\vec{G}$  приложена в точке  $O$ ,  $OA = OB$ .

Реакцию опорного шарнира  $A$  представим в виде составляющих  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ . Реакцию тяги  $\vec{N}_{CD}$  направим вдоль линии  $CD$  (рис. 3.35, б).

Чтобы определить силу натяжения троса, составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0;$$

$$F \cdot AB \sin 45^\circ + G \cdot \frac{AB}{2} \cdot \sin 45^\circ - N_{CD} \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

$$N_{CD} = \frac{(F \sin 45^\circ + 0,5G \cdot \sin 45^\circ) AB}{AC \sin 30^\circ};$$

$$N_{CD} = \frac{(F + 0,5G) AB \sin 45^\circ}{(AB - BC) \sin 30^\circ};$$

$$N_{CD} = \frac{(22 + 0,5 \cdot 5) \cdot 5 \cdot \sin 45^\circ}{(5 - 1,7) \sin 30^\circ} = 52,5 \text{ кН.}$$

Составим уравнение равновесия стрелы  $AB$ :

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Ax} + N_{CD} \cdot \cos 15^\circ = 0;$$

$$R_{Ax} = N_{CD} \cdot \cos 15^\circ \quad R_{Ax} = 52,5 \cdot \cos 15^\circ = 50,71 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} = 0; -G - F + R_{AY} - N_{CD} \sin 15^\circ = 0; \\ R_{AY} = G + F + N_{CD} \sin 15^\circ; \\ R_{AY} = 22 + 5 + 52,5 \cdot \sin 15^\circ = 40,59 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Реакция опорного шарнира  $A$ :

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; R_A = \sqrt{50,71^2 + 40,59^2} = 65 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 65 \text{ кН}$ ;  $N_{CD} = 52,5 \text{ кН}$ .

**Пример 72** (рис. 3.36, а). Поворотный однородный рычаг  $AB$  с помощью растянутой пружины силой упругости  $3 \text{ Н}$  прижат к вращающейся кулачковой шайбе в точке  $C$ . Приняв  $AD = 50 \text{ мм}$  и  $DC = 60 \text{ мм}$ , определить реакции опорного шарнира  $A$  и силу давления рычага на кулачок. Весом частей механизма, а также трением пренебречь.

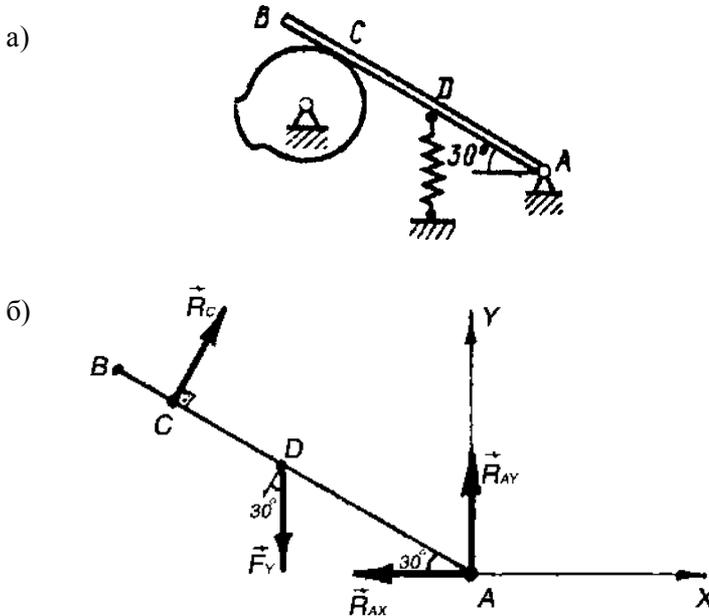


Рис. 3.36. К примеру 72

**Решение.** На рычаг  $AB$  наложены внешние связи, которые мы заменим их реакциями. Реакция  $\vec{R}_C$  перпендикулярна  $AB$ , а реакцию шарнира  $A$  представим через его составляющие  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$  (рис. 3.36, б).

Составим уравнение моментов сил относительно точки  $A$ :

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; -R_C \cdot AC + F_y \cdot AD \cos 30^\circ = 0;$$

$$R_C = F_y \frac{AD \cos 30^\circ}{AC}; R_C = F_y \frac{AD \cos 30^\circ}{AD + DC};$$

$$R_C = 3 \cdot \frac{50 \cdot \cos 30^\circ}{50 + 60} = 1,18 \text{ Н.}$$

Сила давления рычага на кулачок  $F_g = R_C$ .  $F_g = 1,18 \text{ Н.}$

Так как рычаг находится в равновесии, то:

$$\sum F_{ix} = 0; -R_{AX} + R_C \cdot \cos 60^\circ = 0; R_{AX} = R_C \cdot \cos 60^\circ;$$

$$R_{AX} = 1,18 \cdot \cos 60^\circ = 0,59 \text{ Н.}$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_C \sin 60^\circ + R_{AY} - F_y = 0; R_{AY} = F_y - R_C \sin 60^\circ;$$

$$R_{AY} = 3 - 1,18 \sin 60^\circ = 1,98 \text{ Н.}$$

Реакция опорного шарнира  $A$ :

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; R_A = \sqrt{0,59^2 + 1,98^2} = 2,07 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 2,07 \text{ Н}; F_g = 1,18 \text{ Н.}$

**Пример 73** (рис. 3.37, а). Однородную плиту  $AB$  весом 4 кН равномерно вытягивают из приямка с помощью барабанной лебедки  $D$ . Приняв  $AB = 6 \text{ м}$  и  $CB = 1,5 \text{ м}$ , определить для данного положения плиты опорные реакции в точках  $A$  и  $C$  и силу натяжения троса  $BD$ . Трением пренебречь.

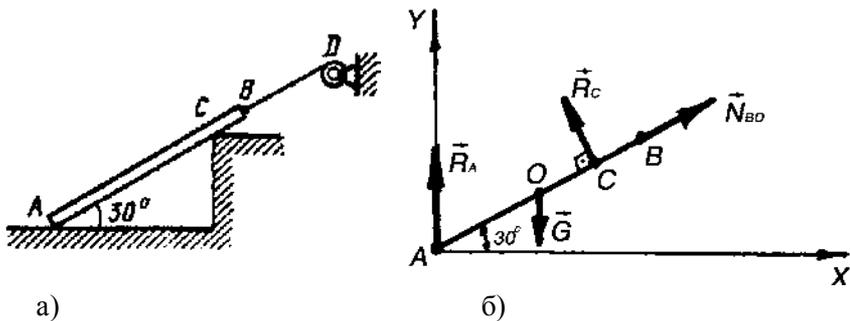


Рис. 3.37. К примеру 73

**Решение.** Освободимся от внешних связей, заменив их реакциями  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_C$ ,  $\vec{N}_{BD}$ . Сила тяжести плиты приложена в точке  $O$ ,  $AO = BO$  (рис. 3.37, б).

Составим уравнения моментов сил относительно точек  $A$  и  $C$ :

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; R_C \cdot AC - G \cdot AO \cos 30^\circ = 0;$$

$$R_C = G \frac{0,5 \cdot AB \cos 30^\circ}{AC}; R_C = 4 \cdot \frac{0,5 \cdot 6 \cos 30^\circ}{6 - 1,5} = 2,31 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; -R_A \cdot AC \cos 30^\circ + G \cos 30^\circ \cdot OC = 0;$$

$$R_A = G \frac{OC}{AC}; R_A = G \frac{0,5 \cdot AB - CB}{AB - CB}; R_A = 4 \cdot \frac{0,5 \cdot 6 - 1,5}{6 - 1,5} = 1,33 \text{ кН.}$$

Спроецируем силы на ось  $OX$ :

$$\sum F_{ix} = 0; -R_C \cos 60^\circ + N_{BD} \cos 30^\circ = 0; N_{BD} = R_C \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ};$$

$$N_{BD} = 2,31 \cdot \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 1,33 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 1,33 \text{ кН}$ ;  $R_C = 2,31 \text{ кН}$ ;  $N_{BD} = 1,33 \text{ кН}$ .

**Пример 74** (рис. 3.38, а). Однородная плита  $AB$  весом  $1,2$  кН удерживается в равновесии в горизонтальном положении с помощью трех стержней. Приняв  $AB = 4$  м и  $AC = 1,2$  м, определить силы, нагружающие стержни.

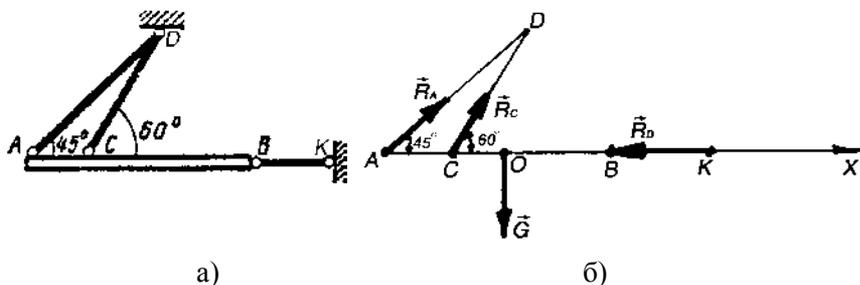


Рис. 3.38. К примеру 74

**Решение.** Заменяем внешние связи (стержни  $AD$ ,  $CD$  и  $BK$ ), наложенные на плиту, их реакциями  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  (рис. 3.38, б).

Эти реакции по модулю равны силам, нагружающим стержни:  $F_A = R_A$ ,  $F_B = R_B$ ,  $F_C = R_C$ , при этом направления их противоположны:  $\vec{F}_A = -\vec{R}_A$ ,  $\vec{F}_B = -\vec{R}_B$ ,  $\vec{F}_C = -\vec{R}_C$ .

Сила тяжести  $\vec{G}$  плиты приложена в её геометрическом центре,  $AO = OB$ .

Запишем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0; R_C \cdot AC \cos 30^\circ - G \cdot AO = 0; \\ \sum M_C(\vec{F}_i) &= 0; -R_A \cdot AC \cos 45^\circ - G \cdot CO = 0; \\ \sum F_{ix} &= 0; R_A \cos 45^\circ + R_C \cos 60^\circ - R_B = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения:

$$R_C = G \frac{AO}{AC \cos 30^\circ}; R_C = 1,2 \cdot \frac{2}{1,2 \cdot \cos 30^\circ} = 2,31 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения:

$$R_A = -G \frac{CO}{AC \cos 45^0}; R_A = -1,2 \cdot \frac{0,8}{1,2 \cdot \cos 45^0} = -1,13 \text{ кН.}$$

(знак «минус» указывает на то, что направление силы  $\vec{R}_A$  противоположно выбранному).

Из третьего уравнения:

$$R_B = R_A \cos 45^0 + R_C \cos 60^0;$$

$$R_B = 1,13 \cdot \cos 45^0 + 2,31 \cdot \cos 60^0 = 0,36 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = -1,13 \text{ кН}$ ;  $R_B = 0,36 \text{ кН}$ ;  $R_C = 2,31 \text{ кН}$ .

**Пример 75** (рис. 3.39, а). Натяжное устройство представляет собой двуплечий рычаг  $ABC$ , одно плечо которого несет груз весом 650 Н, а другое плечо служит для натяжения троса. Приняв  $AB = 0,1 \text{ м}$  и  $BC = 0,4 \text{ м}$ , определить реакции опорного шарнира  $B$  и силу натяжения троса. Весом рычага пренебречь.

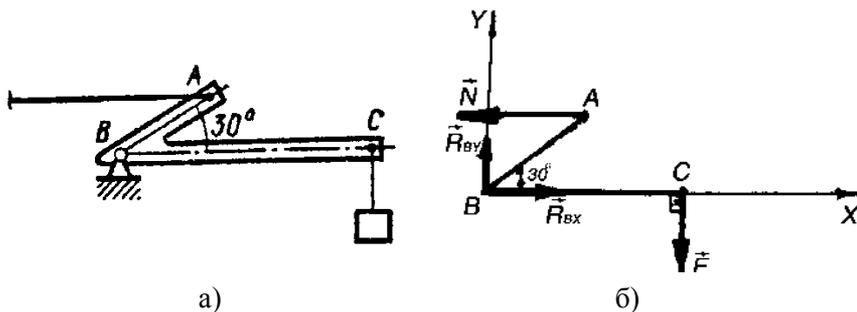


Рис. 3.39. К примеру 75

**Решение.** На рычаг наложены внешние связи – шарнир  $B$  и тяга. Заменим их реакциями. Реакцию шарнира  $B$  представим через его составляющие  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$ , а реакцию тяги  $N$  направим вдоль троса (рис. 3.39, б).

Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; N \cdot AB \sin 30^0 - F \cdot BC = 0; N = F \frac{BC}{AB \sin 30^0};$$

$$N = 650 \cdot \frac{0,4}{0,1 \sin 30^0} = 5200 \text{ Н.}$$

Сумма проекций всех сил на оси  $X$  и  $Y$  равна нулю, т. к. рычаг находится в равновесии:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{BX} - N = 0; R_{BX} = N; R_{BX} = 5200 \text{ Н.}$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{BY} - F = 0; R_{BY} = F; R_{BY} = 650 \text{ Н.}$$

Реакция шарнира

$$R_B = \sqrt{R_{BX}^2 + R_{BY}^2}; R_B = \sqrt{5200^2 + 650^2} = 5240 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $N = 5200 \text{ Н}; R_B = 5240 \text{ Н.}$

**Пример 76** (рис. 3.40, а). Однородная плита  $AB$  односкатной крыши весом  $14 \text{ кН}$  испытывает ветровую нагрузку, равнодействующая которой  $F = 5 \text{ кН}$  приложена в точке  $C$  горизонтально. Приняв  $AB = 6 \text{ м}$  и  $AC = CB$ , определить опорные реакции в точках  $A$  и  $B$ .

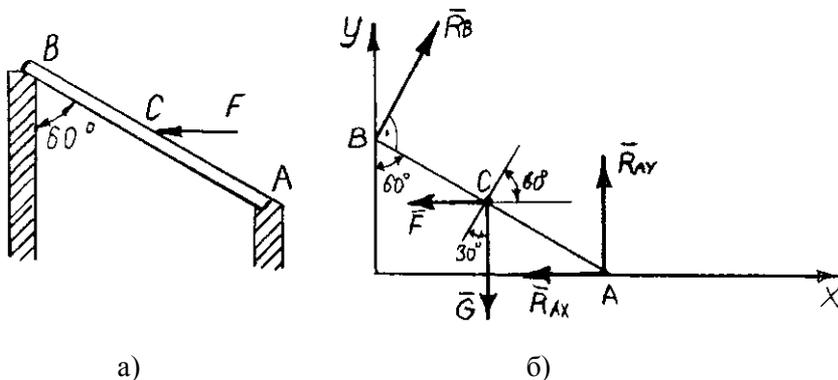


Рис. 3.40. К примеру 76

**Решение.** Освободимся от внешних связей, которые наложены на плиту в точках  $A$  и  $B$ . При этом реакцию в точке  $A$  разложим на две составляющие:  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$  (рис. 3.40, б). Составим уравнение моментов сил относительно точки  $A$ :

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; -R_B \cdot AB + F \cdot \cos 60^\circ \cdot AC + G \cos 30^\circ \cdot AC = 0;$$

$$R_B = (F \cdot \cos 60^\circ + G \cos 30^\circ) \frac{AC}{AB};$$

$$R_B = (5 \cdot \cos 60^\circ + 14 \cdot \cos 30^\circ) \frac{3}{6} = 7,31 \text{ кН.}$$

Проецируем силы на координатные оси:

$$\sum F_{ix} = 0; -R_{AX} - F + R_B \sin 30^\circ = 0; R_{AX} = R_B \sin 30^\circ - F;$$

$R_{AX} = 7,31 \cdot \sin 30^\circ - 5 = -1,35$  кН – направление силы  $\vec{R}_{AX}$  противоположно выбранному.

$$\sum F_{iy} = 0; R_{AY} - G + R_B \cos 30^\circ = 0; R_{AY} = G - R_B \cos 30^\circ;$$

$$R_{AY} = 14 - 7,31 \cdot \cos 30^\circ = 7,67 \text{ кН.}$$

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}; R_A = \sqrt{1,35^2 + 7,67^2} = 7,79 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 7,79$  кН;  $R_B = 7,31$  кН.

**Пример 77** (рис. 3.41, а). Стоящий наклонно однородный щит  $AB$  весом 220 Н удерживается в равновесии веревкой  $AD$ . Пренебрегая трением и приняв  $AB = 6$  м и  $AC = 5$  м, определить опорные реакции в точках  $A$  и  $C$  и силу натяжения веревки.

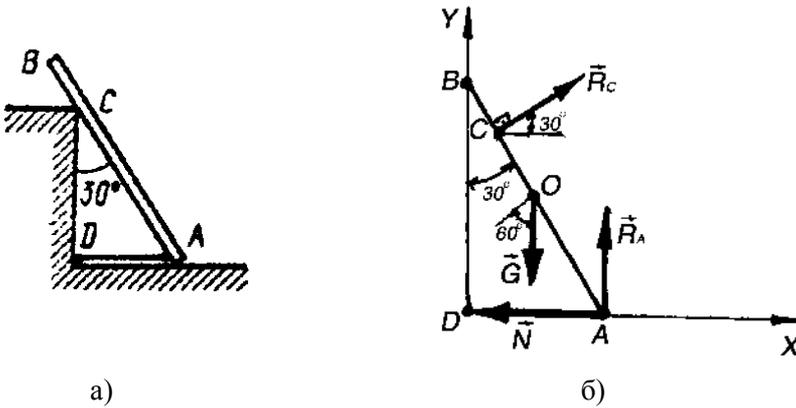


Рис. 3.41. К примеру 77

**Решение.** На щит наложены внешние связи – опоры  $A$  и  $C$  и тяга  $AD$ . Заменим их реакциями  $R_A$ ,  $R_C$  и  $N$ . Сила тяжести щита приложена к его геометрическому центру, т. е.  $AO = BO = \frac{AB}{2}$  (рис. 3.41, б).

Запишем уравнение моментов сил:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; -R_C \cdot AC + G \cos 60^\circ \cdot AO = 0;$$

$$R_C = G \frac{AB}{2AC} \cos 60^\circ; R_C = 220 \cdot \frac{6}{2 \cdot 5} \cos 60^\circ = 66 \text{ Н.}$$

Сумма проекций всех сил на ось  $X$  или  $Y$  равна нулю:

$$\sum F_{ix} = 0; -N + R_C \cos 30^\circ = 0; N = R_C \cos 30^\circ;$$

$$N = 66 \cdot \cos 30^\circ = 57,2 \text{ Н.}$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_A - G + R_C \cdot \sin 30^\circ = 0; R_A = G - R_C \cdot \sin 30^\circ;$$

$$R_A = 220 - 66 \cdot \sin 30^\circ = 187 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 187 \text{ Н}$ ;  $R_C = 66 \text{ Н}$ ;  $N = 57,2 \text{ Н}$ .

**Пример 78** (рис. 3.42, а). Неподвижно зажатый, как показано на рисунке, опорный столб нагружен силой  $F = 1,9$  Н. Приняв  $AB = 5$  м и  $AC = CD = 1,5$  м, определить опорные реакции в точках  $A$ ,  $C$ ,  $D$ . Весом столба, а также трением пренебречь.

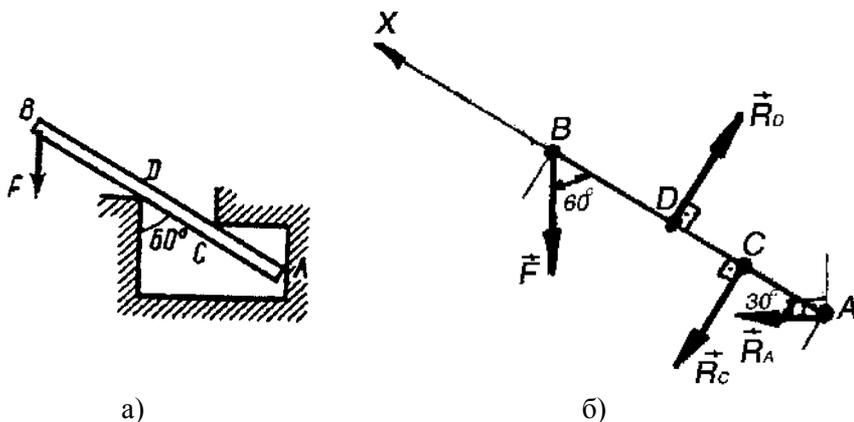


Рис. 3.42. К примеру 78

**Решение.** В точках  $A$ ,  $C$ ,  $D$  на столб наложены внешние связи. Заменяем их реакциями  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_C$  и  $\vec{R}_D$  (рис. 3.42, б). Запишем уравнения равновесия для столба:

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; F \cos 30^\circ \cdot BC - R_D \cdot DC - R_A \cos 60^\circ \cdot AC = 0;$$

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = 0; F \cos 30^\circ \cdot BD - R_C \cdot DC - R_A \cos 60^\circ \cdot AD = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0; -F \cos 60^\circ + R_A \cos 30^\circ = 0.$$

Из последнего уравнения

$$R_A = F \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}; R_A = 1,9 \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 1,1 \text{ Н.}$$

$$R_D = \frac{F \cos 30^\circ \cdot BC - R_A \cos 60^\circ \cdot AC}{DC};$$

$$R_D = \frac{1,9 \cdot \cos 30^\circ \cdot (5 - 1,5) - 1,1 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1,5}{1,5} = 3,29 \text{ Н.}$$

$$R_C = \frac{F \cos 30^\circ \cdot BD - R_A \cos 60^\circ \cdot AD}{DC};$$

$$R_C = \frac{1,9 \cdot \cos 30^\circ \cdot (5 - 3) - 1,1 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3}{1,5} = 1,09 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 1,1 \text{ Н}; R_C = 1,09 \text{ Н}; R_D = 3,29 \text{ Н.}$

**Пример 79.** Для балки, изображенной на рис. 3.43, найти реакции опор, если  $F = 4 \text{ кН}$ ,  $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $q = 0,8 \text{ кН/м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

**Решение.** Освободим балку от связей, мысленно отбросив опоры и приложив вместо них неизвестные реакции.

Реакция шарнирно-неподвижной опоры  $A$  неизвестна как по модулю, так и по направлению, поэтому изобразим ее в виде двух составляющих  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ , направленных вдоль выбранных осей координат  $X$  и  $Y$ . В шарнирно-подвижной опоре возникает одна реакция, направленная перпендикулярно плоскости, по которой она может перемещаться.

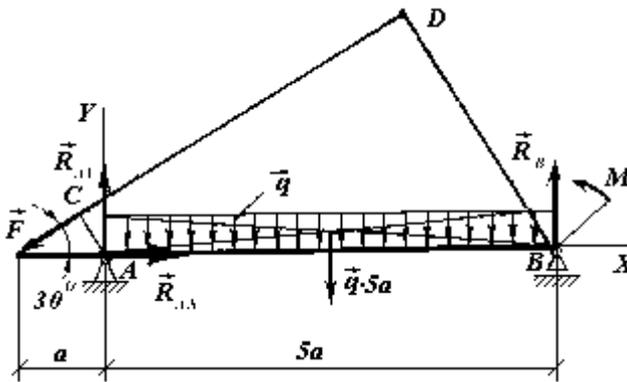


Рис. 3.43. К примеру 79

В данном случае направим реакцию  $R_B$  вертикально вверх. Реакции изображены на том же рисунке, где и опоры. Система сил, действующих на балку, представляет плоскую систему произвольно расположенных сил, поэтому для нее можно составить три независимых уравнения равновесия. Запишем одно уравнение проекций на ось  $X$  и два уравнения моментов. В качестве центра моментов целесообразно принять точки  $A$  и  $B$  балки. В этом случае уравнения упрощаются.

Уравнение проекций на ось  $X$  имеет такой вид:

$$\sum F_{ix} = -F \cdot \cos 30^\circ + R_{Ax} = 0. \quad (3.15)$$

Равномерно распределенная нагрузка перпендикулярна оси  $X$ , поэтому ее проекция на ось  $X$  равна нулю.

Уравнение моментов относительно точки  $A$  имеет следующий вид:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -F \cdot AC + q \cdot 5a \cdot 2,5a - R_B \cdot 5a - M = 0. \quad (3.16)$$

Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки равна  $5aq$  и приложена в середине своего участка, т. е. на расстояние  $2,5a$  от опоры  $A$ .

Момент сосредоточенной силы и реакции  $R_B$ , а также сосредоточенный момент вращают балку вокруг точки  $A$  против часовой стрелки, поэтому вошли в уравнение моментов с отрицательным знаком, равнодействующая равномерно распределенной нагрузки вращает балку вокруг точки  $A$  по часовой стрелке, следовательно, ее момент имеет знак «плюс».

Составим уравнение моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = -F \cdot BD - q \cdot 5a \cdot 2,5a + R_{Ay} \cdot 5a - M = 0. \quad (3.17)$$

Моменты силы  $F$ , равнодействующей распределенной нагрузки и сосредоточенный момент  $M$  направлены против часовой стрелки и войдут в уравнение моментов со знаком «минус», а момент составляющей  $R_{Ay}$ , направленный по часовой стрелке, войдет со знаком «плюс».

Из уравнения (3.15)

$$R_{AX} = F \cdot \cos 30^0 = 4 \cdot 0,866 = 3,46 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.16)

$$R_B = (-F \cdot AC + q \cdot 5a \cdot 2,5a - M)/(5a),$$

где

$$AC = a \cdot \sin 30^0 = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м.}$$

Тогда

$$R_B = (-4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 2,5 \cdot 1 - 6) \cdot (5 \cdot 1) = 0,4 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.17)

$$R_{AY} = (F \cdot BD + q \cdot 5a \cdot 2,5a + M)/(5a),$$

где

$$BD = 6a \cdot \sin 30^0 = 6 \cdot 1 \cdot 0,5 = 3 \text{ м,}$$

тогда

$$R_{AY} = (4 \cdot 3 + 4 \cdot 2,5 \cdot 1 + 6)/(5 \cdot 1) = 5,6 \text{ кН.}$$

В качестве проверки используем уравнение проекций на ось  $Y$ :

$$\sum F_{iY} = -F \cdot \cos 60^0 + R_{AY} - q \cdot 5a + R_B = 0.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\sum F_{iY} = -4 \cdot 0,5 + 5,6 - 4 + 0,4 = 0, \text{ т. е. } 0 = 0.$$

Задача решена верно.

Полная реакция опоры  $R_A$

$$R_A = \sqrt{3,46^2 + 5,6^2} = 6,58 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = 6,58$  кН;  $R_B = 0,4$  кН.

**Пример 80.** На двухконсольную горизонтальную балку  $CD$  на пролете  $AB$  действует пара сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$  с моментом пары  $M = F_1 \cdot a$ , на левую консоль – равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ , а в точке  $D$  правой консоли – вертикальная нагрузка  $F_2$ . Определить реакции опор, если  $F = 1$  кН,  $F_2 = 2$  кН,  $q = 2$  кН/м,  $a = 0,8$  м (рис. 3.44).

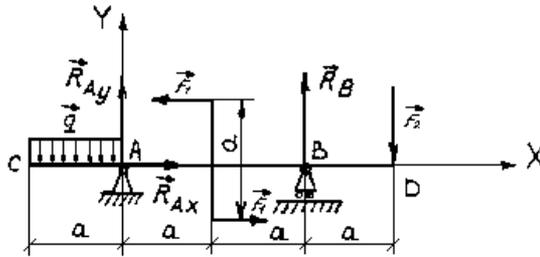


Рис. 3.44. К примеру 80

**Решение.** Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующих на балку  $CD$ . На нее действуют сила  $F_2$ , пара с моментом  $M$  и равнодействующая распределенной нагрузки  $\vec{F}_p = q \cdot a$ , приложенная посередине консоли  $CA$ . Мысленно отбрасываем связи: шарнирно-неподвижную опору  $A$  и опору на катках  $B$ , заменяя их действие соответственно составляющими реакции  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  и реакцией  $R_B$ .

Для плоской системы сил  $F_p$ ,  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_B$ ,  $F_2$  и пары сил с моментом  $M$  составим систему уравнений равновесия:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum F_{ix} = 0.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} F_p \cdot 0,5 \cdot a + F_1 \cdot a + R_B \cdot 2 \cdot a - F_2 \cdot 3 \cdot a &= 0; \\ F_p \cdot 2,5 \cdot a - R_{Ay} \cdot 2 \cdot a + F_1 \cdot a - F_2 \cdot a &= 0; \\ R_{Ax} &= 0. \end{aligned}$$

$$R_B = \frac{F_2 \cdot 3 - F_P \cdot 0,5 - F_1}{2} = \frac{2 \cdot 3 - (2 \cdot 0,8) \cdot 0,5 - 1}{2} = 2,1 \text{ кН.}$$

$$R_{AY} = \frac{F_P \cdot 2,5 + F_1 - F_2}{2} = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 2,5 + 1 - 2}{2} = 1,5 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_{AY} = 1,5 \text{ кН}$ ;  $R_B = 2,1 \text{ кН}$ .

**Пример 81.** Для балки (рис. 3.45, а) определить реакции опор в точках  $A$  и  $B$ , если  $F = 16 \text{ кН}$ ,  $q = 2 \text{ кН/м}$ ,  $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

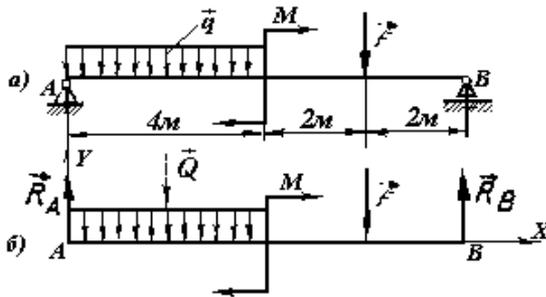


Рис. 3.45. К примеру 81

**Решение.** Рассматривая равновесие балки, освобождаем точки  $A$  и  $B$  от связей и заменяем связи силами реакций связей  $R_A$  и  $R_B$  (рис. 3.45, б). Действие на балку равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  заменяем равнодействующей  $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}$ , которая расположена в середине длины этой нагрузки (рис.3.45, б).

Таким образом, на балку действуют пара сил с моментом  $M$  и система параллельных сил  $R_A$ ,  $Q$ ,  $F$  и  $R_B$ . Для определения неизвестных реакций связей балки  $R_A$  и  $R_B$  используем уравнения равновесия  $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0$  и  $\sum M_B(\vec{F}_i) = 0$ . В качестве проверочного уравнения принимаем уравнение  $\sum F_{iY} = 0$ . Выберем систему координат  $X$  и  $Y$  с началом в точке  $A$  и составим уравнения равновесия сил:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad Q \cdot 2 + M + F \cdot 6 - R_B \cdot 8 = 0; \quad (3.18)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad R_A \cdot 8 - Q \cdot 6 + M - F \cdot 2 = 0; \quad (3.19)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_A - Q - F + R_B = 0. \quad (3.20)$$

Из уравнения (3.18)

$$R_B = \frac{Q \cdot 2 + M + F \cdot 6}{8} = \frac{8 \cdot 2 + 12 + 16 \cdot 6}{8} = 15,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.19)

$$R_A = \frac{Q \cdot 6 - M + F \cdot 2}{8} = \frac{8 \cdot 6 - 12 + 16 \cdot 2}{8} = \frac{48 - 12 + 32}{8} = 8,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.20) следует, что  $8,5 - 8 - 16 + 15,5 = 0$ , следовательно, реакции  $R_A$  и  $R_B$  балки по величине и направлению определены верно.

Следует отметить, что момент  $M$  в отличие от сил не изменяет своего знака относительно точек  $A$  и  $B$  балки (и других произвольных точек) при написании уравнений моментов сил.

**Ответ:**  $R_A = 8,5 \text{ кН}; R_B = 15,5 \text{ кН.}$

**Пример 82.** Для балки (рис. 3.46, а) определить реакции опор в точках  $A$  и  $B$ , если  $F = 22 \text{ кН}$ ,  $q = 4 \text{ кН/м}$  и  $M = 44 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

**Решение.** Рассматривая равновесие балки, освобождаем балки  $A$  и  $B$  от связей и заменяем связи силами реакций связей. (рис. 3.46, б).

В шарнирно-подвижной опоре (точка  $A$ ) возникает одна реакция связи  $R_A$ , расположенная перпендикулярно к основанию опоры. В шарнирно-неподвижной опоре (точка  $B$ ) реакция связи в общем случае неизвестна по направлению, поэтому будущую реакцию точки  $B$  представим составляющими  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$ . Равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q$  заменим равнодействующей

$Q = q \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$  кН (рис.3.46, б). Для решения задачи составим три уравнения равновесия:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum F_{ix} = 0.$$

Выбираем систему координат  $X$  и  $Y$  с началом в точке  $A$  и составляем уравнения равновесия системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -F \cdot \cos 60^\circ + R_{Bx} = 0; \quad (3.21)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -M - Q \cdot 1 + F \cdot AD - R_{By} \cdot 4 = 0; \quad (3.22)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -M - Q \cdot 5 + R_A \cdot 4 - F \cdot BE = 0. \quad (3.23)$$

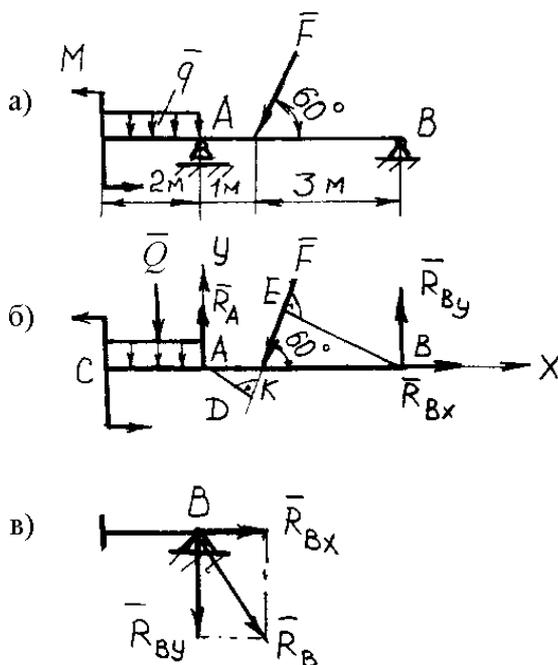


Рис. 3.46. К примеру 82

Из уравнения (3.21):

$$R_{BX} = F \cdot \cos 60^0 = 22 \cdot \frac{1}{2} = 11 \text{ кН.}$$

В уравнении (3.22) плечо  $AD = AK \cdot \sin 60^0$  (из треугольника  $ADK$ ), или

$$AD = 1 \cdot \sin 60^0 = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5 \cdot \sqrt{3} \text{ м} = 0,865 \text{ м.}$$

В уравнении (3.23) плечо  $BE = BK \cdot \sin 60^0$  (из треугольника  $BKE$ ), или

$$BE = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5 \cdot \sqrt{3} = 2,595 \text{ м} \approx 2,6 \text{ м.}$$

Из уравнения (3.22)

$$\begin{aligned} R_{BY} &= \frac{-M - Q \cdot 1 + F \cdot 0,865}{4} = \frac{-44 - 8 \cdot 1 + 22 \cdot 0,865}{4} = \\ &= \frac{-44 - 8 + 19}{9} = -8,25 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из уравнения (3.23)

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{M + Q \cdot 5 + F \cdot 2,6}{4} = \frac{44 + 8,5 + 22 \cdot 2,6}{4} = \frac{44 + 40 + 57}{4} = \\ &= 35,2 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Значение составляющей  $R_{BY}$  реакции точки  $B$  получено со знаком минус. Это означает, что  $R_{BY}$  по направлению выбрано неверно. Следует изменить направление на обратное (рис. 3.46, в), зачеркнув прежнее направление, тогда  $R_{BY} = 8,25$  кН.

Для проверки правильности найденных реакций опор балки составляем уравнение  $\sum F_{iy} = 0$ . В этом случае

$$-Q + R_A - F \cdot \sin 60^0 - R_{BY} = 0,$$

или

$$-8 + 35,25 - 22 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8,25 = 0,$$

или

$$-8 + 35,25 - 19 - 8,25 = 0.$$

Следовательно, значения реакций  $R_{BY}$  и  $R_{BX}$  балки по величине и направлению определены верно.

Итоговая реакция опоры В балки определится по уравнению

$$R_B = \sqrt{R_{BY}^2 + R_{BX}^2} = \sqrt{8,25^2 + 11^2} = \sqrt{68,2 + 121} = \sqrt{189,2} = 13,8 \text{ кН (рис. 3.46, в).}$$

**Ответ:**  $R_A = 35,2$  кН;  $R_B = 13,8$  кН.

**Пример 83.** Для заданной двухопорной балки (рис. 3.47, а) определить опорные реакции.

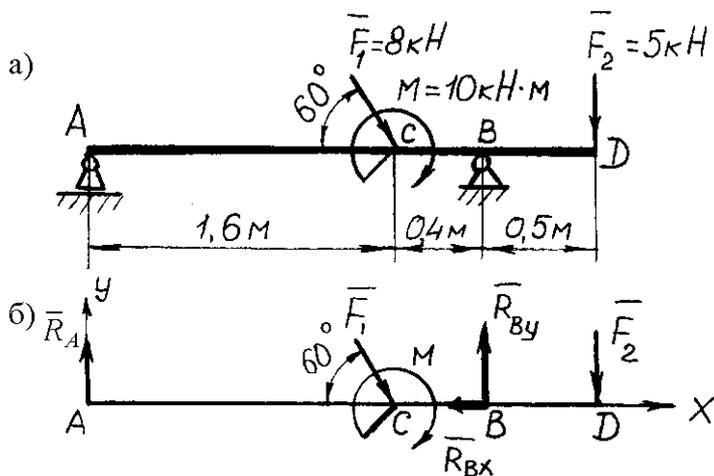


Рис. 3.47. К примеру 83

**Решение.** Рассматриваем равновесие балки  $AD$ . К ней приложены заданные активные силы  $F_1$  и  $F_2$  и момент  $M$ . Рассматривая тело  $AD$  как свободное, отбрасываем связи (шарнирные опоры  $A$  и  $B$ ), заменяя

их действие реакциями. Реакция  $R_A$  шарнирно-подвижной опоры  $A$  направлена по нормали к опорной поверхности. Для шарнирно-неподвижной опоры  $B$  показываем составляющие реакции  $R_X$  и  $R_Y$  по осям координат. Расчетная схема изображена на рис. 3.47, б. Для полученной плоской произвольной системы сил составляем три уравнения равновесия, выбрав в качестве центра моментов точки  $A$  и  $B$  (точки пересечения двух неизвестных сил):

$$1) \sum M_A(\vec{F}_i) = 0;$$

$$F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot AC + M - R_{BY} \cdot AB + F_2 \cdot AD = 0;$$

$$8 \cdot 0,866 \cdot 1,6 + 10 - R_{BY} \cdot 2 + 5 \cdot 2,5 = 0,$$

отсюда  $R_{BY} = 16,8$  кН.

$$2) \sum M_B(\vec{F}_i) = 0;$$

$$R_A \cdot AB - F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot CB + M + F_2 \cdot BD = 0;$$

$$R_A \cdot 2 - 8 \cdot 0,866 \cdot 0,4 + 10 + 5 \cdot 0,5 = 0,$$

отсюда  $R_A = -4,86$  кН.

$$3) \sum F_{iX} = 0; \quad F_1 \cdot \cos 60^\circ - R_{BX} = 0; \quad 8 \cdot 0,5 - R_{BX} = 0,$$

отсюда  $R_{BX} = 4$  кН.

Составляем проверочное уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{iY} = R_A - F_1 \cdot \cos 30^\circ + R_{BY} - F_2 &= -4,86 - 8 \cdot 0,866 + 16,8 - 5 = \\ &= 16,8 - 16,8 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, реакции определены верно. Реакция  $R_A$  получилась отрицательной, значит, ее действительное направление противоположно предварительно выбранному.

Примененная система уравнений равновесия наиболее целесообразна при рассмотрении равновесия любых двухопорных балок.

Полная реакция опоры  $R_B$ :

$$R_B = \sqrt{4^2 + 16,8^2} = 17,3 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_A = -4,86$  кН;  $R_B = 17,3$  кН.

**Пример 84.** Однородная балка закреплена в точке  $A$  с помощью шарнирно-неподвижной опоры и поддерживается в точке  $B$  стержнем (рис. 3.48, а). Найти реакции шарнирно-неподвижной опоры и стержня  $BC$ . Силой тяжести балки и стержня пренебречь.  $M = 2$  кН·м,  $F = 4$  кН,  $a = 1,5$  м,  $b = 2,5$  м,  $\alpha = 60^\circ$ .

**Решение.** Изобразим балку вместе с нагрузками, соблюдая заданные размеры ее участков и угла  $\alpha$  (рис. 3.48, б).

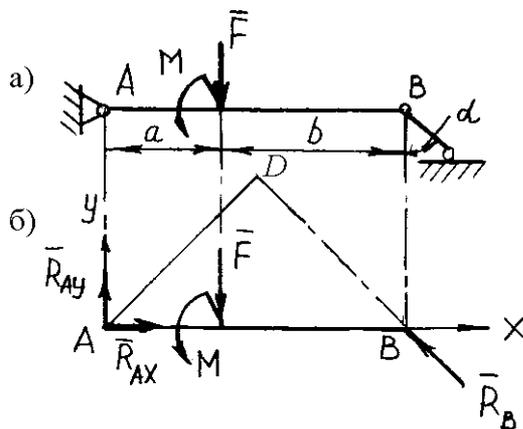


Рис. 3.48. К примеру 84

Освободим балку от связей в точках  $A$  и  $B$ , заменив эти связи их реакциями. Начало координат поместим в точке  $A$ , ось  $X$  совместим с осью балки, а ось  $Y$  направим перпендикулярно балке. Если стержень растягивается, то его реакция направлена в сторону от рассматриваемого тела, а при сжатии - от стержня к телу.

Составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ - алгебраическая сумма проекций сил на ось } X;$$

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ - алгебраическая сумма проекций сил на ось } Y;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \text{ - алгебраическая сумма моментов относительно точки } A.$$

Уравнение проекций сил на ось  $X$  имеет вид

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - R_B \cdot \sin 60^\circ = 0. \quad (3.24)$$

Силы  $F$  и  $R_{AY}$  не вошли в уравнение, так как они перпендикулярны оси  $X$  и их проекции на эту ось равны нулю.

Проекция силы на ось  $Y$ :

$$\sum F_{iY} = 0; \quad R_{AY} - F + R_B \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (3.25)$$

реакция  $R_{AX}$  перпендикулярна оси  $Y$ , и ее проекция на эту ось равна нулю.

Для составления уравнения моментов за центр моментов принимаем точку  $A$ . Плечо силы  $R_B$  равно длине перпендикуляра, восстановленного из точки  $A$  (центра моментов) к линии действия силы  $R_B$ . Из рис. 3.48, б видно, что  $AD = (a + b) \cos 60^\circ$ .

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad F \cdot a - M - R_B \cdot (a + b) \cdot \cos 60^\circ = 0. \quad (3.26)$$

Подставив числовые значения, получим

$$R_B = \frac{F \cdot a - M}{(a + b) \cdot \cos 60^\circ} = \frac{4000 \cdot 1,5 - 2000}{4 \cdot 0,5} = 2000 \text{ Н.}$$

Выразим из (3.25)

$$R_{AY} = F - R_B \cdot \cos 60^\circ.$$

Подставив значения сил, получим

$$R_{AY} = 4000 - 2000 \cdot 0,5 = 3000 \text{ Н.}$$

Из (3.24)

$$R_{AX} = R_B \cdot \sin 60^\circ = 2000 \cdot 0,866 = 1732 \text{ Н.}$$

Проверим правильность решения задачи, составив уравнения моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad R_{AY}(a+b) - M - F \cdot b = 0.$$

Подставим числовые значения:

$$3000 \cdot 4 - 2000 - 4000 \cdot 2,5 = 0; \quad 12000 - 12000 = 0.$$

Задача решена верно, так как при подстановке получили тождество  $0 = 0$ .

Полная реакция опоры  $R_A$

$$R_A = \sqrt{1732^2 + 3000^2} = 3464 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 3464 \text{ Н}; R_B = 2000 \text{ Н.}$

**Пример 85.** Для балки (рис. 3.49, а) определить опорные реакции по следующим данным:  $a = 1,5 \text{ м}$ ,  $b = 1 \text{ м}$ ,  $c = 2 \text{ м}$ ,  $F_1 = 8 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 0,4 \text{ кН/м}$ ,  $M = 5 \text{ кН·м}$ .

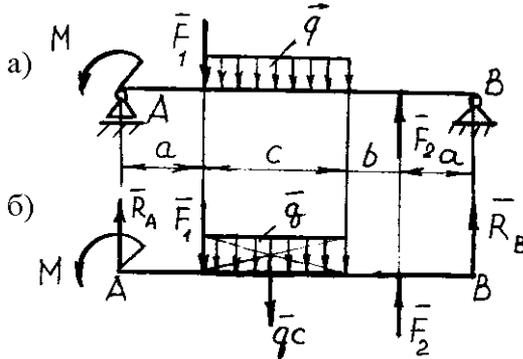


Рис. 3.49. К примеру 85

**Решение.** Освободим балку от связей, отбросив опоры и приложив вместо них неизвестные реакции (рис. 3.49, б). Напомним, что для плоской системы параллельных сил достаточно двух уравнений равновесия:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

Уравнение моментов относительно точки  $A$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \tag{3.27}$$

$$-M + F_1 \cdot a + qc \cdot \left(a + \frac{c}{2}\right) - F_2 \cdot (a + b + c) - R_B \cdot (2a + b + c) = 0.$$

Уравнение моментов относительно точки  $B$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \tag{3.28}$$

$$F_2 \cdot a - qc \left(a + b + \frac{c}{2}\right) - F_1 \cdot (a + b + c) - M + R_A \cdot (2a + b + c) = 0.$$

Из уравнения (3.27)

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{-M + F_1 \cdot a + qc \left(a + \frac{c}{2}\right) - F_2 (a + b + c)}{2a + b + c} = \\ &= \frac{-5 + 8 \cdot 1,5 + 0,4 \cdot 2 \left(1,5 + \frac{2}{2}\right) - 10(1,5 + 1 + 2)}{2 \cdot 1,5 + 1 + 2} = -6 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из уравнения (3.28)

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{-F_2 a + qc \left(a + b + \frac{c}{2}\right) + F_1 (a + b + c) + M}{2a + b + c} = \\ &= \frac{-10 \cdot 1,5 + 0,4 \cdot 2 \left(1,5 + 1 + \frac{2}{2}\right) + 8(1,5 + 1 + 2)}{2 \cdot 1,5 + 1 + 2} = 4,8 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Значение реакции  $R_B$  получено со знаком «минус». Это означает, что она направлена вертикально вниз.

Для проверки правильности найденных реакций опор балки составим уравнение

$$\sum F_{iy} = 0; R_A - F_1 - qc + F_2 + R_B = 0$$

или

$$4,8 - 8 - 2 \cdot 0,4 + 10 - 6 = 14,8 - 14,8 = 0.$$

Следовательно,  $R_A$  и  $R_B$  определены верно.

**Ответ:**  $R_A = 4,8$  кН;  $R_B = -6$  кН.

**Пример 86.** Для жестко заделанной консольной балки (рис. 3.50) найти реактивный момент и составляющие реакции заделки.

Принять  $F = 10$  кН,  $q = 2$  кН/м,  $M = 8$  кН·м,  $a = 0,5$  м.

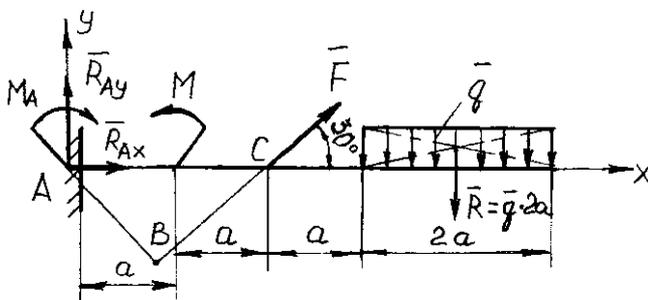


Рис. 3.50. К примеру 86

**Решение.** Освободим балку от связи, условно отбросив заделку и приложив вместо нее к балке две неизвестные составляющие силы реакции  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  и реактивный момент  $M_A$ . Для плоской системы произвольно расположенных сил составим три уравнения равновесия – два уравнения проекций и уравнение моментов относительно точки  $A$ :

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} + F \cdot \cos 30^0 = 0; \quad (3.29)$$

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} + F \cdot \cos 60^0 - R = 0; \quad (3.30)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = M_A - M - F \cdot AB + R \cdot 4a = 0. \quad (3.31)$$

Из уравнения (3.29) получим:

$$R_{Ax} = -F \cdot \cos 30^0 = -10 \cdot 0.866 = -8,66 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.30)

$$R_{Ay} = -F \cdot \cos 60^0 + R,$$

где

$$R = q \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН.}$$

Тогда

$$R_{Ay} = -10 \cdot 0,5 + 2 = -3 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3.31)

$$M_A = M + F \cdot AB - R \cdot 4a,$$

но

$$AB = 2a \cdot \sin 30^0 = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м,}$$

тогда

$$M_A = 8 + 10 \cdot 0,5 - 2 \cdot 4 \cdot 0,5 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Проверим правильность решения, составив уравнение моментов относительно точки C:

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = M_A - M + R \cdot 2a + R_{Ay} \cdot 2a = 0.$$

Или, подсчитав числовые значения, получим:

$$\begin{aligned}\sum M_C(\bar{F}_i) &= 9 - 8 + 2 \cdot 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 2 \cdot 0,5 = 0; \\ 11 - 11 &= 0; \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Задача решена верно.

Значения составляющих  $R_{AX}$  и  $R_{AY}$  получились со знаком «минус». Это означает, что предварительно выбранное направление оказалось ошибочным. Фактическое направление будет обратным, т. е. составляющая  $R_{AX}$  направлена влево, а  $R_{AY}$  – вниз.

Полная реакция опоры  $R_A$

$$R_A = \sqrt{(-8,66)^2 + (-3)^2} = 9,2 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $R_A = 9,2$  кН;  $M_A = 9$  кН·м.

**Пример 87.** Для балки (рис. 3.51) определить реакции опоры заделки в точке  $A$ , если  $q = 6$  кН/м,  $F = 36$  кН и  $M = 14$  кН·м.

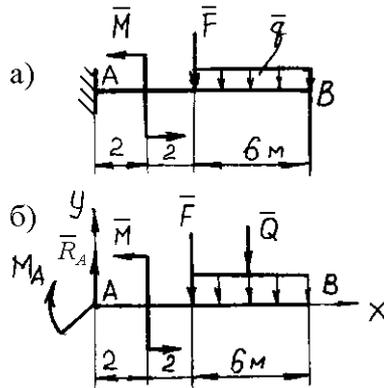


Рис. 3.51. К примеру 87

**Решение.** Освобождаем балку от связей (заделки) и заменяем связи силами реакций связей. В этом случае в точке  $A$  балки возникают силы реакции связи в виде силы  $R_A$  и реактивного момента  $M_A$ .

$Q = q \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$  кН (рис. 3.51, б). Выбираем систему координат  $X$  и  $Y$  с началом в точке  $A$ . Для решения задачи составляем три уравнения равновесия:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum F_{iY} = 0.$$

(Последнее уравнение принимают в качестве проверочного). Уравнения равновесия принимают вид

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -M_A + M - F \cdot 4 + Q \cdot 7 = 0; \quad (3.32)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -M_A - R_A \cdot 10 + M + F \cdot 6 + Q \cdot 3 = 0; \quad (3.33)$$

$$\sum F_{iY} = 0; \quad R_A - F - Q = 0. \quad (3.34)$$

Из уравнения (3.32) реактивный момент:

$$M_A = +M - F \cdot 4 - Q \cdot 7,$$

или

$$M_A = 14 - 36 \cdot 4 - 36 \cdot 7 = 14 - 144 - 252 = -382 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из уравнения (3.33):

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{-M_A + M + F \cdot 6 + Q \cdot 3}{10} = \frac{382 + 14 + 36 \cdot 6 + 36 \cdot 3}{10} = \\ &= \frac{382 + 14 + 216 + 108}{10} = 72 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Из уравнения (3.34) получаем  $72 - 36 - 36 = 0$ . Следовательно, реакции  $M_A$  и  $R_A$  опоры  $A$  защемления балки по величине определены верно, направление реакции  $M_A$  необходимо изменить на обратное.

**Ответ:**  $R_A = 72$  кН;  $M_A = -382$  кН·м.

**Пример 88.** Для заданной консольной балки (рис. 3.52,а) определить опорные реакции заделки.

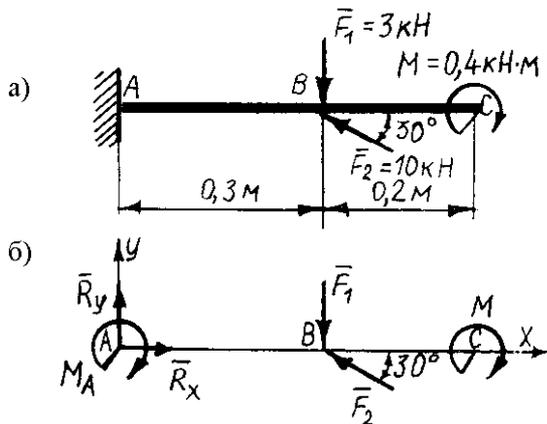


Рис. 3.52. примеру 88

**Решение.** Рассматриваем равновесие балки  $AB$ . К ней приложены заданные активные силы  $F_1$ ,  $F_2$  и момент  $M$ . Рассматривая тело  $AB$  как свободное, отбрасываем связь (заделку), заменяя ее действие реакциями – реактивным моментом  $M_A$  и составляющими реакциями  $R_x$  и  $R_y$  по осям координат. Расчетная схема изображена на рис. 3.52, б. Для получения плоской произвольной системы сил составляем три уравнения равновесия, выбрав в качестве центра моментов точку  $A$  (точку пересечения двух неизвестных сил):

$$1). \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad M_A + F_1 \cdot AB - F_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot AB + M = 0;$$

$$M_A + 3 \cdot 0,3 - 10 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 = 0, \text{ откуда } M_A = 0,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$2). \sum F_{ix} = 0; \quad R_x - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$R_x - 10 \cdot 0,866 = 0, \text{ отсюда } R_x = 8,66 \text{ кН}.$$

$$3). \sum F_{iy} = 0; \quad R_y - F_1 + F_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$R_y - 3 + 10 \cdot 0,5 = 0, \text{ отсюда } R_y = -2 \text{ кН}.$$

Составляем проверочное уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_C(\vec{F}_i) &= M_A + R_Y \cdot AC - F_1 \cdot BC + F_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot BC + M = \\ &= 0,2 + (-2) \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,4 = 1,6 - 1,6 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, реакции определены верно. Реакция  $R_Y$  получилась отрицательной, значит, ее действительное направление противоположно предварительно выбранному. Примененная система уравнений равновесия наиболее целесообразна при рассмотрении равновесия любых консольных балок.

Полная реакция опоры  $R_A$ :

$$R_A = \sqrt{8,66^2 + (-2)^2} = 8,9 \text{ кН.}$$

Ответ:  $R_A = 8,9$  кН;  $M_A = 0,2$  кН·м.

**Пример 89.** Определить реакции опор балки (рис. 3.53), если  $F_1 = 80$  кН,  $F_2 = 40$  кН,  $M_1 = 92$  кН·м,  $M_2 = 15$  кН·м,  $q_1 = 5$  кН/м,  $q_2 = 4$  кН/м.

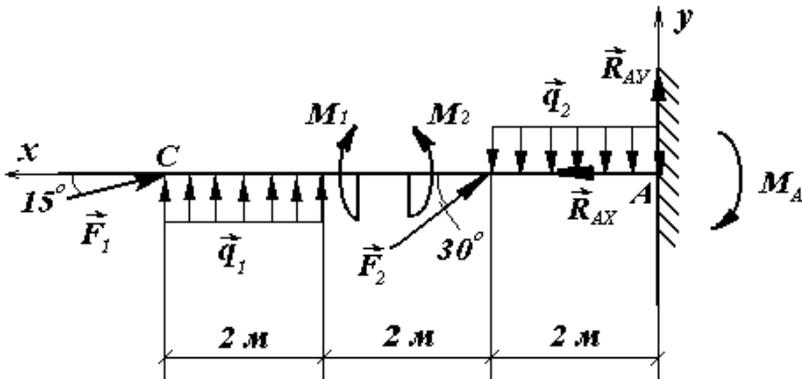


Рис. 3.53. К примеру 89

**Решение.** Рассматриваем равновесие балки  $CA$ . К ней приложены заданные сосредоточенные силы  $F_1$ ,  $F_2$ , равномерно распределённые нагрузки  $q_1$ ,  $q_2$  и моменты  $M_1$ ,  $M_2$ . Рассматривая тело  $CA$  как свободное, отбрасываем связь (заделку), заменяя ее действие реакциями – реактивным моментом  $M_A$  и составляющими реакциями  $R_{AX}$

и  $R_{AY}$  по осям координат. Расчетная схема изображена на рис. 3.53. Для получения плоской произвольной системы сил составляем три уравнения равновесия, выбрав в качестве центра моментов точку  $A$  (точку пересечения двух неизвестных сил):

$$\begin{aligned}\sum F_{iX} &= 0; \quad -F_1 \cdot \cos 15^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ + R_{AX} = 0; \\ \sum F_{iY} &= 0; \quad F_1 \cdot \cos 75^\circ + q_1 \cdot 2 + F_2 \cdot \cos 60^\circ - q_2 \cdot 2 + R_{AY} = 0; \\ \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0; \\ F_1 \cdot 6 \cdot \cos 75^\circ + q_1 \cdot 2 \cdot 5 + M_1 - M_2 + F_2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - \\ &\quad - q_2 \cdot 2 \cdot 1 + M_A = 0.\end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}M_A &= -F_1 \cdot 6 \cdot \cos 75^\circ - q_1 \cdot 2 \cdot 5 - M_1 + M_2 - \\ &\quad - F_2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + q_2 \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= -80 \cdot 6 \cdot 0,26 - 5 \cdot 10 - 92 + 15 - 40 \cdot 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 = -284 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ R_{AY} &= -F_1 \cdot \cos 75^\circ - q_1 \cdot 2 - F_2 \cdot \cos 60^\circ + q_2 \cdot 2 = \\ &= -80 \cdot 0,26 - 10 - 40 \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 = -42,8 \text{ кН}; \\ R_{AX} &= F_1 \cdot \cos 15^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ = 80 \cdot 0,97 + 40 \cdot 0,87 = 112 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Составляем проверочное уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}\sum M_C(\vec{F}_i) &= -q_1 \cdot 2 + M_1 - M_2 - F_2 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ + \\ &\quad + q_2 \cdot 2 \cdot 5 - R_{AY} \cdot 6 + M_A = \\ &= -10 + 92 - 15 - 40 \cdot 4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 10 + 42,8 \cdot 6 - 284 = -389 + 389 = 0.\end{aligned}$$

Значит, реакции определены верно. Реакция  $R_{AY}$  и реактивный момент  $M_A$  получились отрицательными, следовательно, их действительные направления противоположны предварительно выбранным.

Полная реакция опоры  $R_A$

$$R_A = \sqrt{112^2 + (-42,8)^2} = 120 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $R_A = 120 \text{ кН}$ ;  $M_A = -284 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

**Пример 90.** Механизм манипулятора, состоящий из трёх звеньев, соединённых шарнирами, в положении равновесия расположен в вертикальной плоскости (рис. 3.54, а).

Длины и массы звеньев:  $l_1 = 1,2$  м;  $l_2 = 0,7$  м;  $m_1 = 55$  кг;  $m_2 = 40$  кг; углы  $\alpha_{01} = \pi/3$ ,  $\alpha_{12} = \pi/6$ . Найти моменты сил приводов в шарнирах  $A$  и  $B$ , если рука  $BC$  манипулятора удерживает деталь, масса которой  $m = 30$  кг. Звенья считать однородными стержнями.

**Решение.** На звенья манипулятора действуют силы тяжести  $G_1$ ,  $G_2$ , приложенные в середине звеньев 1 и 2, сила тяжести детали  $G$ , приложенная в точке  $C$  звена 2 (рис. 3.54, б). Все силы направлены вертикально вниз.

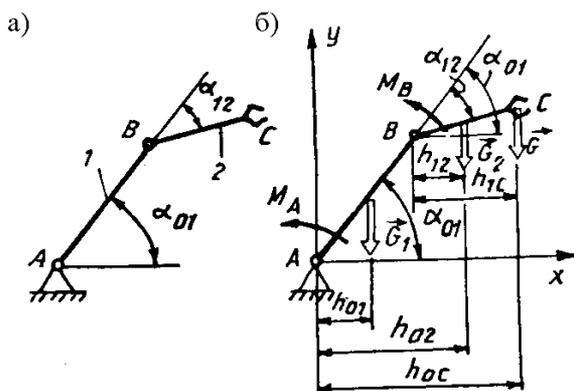


Рис. 3.54. К примеру 90

Сначала вычислим проекции звеньев на ось  $Ax$ :

$$l_{1x} = l_1 \cos \alpha_{01} = 1,2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{5} \text{ м};$$

$$l_{2x} = l_2 \cos(\alpha_{01} - \alpha_{12}) = 0,7 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{20} \text{ м}.$$

Моменты сил приводов в шарнирах:

$$\begin{aligned}
 M_A &= \sum M_A(\vec{F}_i) = G_1 h_{01} + G_2 h_{02} + G h_{0C} = \\
 &= m_1 g \frac{l_{1X}}{2} + m_2 g (l_{1X} + \frac{l_{2X}}{2}) + mg (l_{1X} + l_{2X}) = \\
 &= 55 \cdot 9,8 \cdot \frac{3}{5 \cdot 2} + 40 \cdot 9,8 \cdot (\frac{3}{5} + \frac{7\sqrt{3}}{20 \cdot 2}) + 30 \cdot 9,8 \cdot (\frac{3}{5} + \frac{7\sqrt{3}}{20}) = 870 \text{ Н}\cdot\text{м};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_B &= \sum M_B(\vec{F}_i) = G_2 h_{12} + G h_{1C} = m_2 g \frac{l_{2X}}{2} + mg l_{2X} = \\
 &= 9,8 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{20} \cdot (\frac{40}{2} + 30) = 297 \text{ Н}\cdot\text{м}.
 \end{aligned}$$

Моменты  $M_A$  и  $M_B$  – это реактивные моменты, направленные против хода часовой стрелки.

**Ответ:**  $M_B = 297$  Н·м;  $M_A = 870$  Н·м.

**Пример 91.** Пример имеет своим прототипом схему подъема мачтовых опор ЛЭП с помощью тягачей (рис. 3.55).

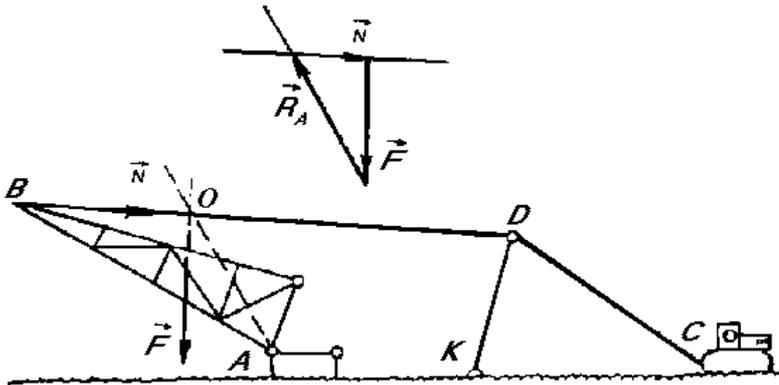


Рис. 3.55. К примеру 91

Рассмотрим эту схему.

Мачта  $AB$ , лежащая возле заранее подготовленного фундамента, соединяется с ним шарниром  $A$ . Затем с помощью канатной тяги  $BDC$  она поднимается до вертикального положения. При этом вспо-

могательная штанга  $KD$  облегчает работу в начальной стадии подъема, отводя направление тяги несколько вверх. Здесь осуществляется типичный случай равновесия трех сил, расположенных в одной плоскости (в данном случае - в вертикальной). Эти силы сходятся в некоторой точке  $O$ , определяемой пересечением каната с линией силы тяжести мачты. Искомая реакция также выходит на эту точку.

Графическое решение задачи состоит в том, что считая силу тяжести мачты, а также ее угол и угол каната с горизонтом известными, необходимо построить на векторе  $F$  в определенном масштабе замкнутый силовой треугольник при точке  $O$ , которую выгодно вынести в сторону от основного чертежа. Стороны треугольника должны быть строго параллельны направлениям искомых сил, тогда величины этих сил будут найдены прямым измерением сторон треугольника в миллиметрах и умножением их на выбранный масштаб.

Аналитическое решение задачи состоит в использовании уравнений равновесия, система которых для произвольных сил на плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum M_O(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Решение показано на несколько видоизмененной схеме (рис. 3.56).

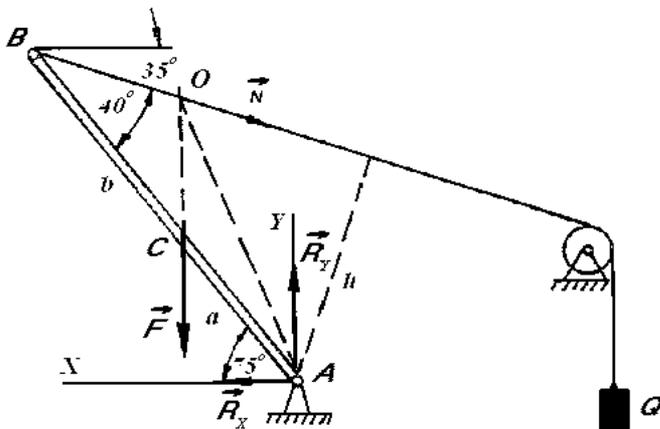


Рис. 3.56. К примеру 91

Пусть мачта  $AB$  в данный момент подъема составляет с горизонтом угол, равный  $75^\circ$ , а тяга  $BK$  наклонена к горизонту под углом  $35^\circ$ . Угол между мачтой и канатом получается равным  $40^\circ$ . Пусть центр тяжести  $C$  делит длину мачты на отрезки  $a = 7$  м и  $b = 12$  м. Вес мачты  $F = 14 \cdot 10^4$  Н (масса – 14 т). Требуется определить силу  $N$  натяжения каната и реакцию опоры  $R_A$ .

**Решение.** За начало координат принять шарнир  $A$ , направив ось  $X$  в сторону наклона мачты, а ось  $Y$  – вверх. Тогда уравнение моментов примет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = Nh - Fa \cdot \cos 75^\circ = 0, \quad (3.36)$$

где  $h = (a + b) \cdot \cos 40^\circ$  (плечо силы  $N$  относительно центра моментов  $A$ ).

Отсюда

$$N = \frac{Fa \cos 75^\circ}{h} = \frac{14 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 0,26}{19 \cdot 0,64} = 2,10 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Уравнения проекций сил на координатные оси:

$$\sum F_{ix} = R_x - N \cdot \cos 35^\circ = 0; \quad (3.37)$$

$$\sum F_{iy} = R_y - F - N \cdot \sin 35^\circ = 0,$$

откуда

$$R_x = N \cdot \cos 35^\circ = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,819 = 1,7 \cdot 10^4 \text{ Н;}$$

$$R_y = F + N \cdot \sin 35^\circ = 14 \cdot 10^4 + 2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,574 = 15,2 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Положительные значения реакций указывают на то, что их направления на чертеже выбраны верно (не забудьте, что ось  $X$  здесь направлена влево!).

Полная реакция шарнира  $R_A$

$$R_A = 10^4 \cdot \sqrt{1,7^2 + 15,2^2} = 15,3 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Её угол с горизонтом легко определяется по тангенсу.

Для проверки решения нужно убедиться, что линия действия реакции  $R_A$  действительно выходит на точку пересечения линий сил  $F$  и  $N$ .

**Ответ:**  $R_A = 15,3 \cdot 10^4 \text{ Н}; N = 2,1 \cdot 10^4 \text{ Н.}$

**Пример 92.** Пластинка  $OA$ , поворачиваясь относительно оси шарнира  $O$ , может устанавливаться под любым углом к горизонту (рис. 3.57, а). На пластинке лежит тело  $B$  весом  $G$ . Определить наибольший угол  $\alpha$  наклона пластинки, при котором тело будет оставаться в равновесии.

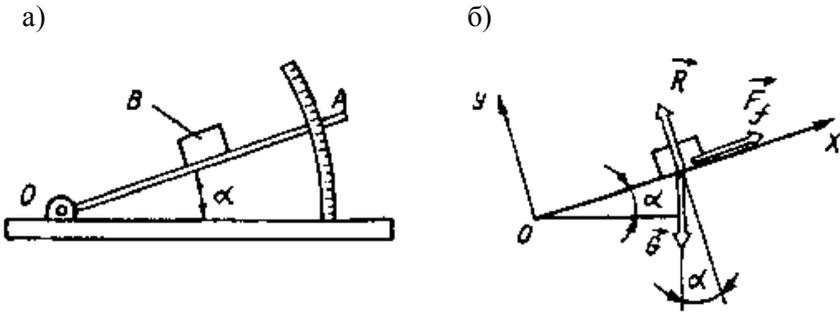


Рис. 3.57. К примеру 92

**Решение.** Примем систему координат  $Oxy$ . На тело  $B$  действуют сила тяжести  $G$ , нормальная реакция  $R$  и сила трения  $F_f$  (рис. 3.57, б).

Составим уравнения равновесия тела:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; F_f - G \sin \alpha = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; R - G \cos \alpha = 0, \end{aligned}$$

из которых найдём

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_f}{R}.$$

Заметим, что отношение силы трения  $F_f$  к нормальной реакции  $R$  есть коэффициент трения  $f$ . Тогда угол  $\alpha$  будет углом трения  $\varphi$ :  $f = \operatorname{tg}\varphi$ . Таким образом, для равновесия тела необходимо, чтобы выполнялось условие  $\alpha \leq \varphi$ .

С помощью рассматриваемого простого устройства можно экспериментально определять коэффициенты трения скольжения.

Например, в момент начала движения стального бруска по стальной пластине  $\varphi = 6^\circ 50'$ ; следовательно, коэффициент трения стали по стали  $f = \operatorname{tg}\varphi = 0,12$ .

**Ответ:**  $\varphi = 6^\circ 50'$ .

**Пример 93.** Груз весом  $G = 280$  Н подвешен в точке  $E$  горизонтальной балки  $AB$  весом  $G_1 = 160$  Н. Балка  $AB$  укреплена при помощи шарнира  $A$  и свободно опирается концом  $B$  на балку  $CD$  весом  $G_2 = 120$  Н. Балка  $CD$  имеет шарнир  $C$  и концом  $D$  опирается на гладкую вертикальную стену. Расстояние  $AE = 1/4 AB$ ;  $CB = 1/3 CD$ . Определить реакции опор  $A$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 3.58).

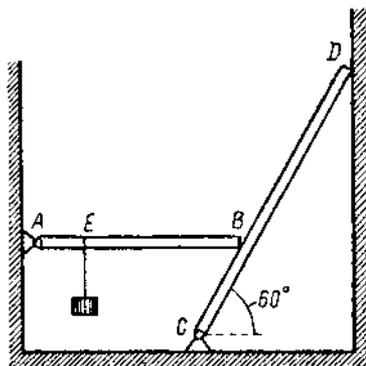


Рис. 3.58. К примеру 93

**Решение.** Реакции шарниров  $A$  и  $C$ , не известные по направлению, разложим на составляющие  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$ . Реакция стены  $R_D$  направлена перпендикулярно к ней (рис. 3.59, а). Пять неизвестных величин  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$ ,  $R_D$  нельзя определить из системы

трех уравнений равновесия. Поэтому произведем расчленение балок, т. е. рассмотрим отдельно равновесие сил, приложенных к каждой из балок.

На балку  $AB$  действуют заданные силы веса  $G$  и  $G_1$ , составляющие  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  реакции шарнира  $A$  и реакция  $R_B$  балки  $CD$ , направленная по нормали к ее поверхности (рис. 3.59, б).

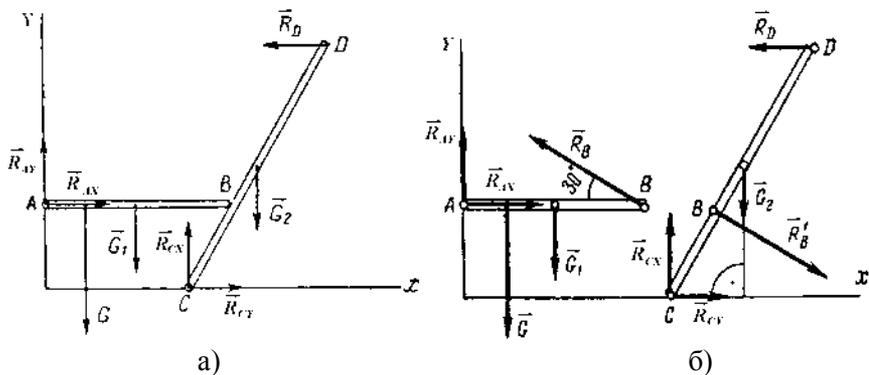


Рис. 3.59. К примеру 93

На балку  $CD$  действуют вес балки  $G_2$ , приложенный в середине  $CD$ , реакция  $R'_B$  балки  $AB$ , равная по модулю реакции  $R_B$  и противоположная ей, составляющие  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$  реакции шарнира  $C$  и реакция стены  $R_D$ .

Составим по три уравнения равновесия сил, действующих на каждую балку, и определим шесть неизвестных величин  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$ ,  $R_D$ ,  $R_B = R'_B$ .

Для сил, приложенных к балке  $AB$ , получим:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0; -G \cdot 1/4 \cdot AB - G_1 \cdot 1/2 \cdot AB + R_B \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = 0; \\ \sum F_{ix} &= 0; R_{Ax} - R_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; R_{Ay} - G - G_1 + R_B \cdot \cos 60^\circ = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Для сил, приложенных к балке  $CD$ :

$$\begin{aligned} \sum M_C(\vec{F}_i) &= 0; \\ -R'_B \cdot 1/3 \cdot CD - G_2 \cdot 1/2 \cdot CD \cdot \cos 60^\circ + R_D \cdot CD \cdot \sin 60^\circ &= 0; \quad (3.39) \\ \sum F_{iX} &= 0; \quad R_{CX} + R'_B \cdot \cos 30^\circ - R_D = 0; \\ \sum F_{iY} &= 0; \quad R_{CY} - R'_B \cdot \cos 60^\circ - G_2 = 0. \end{aligned}$$

Из системы уравнений (3.38) имеем:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{1/4 \cdot G + 1/2 \cdot G_1}{\sin 30^\circ} = \frac{1/4 \cdot 280 + 1/2 \cdot 160}{0,5} = 300 \text{ Н}; \\ R_{AX} &= R_B \cdot \cos 30^\circ = 300 \cdot 0,866 = 260 \text{ Н}; \\ R_{AY} &= G + G_1 - R_B \cdot \cos 60^\circ = 280 + 160 - 300 \cdot 0,5 = 290 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Так как  $R'_B = -R_B$ , из системы уравнений (3.39) следует, что

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{1/3 \cdot R'_B + 1/2 \cdot G_2 \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1/3 \cdot 300 + 1/2 \cdot 120 \cdot 0,5}{0,866} = 150 \text{ Н}; \\ R_{CX} &= -R'_B \cdot \cos 30^\circ + R_D = -300 \cdot 0,866 + 150 = -110 \text{ Н}; \\ R_{CY} &= -R'_B \cdot \cos 60^\circ + G_2 = 300 \cdot 0,5 + 120 = 270 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Знаки в ответах показывают, что сила  $R_{CX}$  направлена влево, а действительные направления остальных сил совпадают с указанными на схеме.

Полная реакция опоры  $R_A$

$$R_A = \sqrt{260^2 + 290^2} = 389,5 \text{ Н}.$$

Полная реакция опоры  $R_C$

$$R_C = \sqrt{(-110)^2 + 270^2} = 291,5 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $R_A = 389,5 \text{ Н}; R_C = 291,5 \text{ Н}; R_D = 150 \text{ Н}.$

**Пример 94.** Две балки  $AB$  и  $BC$  одинаковой длины  $l = 3$  м соединены между собой шарниром  $B$  (рис. 3.60, а). Конец  $A$  балки  $AB$  заделан в вертикальной стене, а конец  $C$  балки  $BC$  опирается на подвижную опору, расположенную под углом  $\alpha_1 = 30^\circ$  к оси балки  $BC$ . На балку  $AB$  по всей её длине действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью  $q = 3$  кН/м. На балку  $BC$  действует сила  $F = 10$  кН, приложенная в середине балки под углом  $\alpha = 60^\circ$  к её оси. Определить реакции опор  $A$  и  $C$ , а также в шарнире  $B$ , пренебрегая силами тяжести балок.

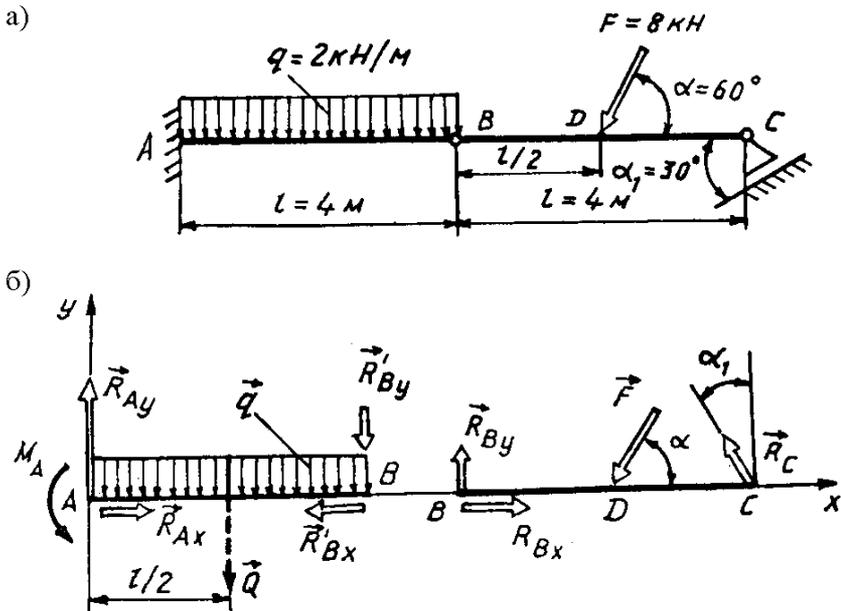


Рис. 3.60. К примеру 94

**Решение.** Составная балка  $ABC$  находится в равновесии, следовательно, балки  $AB$  и  $BC$  также находятся в равновесии.

Рассмотрим условия равновесия каждой балки в системе координат  $Ax$  (рис. 3.60, б). На балку  $BC$  действуют активная сила  $F$  и реакции связей  $R_C$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ . Реакция  $R_C$  подвижной опоры балки  $BC$  направлена по нормали к поверхности опоры. Ни модуль, ни на-

правление реакции  $R_B$  в шарнире  $B$  не известны. Поэтому она представлена в виде двух составляющих:  $R_{BX}, R_{BY}$ .

На балку  $AB$  действуют равномерно распределённая нагрузка  $q$ , равнодействующая которой  $Q = ql$  приложена в середине балки  $AB$  и направлена перпендикулярно к её оси, реакции связей  $R'_{BX}$  и  $R'_{BY}$ , которые, согласно закону действия и противодействия, имеют одинаковые модули и противоположные силам  $R_{BX}$  и  $R_{BY}$  направления ( $\vec{R}'_{BX} = -\vec{R}_{BX}$ ,  $\vec{R}'_{BY} = -\vec{R}_{BY}$ ), реакции  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$  и пара сил с моментом  $M_A$ . Итак, балка  $AB$  находится в равновесии при действии сил  $Q$ ,  $R'_{BX}$ ,  $R'_{BY}$ ,  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$  и реактивной пары сил с моментом  $M_A$ .

Составим уравнения равновесия балки  $BC$ :

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= R_{BX} - F \cos \alpha - R_C \sin \alpha_1 = 0; \\ \sum F_{iy} &= R_{BY} - F \sin \alpha + R_C \cos \alpha_1 = 0; \\ \sum M_B(\vec{F}_i) &= R_C l \cos \alpha_1 - F \frac{l}{2} \sin \alpha = 0.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия балки  $AB$ :

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= R_{AX} - R'_{BX} = 0; \\ \sum F_{iy} &= R_{AY} - ql - R'_{BY} = 0; \\ \sum M_A(\vec{F}_i) &= M_A - ql \frac{l}{2} - R'_{BY} l = 0.\end{aligned}$$

Решив эти системы уравнений при  $R'_{BX} = R_{BX}$ ,  $R'_{BY} = R_{BY}$ , найдём:

$$\begin{aligned}R_{BX} = R'_{BX} &= F \cos \alpha + \frac{F \sin \alpha \sin \alpha_1}{2 \cos \alpha_1} = \\ &= 10 \cdot \left( 0,5 + \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} \right) = 7,5 \text{ кН};\end{aligned}$$

$$R_{BY} = R'_{BY} = F \sin \alpha - \frac{F}{2} \sin \alpha = 10 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2} \right) = 2,5\sqrt{3} = 4,3 \text{ кН};$$

$$R_C = \frac{F \sin \alpha}{2 \cos \alpha_1} = \frac{10}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = 5 \text{ кН};$$

$$R_{AX} = R'_{BX} = 7,5 \text{ кН};$$

$$R_{AY} = ql + R'_{BY} = 3 \cdot 3 + 2,5\sqrt{3} = 9 + 2,5\sqrt{3} = 13,3 \text{ кН};$$

$$M_A = \frac{ql^2}{2} + R_{BY}l = \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 2,5\sqrt{3} \cdot 3 = 13,5 + 7,5\sqrt{3} = 26,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как реакции в шарнире  $B$ , действующие на балки  $AB$  и  $BC$ , направлены в противоположные стороны, получаем  $R_{BX} = \pm 7,5$  кН,

$$R_{BY} = \pm 2,5\sqrt{3} \text{ кН}.$$

Полная реакция опоры  $R_A$

$$R_A = \sqrt{7,5^2 + 4,3^2} = 8,7 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $R_A = 8,7$  кН;  $M_A = 26,5$  кН·м;  $R_C = 5$  кН.

**Пример 95.** На губки схвата манипулятора при удержании детали действует сила  $F = 6$  кН (рис. 3.61, а). Найти реакции в шарнирах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и силу привода  $F_{II}$ , если  $h_1 = 180$  мм,  $h_2 = 120$  мм, а углы  $\gamma_1 = 7^\circ$ ,  $\gamma_2 = 9^\circ$ . Силами трения и силами тяжести звеньев пренебречь.

**Решение.** Сначала рассмотрим равновесие звена 2 (рис. 3.61, б).

На него действует сила  $F$ , реакция  $F_{21}$  звена 1, направленная вдоль его оси, и реакция шарнира  $A$ , представленная её составляющими  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ .

Составим уравнения равновесия звена 2:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = Fh_1 - F_{21}h_2 \cos \gamma_2 = 0;$$

$$\sum F_{ix} = F_{21} \sin \gamma_2 - R_{AX} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = F_{21} \cos \gamma_2 + F - R_{AY} = 0,$$

откуда:

$$F_{21} = \frac{Fh_1}{h_2 \cos \gamma_2} = \frac{6000 \cdot 0,18}{0,12 \cdot \cos 9^\circ} = 9112 \text{ Н};$$

$$R_{AX} = F_{21} \sin \gamma_2 = 9112 \sin 9^\circ = 1425 \text{ Н};$$

$$R_{AY} = F_{21} \cos \gamma_2 + F = F \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) = 6000 \cdot \left(1 + \frac{0,18}{0,12}\right) = 15000 \text{ Н};$$

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{1425^2 + 15000^2} = 15068 \text{ Н}.$$

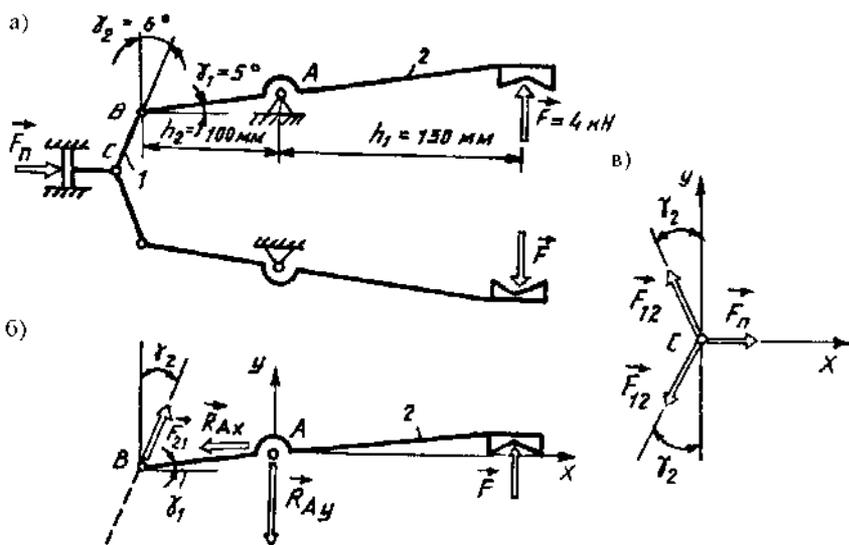


Рис.3.61. К примеру 95

Сила, действующая на звено 1 и направленная вдоль его оси,  $F_{12} = F_{21} = 9112 \text{ Н}$ .

Рассматривая равновесие шарнира C (рис. 3.61, в), определим силу привода:

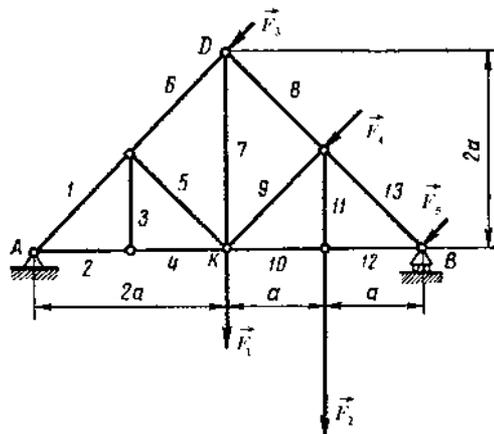
$$F_{II} = 2F_{12} \sin \gamma_2 = 2 \cdot 9112 \sin 9^\circ = 2851 \text{ Н}.$$

Найденные величины используются для расчёта на прочность деталей схвата.

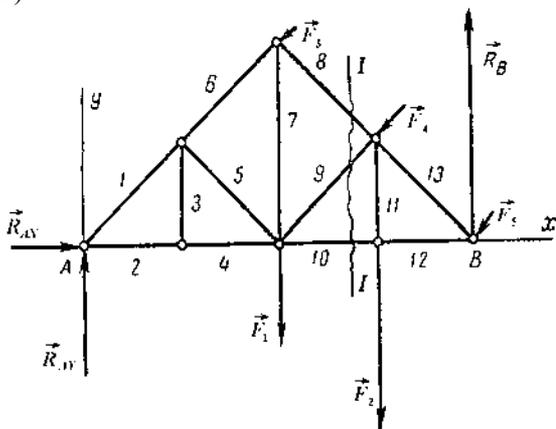
**Ответ:**  $R_A = 15068 \text{ Н}$ ;  $F_{12} = F_{21} = 9112 \text{ Н}$ ;  $F_{II} = 2851 \text{ Н}$ .

**Пример 96.** Определить усилия в стержнях 8, 9 и 10 фермы, изображённой на рис. 3.62, а, если  $F_1 = 50 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 70 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 15 \text{ кН}$ ,  $F_4 = 35 \text{ кН}$ ,  $F_5 = 15 \text{ кН}$ ,  $AB = 4a$ ,  $KD = 2a$ .

а)



б)



в)

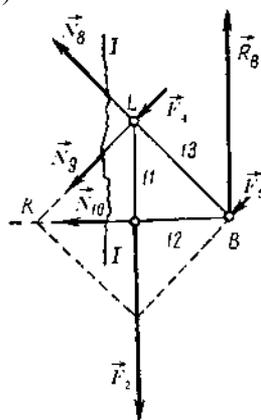


Рис. 3.62. К примеру 96

**Решение.** Прежде всего определим реакции опор фермы  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_B$  (рис. 3.62, б). Для этого составим три уравнения равновесия сил, действующих на ферму:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; -F_1 2a - F_2 3a + R_B 4a - F_4 a\sqrt{2} - F_5 2a\sqrt{2} = 0;$$

$$R_B = \frac{F_1 2 + F_2 3 + F_4 \sqrt{2} + F_5 2\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{50 \cdot 2 + 70 \cdot 3 + 35\sqrt{2} + 15 \cdot 2\sqrt{2}}{4} = 100,5 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iX} = 0; R_{AX} - F_3 \cos 45^\circ - F_4 \cos 45^\circ - F_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$R_{AX} = (F_3 + F_4 + F_5) \cos 45^\circ = (15 + 35 + 15) \frac{\sqrt{2}}{2} = 46,0 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iY} = 0;$$

$$R_{AY} - F_1 - F_2 + R_B - F_3 \cos 45^\circ - F_4 \cos 45^\circ - F_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$R_{AY} = F_1 + F_2 - R_B + (F_3 + F_4 + F_5) \cos 45^\circ =$$

$$= 50 + 70 - 100,5 + (15 + 35 + 15) \frac{\sqrt{2}}{2} = 65,5 \text{ кН}.$$

Для определения усилий в стержнях 8, 9 и 10 проведём сечение I-I. Отбросим левую часть фермы, заменив её действие на оставшуюся часть реакциями разрезанных стержней  $N_8$ ,  $N_9$  и  $N_{10}$ , направив эти силы в сторону отброшенной части (рис. 3.62, в). Чтобы определить каждое усилие независимо от двух других, применим систему уравнений равновесия.

Составим уравнения моментов сил, действующих на правую часть фермы, относительно точек Риттера  $K$ ,  $B$  и  $L$ , в которых пересекаются по две линии действия усилий:

$$\sum M_K(\vec{F}_i) = 0; N_8 a\sqrt{2} - F_2 a + R_B 2a - F_5 a\sqrt{2} = 0;$$

$$N_8 = \frac{F_2}{\sqrt{2}} - R_B \sqrt{2} + F_5 = \frac{70}{\sqrt{2}} - 100,5\sqrt{2} + 15 = -77,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; N_9 a\sqrt{2} + F_4 a\sqrt{2} + F_2 a = 0;$$

$$N_9 = -F_4 - \frac{F_2}{\sqrt{2}} = -35 - \frac{70}{\sqrt{2}} = -84,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_L(\vec{F}_i) = 0; -N_{10} a + R_B a - F_5 a\sqrt{2} = 0;$$

$$N_{10} = R_B - F_5\sqrt{2} = 100,5 - 15\sqrt{2} = 79,3 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $N_8 = -77,6$  кН;  $N_9 = -84,5$  кН;  $N_{10} = 79,3$  кН.

### Задачи к заданиям

**Задача 7.** Брус  $AB$ , шарнирно закрепленный в точке  $A$ , имеет вторую опору в точке  $D$  (рис. 3.63). Сила тяжести  $G$  бруса приложена в точке  $C$ . К свободному концу  $B$  бруса прикреплена перекинутая через блок нить, несущая груз  $F$ . Определить реакцию шарнира  $A$  и опоры  $D$ . Схема нагружений бруса в задачах и числовые значения сил  $F$  и  $G$  для своего варианта взять из табл. 3.2.

Т а б л и ц а 3.2

Исходные данные к задаче 7

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$G$ , кН	8	5	6	4	3	2,5	2	1,5	0,6	1,2
$F$ , кН	10	8	12	9	5	6	4	5	2,5	3

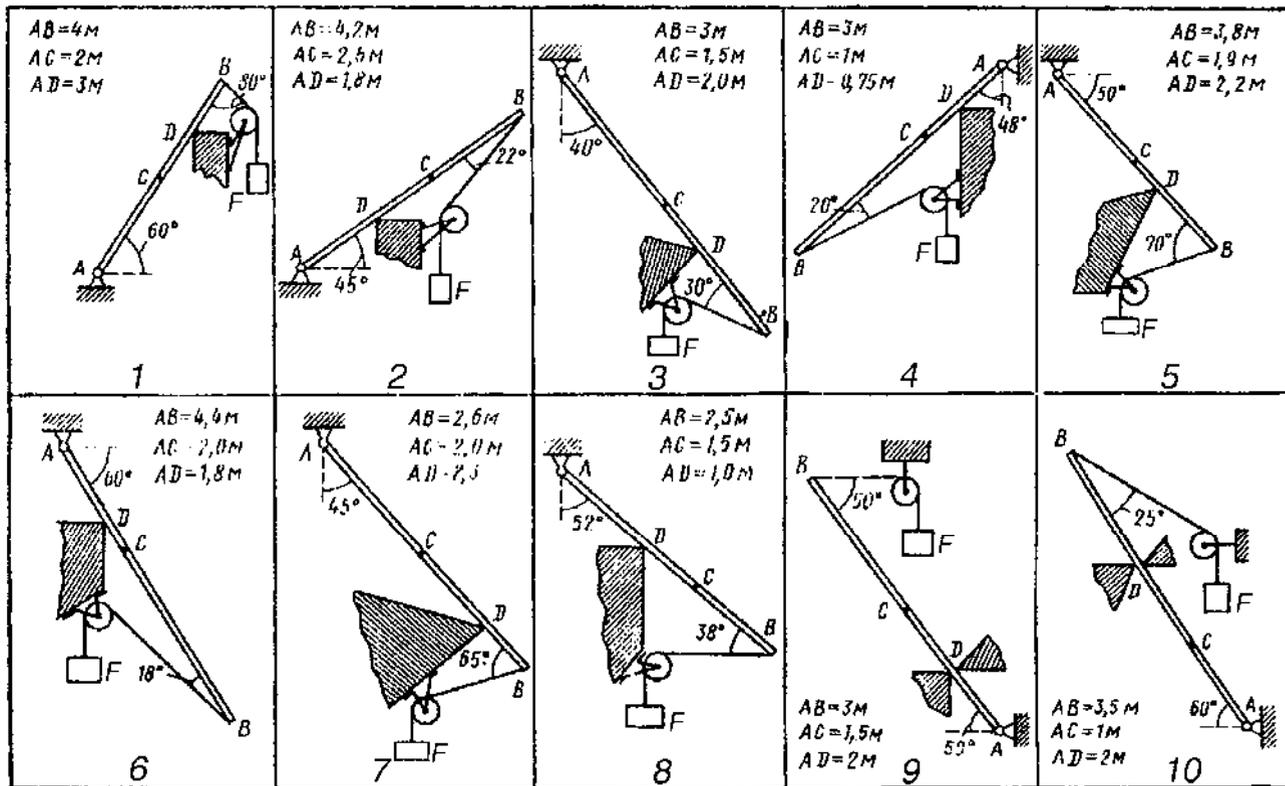


Рис. 3.63. К задаче 7

**Задача 8.** (рис. 3.64, табл. 3.3). Для заданной консольной балки определить опорные реакции заделки.

Т а б л и ц а 3.3

Исходные данные к задаче 8

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1$ , кН	10	12	7	12	4	6	22	6	9	10
$F_2$ , кН	7	9	10	7	11	6	22	6	9	10
$M$ , кН·м	13	6	7	15	9	16	11	8	11	13
$l_1$ , м	0,5	0,4	0,7	0,3	0,8	0,9	0,5	0,4	0,6	0,7
$l_2$ , м	0,4	0,7	0,6	0,5	0,7	0,4	0,4	0,9	0,7	0,9

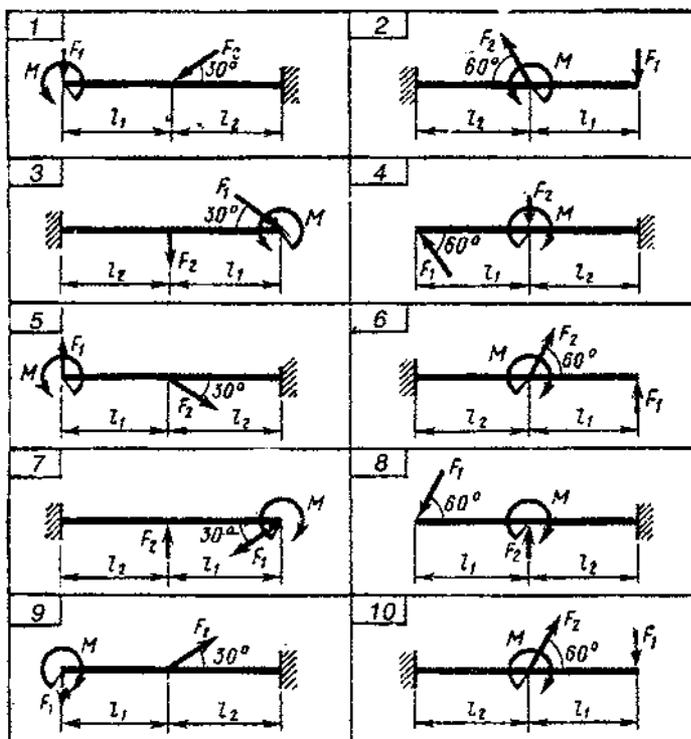


Рис. 3.64. К задаче 8

**Задача 9.** Определить реакции опор балки, нагруженной, как показано на рис. 3.65. Данные для своего варианта выбрать из табл. 3.4.

Т а б л и ц а 3.4

Исходные данные к задаче 9

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1$ , кН	6	20	12	10	8	16	40	20	8	16
$F_2$ , кН	7	10	8	20	12	8	20	8	16	8
$M$ , кН·м	8	12	20	15	10	24	40	20	12	24
$q$ , кН/м	9	4	6	8	10	6	12	6	8	15
$a$ , м	2,2	1,5	1,4	1,6	2	1,6	2	1,2	2	3
$b$ , м	4	1,8	2	1,2	1,4	1	2	1,5	1,8	2
$c$ , м	5	1	1,5	2,2	2	2	1,4	1,5	2	1

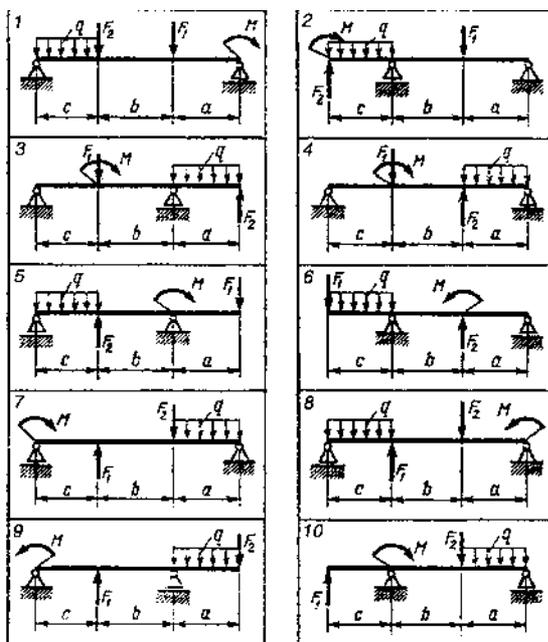


Рис. 3.65. К задаче 9

**Задача 10.** Соответствует схеме (рис. 3.66) подъёма мачтовых опор ЛЭП с помощью тягачей или лебёдок с тяговым усилием  $F_t$ . На опору ЛЭП действует сила  $F_1$ . Опора поднимается вокруг шарнира  $A$  из первоначального положения, определяемого углом  $\beta$ .

Определить:

1. Значение угла наклона троса к горизонту  $\alpha$  (который определяет высоту дополнительной подставки  $h_d$ ) при  $F_t = 1,5F_1$ .
2. Величину и направление реакции в шарнире  $A$ .

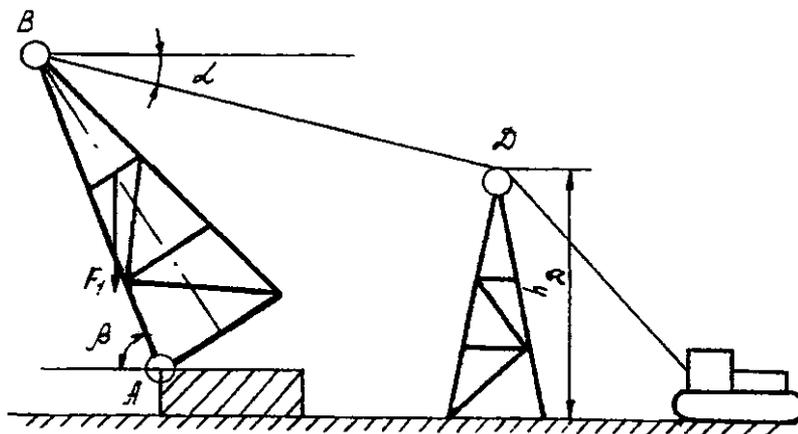


Рис. 3.66. К задаче 10

Проанализировать результаты решения.

Варианты схем к задаче – на рис. 3.67, данные к схемам – в табл. 3.5. Считать, что  $l_{AC} = \frac{1}{3}l_{AB}$  или (для схем 9 и 10)  $l_{BC} = \frac{1}{3}l_{AB}$ .

Т а б л и ц а 3.5

Исходные данные к задаче 10

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1$ , кН	60	80	130	120	140	150	70	90	100	110
$l_{AB}$ , м	22	25	28	21	24	27	30	23	26	20
$\beta^0$	4	3	5	6	3,5	4,5	5,5	5	4	3

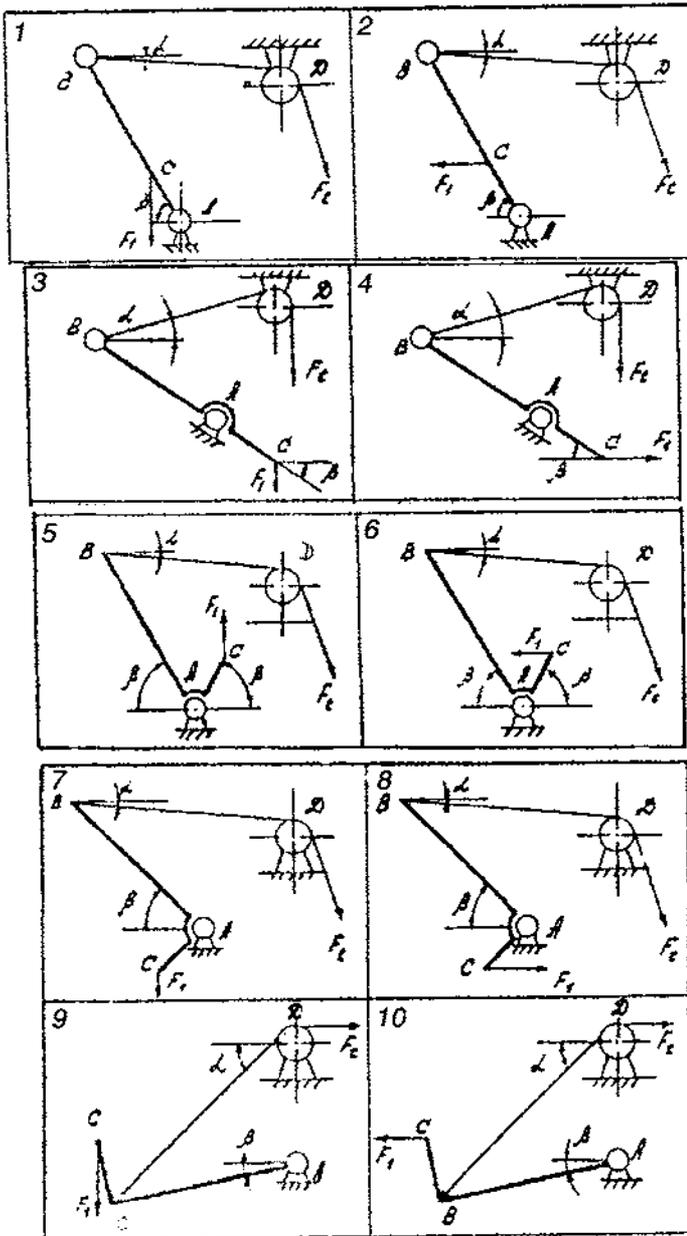


Рис. 3.67. К задаче 10

## Глава 4. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ (ПрСС)

### 4.1. Момент силы относительно оси

Величина, равная проекции на ось вектора момента силы (рис. 4.1) относительно любой точки, принадлежащей данной оси, называется *моментом силы относительно оси*.

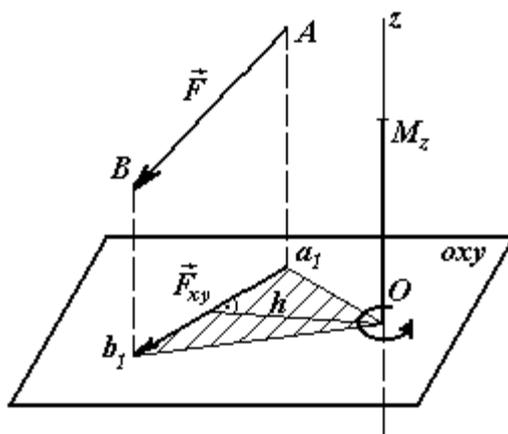


Рис. 4.1. Момент силы относительно оси

Моменты сил относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}M_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y; & M_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z; \\M_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x.\end{aligned}\tag{4.1}$$

**В практике решения задач необходимо помнить, что моментом силы относительно оси** называется произведение проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо. Плечом проекции силы называется перпендикуляр, проведённый из точки пересечения оси с плоскостью, на проекцию силы или её продолжение. Момент силы относительно оси считается положительным, если плоскость под действием проекции силы стремится повернуться в

направлении часовой стрелки (если смотреть на плоскость со стороны стрелки оси), и отрицательным, если – против часовой стрелки.

**Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:**

1. Если линия действия силы параллельна оси (проекция силы на плоскость обращается в нуль);

2. Если сила или линия действия силы пересекает ось (плечо проекции силы равно нулю).

Для вычисления момента силы, например, относительно оси  $OZ$ , необходимо:

1. Провести в любом месте плоскость  $XOY$ , перпендикулярную к оси  $OZ$ , и найти точку пересечения этой плоскости с осью;

2. Спроецировать силу  $F$  на эту плоскость и определить вектор  $F_{XY}$ ;

3. Опустить из точки пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на линию действия  $F_{XY}$  и найти его длину  $h$ ;

4. Вычислить произведение  $F_{XY} \cdot h$ ;

5. Определить знак момента  $M_Z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) = F_{XY} \cdot h$ .

#### 4.2. Приведение силы к центру

Всякую силу  $F$ , приложенную к твёрдому телу в точке  $A$ , можно перенести параллельно линии её действия в любую точку  $O$ , присоединив пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки её приложения.

Докажем эту теорему. Пусть в точке  $A$  твёрдого тела приложена сила  $F$  (рис. 4.2, а). Выберем произвольную точку  $O$  (точку приведения), не лежащую на линии действия силы  $F$ . Приложим в точке  $O$  параллельно данной силе  $F$  две равные по модулю, но противоположные по направлению силы  $F'$  и  $F''$  (рис. 4.2, б). Полученная система сил  $(F, F', F'')$  эквивалентна одной силе  $F$ .

Силы  $F$  и  $F'$  образуют пару  $(F, F')$ . Следовательно, система сил  $(F, F', F'')$  эквивалентна силе  $F''$ , приложенной в точке  $O$  и равной по модулю силе  $F$ , и паре сил  $(F, F')$  с моментом  $\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F})$  (рис. 4.2, в).

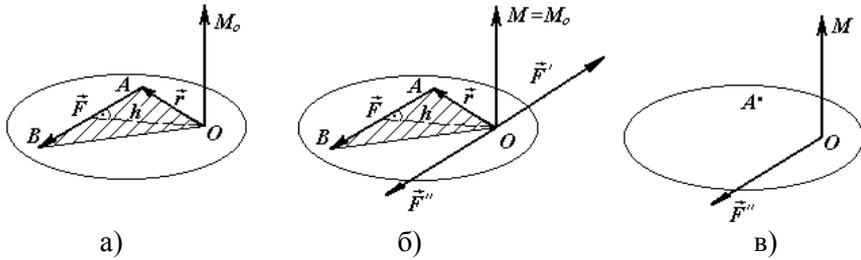


Рис. 4.2. Приведение силы к центру

### 4.3. Равновесие твёрдых тел под действием пространственной системы сил

Для равновесия тела при действии на него любой пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы сил были равны нулю:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (4.2)$$

В проекциях на координатные оси уравнения равновесия (4.2) твёрдого тела можно записать в виде следующих шести уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iX} = 0; & \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iY} = 0; & \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iZ} = 0; \\ \sum_{i=1}^n \vec{M}_X(\vec{F}_i) = 0; & \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_Y(\vec{F}_i) = 0; & \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_Z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для равновесия тела в случае действия на него произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из осей и суммы моментов этих сил относительно координатных осей были равны нулю.

**Пространственная система параллельных сил.** Если  $OZ$  параллельна линиям действия сил (рис. 4.3), то проекции сил  $\vec{F}_i$  на оси  $OX$  и  $OY$ , а также моменты  $M_Z(\vec{F}_i)$  относительно оси  $OZ$  равны нулю.

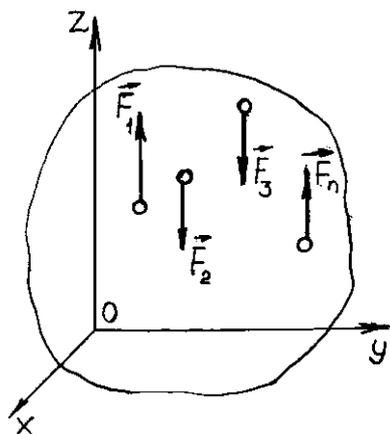


Рис. 4.3. Пространственная система параллельных сил

Значит, уравнения равновесия принимают вид

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_y(\vec{F}_i) = 0. \quad (4.4)$$

**Пространственная система сходящихся сил.** Для равновесия тела в случае действия на него пространственной системой сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из осей были равны нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = 0. \quad (4.5)$$



### Вопросы для самопроверки

1. Какие уравнения и сколько их можно составить для уравновешенной пространственной системы сходящихся сил?
2. Как определяется момент силы относительно оси?
3. Почему при определении момента силы относительно оси нужно обязательно спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси?

4. Каким образом нужно расположить ось, чтобы момент данной силы относительно этой оси равнялся нулю?

5. Какие уравнения и сколько их можно составить для уравновешенной пространственной системы параллельных сил?

6. Какие уравнения и сколько их можно составить для уравновешенной произвольной пространственной системы сил?

### Примеры

**Пример 97.** Барабан лебедки (рис. 4.4, а) диаметром  $d_\delta = 0,14$  м и приводится в равномерное вращение с помощью зубчатого колеса расчетным диаметром  $d = 0,25$  м, на зуб которого действует расположенная в плоскости колеса сила  $F = 6$  кН. Пренебрегая весом частей механизма, а также трением в подшипниках и на барабане, определить грузоподъемную силу лебедки.

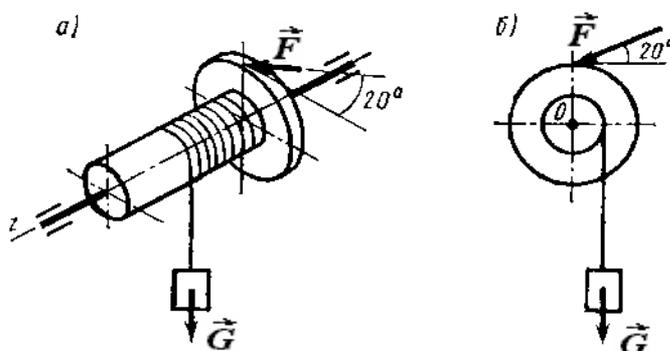


Рис. 4.4. К примеру 97

**Решение.** Вал с насаженными на него деталями вращается равномерно, т.е. находится в равновесии, если сумма моментов действующих на детали сил относительно оси вращения равна нулю:

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \frac{G \cdot d_\delta}{2} - F \cdot \cos 20^\circ \cdot \frac{d}{2} = 0;$$

$$\frac{G \cdot 0,14}{2} - 6 \cdot 0,94 \cdot \frac{0,25}{2} = 0,$$

отсюда

$$G = 10 \text{ кН},$$

где  $d_0/2$  – радиус барабана, являющийся плечом силы  $G$  относительно оси  $Z$ ;

$d/2$  – радиус зубчатого колеса, являющийся плечом касательной составляющей  $F\cos 20^\circ$  силы  $F$ . Нормальная же составляющая  $F\cos 70^\circ$  пересекает ось  $Z$  и момента относительно оси не создает (плечо силы равно нулю).

При решении задач с пространственно расположенными силами целесообразно составлять дополнительный чертеж, спроецировав силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения (рис. 4.4, б).

Это объясняется тем, что момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

**Ответ:**  $G = 10$  кН.

**Пример 98.** На валу установлен барабан, к которому подвешен груз весом  $G = 350$  кН (рис. 4.5, а). Какой момент  $M$  нужно приложить к рукоятке, чтобы груз оставался в покое, если радиус барабана  $r = 240$  мм? Силы тяжести вала и барабана не учитывать.

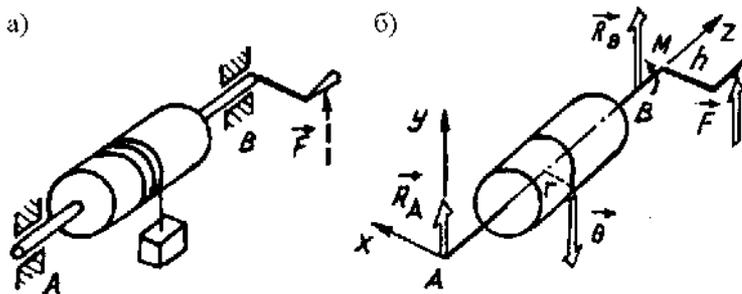


Рис. 4.5. К примеру 98

**Решение.** На вал действуют сила тяжести груза  $G$ , реакции опор  $R_A$ ,  $R_B$  и пара сил с моментом  $M$  на рукоятке. Выберем систему координат, как показано на рис. 4.5, б, и составим уравнения равновесия вала:

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad M - Gr = 0,$$

откуда

$$M = Gr = 350 \cdot 0,240 = 84 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Если принять длину рукоятки  $h = 0,7$  м, то сила на рукоятке  $F = M/h = 84/0,7 = 120$  Н.

**Ответ:**  $M = 84$  Н·м.

**Пример 99.** На горизонтальный вал  $AB$  насажены зубчатое колесо  $C$  радиуса 1 м и шестерня  $D$  радиуса 10 см. Другие размеры указаны на рисунке. К колесу  $C$  по направлению касательной приложена горизонтальная сила  $\vec{F}_{t1} = 100$  Н, а к шестерне  $D$ , также по касательной, приложена вертикальная сила  $\vec{F}_{t2}$ . Определить силу  $\vec{F}_{t2}$  и реакции подшипников  $A$  и  $B$  в положении равновесия (рис. 4.6).

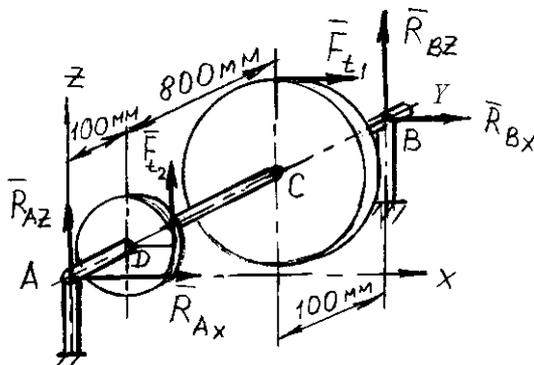


Рис. 4.6. К примеру 99

**Решение.** Отбрасывая связи вала (подшипники), прикладываем к валу их реакции, разложенные на составляющие  $R_{Ax}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{Bz}$  (см. рис. 4.6).

Составляем уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} + \vec{F}_{t1} + R_{Bx} = 0; \quad (4.6)$$

$$\sum F_{iZ} = 0; \quad R_{AZ} + \vec{F}_{i2} + R_{BZ} = 0; \quad (4.7)$$

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = 0; \quad \vec{F}_{i2} \cdot 10 + R_{BZ} \cdot 100 = 0; \quad (4.8)$$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; \quad -\vec{F}_{i2} \cdot 10 + \vec{F}_{i1} \cdot 100 = 0; \quad (4.9)$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad -\vec{F}_{i1} \cdot 90 - R_{BX} \cdot 100 = 0. \quad (4.10)$$

Из уравнения (4.9) имеем, что

$$F_{i2} = \frac{F_{i1} \cdot 100}{10} = \frac{100 \cdot 100}{10} = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН.}$$

Подставляя значение  $F_{i2} = 1 \text{ кН}$  в уравнение (4.8), получим:

$$R_{BZ} = \frac{-F_{i2} \cdot 10}{100} = \frac{-1 \cdot 10}{100} = -0,1 \text{ кН.}$$

Зная значение  $R_{BZ}$  из уравнения (4.7):

$$R_{AZ} = -F_{i2} - R_{BZ} = -1 + 0,1 = -0,9 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4.10) следует, что

$$R_{BX} = \frac{-F_{i1} \cdot 90}{100} = \frac{-0,1 \cdot 90}{100} = -0,09 \text{ кН.}$$

Тогда из уравнения (4.6):

$$R_{AX} = -F_{i1} - R_{BX} = -0,1 + 0,09 = -0,01 \text{ кН.}$$

Следует отметить, что уравнение  $\sum F_{iY} = 0$  дает тождество  $0 = 0$ .

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{(-0,01)^2 + (-0,9)^2} = \sqrt{0,8401} = 0,92 \text{ кН.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{(-0,09)^2 + (-0,1)^2} = \sqrt{0,0181} = 0,13 \text{ кН.}$$

Ответ:  $\vec{F}_{t_2} = 1 \text{ кН}$ ;  $R_A = 0,92 \text{ кН}$ ;  $R_B = 0,13 \text{ кН}$ .

**Пример 100.** Для горизонтального вала, несущего два зубчатых колеса с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и нагруженного, как показано на рис. 4.7, а, определить реакции опор  $A$  и  $B$  вала, если в точках  $C$  и  $D$  соответственно приложены силы:  $F_{t_1} = 420 \text{ Н}$ ,  $F_{r_1} = 140 \text{ Н}$ ,  $F_{t_2} = 360 \text{ Н}$ ,  $F_{r_2} = 120 \text{ Н}$ . Радиусы зубчатых колес соответственно равны  $r_1 = 120 \text{ мм}$  и  $r_2 = 80 \text{ мм}$ . Вал по длине имеет размеры:  $l_1 = 60 \text{ мм}$ ,  $l_2 = 140 \text{ мм}$ ,  $l_3 = 100 \text{ мм}$ .

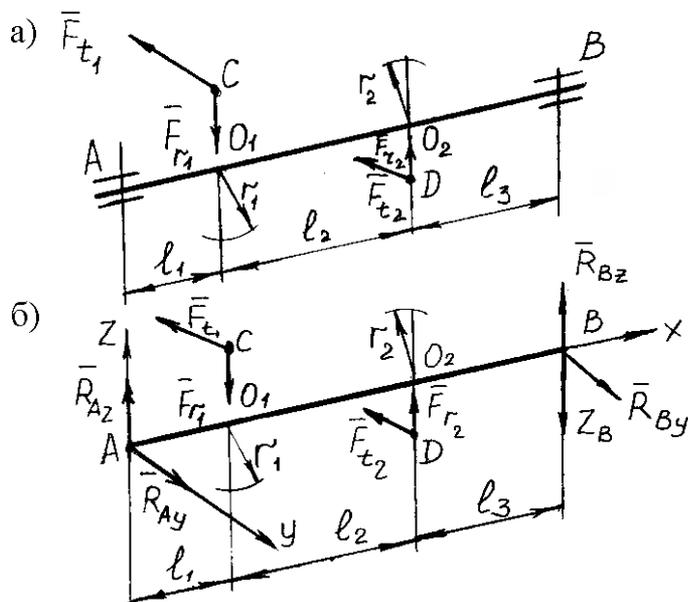


Рис. 4.7. К примеру 100

**Решение.** Освобождая вал от связей (подшипников) в точках  $A$  и  $B$ , заменяем связи их реакциями. Выбираем пространственную сис-

тему координат с началом в точке  $A$  так, чтобы ось  $X$  располагалась по оси вала, ось  $Y$  – параллельно силам  $F_{t_1}$  и  $F_{t_2}$  и ось  $Z$  – параллельно силам  $F_{r_1}$  и  $F_{r_2}$ . Принимая во внимание, что сил, действующих параллельно оси вала (оси  $X$ ), на схеме не имеется, в точках  $A$  и  $B$  будут приложены реакции связей, располагающиеся параллельно внешним силам, приложенным к валу в точках  $C$  и  $D$ , а именно: в точке  $A$  –  $R_{AZ}$  и  $R_{AY}$ , а в точке  $B$  –  $R_{BZ}$  и  $R_{BY}$ . В итоге на вал будет действовать пространственная система восьми произвольно расположенных сил:  $F_{t_1}$ ,  $F_{t_2}$ ,  $F_{r_1}$ ,  $F_{r_2}$  – внешние силы и  $R_{AZ}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_{BZ}$ ,  $R_{BY}$  – реакции связей (рис. 4.7, б).

Из условия равновесия данной системы сил определим неизвестные реакции связей в опорах  $A$  и  $B$  вала, составив шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{iX} = 0; \quad \sum M_X(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum F_{iY} = 0; \quad \sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum F_{iZ} = 0; \quad \sum M_Z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned}$$

Перед составлением уравнений равновесия заметим, что, например, силы  $F_{r_1}$ ,  $F_{r_2}$ ,  $R_{AZ}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_{BZ}$ ,  $R_{BY}$  имеют моменты относительно оси  $X$ , равные нулю, потому что эти силы пересекают ось  $X$  непосредственно или своим продолжением (силы  $F_{r_1}$  и  $F_{r_2}$ ). Силы  $F_{t_1}$  и  $F_{t_2}$ , а также  $R_{AZ}$  и  $R_{BZ}$  не дают моментов относительно оси  $Z$  потому, что они параллельны этой оси, а сила  $R_{AZ}$  расположена на самой оси  $Z$ .

Аналогично этому моменты сил  $F_{t_1}$ ,  $F_{t_2}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_{BY}$  относительно оси  $Y$  также обращаются в нуль. Уравнения равновесия системы сил принимают вид:

$$\sum F_{iX} = 0 \text{ – силы системы проекций на ось } X \text{ не дают;} \quad (4.11)$$

$$\sum F_{iY} = 0; \quad R_{AY} - F_{t_1} - F_{t_2} + R_{BY} = 0; \quad (4.12)$$

$$\sum F_{iZ} = 0; \quad R_{AZ} - F_{r_1} + F_{r_2} - R_{BZ} = 0; \quad (4.13)$$

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = 0; F_{t_1} \cdot r_1 - F_{t_2} \cdot r_2 = 0 \text{ – уравнение не имеет неиз-}$$

вестных; (4.14)

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; F_{r_1} \cdot l_1 - F_{r_2} (l_1 + l_2) + R_{BZ} (l_1 + l_2 + l_3) = 0; \quad (4.15)$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; -F_{r_1} \cdot l_1 - F_{t_2} (l_1 + l_2) + R_{BY} (l_1 + l_2 + l_3) = 0. \quad (4.16)$$

Для определения неизвестных реакций опор вала используем четыре уравнения равновесия

$$\sum F_{iY} = 0; \sum F_{iZ} = 0; \sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; \sum M_Z(\vec{F}_i) = 0.$$

Из уравнения (4.15) находим

$$R_{BZ} = \frac{-F_{r_1} \cdot l_1 + F_{r_2} (l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2 + l_3)} = \frac{-140 \cdot 60 + 120(60 + 140)}{60 + 140 + 100} =$$

$$= \frac{-8400 + 24000}{300} = 52 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.13)

$$R_{AZ} = F_{r_1} - F_{r_2} + R_{BZ} = 140 - 120 + 52 = 72 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.16) находим

$$R_{BY} = \frac{F_{t_1} \cdot l_1 + F_{t_2} (l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2 + l_3)} = \frac{420 \cdot 60 + 360(60 + 140)}{60 + 140 + 100} =$$

$$= \frac{25200 + 72000}{300} = 324 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.12)

$$R_{AY} = F_{t_1} + F_{t_2} - R_{BY} = 420 + 360 - 324 = 456 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{456^2 + 72^2} = \sqrt{213120} = 461,6 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{324^2 + 52^2} = \sqrt{107680} = 328,1 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 461,6 \text{ Н}$ ;  $R_B = 328,1 \text{ Н}$ .

**Пример 101.** На рис. 4.8 изображен коленчатый вал двигателя. При вертикальном положении средней плоскости колена шатуна сила  $F$ , действующая на середину шейки вала, составляет 12 кН и направлена к плоскости, перпендикулярной к оси вала, под углом  $15^\circ$  к горизонтали. На оси вала в точке  $C$  закреплен маховик весом  $G = 12 \text{ кН}$ . В точке  $E$  укреплен шкив диаметром  $D = 80 \text{ см}$  с ремнем, передающим момент на вал рабочей машины. Ветви ремня расположены в плоскости шкива и составляют с горизонталью угол, равный  $30^\circ$ . Отношение натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи  $\frac{F_1}{F_2} = 2$ . Расстояние от оси вала до оси шейки колена

$r = 15 \text{ см}$ . Расстояния вдоль оси вала показаны на рис. 4.8. Определить величины натяжения ветвей ремня  $F_1$  и  $F_2$  и реакции подшипников вала  $A$  и  $B$  при равномерном его вращении и заданном его положении. Весом шкива и вала пренебрегаем.

**Решение.** Приложенные к валу силы должны удовлетворять условиям их равновесия. Прикладываем к валу заданные внешние силы: вес маховика  $G$ , силу давления на шейку  $F$  и реакции ветвей ремня  $F_1$  и  $F_2$ , направленные по касательной к окружности обода шкива. Отбрасывая мысленно связи, наложенные на вал в виде подшипников, заменяем их реакциями вала, разложенными на составляющие  $R_{AY}$ ,  $R_{AZ}$ ,  $R_{BY}$ ,  $R_{BZ}$  (рис. 4.9).

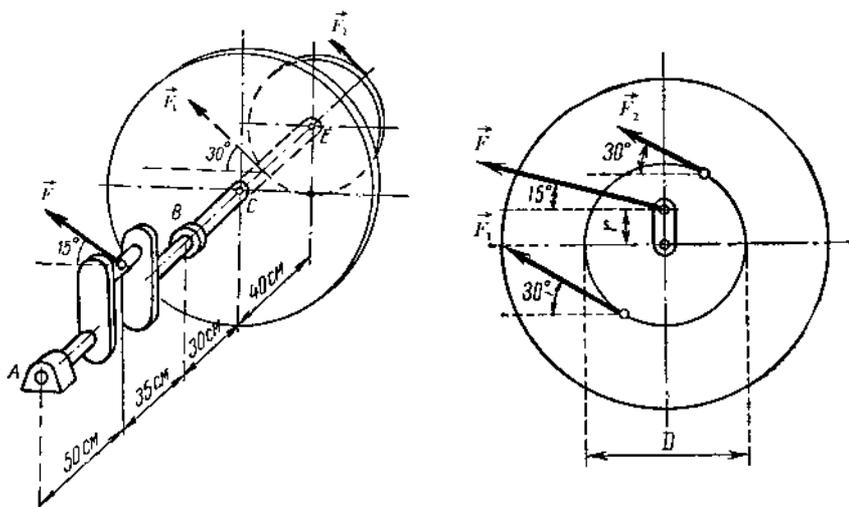


Рис. 4.8. К примеру 101

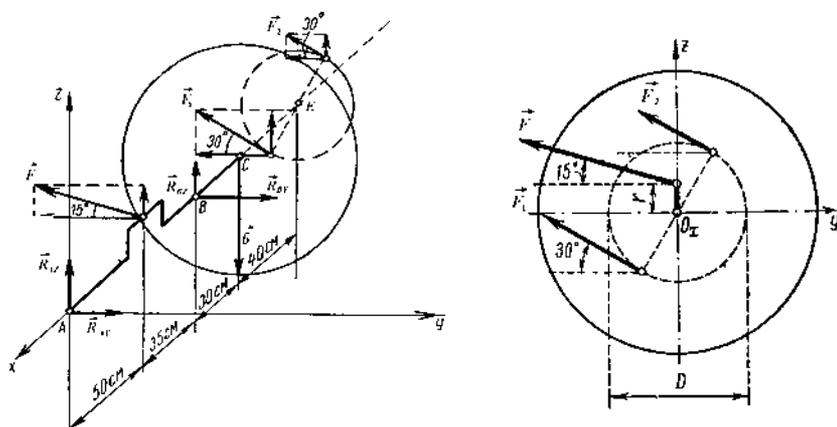


Рис. 4.9. К примеру 101

Выбрав оси координат  $X, Y, Z$ , как показано на рис. 4.9, составляем уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных в пространстве.

Составим уравнения моментов сил относительно осей координат:

$$1. \sum M_x(\vec{F}_i) = 0; F_2 \cdot D/2 - F_1 \cdot D/2 + F \cdot r \cdot \cos 15^\circ = 0.$$

Так как  $F_1 = 2F_2$ , то

$$F_2 \cdot D/2 - 2 \cdot F_2 \cdot D/2 + F \cdot r \cdot \cos 15^\circ = 0,$$

откуда

$$F_2 = \frac{2 \cdot F \cdot r \cdot \cos 15^\circ}{D} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 0,966}{80} = 4,347 \text{ кН};$$

$$F_1 = 2 \cdot F_2 = 2 \cdot 4,347 = 8,694 \text{ кН}.$$

При вычислении моментов сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F$  относительно оси  $Y$  проецируем каждую из этих сил на плоскость, проходящую через точку приложения силы перпендикулярно оси  $Y$ .

Полученные проекции  $F_1 \cdot \sin 30^\circ$ ,  $F_2 \cdot \sin 30^\circ$ ,  $F \cdot \sin 15^\circ$  параллельны оси  $Z$ .

$$2. \sum M_y(\vec{F}_i) = 0;$$

$$F \cdot \sin 15^\circ \cdot 50 + R_{BZ} \cdot 85 - G \cdot 115 + F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot 115 + \\ + t \cdot \sin 30^\circ \cdot 155 = 0,$$

откуда

$$R_{BZ} = \frac{-F \cdot \sin 15^\circ \cdot 50 + G \cdot 115 - (F_2 + F_1) \cdot \sin 30^\circ \cdot 155}{85} = \\ = \frac{-12 \cdot 0,259 \cdot 50 + 12 \cdot 115 - (8,7 + 4,34) \cdot 0,5 \cdot 155}{85} = 2,52 \text{ кН}.$$

Аналогично при составлении уравнения  $\sum M_z(\vec{F}_i) = 0$  находим проекции сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F$  на плоскости, перпендикулярные к оси  $Z$ . Эти проекции параллельны оси  $Y$  и соответственно имеют величины  $F_1 \cdot \cos 30^\circ$ ,  $F_2 \cdot \cos 30^\circ$ ,  $F \cdot \cos 15^\circ$ .

$$3. \sum M_Z(\vec{F}_i) = 0;$$

$$F \cdot \cos 15^\circ \cdot 50 - R_{BY} \cdot 85 + F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 155 + F_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 155 = 0,$$

откуда

$$R_{BY} = \frac{F \cdot \cos 15^\circ \cdot 50 + (F_2 + F_1) \cdot \cos 30^\circ \cdot 155}{85} =$$

$$= \frac{12 \cdot 0,966 \cdot 50 + (8,70 + 4,34) \cdot 155}{85} = 27,41 \text{ кН.}$$

Составляем уравнения проекций сил на оси  $Y$  и  $Z$ ; так как все действующие силы перпендикулярны к оси  $X$ , уравнение  $\sum F_{iX} = 0$  преобразуется в тождество  $0 = 0$ .

$$4. \sum F_{iY} = 0;$$

$$R_{AY} - F \cdot \cos 15^\circ + R_{BY} - F_1 \cdot \cos 30^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

откуда

$$R_{AY} = F \cdot \cos 15^\circ - R_{BY} + (F_1 + F_2) \cdot \cos 30^\circ =$$

$$= 12 \cdot 0,966 - 27,41 + 13,04 \cdot 0,866 = -4,53 \text{ кН.}$$

$$5. \sum F_{iZ} = 0;$$

$$R_{AZ} + F \cdot \sin 15^\circ + R_{BZ} - G + F_1 \cdot \sin 30^\circ + F_2 \cdot \sin 30^\circ = 0,$$

откуда определяем

$$R_{AZ} = -F \cdot \sin 15^\circ - R_{BZ} + G - (F_1 + F_2) \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= -12 \cdot 0,259 - 2,52 + 12 - 13,04 \cdot 0,5 = -0,15 \text{ кН.}$$

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{(-4,53)^2 + (-0,15)^2} = \sqrt{20,5434} = 4,53 \text{ кН.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{(27,41)^2 + (2,52)^2} = \sqrt{757,66} = 27,5 \text{ кН.}$$

Ответ:  $R_A = 4,53 \text{ кН}$ ;  $R_B = 27,5 \text{ кН}$ .

**Пример 102.** Для горизонтального вала, несущего зубчатое колесо с центром  $O$ , как показано на рис. 4.10, а, определить реакции опор  $A$  и  $B$  вала, если в точке  $C$  приложены силы:  $F_t = 1006 \text{ Н}$ ,  $F_r = 382 \text{ Н}$ ,  $F_a = 201 \text{ Н}$ . Диаметр зубчатого колеса  $d = 100 \text{ мм}$ . Вал по длине имеет размеры:  $l_1 = 0,05 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0,05 \text{ м}$ .

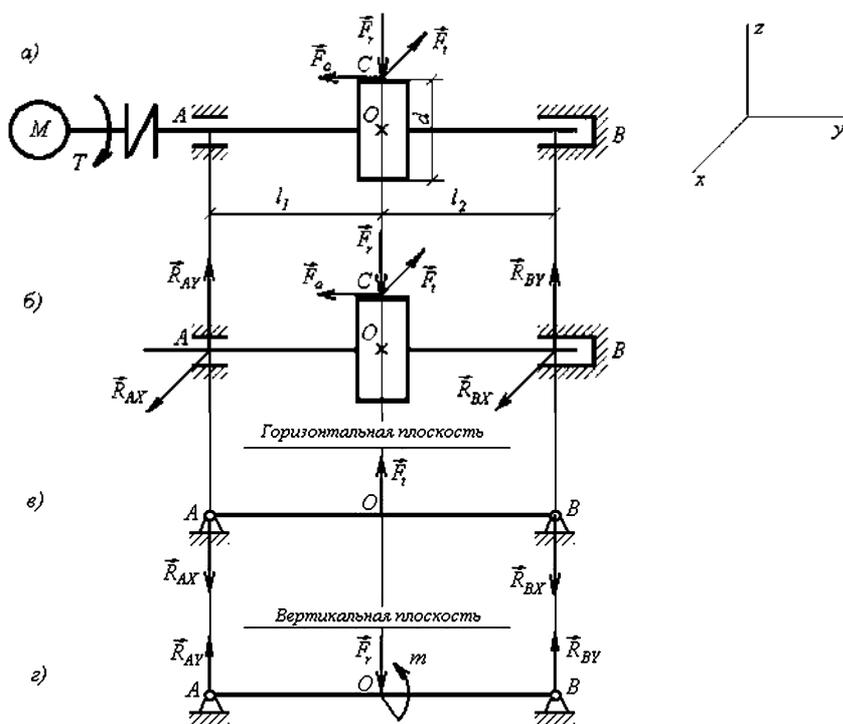


Рис. 4.10. К примеру 102

**Решение:**

1. Составляем расчётную схему вала (рис. 4.10, б).
2. Составляем расчётную схему вала в горизонтальной плоскости (рис. 4.10, в), определяем реакции опор:

$$R_{AX} = R_{BX} = \frac{F_t}{2}.$$

$$R_{AX} = R_{BX} = \frac{F_t}{2}.$$

$$R_{AX} = R_{BX} = \frac{1006}{2} = 505 \text{ Н.}$$

3. Составляем расчётную схему вала в вертикальной плоскости (рис. 4.10, г) и определяем реакции опор.

$$m = \frac{F_a \cdot d}{2} = \frac{201 \cdot 0,1}{2} = 10,1 \text{ Н·м;}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; F_r \cdot 0,05 - m - R_{BY} \cdot 0,1 = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; R_{AY} \cdot 0,1 - m - F_r \cdot 0,05 = 0.$$

$$R_{BY} = \frac{F_r \cdot 0,05 - m}{0,1} = \frac{382 \cdot 0,05 - 10,1}{0,1} = 90 \text{ Н;}$$

$$R_{AY} = \frac{F_r \cdot 0,05 + m}{0,1} = \frac{382 \cdot 0,05 + 10,1}{0,1} = 292 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = 0; R_{AY} - F_r + R_{BY} = 0;$$
$$292 - 382 + 90 = 382 - 382 = 0.$$

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{505^2 + 292^2} = \sqrt{314289} = 583,3 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{505^2 + 90^2} = \sqrt{263125} = 513 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 583,3 \text{ Н}; R_B = 513 \text{ Н.}$

**Пример 103.** Вал со шкивом загружен в состоянии равновесия грузом  $F$  и силами  $F_1$  и  $0,5F_1$  ( $F_1 = 200 \text{ Н}$ ). Требуется определить реакции опор. Расположения шкивов и их диаметры заданы:  $a = 15 \text{ см}, b = 25 \text{ см}, c = 40 \text{ см}, D = 50 \text{ см}, d = 20 \text{ см}$ .

Прототипом примера является промежуточный вал зубчатых редукторов, применяемых в приводных станциях к сельскохозяйственным транспортёрам.

**Решение.** Решим пример аналитическим способом на основе системы уравнений равновесия пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iY} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iZ} = 0; \\ \sum_{i=1}^n \vec{M}_X(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_Y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_Z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Применим эти уравнения к определению опорных реакций  $R_{AX}, R_{AY}, R_{AZ}, R_{BX}, R_{BY}, R_{BZ}$  и уравновешивающей силы  $F$  вала, несущего на себе два зубчатых колеса (или шкива) различных диаметров (рис. 4.11). Выбор системы координат показан на рис. 4.11. За ось  $X$  принимаем ось вала.

Уравнение моментов относительно оси вала

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = F_1 \cdot \frac{d}{2} - F \cdot \frac{D}{2} = 0,$$

откуда

$$F = F_1 \cdot \frac{d}{D} = \frac{200 \cdot 20}{50} = 80 \text{ Н.}$$

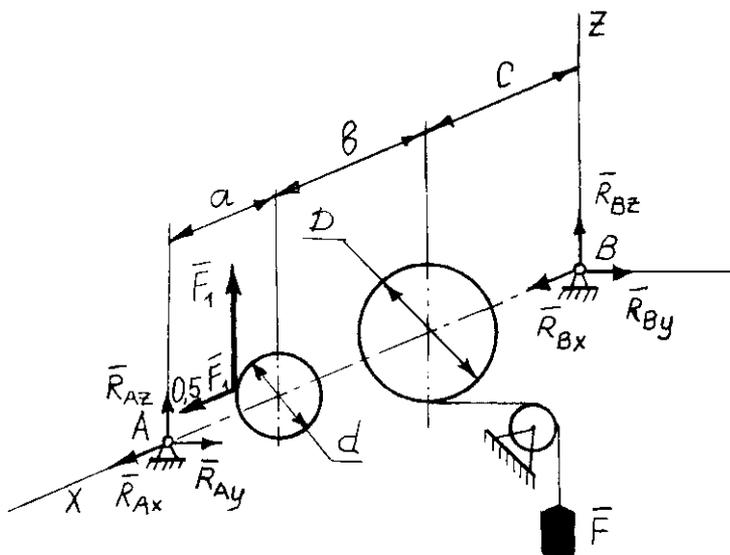


Рис. 4.11. К примеру 103

Уравнение моментов относительно горизонтальной координатной оси  $Y$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = R_{AZ}(a+b+c) + F_1(b+c) = 0,$$

отсюда

$$R_{AZ} = -\frac{F_1(b+c)}{a+b+c} = \frac{-200 \cdot (15+40)}{15+25+40} = 162,5 \text{ Н.}$$

Уравнение моментов относительно вертикальной оси координат  $Z$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = -R_{AY}(a+b+c) - 0,5F_1 \frac{d}{2} - Fc = 0,$$

откуда

$$R_{AY} = \frac{-0,25F_1d - Fc}{a+b+c} = \frac{-80 \cdot 40 + 0,25 \cdot 200 \cdot 20}{15+25+40} = -52,5 \text{ Н.}$$

Для определения остальных неизвестных применим уравнения проекций сил на оси координат. Первое из них имеет вид

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} + R_{Bx} + 0,5F_1 = 0.$$

Чтобы определить каждую из неизвестных сил, необходимо принять во внимание, что подшипники валов в машинах устанавливаются обычно так, чтобы один из них, например  $A$ , допускал небольшое продольное смещение («люфт») и тем самым не оказывал сопротивления при давлении на него вдоль оси. В этом случае осевая реакция  $R_{Ax}$  будет равна нулю, а  $R_{Bx} = F_{\text{осевой}} = -0,5F_1 = -0,5 \cdot 200 = -100$  Н.

Второе уравнение проекций запишется следующим образом:

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} + R_{By} + F = 0,$$

откуда

$$R_{By} = -F - R_{Ay} = -80 + 52,5 = -27,5 \text{ Н.}$$

Третье уравнение

$$\sum F_{iz} = 0; R_{Az} + R_{Bz} + F_1 = 0,$$

откуда

$$R_{Bz} = -F_1 - R_{Az} = -200 + 162,5 = -37,5 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{0^2 + (-52,5)^2 + 162,5^2} = \sqrt{29162,5} = 170,8 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{(-100)^2 + (-27,5)^2 + (-37,5)^2} = \sqrt{121625} = 110,3 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 170,8$  Н;  $R_B = 110,3$  Н.

**Пример 104.** Квадратная однородная пластина  $OABC$ , сила тяжести которой равна  $G$ , удерживается в горизонтальном положении сферическим шарниром  $A$  и гибкой нерастяжимой нитью  $BD$ , со-



$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{OZ} + R_{AZ} - G + N_2 = 0; \quad (4.20)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad R_{AZ} \cdot OA + N_2 \cdot BC - G \cdot \frac{OA}{2} = 0; \quad (4.21)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad -N_2 \cdot AB + G \cdot \frac{AB}{2} = 0; \quad (4.22)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad -R_{AX} \cdot OA = 0. \quad (4.23)$$

Из уравнения (4.23) системы

$$R_{AX} = 0.$$

Из уравнения (4.22)

$$N_2 = 0,5G, \quad N = G/2 \cdot \cos 45^\circ = G/1,41 = 0,71G.$$

Далее из уравнения (4.21) найдем

$$R_{AZ} = -N_2 + G/2 = 0.$$

Тогда из уравнений (4.18 - 4.20):

$$R_{OZ} = 0,5G, \quad R_{OX} = N_1 \cdot \cos 45^\circ = G/2 = 0,5G;$$

$$R_{OY} = N_1 \cdot \sin 45^\circ = N \cdot \sin^2 45^\circ = G/2 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \sin 45^\circ = 0,35 \cdot G.$$

Полная реакция опоры  $O$

$$R_O = \sqrt{(0,5^2 + 0,35^2 + 0,5^2) \cdot G^2} = \sqrt{0,6225 \cdot G^2} = 0,8G.$$

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$$

**Ответ:**  $R_O = 0,8G; \quad R_A = 0.$

**Пример 105.** Тренога  $ABCD$  шарнирно опирается на горизонтальную плоскость (рис. 4.13, а) в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . В точке  $D$  тренога имеет блок. Через блок перекинут гибкий трос, один конец которого закреплен в точке  $E$  стены, а к другому прикреплен груз  $F = 10$  кН. Определить реакции стержней треноги.

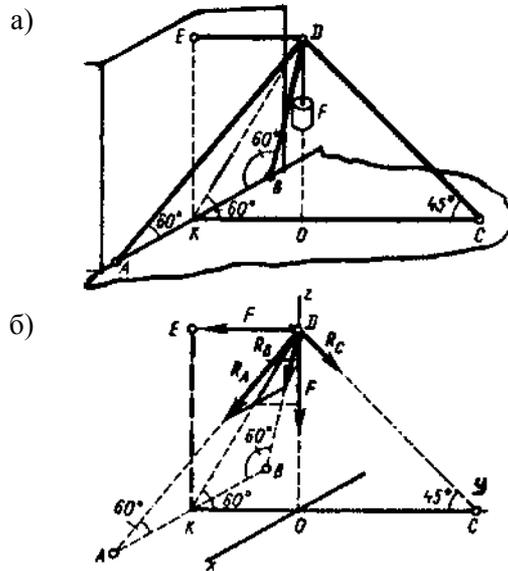


Рис. 4.13. К примеру 105

### Решение

1. Пренебрегая размерами блока, считаем, что заданные силы и искомые реакции стержней приложены к точке  $D$  – вершине трехгранной пирамиды, образуемой треногой. На точку  $D$  действуют вертикально вниз и горизонтально влево силы натяжения ветвей троса, равные силе тяжести груза  $F$ , а также три реакции  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$  стержней треноги.

2. Систему пяти сил, действующих на точку  $D$ , в выбранных осях координат изобразим на рис. 4.13, б; реакции  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$  стержней направлены вдоль стержней от точки  $D$  (из предположения, что все стержни растянуты).

3. Прежде чем приступить к составлению уравнений равновесия, следует заметить, что силы, лежащие в плоскости, перпендикулярной какой-либо оси, проецируются на эту ось в виде точки (т.е. проекции равны нулю). Например, обе силы  $F$  (вертикальная и горизонтальная) и сила  $R_C$  лежат в плоскости, перпендикулярной оси  $X$ . Поэтому на ось  $X$  проецируются лишь силы  $R_A$  и  $R_B$ . Рассуждая аналогично, видим, что на ось  $Y$  проецируются все силы, кроме вертикальной силы  $F$ , и на ось  $Z$  – также все силы, за исключением горизонтальной силы  $F$ .

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_A \cdot \sin(ADK) - R_B \cdot \sin(BDK) = 0; \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} = 0; \quad R_C \cdot \sin(ODC) - R_A \cdot \cos(ADK) \cdot \sin(KDO) - \\ - R_B \cdot \cos(BDK) \cdot \sin(KDO) - F = 0; \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iz} = 0; \\ - R_C \cdot \cos(ODC) - F - R_A \cdot \cos(ADK) \cdot \cos(KDO) - \\ - R_B \cdot \cos(BDK) \cdot \cos(KDO) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Так как  $\angle ADK = \angle BDK = \angle KDO = 30^\circ$  и  $\angle ODC = 45^\circ$ , из уравнения (4.24) находим, что  $R_A = R_B$ .

Уравнения (4.25) и (4.26) запишем теперь в виде

$$\begin{aligned} R_C \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot R_A \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ - F = 0; \\ - R_C \cdot \cos 45^\circ - F - 2 \cdot R_A \cdot \cos^2 30^\circ = 0. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения и учитывая, что  $\sin 30^\circ = 0,5$  и  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , получаем

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R_A - \frac{3}{2} \cdot R_A - 2 \cdot F = 0,$$

откуда

$$R_A = R_B = -\frac{4 \cdot F}{\sqrt{3} + 3} = -\frac{40}{4,73} = -8,44 \text{ кН.}$$

Стержни  $AD$  и  $BD$  треноги сжаты силой 8,44 кН.  
Теперь, зная  $R_A$ , найдем

$$R_C = \frac{R_A \cdot \cos 30^\circ + F}{\sin 45^\circ} = \frac{-8,44 \cdot \cos 30^\circ + 10}{\sin 45^\circ} = 3,82 \text{ кН.}$$

Стержень  $CD$  растянут силой 3,82 кН.

**Ответ:**  $R_A = -8,44$  кН;  $R_B = -8,44$  кН;  $R_C = 3,82$  кН.

**Пример 106.** Определить усилия в стержнях пространственной фермы, изображенной на рис. 4.14, а также реакции опор фермы  $E$ ,  $F$ ,  $K$  и  $L$ , если на узел  $B$  фермы действует вертикальная сила  $F_1 = 50$  кН, на узел  $C$  – горизонтальная сила  $F_2 = 25$  кН, направленная вдоль стержня  $CD$ . Размеры указаны на рисунке.

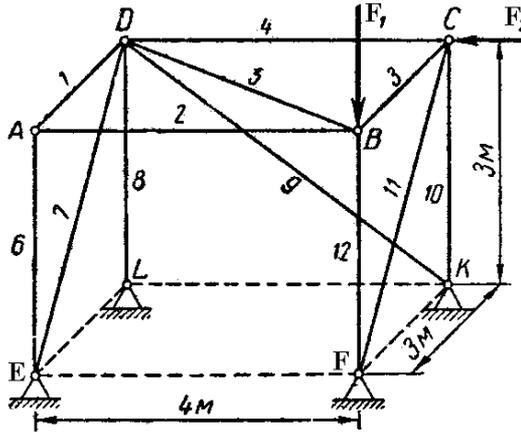


Рис. 4.14. К примеру 106

**Решение.** Для определения усилий в стержнях 1-12 фермы воспользуемся способом вырезания узлов. Так как силы, действующие

на каждый из узлов фермы, взаимно уравниваются, то, вырезая отдельные узлы фермы, составляем по три уравнения равновесия сил, действующих на каждый узел.

Узлы фермы вырезаем в такой последовательности, при которой число неизвестных сил в рассматриваемом узле не превышает трех. Так же, как и при определении усилий в стержнях плоских ферм, все стержни фермы условимся считать растянутыми; знак «минус» у вычисленной реакции стержня покажет, что стержень сжат.

Для определения усилий в стержнях рассматриваемой фермы будем вырезать последовательно узлы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 4.15).

**Узел  $A$ :**

$$\sum X_i = 0; \quad -N_1 = 0; \quad N_1 = 0; \quad (4.27)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_2 = 0; \quad (4.28)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -N_6 = 0; \quad N_6 = 0. \quad (4.29)$$

Так как узел  $A$  не загружен внешней силой, а сходящиеся силы  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_6$ , не лежащие в одной плоскости, не могут уравниваться, то они равны нулю.

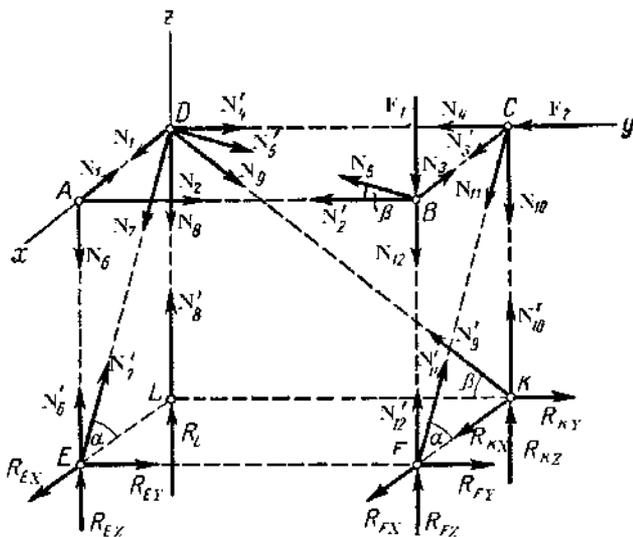


Рис. 4.15. К примеру 106

**Узел В:**

$$\sum X_i = 0; \quad -N_3 - N_5 \cos(90^\circ - \beta) = 0; \quad (4.30)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -N'_2 - N_5 \cos\beta = 0; \quad (4.31)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -F_1 - N_{12} = 0; \quad N_{12} = -F_1 = -50 \text{ кН}. \quad (4.32)$$

Из уравнения (4.31)

$$N_5 = -\frac{N'_2}{\cos\beta} = 0.$$

Из уравнения (4.30)

$$N_3 = -N_5 \cos(90^\circ - \beta) = 0.$$

**Узел С:**

$$\sum X_i = 0; \quad N'_3 + N_{11} \cos\alpha = 0; \quad (4.33)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -N_4 - F_2 = 0; \quad N_4 = -F_2 = -25 \text{ кН}; \quad (4.34)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -N_{10} - N_{11} \cos(90^\circ - \alpha) = 0. \quad (4.35)$$

Из уравнения (4.33)

$$N_{11} \cos\alpha = -N'_3 = 0; \quad N_{11} = 0.$$

Из уравнения (4.35)

$$N_{10} = -N_{11} \cos(90^\circ - \alpha) = 0; \quad N_{10} = 0.$$

**Узел D:**

$$\sum X_i = 0; \quad N'_1 + N'_5 \cos(90^\circ - \alpha) + N_7 \cos\alpha = 0; \quad (4.36)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N'_4 + N'_5 \cos\beta + N_9 \cos\beta = 0; \quad (4.37)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -N_8 - N_7 \cos(90^\circ - \alpha) - N_9 \cos(90^\circ - \beta) = 0. \quad (4.38)$$

Найдем синусы и косинусы углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Так как

$$\begin{aligned} AD &= DL, \text{ то } \alpha = 45^\circ; \\ \cos\alpha &= \sin\alpha = \sqrt{2}/2; \\ \cos\beta &= AB/DB = 4/5 = 0,8; \\ \sin\beta &= AD/DB = 3/5 = 0,6. \end{aligned}$$

Из уравнения (4.36)

$$N_7 \cdot \sqrt{2}/2 = -N'_5 \cdot 0,6 - N'_1 = 0; \quad N_7 = 0.$$

Из уравнения (4.37)

$$N_9 = \frac{-N'_4 - N'_5 \cdot 0,8}{0,8} = \frac{25}{0,8} = 31 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4.38)

$$N_8 = -N_7 \cdot \sqrt{2}/2 - N_9 \cdot 0,6 = -31 \cdot 0,6 = -19 \text{ кН.}$$

Т а б л и ц а 4.1

Результаты расчётов

Стержни	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Усилие $N$ , кН	0	0	0	-25	0	0	0	-19	31	0	0	-50

Основываясь на результатах расчета, можно установить следующее:

1. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, не лежащие в одной плоскости, то усилия в каждом из этих стержней равны нулю (узел  $A$ , стержни 1, 2 и 6).

2. Если в некотором узле фермы все внешние силы и все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, то усилие в стержне, не лежащем в этой плоскости, равно нулю (узел  $C$ , стержень 11 при  $N'_3 = 0$ ).

Эти соображения, дающие возможность без вычислений определить стержни с нулевыми усилиями, значительно упрощают определение усилий в стержнях пространственных ферм.

Определив усилия в стержнях фермы способом вырезания узлов, можно определить реакции опор, представляющих собой шаровые шарниры. Реакцию каждой опоры неизвестного направления разложим на три составляющие, направленные вдоль осей координат. Эти составляющие определим из уравнений равновесия сил, приложенных к опорным узлам.

**Узел E:**

$$\sum X_i = 0; R_{EX} - N'_7 \cos \alpha = 0; \quad (4.39)$$

$$\sum Y_i = 0; R_{EY} = 0; \quad (4.40)$$

$$\sum Z_i = 0; R_{EZ} + N'_6 + N'_7 \cos(90^\circ - \alpha) = 0. \quad (4.41)$$

Из уравнения (4.39)

$$R_{EX} = N'_7 \cos 45^\circ = 0.$$

Из уравнения (4.41)

$$R_{EZ} = -N'_6 - N'_7 \cos 45^\circ = 0.$$

Так как

$$R_{EX} = 0; R_{EY} = 0; R_{EZ} = 0,$$

то  $R_E = 0$ , т. е. опора  $E$  не нагружена.

**Узел F:**

$$\sum X_i = 0; R_{FX} - N'_{11} \cos \alpha = 0; \quad (4.42)$$

$$\sum Y_i = 0; R_{FY} = 0; \quad (4.43)$$

$$\sum Z_i = 0; R_{FZ} + N'_{12} + N'_{11} \cos(90^\circ - \alpha) = 0. \quad (4.44)$$

Из уравнения (4.42)

$$R_{FX} = N'_{11} \cos 45^\circ = 0.$$

Из уравнения (4.44)

$$R_{FZ} = -N'_{12} - N'_{11} \cos 45^\circ = 50 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» в ответе указывает на то, что истинное направление составляющей  $R_{FZ}$  совпадает с направлением, указанным на схеме.

Так как  $R_{FX} = 0$  и  $R_{FY} = 0$ , то реакция опоры направлена вертикально вверх и имеет модуль  $R_F = |R_{FZ}| = 50 \text{ кН}$ .

**Узел К:**

$$\sum X_i = 0; R_{KX} = 0; \quad (4.45)$$

$$\sum Y_i = 0; R_{KY} - N'_9 \cos \beta = 0; \quad (4.46)$$

$$\sum Z_i = 0; R_{KZ} + N'_{10} + N'_9 \cos(90^\circ - \beta) = 0. \quad (4.47)$$

Из уравнения (4.46)

$$R_{KY} = N'_9 \cos \beta = 31 \cdot 0,8 = 25 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4.47)

$$R_{KZ} = -N'_{10} - N'_9 \cos(90^\circ - \beta) = -31 \cdot 0,6 = -19 \text{ кН.}$$

Знаки ответов показывают, что принятое направление силы  $R_{KY}$  совпадает с действительным, а силы  $R_{KZ}$  – противоположно действительному (см. рис. 4.15).

Определим модуль и направление реакции  $R_K$ :

$$R_K = \sqrt{R_{KY}^2 + R_{KZ}^2} = \sqrt{25^2 + (-19)^2} = 31,4 \text{ кН;}$$

$$\cos(\vec{R}_K, \vec{j}) = R_{KY} / R_K = 25 / 31 = 0,8;$$

$$\cos(\vec{R}_K, \vec{k}) = R_{KZ} / R_K = -19 / 31 = -0,6;$$

$$\angle(\vec{R}_K, \vec{j}) = 36^\circ 52'; \quad \angle(\vec{R}_K, \vec{k}) = 126^\circ 52'.$$

**Узел L:**

Так как в узле  $L$  не известна лишь реакция  $R_L$ , то составляем только одно уравнение:

$$\sum Z_i = 0; N'_8 + R_L = 0,$$

откуда

$$R_L = -N'_8 = 19 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» в ответе указывает на то, что реакция  $R_L$  направлена вертикально вверх.

**Ответ:**  $R_E = 0$ ;  $R_F = 50 \text{ кН}$ ;  $R_K = 31,4 \text{ кН}$ ;  $R_L = 19 \text{ кН}$ .

**Пример 107.** Жестко заделанная балка длиной  $l = 1,4 \text{ м}$  и квадратным поперечным сечением со стороной  $a = 0,2 \text{ м}$  (рис. 4.16, а) нагружена горизонтальной силой  $F = 2 \text{ кН}$  и вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 1 \text{ кН/м}$ . Определить реакции заделки.

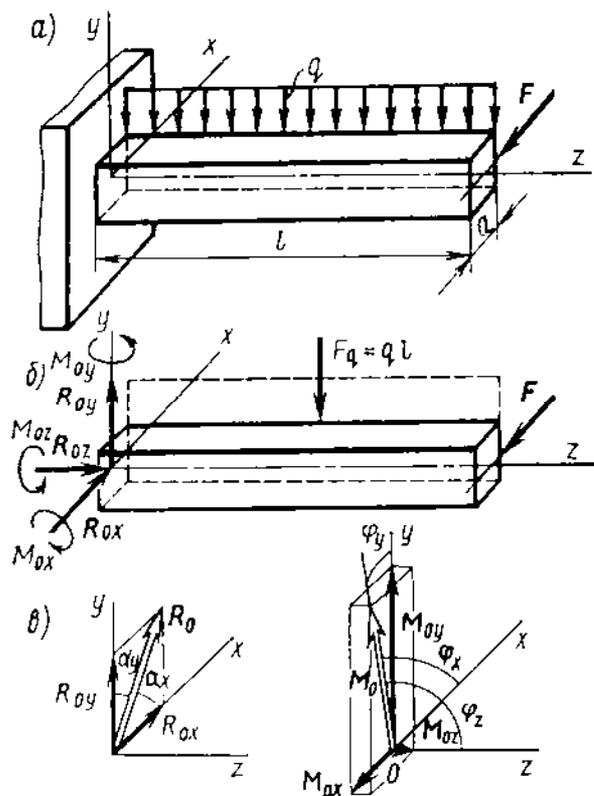


Рис. 4.16. К примеру 107

### Решение

1. Освободим балку от заделки. Известно, что со стороны заделки на балку действуют реактивные силы и пара сил. Реактивную силу представим в виде трех составляющих  $R_{OX}$ ,  $R_{OY}$ ,  $R_{OZ}$  (рис. 4.16, б), действующих вдоль осей координат, а реактивный момент – в виде моментов пар  $M_{OX}$ ,  $M_{OY}$ ,  $M_{OZ}$ , действующих в плоскостях, перпендикулярных осям (эти моменты изображены на рис. 4.16, б круговыми стрелками, огибающими оси против хода стрелки часов, если смотреть со стороны положительного направления оси).

2. Равномерно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой:

$$F_q = q \cdot l = 1 \cdot 1,4 = 1,4 \text{ кН.}$$

3. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{OX} - F = 0; \quad \sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad M_{OX} + F_q \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{OY} - F_q = 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad M_{OY} + F_q \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{OZ} - F = 0; \quad \sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad M_{OZ} + F_q \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

4. Решая уравнения, находим:

$$R_{OX} = 2 \text{ кН}; \quad R_{OY} = 1,4 \text{ кН}; \quad R_{OZ} = 0;$$
$$M_{OX} = -0,98 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{OY} = 2,8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{OZ} = 0,14 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

5. По найденным модулям составляющих реактивной силы  $R_O$  и момента реактивной пары  $M_O$  (они показаны на рис. 4.16, в раздельно) можно определить их модули  $R_O$  и  $M_O$  и направление действия.

$$R_O = 2,44 \text{ кН}; \quad \alpha_x \approx 35^0; \quad \alpha_y \approx 55^0; \quad \alpha_z = 90^0;$$
$$M_O = 2,83 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \varphi_x = 110^020'; \quad \varphi_y = 12^040'; \quad \varphi_z = 87^010'.$$

**Ответ:**  $R_O = 2,44 \text{ кН}; \quad M_O = 2,83 \text{ кН}.$

**Пример 108.** На валу жестко закреплены шестерня 1 и колесо 2 (рис. 4.17, а). Определить в положении равновесия вала реакции подшипников  $A$  и  $B$ , а также силы  $F_2$  и  $F_{r_2} = 0,4F_2$ , действующие на колесо, если  $F_1 = 400$  Н, а  $F_{r_1} = 0,4F_1$ . Силой тяжести вала, шестерни и колеса пренебречь.

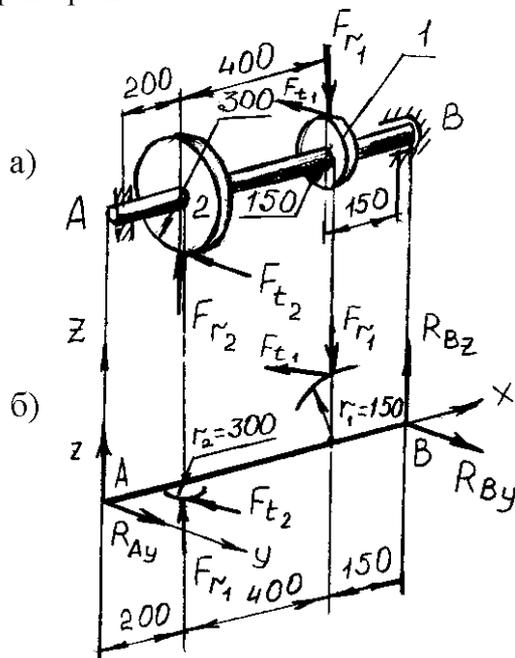


Рис. 4.17. К примеру 108

**Решение.** Отбрасываем связи вала (подшипники), прикладываем к валу их реакции, разложенные на составляющие  $R_{AZ}$ ,  $R_{BZ}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_{BY}$ . Выбираем пространственную систему координат так, чтобы ось  $X$  располагалась по оси вала, ось  $Y$  – параллельно силам  $F_{t_2}$  и  $F_{t_1}$  и ось  $Z$  – силам  $F_{r_2}$  и  $F_{r_1}$ . В точках  $A$  и  $B$  будут приложены реакции связей: в точке  $A$  –  $R_{AZ}$  и  $R_{AY}$ , а в точке  $B$  –  $R_{BZ}$  и  $R_{BY}$  (рис. 4.17, б).

Составляем уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{AY} + R_{BY} - F_{t1} - F_{t2} = 0; \quad (4.48)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad -R_{AZ} - F_{r1} + F_{r2} + R_{BZ} = 0; \quad (4.49)$$

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = 0; \quad F_{t2} \cdot 0,3 - F_{t1} \cdot 0,15 = 0; \quad (4.50)$$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; \quad F_{r2} \cdot 0,2 - F_{r1} \cdot 0,6 + R_{BZ} \cdot 0,75 = 0; \quad (4.51)$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad F_{t1} \cdot 0,6 + F_{t2} \cdot 0,2 - R_{BY} \cdot 0,75 = 0. \quad (4.52)$$

Из уравнения (4.50)

$$F_{t2} = \frac{F_{t1} \cdot 0,15}{0,3} = \frac{400 \cdot 0,15}{0,3} = 200 \text{ Н.}$$

$$F_{r2} = 0,4 \cdot F_{t2} = 0,4 \cdot 200 = 80 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.52)

$$R_{BY} = \frac{F_{t1} \cdot 0,6 + F_{t2} \cdot 0,2}{0,75} = \frac{400 \cdot 0,6 + 200 \cdot 0,2}{0,75} = 373,33 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.51)

$$R_{BZ} = \frac{F_{r1} \cdot 0,6 - F_{r2} \cdot 0,2}{0,75} = \frac{160 \cdot 0,6 - 80 \cdot 0,2}{0,75} = 106,67 \text{ Н.}$$

Из уравнений (4.48) и (4.49):

$$R_{AY} = F_{t1} + F_{t2} - R_{BY} = 400 + 200 - 373,33 = 226,67 \text{ Н;}$$

$$R_{AZ} = F_{r2} - F_{r1} + R_{BZ} = 80 - 160 + 106,67 = 26,67 \text{ Н.}$$

Следует отметить, что уравнение  $\sum F_{ix} = 0$  даст тождество  $0 = 0$ .

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{226,67^2 + 26,67^2} = \sqrt{52090,5778} = 228,23 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{373,33^2 + 106,67^2} = \sqrt{150753,7778} = 338,27 \text{ Н.}$$

Ответ:  $R_A = 228,23 \text{ Н}$ ;  $R_B = 338,27 \text{ Н}$ .

**Пример 109.** На валу жёстко закреплены шестерня 1 и колесо 2. Определить в положении равновесия вала реакции подшипников  $A$  и  $B$ , а также силы  $F_{t2}$  и  $F_{r2} = 0,5F_{t2}$ , действующие на колесо, если  $F_{r1} = 500 \text{ Н}$ , а  $F_{r1} = 0,5F_{t1}$ . Силой тяжести вала, шестерни и колеса пренебречь.

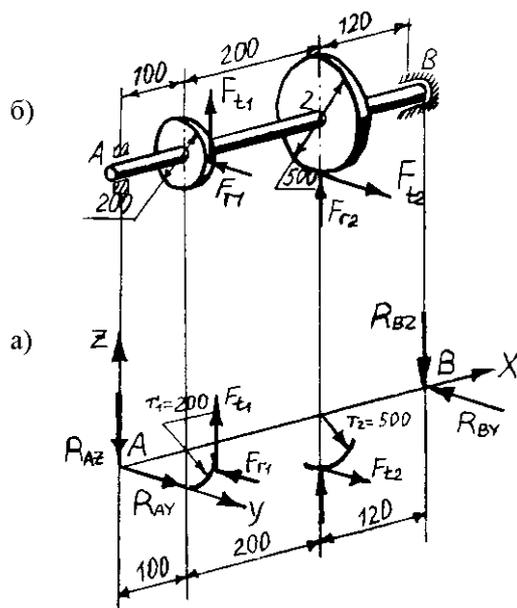


Рис. 4.18. К примеру 109

**Решение.** Освобождаем вал от связей (подшипников) в точках  $A$  и  $B$ , заменим связи реакциями связей. Выбираем пространственную систему координат с началом в точке  $A$ , чтобы ось  $X$  располагалась по оси вала, ось  $Y$  – параллельно силам  $F_{t2}$  и  $F_{r1}$  и ось  $Z$  – парал-

лельно силам  $F_{t1}$  и  $F_{r2}$ . В точках  $A$  и  $B$  будут приложены реакции связей, располагающиеся параллельно внешним силам, приложенным к валу в точках, а именно: в точке  $A$  –  $R_{AZ}$  и  $R_{AY}$ , а в точке  $B$  –  $R_{BZ}$  и  $R_{BY}$  (рис. 4.18, б).

Составляем уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{AY} - R_{BY} + F_{t2} - F_{r1} = 0; \quad (4.53)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad -R_{AZ} - R_{BZ} + F_{t1} + F_{r2} = 0; \quad (4.54)$$

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_{t1} \cdot 0,2 - F_{t2} \cdot 0,5 = 0; \quad (4.55)$$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; \quad F_{t1} \cdot 0,1 + F_{r2} \cdot 0,3 - R_{BZ} \cdot 0,42 = 0; \quad (4.56)$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad R_{BY} \cdot 0,42 - F_{t2} \cdot 0,3 + F_{r1} \cdot 0,1 = 0. \quad (4.57)$$

Из уравнения (4.55)

$$F_{t2} = \frac{-F_{t1} \cdot 0,2}{0,5} = \frac{-500 \cdot 0,2}{0,5} = -200 \text{ Н.}$$

$$F_{r2} = 0,5 \cdot (-200) = -100 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.56)

$$R_{BZ} = \frac{F_{t1} \cdot 0,1 + F_{r2} \cdot 0,3}{0,42} = \frac{500 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot (-200) \cdot 0,3}{0,42} = 47,62 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.57)

$$R_{BY} = \frac{-F_{r1} \cdot 0,1 + F_{t2} \cdot 0,3}{0,42} = \frac{-0,5 \cdot 500 \cdot 0,1 + (-200) \cdot 0,3}{0,42} = -202,38 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.53)

$$R_{AY} = R_{BY} - F_{t2} + F_{r1} = -202,38 - (-200) + 0,5 \cdot 500 = 247,62 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.54)

$$R_{AZ} = F_{t1} + F_{r2} - R_{BZ} = 500 + (-100) - 47,62 = 352,38 \text{ Н.}$$

Следует отметить, что уравнение  $\sum F_{ix} = 0$  даст тождество  $0 = 0$ .

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{247,62^2 + 352,38^2} = \sqrt{187487,2} = 433 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{202,38^2 + 47,62^2} = \sqrt{43225,329} = 207,91 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 433 \text{ Н}$ ;  $R_B = 207,91 \text{ Н}$ .

**Пример 110.** На барабан, закрепленный на валу, действует груз  $G$ . Какую силу  $F$  следует приложить к рукоятке  $CD$ , чтобы удержать вал в равновесии в положении, показанном на рис. 4.19, а? Определить также реакции подшипников  $A$  и  $B$ .

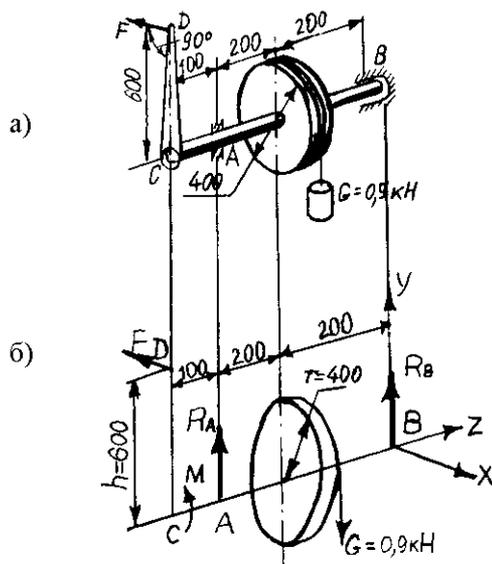


Рис. 4.19. К примеру 110

**Решение.** На вал действуют сила тяжести груза  $G$ , реакции опор  $R_A$ ,  $R_B$  и пара сил с моментом  $M$  на рукоятке (рис. 4.19, б). Выберем систему координат и составим уравнение равновесия вала

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad M - G \cdot r = 0;$$

$$M = G \cdot r = 900 \cdot 0,4 = 360 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Сила на рукоятке

$$F = \frac{M}{h} = \frac{360}{600 \cdot 10^{-3}} = 600 \text{ Н}.$$

Определим реакции опор  $R_A$  и  $R_B$ :

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad -G \cdot 200 + R_B \cdot 400 = 0;$$

$$R_B = \frac{G \cdot 200}{400} = \frac{900 \cdot 200}{400} = 450 \text{ Н}.$$

$$\sum M_B(F_i) = 0; \quad G \cdot 200 - R_A \cdot 400 = 0;$$

$$R_A = \frac{G \cdot 200}{400} = \frac{900 \cdot 200}{400} = 450 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $F = 600 \text{ Н}$ ;  $R_A = 450 \text{ Н}$ ;  $R_B = 450 \text{ Н}$ .

**Пример 11.** На барабан, закрепленный на валу, действует груз  $G$ . Какую силу  $F$  следует приложить к рукоятке  $CD$ , чтобы удержать вал в равновесии в положении, показанном на рис. 4.20, а? Определить также реакции подшипников  $A$  и  $B$ .

**Решение.** На вал действуют сила тяжести груза  $G$ , реакции опор  $R_A$ ,  $R_B$  и пара сил с моментом  $M$  на рукоятке (рис. 4.20, б). Выберем систему координат и составим уравнения равновесия вала:

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad -M + G \cdot r = 0;$$

$$M = G \cdot r = 1000 \cdot 0,3 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

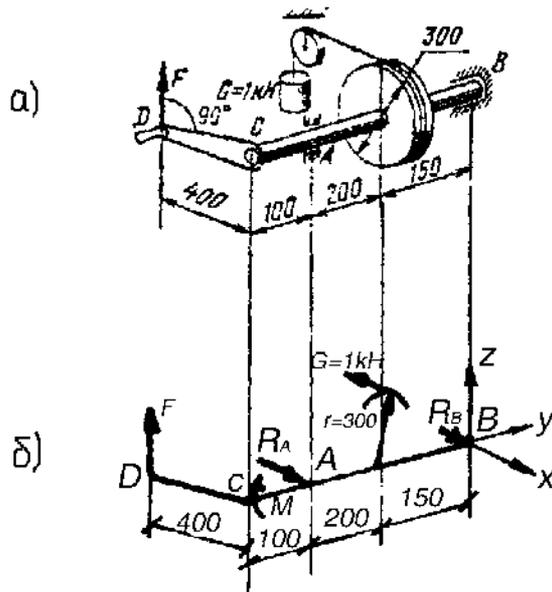


Рис. 4.20. К примеру 111

Если принять длину рукоятки  $h = 0,4$  м, то сила на рукоятке

$$F = \frac{M}{h} = \frac{300}{0,4} = 750 \text{ Н.}$$

Определим реакции опор  $R_A$  и  $R_B$ :

$$\sum M_A(F_K) = 0; \quad G \cdot 200 - R_B \cdot 350 = 0;$$

$$R_B = \frac{G \cdot 200}{350} = \frac{1000 \cdot 200}{350} = 571,43 \text{ Н.}$$

$$\sum M_B(F_K) = 0; \quad -G \cdot 200 + R_A \cdot 350 = 0;$$

$$R_A = \frac{G \cdot 150}{350} = \frac{1000 \cdot 150}{350} = 428,57 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F = 750$  Н;  $R_A = 428,57$  Н;  $R_B = 571,43$  Н.

**Пример 112.** На барабан, закрепленный на валу, действует груз  $G$ . Какую силу  $F$  следует приложить к рукоятке  $CD$ , чтобы удержать вал в равновесии в положении, показанном на рис. 4.21, а? Определить также реакции подшипников  $A$  и  $B$ .

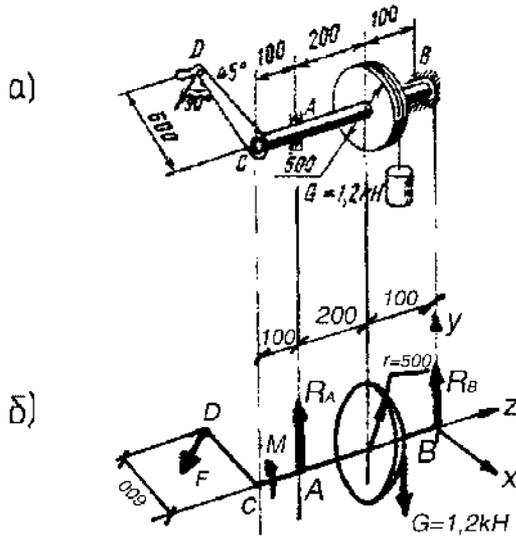


Рис. 4.21. К примеру 112

**Решение.** На вал действуют сила тяжести груза  $G$ , реакции опор  $R_A$ ,  $R_B$  и пара сил с моментом  $M$  на рукоятке (рис. 4.21, б). Выберем систему координат и составим уравнения равновесия вала:

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad M - G \cdot r = 0;$$

$$M = G \cdot r = 1200 \cdot 0,5 = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Если принять длину рукоятки  $h = 0,7$  м, то сила на рукоятке

$$F = \frac{M}{h} = \frac{600}{0,6} = 1000 \text{ Н}.$$

Определим реакции опор:

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad -G \cdot 200 + R_B \cdot 300 = 0;$$

$$R_B = \frac{G \cdot 200}{300} = \frac{1200 \cdot 200}{300} = 800 \text{ Н.}$$

$$\sum M_B(F_i) = 0; \quad G \cdot 100 - R_A \cdot 300 = 0;$$

$$R_A = \frac{G \cdot 100}{300} = \frac{1200 \cdot 100}{300} = 400 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F = 1$  кН;  $R_A = 400$  Н;  $R_B = 800$  Н.

**Пример 113.** Однородная квадратная крышка  $ABCD$  люка может вращаться вокруг оси, проходящей через петли  $A$  и  $B$ . Горизонтальная веревка  $DE$  удерживает крышку в равновесии в положении, показанном на рис. 4.22, а. Определить реакции опор  $A$  и  $B$ , если сила тяжести крышки  $G = 48$  Н.

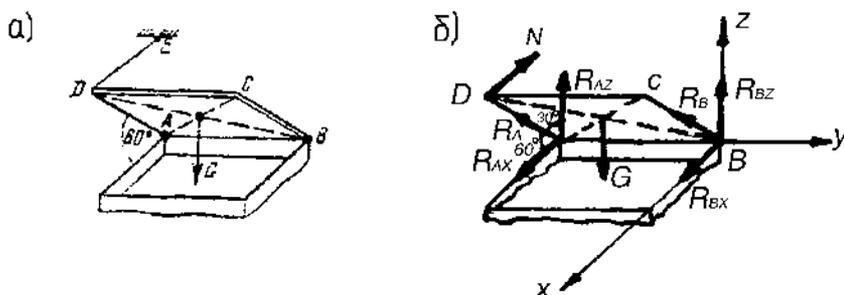


Рис. 4.22. К примеру 113

**Решение.** Внешние связи для пластины – шарниры в точках  $A$ ,  $B$  и нить. Заменим их реакциями связей. Реакции петель  $A$  и  $B$  представим в виде двух составляющих  $R_{Ax}$ ,  $R_{Az}$  и  $R_{Bx}$ ,  $R_{Bz}$  соответственно, а реакцию нити  $N$  направим вдоль линии  $DE$  (рис. 4.22, б).

Уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Bx} + R_{Ax} - N = 0; \quad (4.58)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{BZ} + R_{AZ} - G = 0; \quad (4.59)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad R_{AZ} \cdot AB - G \cdot \frac{AB}{2} = 0; \quad (4.60)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad G \cdot \frac{AD}{2} - N \cdot AD = 0; \quad (4.61)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad R_{AX} \cdot AB = 0. \quad (4.62)$$

Из уравнения (4.62) системы

$$R_{AX} = 0.$$

Из уравнения (4.61)

$$N = \frac{G}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.58)

$$R_{BX} = N - R_{AX} = 24 - 0 = 24 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.60)

$$R_{AZ} = \frac{G}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.59)

$$R_{BZ} = G - R_{AZ} = 48 - 24 = 24 \text{ Н.}$$

Полная реакция шарнира  $B$

$$R_B = \sqrt{24^2 + 24^2} = \sqrt{1152} = 34 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $R_A = 24 \text{ Н; } R_B = 34 \text{ Н.}$

**Пример 114.** Полка, нагруженная, как показано на рис. 4.23, а, силой тяжести  $G = 0,8$  кН и могущая вращаться около оси, проходящей через петли  $A$  и  $B$ , удерживается в равновесии в горизонтальном положении стержнем  $DC$ , образующим с вертикалью угол  $60^\circ$ . Определить реакции петель  $A$ ,  $B$  и стержня  $DC$ .

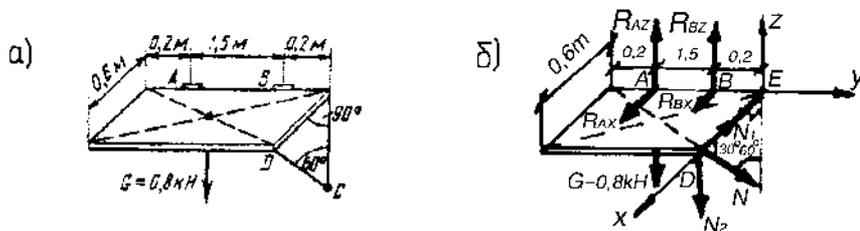


Рис. 4.23. К примеру 114

**Решение.** Внешние связи для пластины – шарниры в точках  $A$ ,  $B$  и стержень. Заменим их реакциями связей. Реакции петель  $A$  и  $B$  представим в виде двух составляющих  $R_{Ax}$ ,  $R_{Az}$  и  $R_{Bx}$ ,  $R_{Bz}$  соответственно, а реакцию стержня  $N$  направим вдоль линии  $DC$  (рис. 4.23, б).

Для составления уравнений равновесия силу  $N$  удобно разложить на две составляющие, одна из которых,  $N_2$ , параллельна оси  $Z$ , другая,  $N_1$ , расположена в плоскости  $XOY$  параллельно оси  $X$ . При этом  $N_2 = N \cos 60^\circ$ ,  $N_1 = N \sin 60^\circ$ .

Уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -N_1 + R_{Bx} + R_{Ax} = 0; \quad (4.63)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{Az} + R_{Bz} - G - N_2 = 0; \quad (4.64)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad G \cdot 0,95 - R_{Bz} \cdot 0,2 - R_{Az} \cdot 1,7 = 0; \quad (4.65)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad N_2 \cdot 0,6 + G \cdot 0,3 = 0; \quad (4.66)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,7 + R_{Bx} \cdot 0,2 = 0. \quad (4.67)$$

Из уравнения (4.66)

$$N_2 = -\frac{G \cdot 0,3}{0,6} = -\frac{800 \cdot 0,3}{0,6} = -400 \text{ Н.}$$

$$N = \frac{N_2}{\cos 60^\circ} = \frac{-400}{0,5} = -800 \text{ Н.}$$

$$N_1 = N \cdot \sin 60^\circ = -800 \cdot 0,866 = -692,82 \text{ Н.}$$

Из уравнений (4.63) и (4.67) следует:

$$R_{AX} = -\frac{R_{BX} \cdot 0,2}{1,7};$$

$$-N_1 + R_{BX} - \frac{R_{BX} \cdot 0,2}{1,7} = 0;$$

$$R_{BX} = \frac{N_1 \cdot 1,7}{0,8} = \frac{-692,82 \cdot 1,7}{1,5} = -785,196 \text{ Н;}$$

$$R_{AX} = \frac{-785,196 \cdot 0,2}{1,7} = 92,376 \text{ Н.}$$

Из уравнений (4.64) и (4.65) следует:

$$R_{AZ} = G + N_2 - R_{BZ}; \quad 0,95G - 0,2R_{BZ} - 1,7(G + N_2 - R_{BZ}) = 0;$$

$$R_{BZ} = \frac{-0,95G + 1,7G + 1,97N_2}{1,5} = \frac{0,75 \cdot 800 + 1,7 \cdot (-400)}{1,5} =$$

$$= -53,33 \text{ Н;}$$

$$R_{AZ} = G + N_2 - R_{BZ} = 800 + (-400) - (-53,33) = 453,33 \text{ Н.}$$

Полная реакция петли  $A$

$$R_A = \sqrt{92,376^2 + 453,33^2} = \sqrt{214041,414} = 462,65 \text{ Н.}$$

Полная реакция петли  $B$

$$R_B = \sqrt{(-785,196)^2 + (-53,33)^2} = \sqrt{619376,847} = 787 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $N = -800 \text{ Н; } R_A = 462,65 \text{ Н; } R_B = 787 \text{ Н.}$

**Пример 115.** На вал жестко насажены шкив 1 и колесо 2, нагруженные, как показано на рис. 4.24, а. Определить силы  $F_{t2}$  и  $F_{r1} = 0,4F_{t2}$ , а также реакции опор  $A$  и  $B$ , если  $F_1 = 120$  Н.

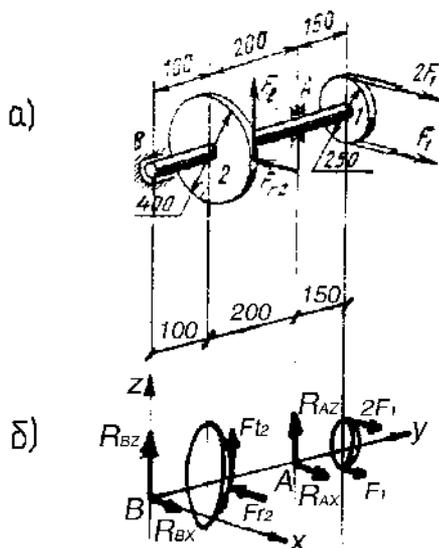


Рис. 4.24. К примеру 115

**Решение.** Отбрасывая связи вала (подшипники), прикладываем к валу их реакции, разложенные на составляющие  $R_{Ax}$ ,  $R_{Az}$  и  $R_{Bx}$ ,  $R_{Bz}$  (рис. 4.24, б).

Составляем уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Bx} + R_{Ax} + F_1 + 2F_1 - F_{r2} = 0; \quad (4.68)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{Bz} + F_{t2} + R_{Az} = 0; \quad (4.69)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad F_{t2} \cdot 0,1 + R_{Az} \cdot 0,3 = 0; \quad (4.70)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_{t2} \cdot 0,4 + 2F_1 \cdot 0,25 - F_1 \cdot 0,25 = 0; \quad (4.71)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad F_{r2} \cdot 0,1 - R_{Ax} \cdot 0,3 - 2F_1 \cdot 0,45 - F_1 \cdot 0,45 = 0; \quad (4.72)$$

Из уравнения (4.71)

$$F_{t2} = \frac{2F_1 \cdot 0,25 - F_1 \cdot 0,25}{0,4} = \frac{120 \cdot 0,25}{0,4} = 75 \text{ Н.}$$
$$F_{r2} = 0,4 \cdot F_{t2} = 0,4 \cdot 75 = 30 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.72)

$$R_{AX} = \frac{F_{r2} \cdot 0,1 - 3F_1 \cdot 0,45}{0,3} = \frac{30 \cdot 0,1 - 3 \cdot 120 \cdot 0,45}{0,3} = -530 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.70)

$$R_{AZ} = \frac{-F_{t2} \cdot 0,1}{0,3} = \frac{-75 \cdot 0,1}{0,3} = -25 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.68)

$$R_{BX} = F_{r2} - 3F_1 - R_{AX} = 30 - 3 \cdot 120 - (-530) = 200 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.69)

$$R_{BZ} = -R_{AZ} - F_{t2} = 25 - 75 = -50 \text{ Н.}$$

Следует отметить, что уравнение  $\sum F_{iy} = 0$  даст тождество  $0 = 0$ .

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{(-530)^2 + (-25)^2} = \sqrt{281525} = 530,59 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{200^2 + (-50)^2} = \sqrt{42500} = 206,16 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F_{t2} = 75 \text{ Н}$ ;  $F_{r2} = 30 \text{ Н}$ ;  $R_A = 530,59 \text{ Н}$ ;  $R_B = 206,16 \text{ Н}$ .

**Пример 116.** На вал жестко насажены шкив 1 и колесо 2, нагруженные, как показано на рис. 4.25, а. Определить силы  $F_{t2}$  и  $F_{r2} = 0,3F_{t2}$ , а также реакции опор  $A$  и  $B$ , если  $F_1 = 100$  Н.

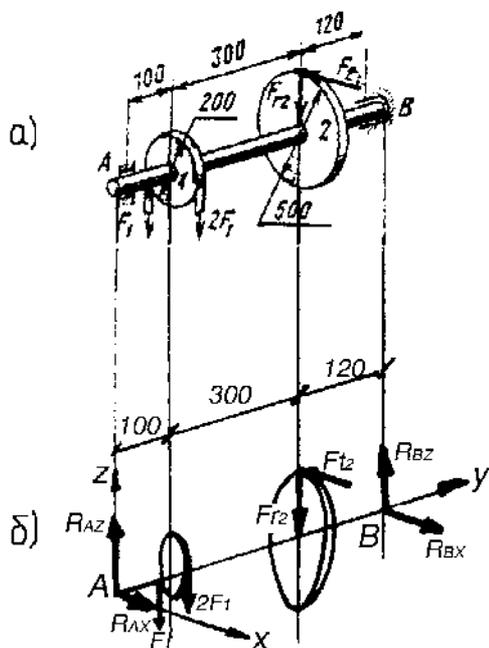


Рис. 4.25. К примеру 116

**Решение.** Отбрасывая связи вала (подшипники), прикладываем к валу их реакции, разложенные на составляющие  $R_{AX}$ ,  $R_{AZ}$ , и  $R_{BX}$ ,  $R_{BZ}$  (рис. 4.25, б).

Составляем уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{AX} + R_{BX} - F_{t2} = 0; \quad (4.73)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{AZ} + R_{BZ} - F_{r2} - F_1 - 2F_1 = 0; \quad (4.74)$$

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 \cdot 0,1 - 2F_1 \cdot 0,1 - F_{r2} \cdot 0,4 + R_{BZ} \cdot 0,52 = 0; \quad (4.75)$$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 \cdot 0,2 + 2F_1 \cdot 0,2 - F_{t2} \cdot 0,5 = 0; \quad (4.76)$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad -R_{BX} \cdot 0,52 + F_{t2} \cdot 0,4 = 0. \quad (4.77)$$

Из уравнения (4.76)

$$F_{t2} = \frac{F_1 \cdot 0,2}{0,5} = \frac{100 \cdot 0,2}{0,5} = 40 \text{ Н.}$$

$$F_{r2} = 0,3 \cdot F_{t2} = 0,4 \cdot 40 = 12 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.77)

$$R_{BX} = \frac{F_{t2} \cdot 0,4}{0,52} = \frac{40 \cdot 0,4}{0,52} = 30,77 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.75)

$$R_{BZ} = \frac{3F_1 \cdot 0,1 + F_{r2} \cdot 0,4}{0,52} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,4}{0,52} = 66,92 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.74)

$$R_{AZ} = F_{r2} + 3F_1 - R_{BZ} = 12 + 3 \cdot 100 - 66,92 = 245,08 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.73)

$$R_{AX} = F_{t2} - R_{BX} = 40 - 30,77 = 9,23 \text{ Н.}$$

Следует отметить, что уравнение  $\sum F_{iy} = 0$  даст тождество  $0 = 0$ .

Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{9,23^2 + 245,08^2} = \sqrt{60149,399} = 245,25 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{30,77^2 + 66,92^2} = \sqrt{5425,079} = 73,66 \text{ Н.}$$

Ответ:  $F_{t2} = 40 \text{ Н}$ ;  $F_{r2} = 12 \text{ Н}$ ;  $R_A = 245,25 \text{ Н}$ ;  $R_B = 73,66 \text{ Н}$ .

**Пример 117.** На вал жестко насажены шкив 1 и колесо 2, нагруженные, как показано на рис. 4.26, а. Определить силу  $F_2$ , а также реакции опор  $A$  и  $B$ , если  $F_1 = 220 \text{ Н}$ .

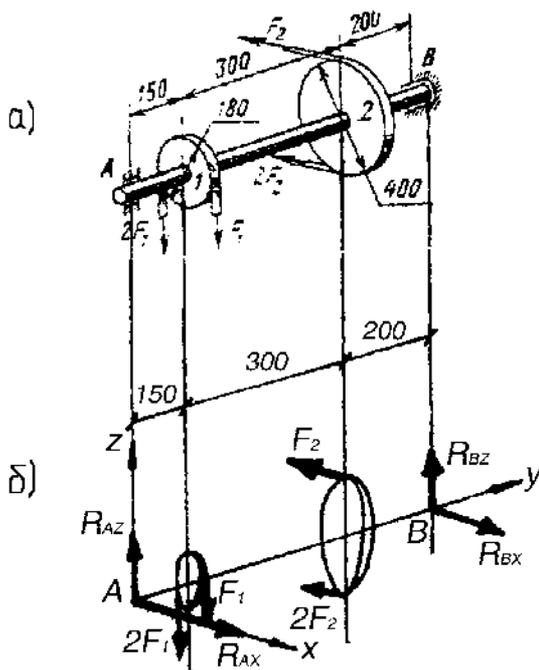


Рис. 4.26. К примеру 117

**Решение.** Отбрасывая связи вала (подшипники), прикладываем к валу их реакции, разложенные на составляющие  $R_{Ax}$ ,  $R_{Az}$  и  $R_{Bx}$ ,  $R_{Bz}$  (рис. 4.26, б).

Составляем уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{AX} + R_{BX} - 2F_2 - F_2 = 0; \quad (4.78)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{AZ} + R_{BZ} - 2F_1 - F_1 = 0; \quad (4.79)$$

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = 0; \quad -2F_1 \cdot 0,15 - F_1 \cdot 0,15 + R_{BZ} \cdot 0,65 = 0; \quad (4.80)$$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = 0; \quad F_1 \cdot 0,18 - 2F_1 \cdot 0,18 + 2F_2 \cdot 0,4 - F_2 \cdot 0,4 = 0; \quad (4.81)$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad -R_{BX} \cdot 0,65 + F_2 \cdot 0,45 + 2F_2 \cdot 0,45 = 0. \quad (4.82)$$

Из уравнения (4.81)

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot 0,18}{0,4} = \frac{220 \cdot 0,18}{0,4} = 99 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.82)

$$R_{BX} = \frac{3F_2 \cdot 0,45}{0,65} = \frac{3 \cdot 99 \cdot 0,45}{0,65} = 205,62 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.80)

$$R_{BZ} = \frac{3F_1 \cdot 0,15}{0,65} = \frac{3 \cdot 220 \cdot 0,15}{0,65} = 152,31 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.78)

$$R_{AX} = 3F_2 - R_{BX} = 3 \cdot 99 - 205,62 = 91,38 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.79)

$$R_{AZ} = 3F_1 - R_{BZ} = 3 \cdot 220 - 152,31 = 507,69 \text{ Н.}$$

Следует отметить, что уравнение  $\sum F_{iy} = 0$  даст тождество  $0 = 0$ .  
 Полная реакция опоры  $A$

$$R_A = \sqrt{91,38^2 + 507,69^2} = \sqrt{266099,44} = 515,85 \text{ Н.}$$

Полная реакция опоры  $B$

$$R_B = \sqrt{205,62^2 + 152,31^2} = \sqrt{65477,92} = 255,89 \text{ Н.}$$

**Ответ:**  $F_2 = 99 \text{ Н}$ ;  $R_A = 515,85 \text{ Н}$ ;  $R_B = 255,89 \text{ Н}$ .

**Пример 118.** Горизонтальный провод  $AE$ , натяжение которого равно  $400 \text{ Н}$ , подвешен к вертикальному столбу  $AB$ , укрепленному оттяжками  $AC$  и  $AD$ , расположенными симметрично относительно плоскости  $BAE$ . Известно:  $AB = 5 \text{ м}$ ,  $BC = BD = 4 \text{ м}$ ,  $\angle CBD = 150^\circ$ . Определить натяжение оттяжек и усилие в столбе (рис. 4.27, а).

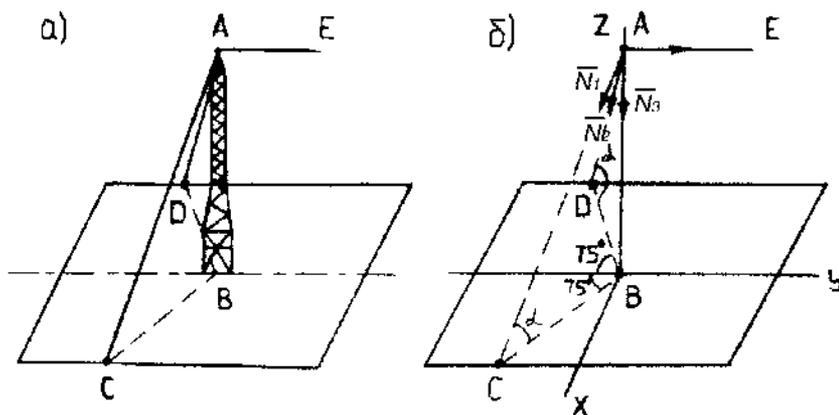


Рис. 4.27. К примеру 118

**Решение.** Рассмотрим равновесие сходящихся сил, приложенных к узлу  $A$ . Задаваемая сила  $N$  – реакция провода  $AE$ , реакция  $N_3$  столба  $AB$  и реакции  $N_1$  и  $N_2$  оттяжек  $AC$  и  $AD$  не лежат в одной

плоскости. Три неизвестные силы  $N_3$ ,  $N_1$  и  $N_2$  определим из трёх уравнений равновесия сходящихся сил в пространстве:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0.$$

Для этого проведём оси координат из точки  $B$ , направив ось  $Z$  вдоль  $BA$ , ось  $Y$  – параллельно  $AE$  и ось  $X$  – перпендикулярно осям  $Y$  и  $Z$  (рис. 4.27, б). Приложим к узлу  $A$  все действующие на него силы, направив их от узла, т. е. предположив, что все элементы растянуты. При проецировании сил  $N_1$  и  $N_2$  на оси  $X$  и  $Y$  применим двойное проецирование, так как углы, составленные этими силами с осями  $X$  и  $Y$ , не даны. Спроецируем сначала каждую из этих сил на плоскость  $XBY$  и полученную проекцию спроектируем на соответствующую ось.

Вычислим предварительно

$$\cos \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{4}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = 0,625;$$

$$\sin \alpha = \frac{BA}{CA} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = 0,781.$$

Составим уравнения равновесия сил:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N_1 \cos \alpha \cos 15^\circ - N_2 \cos \alpha \cos 15^\circ = 0; \quad (4.83)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -N_1 \cos \alpha \cos 75^\circ - N_2 \cos \alpha \cos 75^\circ + N = 0; \quad (4.84)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad -N_1 \cos(90^\circ - \alpha) - N_2 \cos(90^\circ - \alpha) - N_3 = 0. \quad (4.85)$$

Из уравнения (4.83) получаем

$$N_1 = N_2.$$

Из уравнения (4.84) найдём эти силы:

$$N_1 = \frac{N}{2 \cos \alpha \cos 75^\circ} = \frac{400}{2 \cdot 0,625 \cdot 0,259} = 1235,5 \text{ Н.}$$

$N_1 = N_2 = 1235,5 \text{ Н}$  (натяжения симметричных оттяжек одинаковы).

Из уравнения (4.85) определим  $N_3$ :

$$N_3 = -2N_1 \sin \alpha = -2 \cdot 1235,5 \cdot 0,8 = -1929,9 \text{ Н.}$$

Вертикальный столб  $AB$  сжат.

**Ответ:**  $N_1 = N_2 = 1235,5 \text{ Н}$ ;  $N_3 = -1929,9 \text{ Н}$ .

**Пример 119.** Определить усилия в стержне пространственной фермы, изображённой на рис. 4.28, а также реакции опор фермы  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , если на узел  $A$  фермы действуют вертикальная сила  $F_2 = 20 \text{ кН}$  и горизонтальная сила  $F_1 = 40 \text{ кН}$ , направленная вдоль стержня  $AF$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

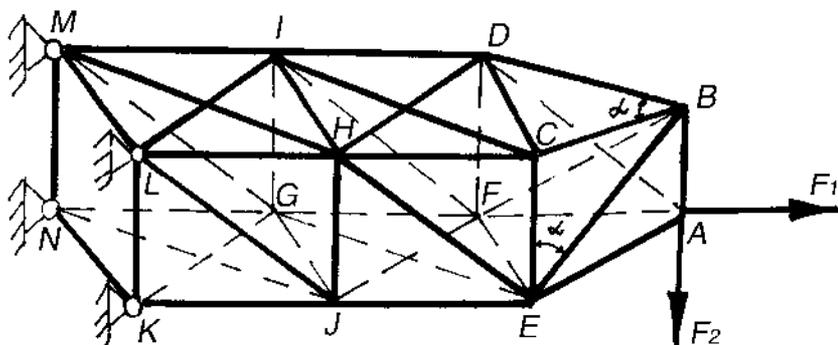


Рис. 4.28. К примеру 119

**Решение.** Для определения усилий в стержнях 1-39 фермы воспользуемся способом вырезания узлов. Так как силы, действующие на каждый из узлов фермы, взаимно уравниваются, то, вырезая отдельные узлы фермы, составляем по три уравнения равновесия сил, действующих на каждый узел.

Узлы фермы вырезаем в такой последовательности, при которой число неизвестных сил в рассматриваемом узле не превышает трех. Так же, как и при определении усилий в стержнях плоских ферм,

все стержни фермы условимся считать растянутыми; знак «минус» у вычисленной реакции стержня покажет, что стержень сжат.

Для определения усилий в стержнях рассматриваемой фермы будем вырезать последовательно узлы  $A, B, C, D, E, F, H, I, J, K, L$  (см. рис. 4.28).

Для определения усилий в стержнях пространственной фермы воспользуемся способом вырезания узлов (рис. 4.29).

**Узел А:**

$$\sum X_i = 0; \quad -N_2 \cos 75^\circ - N_3 \cos 75^\circ = 0; \quad N_2 = N_3;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -N_2 \sin 75^\circ - N_3 \sin 75^\circ + F_1 = 0;$$

$$N_2 = N_3 = \frac{F_1}{2 \sin 75^\circ} = \frac{40}{2 \sin 75^\circ} = 20,706 \text{ кН.}$$

$$\sum Z_i = 0; \quad N_1 - F_2 = 0; \quad N_1 = F_2 = 20 \text{ кН.}$$

**Узел В:**

$$\sum X_i = 0;$$

$$N'_6 \cos 75^\circ - N'_7 \cos 75^\circ + N'_4 \cos 60^\circ \cos 75^\circ - N'_5 \cos 75^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$-N'_6 \sin 75^\circ - N'_7 \sin 75^\circ - N'_4 \cos 60^\circ \sin 75^\circ - N'_5 \cos 60^\circ \sin 75^\circ = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -N'_4 \cos 30^\circ - N'_5 \cos 30^\circ - N'_1 = 0.$$

В силу симметрии

$$N'_4 = N'_5; \quad N'_6 = N'_7; \quad -2N'_4 \cos 30^\circ = N'_1;$$

$$N'_4 = N'_5 = -\frac{N_1}{2 \cos 30^\circ} = -\frac{20}{2 \cos 30^\circ} = -11,547 \text{ кН;}$$

$$-2N'_6 - 2N'_4 \cos 60^\circ = 0;$$

$$N'_6 = N'_7 = -N'_4 \cos 60^\circ = 11,547 \cos 60^\circ = 5,774 \text{ кН.}$$

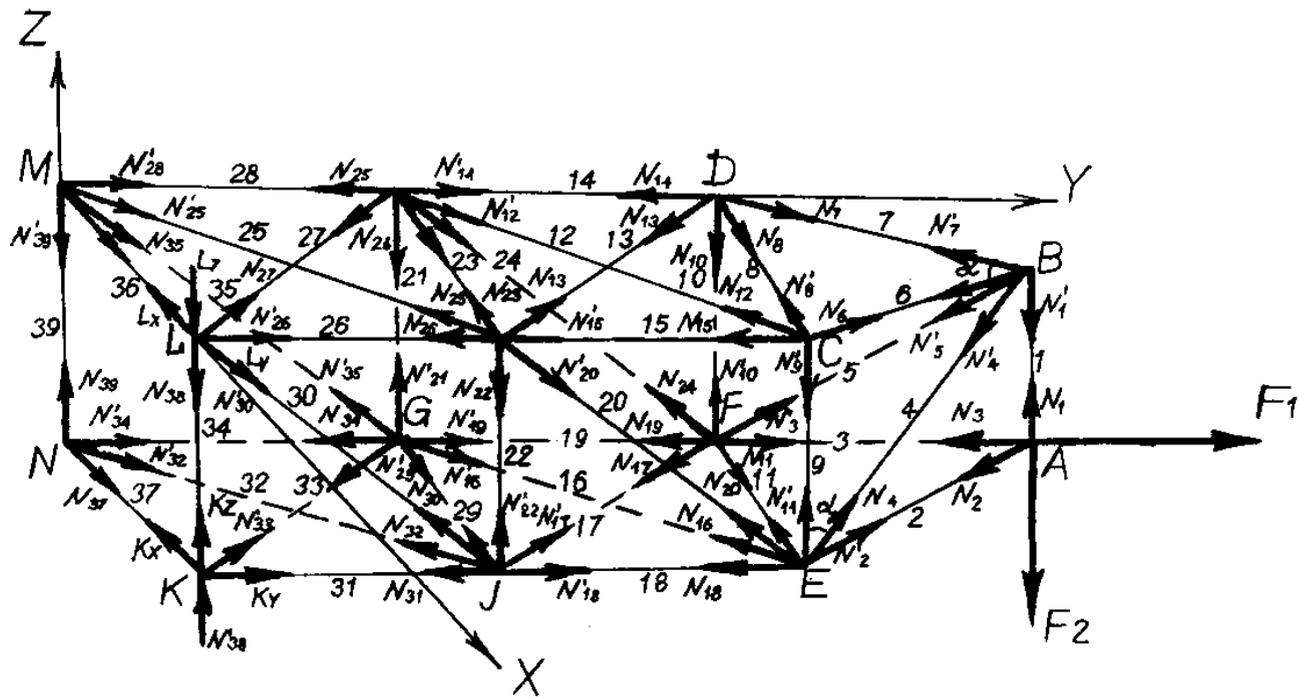


Рис. 4.29. К примеру 119

**Рассматривая узлы C и D**, получим:

$\sum Z_i = 0; -N'_9 = 0; N_{10} = 0$  – усилия в стержнях 9 и 10 равны нулю.

$$\Delta CBD: \bar{N}_7 + \bar{N}_6 + \bar{N}_8 = 0,$$

$$N_8 = 2N_7 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 5,774 \cdot \sin 15^\circ = 3,0 \text{ кН.}$$

$$\Delta EFA: \bar{N}_2 + \bar{N}_3 + N_{11} = 0,$$

$$N_{11} = 2N_2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 20,706 \cdot \sin 15^\circ = 10,718 \text{ кН.}$$

**Узел D:**

$$\sum X_i = 0; N_8 + N_7 \cos 75^\circ + N'_{13} \cos 45^\circ = 0 \text{ (IHCD – квадрат);}$$

$$\sum Y_i = 0; -N_{14} - N'_{13} \cos 45^\circ + N_7 \sin 75^\circ = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; N_{10} = 0;$$

$$N'_{13} = \frac{-N_8 - N_7 \cos 75^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{-3 - 5,774 \cos 75^\circ}{\cos 45^\circ} = -6,356 \text{ кН.}$$

$$N_{14} = -N'_{13} \cos 45^\circ + N_7 \sin 75^\circ = \\ = -(-6,356) \cos 45^\circ + 5,774 \sin 75^\circ = 10,072 \text{ кН.}$$

В силу симметрии **для узла C**

$$N_{15} = N_{14} = 10,072 \text{ кН; } N_{12} = N_{13} = -6,356 \text{ кН.}$$

**Узел E:**

$$\sum X_i = 0; -N'_{11} - N'_2 \cos 75^\circ - N_{16} \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; -N_{18} + N'_2 \sin 75^\circ + (-N_{16} \sin 45^\circ) - N_{20} \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; N_{20} \cos 45^\circ + N_4 \cos 30^\circ = 0 \quad (N_9 = 0);$$

$$N_{20} = \frac{N_4 \cos 30^0}{\cos 45^0} = \frac{-11,547 \cos 30^0}{\cos 45^0} = 14,142 \text{ кН.}$$

$$N_{16} = \frac{-N'_{11} - N'_2 \cos 75^0}{\cos 45^0} = \frac{-10,718 - 20,706 \cos 75^0}{\cos 45^0} =$$

$$= -22,736 \text{ кН;}$$

$$N_{18} = N'_2 \sin 75^0 - N_{16} \sin 45^0 - N_{20} \cos 45^0 =$$

$$= 20,706 \sin 75^0 + 22,736 \sin 45^0 - 14,142 \cos 45^0 = 26,077 \text{ кН.}$$

В силу симметрии **для узла F**

$$N_{19} = N_{18} = 26,077 \text{ кН; } N_{17} = N_{16} = -22,736 \text{ кН; } N_{24} = N_{20}.$$

$$\Delta IHO: \bar{N}_{13} + \bar{N}'_{12} + \bar{N}_{23} = 0.$$

$$\angle IOH = 90^0, N_{23} = \sqrt{N_{13}^2 + N_{12}'^2} = \sqrt{6,356^2 + 6,356^2} = 9 \text{ кН.}$$

**Узел H:**

$$\sum X_i = 0; -N_{23} + (-N_{25} \cos 45^0) - N_{13} \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; -N_{26} + N'_{15} - N_{25} \sin 45^0 + N_{13} \sin 45^0 = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; -N_{22} - N'_{20} \cos 45^0 = 0.$$

$$N_{22} = -N'_{20} \cos 45^0 = -14,142 \cos 45^0 = -10 \text{ кН;}$$

$$N_{25} = \frac{-N_{23} - N_{13} \cos 45^0}{\cos 45^0} = \frac{-9 + 6,356 \cos 45^0}{\cos 45^0} = -6,372 \text{ кН;}$$

$$N_{26} = N'_{15} - N_{25} \sin 45^0 + N_{13} \sin 45^0 =$$

$$= 10,072 + 6,372 \sin 45^0 - 6,356 \sin 45^0 = 10,083 \text{ кН.}$$

**Для узла I** в силу симметрии

$$N_{27} = N_{25} = -6,372 \text{ кН; } N_{28} = N_{26} = 10,083 \text{ кН;}$$

$$N_{21} = N_{22} = -10 \text{ кН.}$$

$$\Delta GJO': \bar{N}_{29} + \bar{N}_{16} + \bar{N}_{17} = 0,$$

$$\angle GO'J = 90^\circ, N_{29} = \sqrt{N_{16}^2 + N_{17}^2} = \sqrt{2} \cdot 22,736 = 31,644 \text{ кН.}$$

**Узел J:**

$$\sum X_i = 0; -N_{29} - N_{32} \cos 45^\circ - N'_{17} \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$-N_{31} + N'_{18} - N_{32} \cos 45^\circ + N'_{17} \cos 45^\circ - N_{30} \cos^2 45^\circ = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; N'_{22} + N'_{30} \cos 45^\circ = 0.$$

$$N_{30} = -\frac{N'_{22}}{\cos 45^\circ} = -\frac{-10}{\cos 45^\circ} = 14,142 \text{ кН};$$

$$N_{32} = \frac{-N_{29} - N'_{17} \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{-31,644 + 22,736 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} =$$

$$= -22,015 \text{ кН};$$

$$N_{31} = N'_{18} - N_{32} \cos 45^\circ + N'_{17} \cos 45^\circ - N_{30} \cos^2 45^\circ =$$

$$= 26,077 + 22,015 \cos 45^\circ - 22,736 \cos 45^\circ - 14,142 \cos^2 45^\circ =$$

$$= 18,496 \text{ кН.}$$

**Для узла G** в силу симметрии

$$N_{34} = N_{31} = 18,496 \text{ кН}; N_{33} = N_{32} = -22,015 \text{ кН};$$

$$N_{35} = N_{30} = 14,142 \text{ кН.}$$

Основываясь на результатах расчета, можно установить следующее:

1. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, не лежащие в одной плоскости, то усилия в каждом из этих стержней равны нулю.

2. Если в некотором узле фермы все внешние силы и все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, то усилие в стержне, не лежащем в этой плоскости, равно нулю.

Эти соображения, дающие возможность без вычислений определить стержни с нулевыми усилиями, значительно упрощают определение усилий в стержнях пространственных ферм.

Определив усилия в стержнях фермы способом вырезания узлов, можно определить реакции опор, представляющих собой шаровые шарниры. Реакцию каждой опоры неизвестного направления разложим на три составляющие, направленные вдоль осей координат. Эти составляющие определим из уравнений равновесия сил, приложенных к опорным узлам.

**Узел К:**

$$\sum X_i = 0; -X_K - N'_{33} \cos 45^\circ = 0;$$

$$X_K = -N'_{33} \cos 45^\circ = 22,015 \cos 45^\circ = 15,576 \text{ кН}; X_K = N_{37}.$$

$$\sum Y_i = 0; N'_{33} \cos 45^\circ + Y_K = 0; Y_K = -N'_{33} \cos 45^\circ = 15,576 \text{ кН}.$$

$$\sum Z_i = 0; Z_K + N_{38} = 0; Z_K = -N_{38}.$$

**Узел L:**

$$\sum X_i = 0; -L_X - N_{27} \cos 45^\circ = 0;$$

$$L_X = -N_{27} \cos 45^\circ = 6,372 \cos 45^\circ = 4,506 \text{ кН}; L_X = N_{36}.$$

$$\sum Y_i = 0; L_Y + N'_{26} + N_{27} \cos 45^\circ + N'_{30} \cos 45^\circ = 0.$$

$$L_Y = -N'_{26} - N_{27} \cos 45^\circ - N'_{30} \cos 45^\circ = \\ = -10,083 + 6,372 \cos 45^\circ - 14,142 \cos 45^\circ = -15,577 \text{ кН}.$$

$$\sum Z_i = 0; N'_{38} + N'_{30} \cos 45^\circ = 0;$$

$$N'_{38} = -N'_{30} \cos 45^\circ = -14,142 \cos 45^\circ = -10 \text{ кН};$$

$$L_Z = -10 \text{ кН}; N_{38} = N_{39}.$$

$$R_L = \sqrt{L_X^2 + L_Y^2 + L_Z^2} = \sqrt{4,506^2 + 15,577^2 + 10^2} = 19,051 \text{ кН}.$$

**Для узла М** в силу симметрии

$$R_M = 19,051 \text{ кН};$$

$$R_K = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 + Z_K^2} = \sqrt{15,567^2 + 15,567^2 + 10^2} = 24,180 \text{ кН}.$$

Результаты расчётов сводим в табл. 4.2.

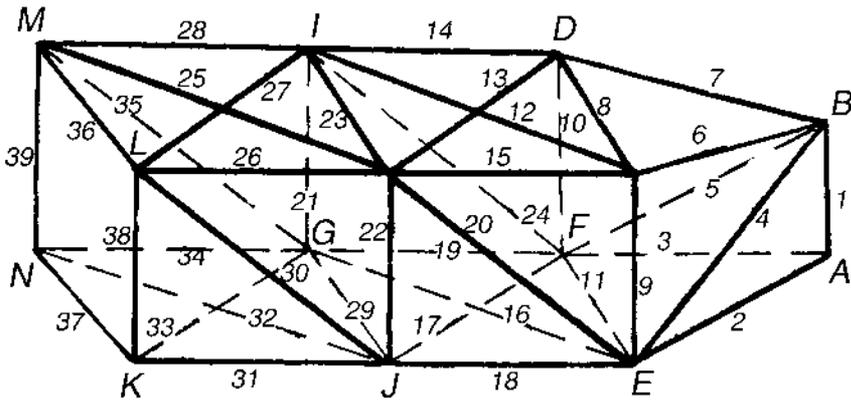


Рис. 4.30. К примеру 119

Т а б л и ц а 4.2

Результаты расчётов

Стержни	1	2	3	4	5	6	7
Усилие $N$ , кН	20	20,706	20,706	-11,547	-11,547	5,774	5,774

Стержни	8	9	10	11	12	13	14
Усилие $N$ , кН	3,0	0	0	10,718	-6,356	-6,356	10,072

Стержни	15	16	17	18	19	20	21
Усилие $N$ , кН	10,072	-22,736	-22,736	26,076	26,077	14,142	-10

Стержни	22	23	24	25	26	27	28
Усилие $N$ , кН	-10	9	14,142	-6,372	10,083	-6,372	10,083

Стержни	29	30	31	32	33	34	35
Усилие $N$ , кН	31,644	14,142	18,496	-22,015	-22,015	18,496	14,142

Стержни	36	37	38	39
Усилие $N$ , кН	4,506	15,576	-10	-10

Реакции шарниров:

$$R_K = 24,180 \text{ кН}; R_M = 19,051 \text{ кН};$$

$$R_L = 19,051 \text{ кН}; R_N = 24,180 \text{ кН}.$$

Сделаем проверку по методу сечений:

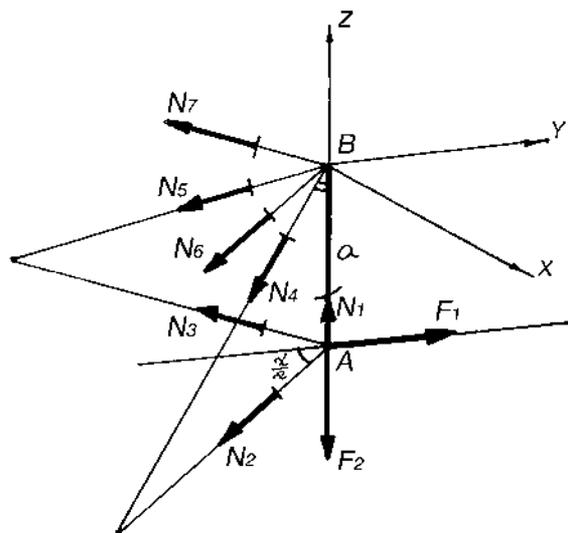


Рис. 4.31. К примеру 119

$B$  – точка Риттера.

$$\sum M_B(F_K) = 0; F_1 \cdot a - (N_2 + N_3) \cos \frac{\alpha}{2} \cdot a = 0;$$

$$F_1 = (N_2 + N_3) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$N_2 + N_3 = \frac{F_1}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\sum F_{KX} = 0; -N_3 \sin \frac{\alpha}{2} + N_2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

$$N_3 = N_2; 2N_2 = \frac{F_1}{\cos \frac{\alpha}{2}}; N_2 = \frac{F_1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{40}{2 \cos 15^\circ};$$

$$N_2 = 20,706 \text{ кН}; N_3 = N_2 = 20,706 \text{ кН}.$$

$$\sum F_{KZ} = 0; N_1 - F_2 = 0; N_1 = F_2, N_1 = 20 \text{ кН}.$$

### Задачи к заданиям

**Задача 11.** Электрический провод  $DE$ , натяжение которого  $N$  дано в табл. 4.3, подвешен к столбу  $CD$ , укрепленному оттяжками  $AD$  и  $BD$ , расположенными симметрично относительно плоскости  $CDE$  (рис. 4.32). Линия действия натяжения провода  $N$  лежит в плоскости угла  $CDO$ . Определить натяжение оттяжек и усилие в столбе.

Т а б л и ц а 4.3

Исходные данные к задаче 11

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значение $N, Н$	280	240	250	160	100	120	180	150	300	200

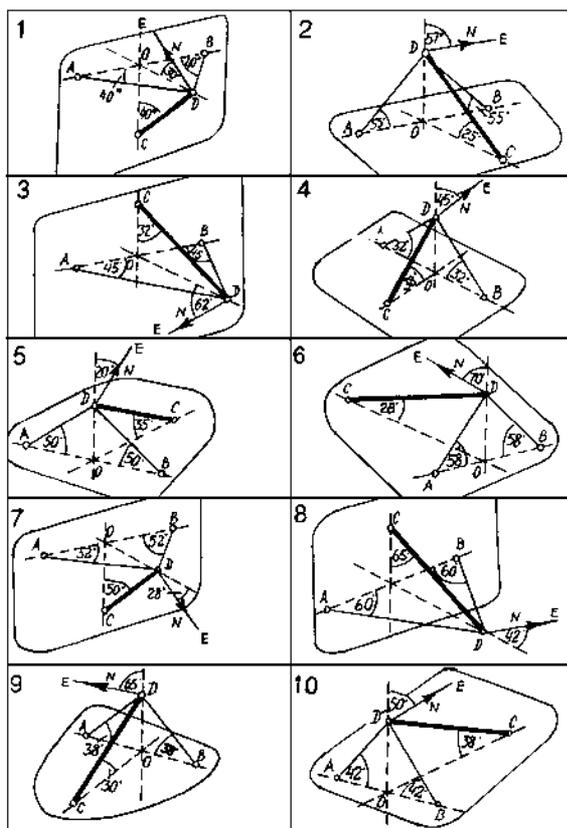


Рис. 4.32. К задаче 11

**Задача 12.** Определить усилия в стержнях пространственной фермы, изображённой на рис. 4.33-4.35, а также реакции опор фермы, если на ферму действуют силы  $F_1$  и  $F_2$ . Исходные данные, необходимые для решения своего варианта задачи, выбрать из табл. 4.4.

Т а б л и ц а 4.4

Исходные данные к задаче 12

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1$ , кН	40	55	45	50	60	35	40	75	30	65
$F_2$ , кН	65	35	45	70	45	70	60	65	40	50
$\alpha$ , град	30	40	60	35	40	25	30	55	30	45

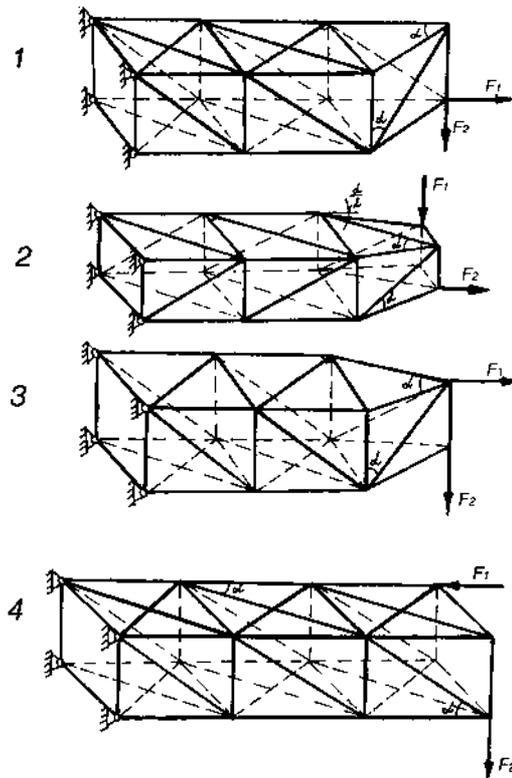


Рис. 4.33. К задаче 12

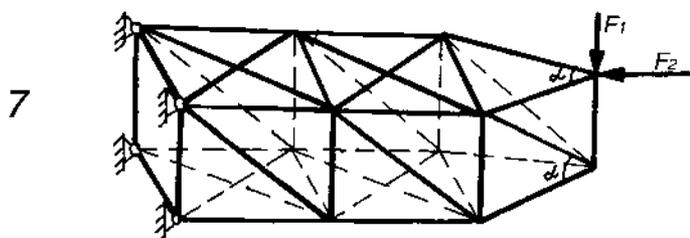
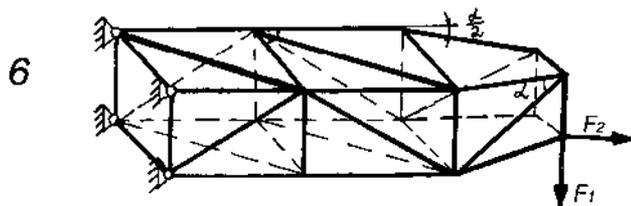
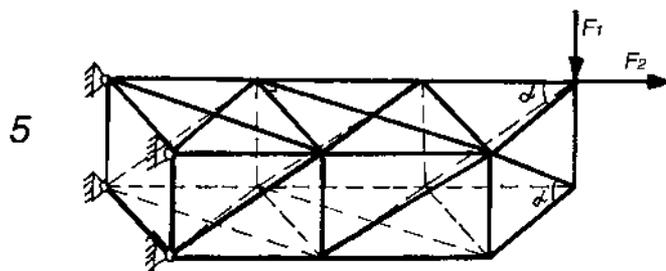


Рис. 4.34. К задаче 12

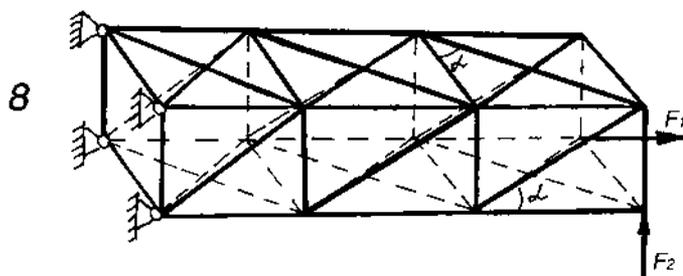


Рис. 4.35 (начало). К задаче 12

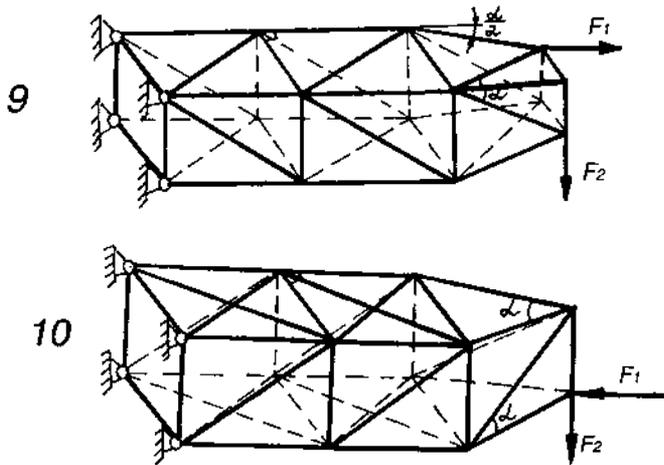


Рис. 4.35 (окончание). К задаче 12

**Задача 13.** Для заданного вала (рис. 4.36) с закрепленными на нем зубчатыми колесами определить реакции опор в точках *A* и *B*. Исходные данные, необходимые для решения своего варианта задачи, выбрать из табл. 4.5 (силы  $F_t$  и  $F_r$  заданы в ньютонах,  $r$  и  $l$  - в миллиметрах).

Т а б л и ц а 4.5

Исходные данные к задаче 13

№ варианта	$F_{t_1}$	$F_{r_1}$	$F_{t_2}$	$F_{r_2}$	$r_1$	$r_2$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
1	640	210	400	130	50	45	80	120	100
2	680	220	420	140	55	50	110	120	90
3	700	230	440	150	60	55	70	140	70
4	720	240	460	160	65	60	80	150	90
5	740	250	480	170	70	65	100	150	110
6	760	260	500	180	75	70	90	140	100
7	780	270	420	140	80	75	100	150	120
8	640	210	440	150	50	50	90	120	80
9	660	220	460	160	60	55	100	110	120
10	680	230	480	170	70	60	80	140	90

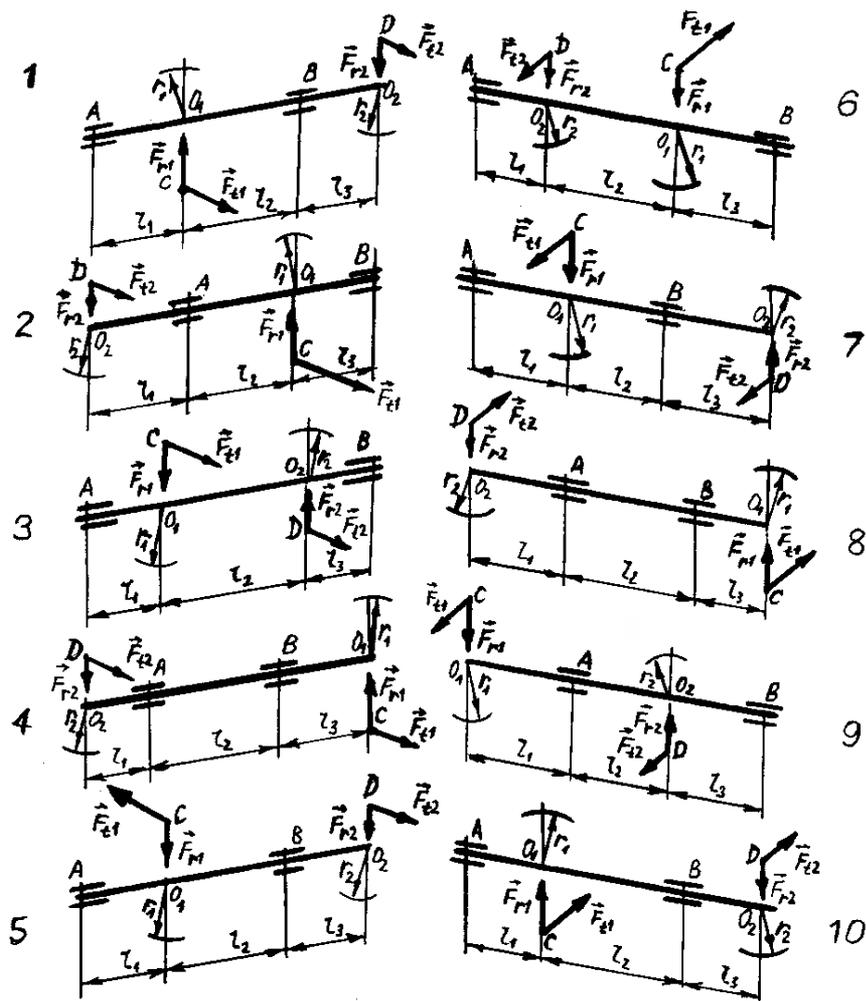


Рис. 4.36. К задаче 13

**Задача 14.** Для стального вала постоянного поперечного сечения с двумя зубчатыми колёсами, нагруженными силами  $F_1$  и  $F_2$ , (рис. 4.37) определить реакции подшипников. Исходные данные, необходимые для решения своего варианта задачи, выбрать из табл. 4.6.

Исходные данные к задаче 14

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_{t2}$ , Н	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
$F_{r1}$ , Н	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
$F_{t2}$ , Н	500	510	520	530	540	550	560	570	580	590
$F_{r2}$ , Н	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290

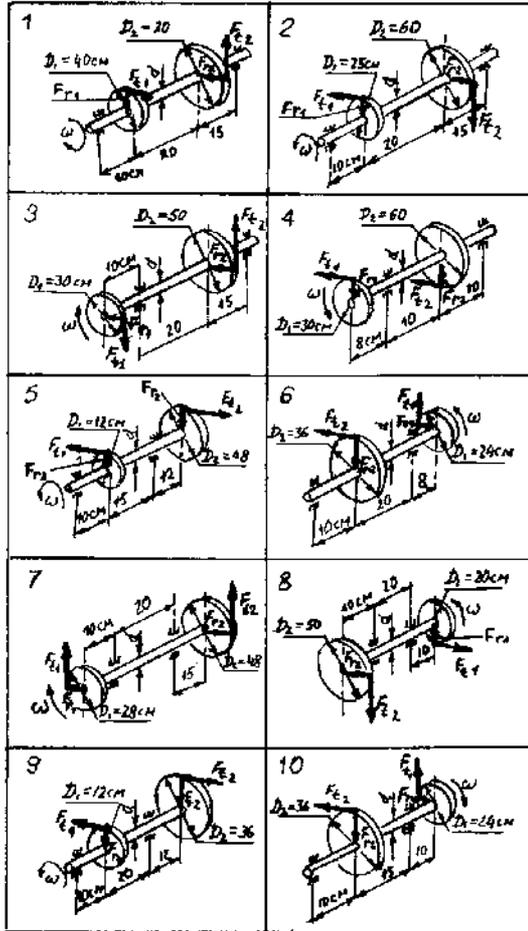


Рис. 4.37. К задаче 14

**Задача 15.** Для стального вала постоянного поперечного сечения с одним зубчатым колёсом, нагруженным силами  $F_t$  и  $F_r$  (рис. 4.38), определить реакции подшипников. Исходные данные, необходимые для решения своего варианта задачи, выбрать из табл. 4.7.

Т а б л и ц а 4.7

Исходные данные к задаче 15

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_t$ , Н	700	720	740	760	780	800	820	840	860	880
$F_r$ , Н	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320

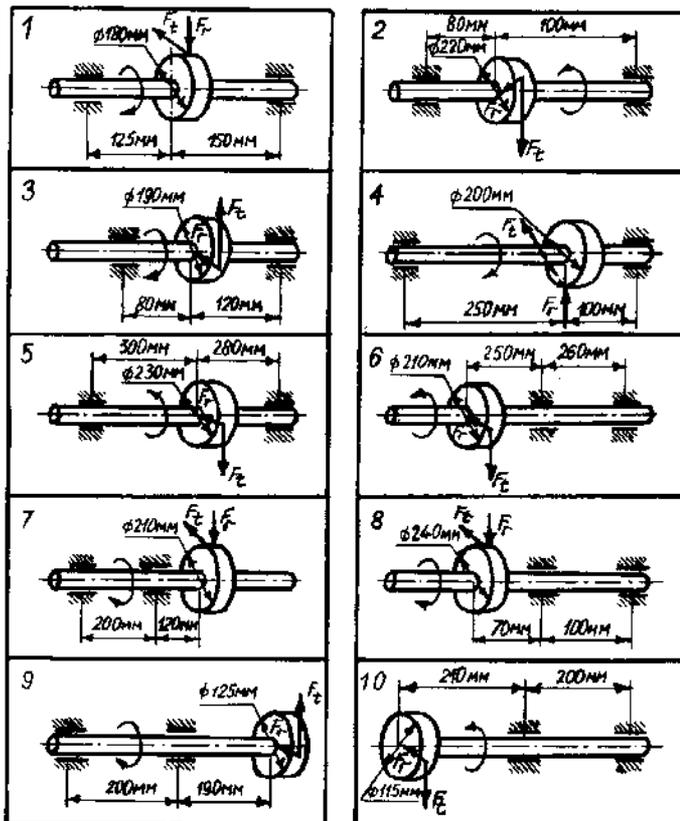


Рис. 4.38. К задаче 15

## Л и т е р а т у р а

1. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высш. школа, 1989; 1990; 1999.
2. Гермет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 1970. – 440 с.
3. Кильчевский Н.А., Ремизова Н.И., Шепелевская Н.Н. Основы теоретической механики. – Киев: Техника, 1968. – 260 с.
4. Мовнин М.С., Израелит А.Б. Теоретическая механика. – Л.: Судостроение, 1972.
5. Никитин Е.М. Теоретическая механика для техникумов. – М.: Наука, 1971 (и последующие издания).
6. Осадчий В.И., Фаин А.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высш. школа, 1972.
7. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. В 2 ч. – Киев: Вища школа, 1989; 1990. – 350 с.
8. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. 1. Статика, кинематика. – 7-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 1999.
9. Прикладная механика: Учеб. пособие / А.Т.Скойбеда, А.А.Миклашевич, Е.Н.Левковский и др.; Под общ. ред. А.Т.Скойбеда. – Мн.: Выш. школа, 1997. – 552 с.

Учебное издание

НИКОЛАЕНКО Владимир Лаврентьевич

МЕХАНИКА

Учебное пособие к семестровым заданиям для студентов  
немашиностроительных специальностей вузов

В 2-х частях

Часть 1

Учебное пособие

Под редакцией А.Т.Скойбеды

Редактор Т.Н.Микулик. Корректор О.Н.Воробьева  
Компьютерная верстка Л.М.Чернышевич

---

Подписано в печать 10.02.2004.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.

Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 15,6. Уч.-изд. л. 12,1. Тираж 300. Заказ 354.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.  
Лицензия ЛВ №155 от 30.01.2003. 220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.