

Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Конспект лекций  
по математике  
для студентов инженерно-  
технических специальностей**

**В 4 частях**

**Часть 4**

**Электронное учебное издание**

**Минск БНТУ 2007**

Авторы:

*В.А. Нифагин, В.Н. Кушинир*

Электронная версия *И.Л. Алифановой*

Под редакцией: *В.А.Нифагина*

Рецензент:

*Кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Верременюк*

© БНТУ, 2007

## Оглавление

<b>19. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ .....</b>	<b>4</b>
19.1. Классические уравнения математической физики. Вывод и классификация. Основные краевые задачи .....	4
19.2. Метод разделения переменных в краевых задачах для гиперболических уравнений .....	24
19.3. Интегральные преобразования в решении краевых задач для параболических уравнений .....	35
19.4. Методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) в решениях краевых задач для эллиптических уравнений .....	40
<b>20. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....</b>	<b>45</b>
20.1. Элементы комбинаторики .....	45
20.2 Вероятность события.....	47
20.3 Условная вероятность .....	56
20.4 Последовательность независимых испытаний. Схема испытаний Бернулли .....	62
20.5. Скалярные случайные величины .....	70
20.6 Числовые характеристики скалярных случайных величин .....	78
20.6 Векторные случайные величины .....	84
20.7 Закон больших чисел. Предельные теоремы .....	89
<b>21. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ .....</b>	<b>92</b>
21.1. Выборка. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма .....	92
21.2. Элементы теории оценок. Выборочные характеристики.....	98
21.3. Интервальное оценивание параметров распределения. Доверительный интервал. Доверительная вероятность .....	102
21.4. Проверка статистической гипотезы о виде распределения. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия Пирсона ( $\chi^2$ ).....	107
21.5. Регрессионный анализ .....	112
21.6. Оценка параметров линейной одномерной регрессии .....	117
21.7. Литература.....	134

## **19. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ**

### **19.1. Классические уравнения математической физики. Вывод и классификация. Основные краевые задачи**

#### **Введение**

Классическая теория уравнений в частных производных уходит корнями в физику, где, как считается, эти уравнения адекватно описывают законы природы. Функции, удовлетворяющие таким уравнениям весьма немногочисленны в пространстве всех “допустимых” функций.

Далее, с помощью некоторых дополнительных условий (типа начальных или граничных) часто обеспечивают единственность решений. Существование решений обычно устанавливается при некоторых априорных оценках, локализирующих возможное решение в данном функциональном пространстве.

Исторически математические модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения в частных производных, были разработаны для решения задач, описывающих физические процессы прежде всего в гидродинамике, аэромеханике и электродинамике. Поэтому в разнообразных приложениях, где находят широкое применение методы уравнений в частных производных, они получили название методы математической физики. Сейчас такие уравнения моделируют процессы различной природы: физические, химические, биологические, экологические, экономические и др. Эти методы применяются и для решения различных классов инженерных задач. Данный раздел математики отличается чрезвычайной информационной емкостью, что обусловлено тем, что в его основе лежат фундаментальные законы сохранения, связанные с симметрией пространства и времени. Именно благодаря этому, такие

на первый взгляд принципиально различные процессы, как распространение тепла в сплошной среде, диффузия химических компонент, проникновение магнитного поля в хорошо проводящий материал и распространение волн эпидемий, описываются одинаковыми по форме уравнениями. В то же время при решении уравнений математической физики используются методы, разработанные в самых различных математических дисциплинах, таких, как математический анализ, теория функций комплексного переменного, вариационное исчисление, численные методы и т. д.

Следует понимать, что дифференциальные уравнения в частных производных описывают процессы, которые могут протекать в бесконечном разнообразии тел, имеющих различные формы, размеры и свойства. Поэтому любое уравнение, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. Особенности конкретного процесса устанавливаются заданием дополнительных условий, выделяющих этот процесс из всех остальных. Прежде всего в задаче математической физики указывают область, в которой решается уравнение. Эта область определяет размеры и форму тела, в которой протекает исследуемый процесс. Обычно число независимых переменных не превышает четырех, причем одно из них – время, а остальные – пространственные переменные. В зависимости от их числа различают одномерные, двумерные и трехмерные задачи. Кроме того, на границе области выставляют некоторые граничные условия на искомую функцию, которые учитывают взаимодействие процесса в выделенном теле с аналогичным процессом в окружающей среде. Формы граничных связей могут быть весьма разнообразны, однако принята следующая классификация граничных условий. Она соответствует порядку производных искомой функции, которые фигурируют в граничном условии. Так однородными граничными условиями первого и второго рода называются равенства нулю искомой функции и ее первой производной (нормальной или косо́й) на границе области. Условия третьего рода связывают равенством функцию и ее нормальную производную на границе. Если на разных участках границы заданы условия различных типов, то задачу

называют смешанной. Все задачи, где учитываются граничные условия, называют краевыми задачами. Иногда необходимо решить задачу в безграничном пространстве. Для эволюционных процессов (зависящих от времени) такие задачи называют задачами Коши. В краевых задачах для уравнений, зависящих от времени, также как и в задачах Коши, задаются помимо граничных и начальные условия на искомую функцию и ее производную по времени. Начальные условия соответствуют состоянию описываемой системы в начальный момент времени. В ряде специальных случаев рассматриваются задачи без начальных условий – так называемые задачи об установившихся (стационарных) процессах. Итак, формулировка краевой задачи математической физики в общем случае включает задание дифференциального уравнения в частных производных, граничных и начальных условий. Ж. Адамаром введено понятие корректной постановки задачи математической физики. Говорят, что задача для уравнения в частных производных в указанной области поставлена корректно, если решение этой задачи существует, единственно и устойчиво к малым изменениям исходных данных.

Отметим, что мы будем говорить о линейных задачах математической физики, когда линейными являются и дифференциальные уравнения и граничные условия. Наиболее изучены линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка для случая двух независимых переменных, которые мы и будем рассматривать в дальнейшем.

## **Вывод основных классических уравнений математической физики.**

### **Уравнение колебаний**

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран, трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) приводят к уравнению колебаний вида

$$cu_{,2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (19.1)$$

где неизвестная функция  $u(x, t)$  зависит от  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) пространственных переменных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и времени  $t$ . Коэффициенты  $c, p, q$  - определяются свойствами среды,  $F(x, t)$  - плотность внешнего возмущения. В уравнении (19.1) в соответствии с определением операторов  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{grad}$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n (p u_{,x_i})_{,x_i}.$$

Проиллюстрируем вывод уравнения (19.1) на примере малых поперечных колебаний струны. Математической струной называется упругая нить, не сопротивляющаяся изгибу.

Пусть в плоскости  $(x, u)$  струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью  $x$ . Обозначим через  $u(x, t)$  величину отклонения струны от положения равновесия в точке  $x$  в момент времени  $t$ , так что  $u = u(x, t)$  есть уравнение струны в момент времени  $t$ . Будем пренебрегать величинами более высокого порядка малости по сравнению с  $\operatorname{tg} \delta = u_{,x}$ .

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение  $T(x, t)$  в точке  $x$  в момент времени  $t$  направлено по касательной к струне в точке  $x$ . Любой участок струны  $(a, b)$  после отклонения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины (рис. 19.1).

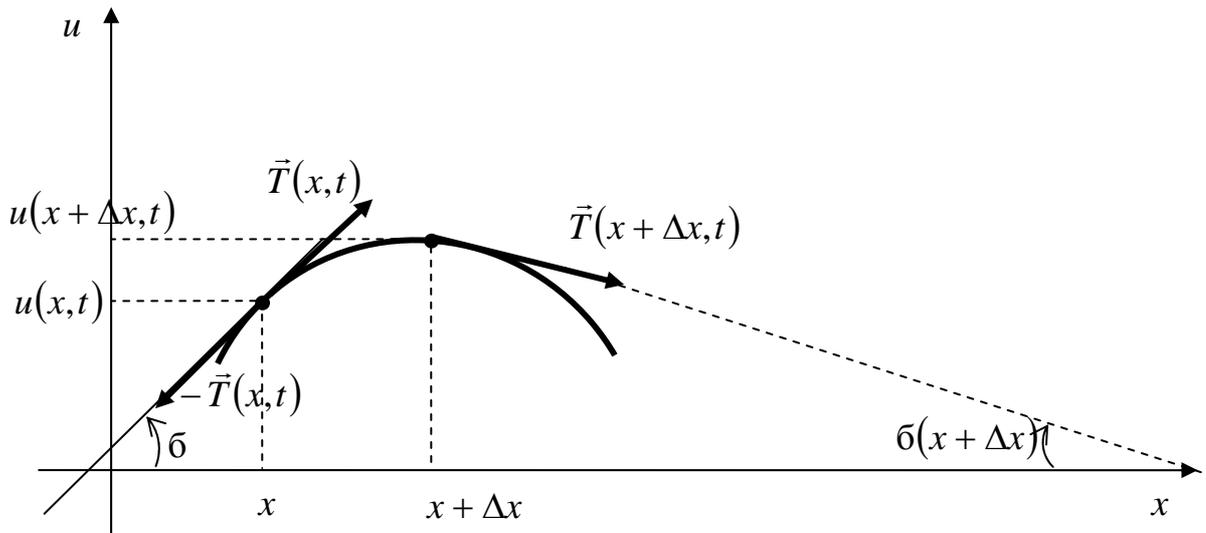


Рис. 19.1

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx b - a$$

и следовательно, в соответствии с законом Гука величина натяжения  $|\vec{T}(x, t)|$  будет оставаться постоянной, не зависящей от  $x$  и  $t$ ,  $|\vec{T}(x, t)| = T_0$ . Обозначим через  $F(x, t)$  плотность внешних сил, действующих на струну в точке  $x$  в момент времени  $t$  и направленных перпендикулярно оси  $x$ . Пусть, наконец,  $\rho(x)$  обозначает линейную плотность струны в точке  $x$  так, что  $\rho(x)dx$  – масса элемента струны  $(x, x + dx)$ . Составим теперь уравнение движения струны, учитывая баланс всех действующих (их проекций на ось  $u$ ) на элемент  $(x, x + dx)$  струны сил, включая силы инерции. На ее элемент действуют силы натяжения  $\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$  (см. рис. 19.1) и внешние силы инерции, сумма которых согласно закону Ньютона должна быть равна произведению массы этого элемента на его ускорение.

$$T_0 \sin \bar{\alpha}(x + \Delta x) - T_0 \sin \bar{\alpha}(x) + F(x, t)\Delta x = c(x)\Delta x u_{t^2}(x, t). \quad (19.2)$$

Или, учитывая наше допущение

$$\sin \bar{\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \bar{\alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\alpha}}} \approx \operatorname{tg} \bar{\alpha} = u_x,$$

получим из (19.2)

$$c u_{t^2}(x, t) = T_0 \frac{1}{\Delta x} (u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) + F(x, t),$$

т. е.

$$c u_{t^2} = T_0 u_{x^2} + F. \quad (19.3)$$

Уравнение (19.3) называется уравнением малых поперечных колебаний струны.

Если плотность  $c$  – постоянна,  $c(x) = c$ , то уравнение колебаний примет вид:

$$u_{t^2} = a^2 u_{x^2} + f, \quad (19.4)$$

где обозначено  $a^2 = \frac{T_0}{c}$ ;  $f = \frac{F}{c}$ . Уравнение (19.4) называют также одномерным волновым уравнением.

Уравнение вида (19.1) описывает малые продольные колебания упругого стержня

$$c S u_{t^2} = (E S \cdot u_x)_x + F(x, t), \quad (19.5)$$

где  $S(x)$  – площадь поперечного сечения стержня,  $E(x)$  – модуль Юнга в точке  $x$ .

Аналогично выводится уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$cu_{t_2} = T_0(u_{x_1^2} + u_{x_2^2}) + F. \quad (19.6)$$

Если плотность  $c = \text{const}$ , то уравнение (19.6) примет вид

$$u_{t^2} = a^2(u_{x_1^2} + u_{x_2^2}) + f; \quad a^2 = \frac{T_0}{c}; \quad f = \frac{F}{c}. \quad (19.7)$$

Уравнение (19.7) называют также двумерным волновым уравнением.

Трехмерное волновое уравнение

$$u_{t^2} = a^2(u_{x_1^2} + u_{x_2^2} + u_{x_3^2}) + f \quad (19.8)$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяет плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие вектора напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Вводя оператор Лапласа ( $n$ -мерный)  $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i^2}$  будем записывать волновые уравнения (19.4), (19.7) и (19.8) единообразно:

$$u_{t^2} = a^2 \Delta u + f.$$

### Уравнение диффузии

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим общим уравнением диффузии (теплопроводности):

$$cu_t = \text{div}(p \text{grad} u) - qu + F(x, t). \quad (19.9)$$

Выведем уравнение распространения тепла. Обозначим через  $u(x, t)$  температуру среды в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ , а через  $\rho(x)$ ,  $c(x)$ ,  $k(x)$  – соответственно ее плотность, удельную плотность и коэффициент теплопроводности в точке  $x$ . Пусть  $F(x, t)$  – интенсивность источников тепла в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Вычислим баланс тепла в произвольном объеме  $V$  за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$ . Обозначим через  $\partial V$  границу  $V$ , и пусть  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к ней. Согласно закону Фурье, через поверхность  $\partial V$  в объем  $V$  поступает количество тепла

$$Q_1 = \iint_{\partial V} k u_n ds \Delta t = \Delta t \iint_{\partial V} (k \operatorname{grad} u, \vec{n}) ds,$$

равное, в силу формулы Остроградского-Гаусса,

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dx \Delta t.$$

В то же время, за счет тепловых источников в объеме  $V$  возникает количество тепла

$$Q_2 = \iiint_V F(x, t) dx \Delta t.$$

Так как температура в объеме  $V$  за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$  выросла на величину

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) \approx u_t \Delta t,$$

то для этого необходимо затратить количество тепла

$$Q_3 = \iiint_V c \rho u_t dx \Delta t.$$

С другой стороны,  $Q_3 = Q_1 + Q_2$  и поэтому

$$\iiint_V (\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c c u_t) dx \Delta t = 0,$$

откуда в силу произвольности выбора объема  $V$  получаем уравнение распространения тепла

$$c c u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x, t). \quad (19.10)$$

Если среда однородна, т. е.  $c, c$  и  $k$  - постоянные, то уравнение (19.10) принимает вид

$$u_t = a^2 \Delta u + f, \quad (19.11)$$

где  $a^2 = \frac{k}{c c}$ ;  $f = \frac{F}{c c}$ .

Уравнение (19.11) также называется уравнением теплопроводности.

### Стационарное уравнение

Для стационарных процессов  $F(x, t) = F(x)$ ,  $u(x, t) = u(x)$  и уравнения колебаний (19.1) и диффузии (19.9) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q u = F(x). \quad (19.12)$$

При  $p = \text{const}$ ,  $q = 0$  уравнение (19.12) называется уравнением Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{p}; \quad (19.13)$$

при  $f = 0$  уравнение (19.13) называется уравнением Лапласа:

$$\Delta u = 0.$$

Рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников, а именно пусть внутри некоторого объема  $V$  с границей  $\partial V$  имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность  $\rho = \text{const}$ ), характеризуемое скоростью  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ . Если течение жидкости не вихревое (т. е.  $\text{rot} \vec{v} = 0$ ), то скорость  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$  является потенциальным вектором

$$\vec{v} = \text{grad} u, \quad (19.14)$$

где  $u$  – скалярная функция, называемая потенциалом скорости.

Если отсутствуют источники, то

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (19.15)$$

Теперь из формул (19.14) и (19.15) получим:

$$\text{div}(\text{grad} u) = 0$$

или

$$\Delta u = 0.$$

Таким образом, потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

### **Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными**

Большое число различных физических задач приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных, которые связывают искомую функцию нескольких переменных, ее частные производные и независимые переменные. В качестве полигона для исследования многих методов

и свойств решений основных уравнений математической физики использовались дифференциальные уравнения второго порядка для двух независимых переменных

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1^2}, u_{x_1x_2}, u_{x_2^2}) = 0. \quad (19.16)$$

Если дифференциальное уравнение линейно относительно входящих в него старших производных, то его называют квазилинейным уравнением и записывают в виде:

$$a_{11}u_{x_1^2} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2^2} + F_1(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0, \quad (19.17)$$

где  $a_{ij}$  – известные функции двух независимых переменных.

Дифференциальное уравнение (19.16) называют линейным, если оно линейно как относительно искомой функции, так и относительно ее частных производных. Такое уравнение записывают в виде:

$$a_{11}u_{x_1^2} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2^2} + b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + cu + f(x_1, x_2) = 0. \quad (19.18)$$

Если коэффициенты уравнения (19.18)  $a_{ij} = \text{const}$ , то уравнение (19.18) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Уравнениям (19.17) и (19.18) можно поставить в соответствие квадратичную форму  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  и по аналогии с кривыми второго порядка дискриминировать типы уравнений по знаку дискриминанта. Заметим, что принадлежность уравнения к одному из этих типов определяет некоторые общие свойства его решений и позволяет выбрать методы решения задач для такого уравнения.

Выделим три типа уравнений в форме (19.17) и (19.18). Будем называть их уравнениями гиперболического типа, если в некоторой точке  $M$  (или области  $G$ )  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ , параболического типа, если в точке  $M$   $D = 0$ , и

эллиптического типа, если в точке  $M$   $D < 0$ . Вообще говоря, уравнения с переменными коэффициентами могут изменять свой тип в различных точках. Примером такого уравнения “смешанного” типа является уравнение Трикоми

$$u_{x_1^2} + x_1 u_{x_2^2} = 0,$$

представляющее интерес в газовой динамике. Очевидно, дискриминант этого уравнения  $D = -x$ , поэтому уравнение Трикоми является эллиптическим при  $x_1 > 0$  и гиперболическим при  $x_1 < 0$ .

В уравнении (19.17) произведем замену переменных

$$o_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \quad o_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \quad (19.19)$$

с якобианом преобразования

$$I(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} o_{(1)x_1} & o_{(1)x_2} \\ o_{(2)x_1} & o_{(2)x_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

допускающим обратное преобразование. Тогда в новых переменных уравнение (19.17) примет вид:

$$A_{11} u_{o_1^2} + 2A_{12} u_{o_1 o_2} + A_{22} u_{o_2^2} + \Phi(o_1, o_2, u, u_{o_1}, u_{o_2}) = 0. \quad (19.20)$$

Здесь

$$A_{11} = a_{11} o_{(1)x_1}^2 + 2a_{12} o_{(1)x_1} o_{(1)x_2} + a_{12} o_{(2)x_2}^2;$$

$$A_{12} = a_{11} o_{(1)x_1} o_{(2)x_1} + a_{12} (o_{(1)x_1} o_{(2)x_2} + o_{(1)x_2} o_{(2)x_1}) + a_{22} o_{(1)x_2} o_{(2)x_2};$$

$$A_{22} = a_{11} o_{(2)x_1}^2 + 2a_{12} o_{(2)x_1} o_{(2)x_2} + a_{22} o_{(2)x_2}^2.$$

Так как  $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})I^2(x_1, x_2)$ , то рассматриваемое преобразование независимых переменных не меняет тип уравнения. Однако функции  $\varphi_1(x_1, x_2)$  и  $\varphi_2(x_1, x_2)$  можно выбрать такими, чтобы в новых переменных часть коэффициентов обратилась в нуль, а уравнение (19.20) приняло наиболее простой вид, который называют каноническим видом (формой) уравнения.

Переход к канонической форме можно осуществить с помощью общих интегралов дифференциального уравнения

$$a_{11}(dx_2)^2 - 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}(dx_1)^2 = 0, \quad (19.21)$$

которое называют характеристическим для уравнений (19.17) и (19.18), а его интегралы – характеристическими кривыми или характеристиками.

Если  $\varphi(x_1, x_2) = c$  – общий интеграл характеристического уравнения (19.21), то вдоль характеристической кривой имеем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}} \quad \text{или} \quad dx_2 = -\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}} dx_1. \quad (19.22)$$

Подставляя уравнение (19.22) в (19.21), делаем вывод о том, что функция  $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$  является решением дифференциального уравнения первого порядка

$$a_{11}x_{(3)x_1}^2 + 2a_{12}x_{(3)x_1}x_{(3)x_2} + a_{22}x_{(3)x_2}^2 = 0. \quad (19.23)$$

Если в некоторой области  $G$  уравнение (19.17) является уравнением гиперболического типа ( $D > 0$ ), то в этой области характеристическое уравнение распадается на два уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}, \quad (19.24)$$

которые имеют два семейства характеристик  $\varphi_1(x_1, x_2) = c_1$  и  $\varphi_2(x_1, x_2) = c_2$ . Тогда с помощью преобразования независимых переменных

$$\xi_1 = \varphi_1(x_1, x_2); \quad \xi_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$$

приходим к уравнению (19.20), в котором с учетом (19.23)  $A_{11} = 0$  и  $A_{22} = 0$ , поэтому приводим уравнение (19.20) к канонической форме для уравнений гиперболического типа:

$$u_{\xi_1, \xi_2} = \Phi_1(\xi_1, \xi_2, u, u_{\xi_1}, u_{\xi_2}), \quad (19.25)$$

где  $\Phi_1 = -\Phi/2A_{12}$ .

**Замечание 19.1.** Если новые переменные имеют вид

$$\xi_1 = \frac{\varphi_1(x_1, x_2) + \varphi_2(x_1, x_2)}{2}; \quad \xi_2 = \frac{\varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, x_2)}{2},$$

то для уравнений гиперболического типа можно записать другую каноническую форму

$$u_{\xi_1^2} - u_{\xi_2^2} = \Phi_1^*(\xi_1, \xi_2, u, u_{\xi_1}, u_{\xi_2}). \quad (19.26)$$

Пусть в области  $G$  уравнение (19.17) является параболическим ( $D = 0$ ), то в этой области характеристическое уравнение (19.21) имеет вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

и имеет только одно семейство характеристик:  $\varphi_1(x_1, x_2) = c$ . Тогда, полагая  $\xi_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$  и  $\xi_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$ , где  $\varphi_2(x_1, x_2)$  – произвольная функция, линейно независимая с функцией  $\varphi_1$ , приходим к преобразованному уравнению (19.20), в котором  $A_{11} = 0$ . Но так как для уравнения параболического типа  $A_{12}^2 - A_{11} \cdot A_{22} = 0$ , то  $A_{12} = 0$ . Поэтому после перехода к новым переменным уравнение (19.20) примет каноническую форму для уравнений параболического типа:

$$u_{\xi_2^2} = \Phi_1(\xi_1, \xi_2, u, u_{\xi_1}, u_{\xi_2}), \quad \Phi_2 = -\Phi/A_{22}. \quad (19.27)$$

Если уравнение (19.17) в области  $G$  является уравнением эллиптического типа ( $D < 0$ ), то характеристическое уравнение (19.21) приводит к двум уравнениям в комплексной форме:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \pm i \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Эти уравнения имеют два комплексно-сопряженных общих интеграла  $c_1(x_1, x_2) = c_1$  и  $c_2(x_1, x_2) = c_2$ , где  $c_1(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + i\varphi_2(x_1, x_2)$ , а  $c_2(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) - i\varphi_2(x_1, x_2)$ , причем функции  $\varphi_1(x_1, x_2)$  и  $\varphi_2(x_1, x_2)$  являются действительными функциями своих аргументов.

Функции  $z_1 = c_1(x_1, x_2)$  и  $z_2 = c_2(x_1, x_2)$  являются решениями уравнения (19.23) в комплексной области. Поэтому, подставляя их в уравнение (19.23), получим тождество

$$\begin{aligned} & \left( (a_{11}\varphi_{(1)x_1}^2 + 2a_{12}\varphi_{(1)x_1}\varphi_{(1)x_2} + a_{22}\varphi_{(1)x_2}^2) - (a_{11}\varphi_{(2)x_1}^2 + 2a_{12}\varphi_{(2)x_1}\varphi_{(2)x_2} + a_{22}\varphi_{(2)x_2}^2) \right) + 2i \times \\ & \times (a_{11}\varphi_{(1)x_1} \cdot \varphi_{(2)x_1} + a_{12}(\varphi_{(1)x_1}\varphi_{(2)x_2} + \varphi_{(1)x_2}\varphi_{(2)x_1}) + a_{22}\varphi_{(1)x_2}\varphi_{(2)x_2}) = 0, \end{aligned}$$

из которого следует, что после преобразования переменных  $\xi_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$  и  $\xi_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$  в уравнении (19.20)  $A_{11} = A_{22}$ , а  $A_{12} = 0$ . Поэтому после преобразования уравнение (19.20) примет каноническую форму для эллиптического типа:

$$u_{\xi_1^2} + u_{\xi_2^2} = \Phi_3(\xi_1, \xi_2, u, u_{\xi_1}, u_{\xi_2}), \quad (19.28)$$

где  $\Phi_3 = -\Phi/A_{11}$ .

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами (19.18) имеет одинаковый тип в области  $G$ . Такому уравнению соответствует характеристическое уравнение (19.21) также с постоянными коэффициентами. С помощью указанных выше преобразований переменных уравнение гиперболического типа приводится к виду:

$$u_{\xi_1, \xi_2} + b_1 u_{\xi_1} + b_2 u_{\xi_2} + cu + f(\xi_1, \xi_2) = 0$$

или

$$u_{\xi_1^2} - u_{\xi_2^2} + b_1 u_{\xi_1} + b_2 u_{\xi_2} + cu + f(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами параболического ( $D = 0$ ) и эллиптического ( $D < 0$ ) типов имеют соответственно канонические формы:

$$u_{\xi_2^2} + b_1 u_{\xi_1} + b_2 u_{\xi_2} + cu + f(\xi_1, \xi_2) = 0;$$

$$u_{\xi_1^2} + u_{\xi_2^2} + b_1 u_{\xi_1} + b_2 u_{\xi_2} + cu + f(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

## Постановка основных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка

Как было показано линейное уравнение колебаний

$$u_{t^2} - \Delta u + pu = f(x_1, x_2, t) \quad (19.29)$$

является уравнением гиперболического типа.

Уравнение диффузии

$$u_t - \Delta u = f(x_1, x_2, t) \quad (19.30)$$

является уравнением параболического типа.

Стационарное уравнение

$$\Delta u + pu = f(x_1, x_2) \quad (19.31)$$

является уравнением эллиптического типа.

Пусть  $G \subset R^3$  – область, где происходит процесс и  $S$  – ее граница. Таким образом,  $G$  – областью задания уравнений (19.29), (19.30) считаем цилиндр  $\Omega_T = G \times (0, T)$  высоты  $T$  с основанием  $G$ . Его граница состоит из боковой поверхности  $S \times (0, T)$  и двух оснований: нижнего  $\bar{G} \times \{0\}$  и верхнего  $\bar{G} \times \{T\}$ .

Будем также предполагать, что коэффициент  $p$  не зависит от  $t$  и в соответствии с их физическим смыслом  $p(x) > 0$ ,  $x \in \bar{G}$  (рис. 19.2).

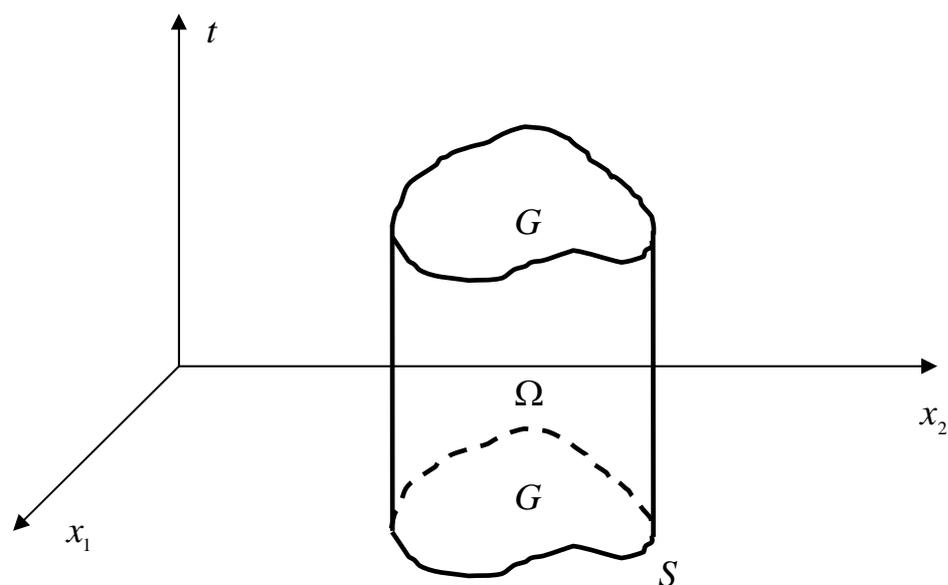


Рис. 19.2

Для корректной постановки задачи необходимо кроме самого уравнения задать начальное состояние описываемого процесса (начальные условия) и режим на границе области, в которой происходит процесс (граничные условия). Проиллюстрируем все типы задач для уравнений в частных производных на примере уравнений (19.29) – (19.31).

### Задача Коши

Для уравнения (19.29) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C^{(1)}(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению в полупространстве  $t > 0$  и начальным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (19.32)$$

При этом необходимо:

$$f(x, t) \in C(t > 0), \quad u_0 \in C^{(1)}(R^2), \quad u_1 \in C(R^2).$$

Для уравнения (19.30) задача Коши ставится так: найти функцию  $u(x, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C'(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению в полупространстве  $t > 0$  и начальному условию при  $t = 0$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (19.33)$$

При этом необходимо

$$f(x, t) \in C(t > 0), \quad u_0 \in C(R^2).$$

### Смешанная задача

Краевая задача для уравнения (19.31) состоит в нахождении функции  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ , удовлетворяющей в области  $G$  уравнению и граничному условию на  $S$  вида

$$(\alpha u + \beta u_n)|_S = v, \quad (19.34)$$

где  $\alpha, \beta, v$  – заданные непрерывные на  $S$  функции, причем  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ .

Выделяют следующие типы граничных условий (19.34):

граничное условие 1-го рода ( $\alpha = 1; \beta = 0$ )

$$u|_S = u_0;$$

граничное условие 2-го рода ( $\alpha = 0; \beta = 1$ )

$$u_n|_S = u_1;$$

граничное условие 3-го рода ( $\alpha \geq 0; \beta = 1$ )

$$(u_n + \alpha u)|_S = u_2.$$

Соответствующие краевые задачи называются краевыми задачами 1-го, 2-го и 3-го рода.

Для уравнения Пуассона 1-я и 2-я краевые задачи будут

$$\begin{array}{ll} \Delta u = f; & \Delta u = f; \\ u|_S = u_0; & u_n|_S = u_1 \end{array}$$

и называются задачами Дирихле и Неймана соответственно. Смешанная задача для уравнения колебаний ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t) \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению (19.29) в цилиндре  $\Omega$ , начальным условиям (19.32) при  $t = 0, x \in \bar{G}$  и граничному условию (19.34) при  $x \in S, t \geq 0$ .

Аналогично для уравнения диффузии (19.30) смешанная задача ставится: найти функцию  $u(x, t) \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению в  $\Omega$ , первому из начальных условий (19.32) и граничному условию (19.34).

### Задачи

В задачах №№ 1 – 9 привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется:

1.  $u_{xx} + xu_{yy} = 0.$

2.  $u_{xx} + yu_{yy} = 0.$

$$3. u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0.$$

$$4. yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$$

$$5. xu_{xx} + yu_{yy} = 0.$$

$$6. u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

$$7. y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0.$$

$$8. x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$$

$$9. x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0.$$

## 19.2. Метод разделения переменных в краевых задачах для гиперболических уравнений

Рассмотрим решение краевых задач для введенных уравнений математической физики в случае конечных и полубесконечных областей.

Классическим методом решения УЧП является метод разделения переменных или метод Фурье. Изложим его на примере краевой задачи для гиперболического уравнения свободных колебаний струны, закрепленной на концах.

Найти нетривиальную функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую

$$u_{t^2} = a^2u_{x^2}, \quad D = \{(x, t) | 0 < x < l, t > 0\}; \quad (19.35)$$

$$u(0, t) = 0; \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (19.36)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (19.37)$$

Уравнение (19.35) линейно и однородно, поэтому заметим, что сумма его частных решений будет решением этого уравнения. Идея метода разделения переменных состоит в том, что имея достаточно большое число линейно независимых частных решений уравнения (19.35), удовлетворяющих граничным условиям (19.36), можно суммированием добиться построения искомого решения.

Вначале решим вспомогательную задачу:

Найдем решение уравнения (19.35), удовлетворяющее однородным граничным условиям (19.36) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (19.38)$$

Подставляя (19.38) в (19.35) получим:

$$X \cdot T'' = a^2 X'' T.$$

И после деления на  $TX$  :

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \quad (19.39)$$

Очевидно – правая часть равенства (19.39) является функцией  $x$ , а левая –  $t$ , следовательно, они обе сохраняют постоянное значение при изменении своих аргументов. Для удобства обозначим это значение через “ $-\lambda a^2$ ”, т. е.

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -a^2 \lambda. \quad (19.40)$$

Из последних равенств получим ОДУ для определения функций  $X(x)$  и  $T(t)$ :

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad (19.41)$$

$$T''(t) + a^2 T(t) = 0. \quad (19.42)$$

Граничные условия (19.36) дают:

$$u(0, t) = X(0)T(t) \equiv 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) \equiv 0.$$

Откуда заключаем, что функция  $X(x)$  должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (19.43)$$

Итак, мы приходим к задаче о собственных значениях дифференциального оператора, так называемой задаче Штурма-Лиувилля: найти те значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют ненулевые решения граничной задачи (19.41), (19.43).

Рассмотрим различные случаи, когда  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  или  $\lambda > 0$ .

1) При  $\lambda < 0$  общее решение ОДУ (19.41)

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Граничные условия (19.43) дают

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \\ c_1 e^{\delta} + c_2 e^{-\delta} = 0, \quad \text{где } \delta = l\sqrt{-\lambda}. \end{cases}$$

$\det A = e^{-\alpha} - e^{\alpha} \neq 0$ , так как  $\alpha > 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$ , т. е. вспомогательная задача не имеет нетривиальных решений.

2) При  $\lambda = 0$  общее решение ОДУ (19.41)

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Граничные условия (19.43) дают

$$\begin{cases} c_2 = 0; \\ c_1 l = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

3) При  $\lambda > 0$  общее решение ОДУ (19.41) может быть записано в виде

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия (19.43) дают

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ c_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases}$$

Так как  $X(x) \neq 0$ , то  $c_2 \neq 0$  и поэтому  $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$  или  $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ .

Таким образом, нетривиальные решения задачи (19.41), (19.43) возможны при собственных значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2,$$

соответствующие собственные функции

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x.$$

Для этих значений  $\lambda_n$  построим общее решение ОДУ (19.42)

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at,$$

где  $A_n, B_n$  – произвольные постоянные.

Возвратимся к исходной краевой задаче (19.35) – (19.37), сформируем функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \sin \sqrt{\lambda_n} x,$$

которые являются частными решениями уравнения (19.35), удовлетворяющими граничным условиям (19.36).

Обратимся к начальным условиям (19.37). Для их удовлетворения в силу однородности и линейности уравнения (19.35) построим ряд (не рассматривая пока вопросы его сходимости)

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (19.44)$$

также формально удовлетворяющий этому уравнению и граничным условиям.

Далее потребуем, чтобы ряд удовлетворял начальным условиям (19.37):

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} A_n \sin \sqrt{\lambda_n} x; \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} a B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x. \end{aligned} \quad (19.45)$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция (в более общем смысле функция с ограниченной вариацией) разлагается в ряд Фурье по ортогональной на интервале  $(0, l)$  системе функций  $\sin \sqrt{\lambda_n} x$ . Поэтому коэффициенты  $A_n$  и  $\lambda_n a B_n$  этих разложений являются коэффициентами Фурье для функций  $\varphi(x), \psi(x)$ . Тогда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\sqrt{\lambda_n} l a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi. \quad (19.46)$$

Для обеспечения сходимости ряда решений (19.44) и рядов, получаемых двукратным почленным дифференцированием этого ряда по  $t$  и  $x$ , установим ограничения на функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ .

*Теорема 19.1.* Если  $\varphi(x) \in C^{(2)}[0, l]$ ,  $\psi(x) \in C^{(1)}[0, l]$ , кроме того  $\varphi(x)$  имеет третью, а  $\psi(x)$  – вторую кусочно-непрерывную производную на  $[0, l]$  и выполняются условия согласования  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ ,  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ . Тогда сумма ряда (19.44) с коэффициентами (19.46) является классическим решением задачи (19.35) – (19.37).

*Замечание 19.2.* Вообще говоря, условия теоремы 19.1 могут быть ослаблены. В этом случае ряд (19.44) является так называемым обобщенным решением краевой задачи. Тогда сходимость ряда решений и его производных следует понимать в смысле сходимости в среднем или слабой сходимости.

*Замечание 19.3.* Решения задач о свободных колебаниях ограниченной струны или стержня с однородными граничными условиями второго или третьего рода могут быть построены в виде функциональных рядов аналогичной структуры, отличающихся лишь решениями соответствующих вспомогательных задач Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим вынужденные колебания конечной струны. Изложенный метод разделения переменных можно применить в этом случае к неоднородному гиперболическому уравнению

$$u_{t^2} = a^2 u_{x^2} + f(x, t), \quad D = \{(x, t) | 0 < x < l, t > 0\}, \quad (19.47)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (19.48)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (19.49)$$

Будем искать решение задачи  $u(x, t)$ , рассматривая  $t \geq 0$  как неотрицательный параметр, в виде ряда Фурье по ортогональной системе функций  $\{\sin \sqrt{\lambda_n} x\}_{n \geq 1}^\infty$ , найденных в задаче о свободных колебаниях конечной струны и удовлетворяющих граничным условиям (19.49)

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^\infty U_n(t) \cdot \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (19.50)$$

где коэффициенты разложения  $U_n(t)$  следует определять таким образом, чтобы ряд (19.50) удовлетворял уравнению (19.47) и начальным условиям (19.48). Для этого представим функции  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  в виде следующих рядов Фурье:

$$f(x, t) = \sum_{n \geq 1}^\infty f_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad \text{где } f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi;$$

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1}^\infty \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad \text{где } \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi; \quad (19.51)$$

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \psi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad \text{где } \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi.$$

Подставляя ряды (19.50), (19.51) в уравнение (19.47) и начальные условия (19.48), получим:

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} (U_n''(t) + (\lambda_n a)^2 U_n(t)) \sin \sqrt{\lambda_n} x = \sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} x;$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} U_n(0) \sin \sqrt{\lambda_n} x = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x; \quad (19.52)$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} U_n'(0) \sin \sqrt{\lambda_n} x = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \psi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x.$$

Далее, учитывая полноту ортогональной системы собственных функций, приравниваем в разложениях (19.52) коэффициенты при одинаковых собственных функциях. Тогда получим следующую задачу Коши для ОДУ второго порядка:

$$U_n''(t) + (\sqrt{\lambda_n} a)^2 U_n(t) = f_n(t); \quad (19.53)$$

$$U_n(0) = \varphi_n, \quad U_n'(0) = \psi_n. \quad (19.54)$$

Общее решение уравнения (19.53) находится методом вариации произвольных постоянных. Удовлетворяя начальным условиям (19.54), представим решение задачи (19.53), (19.54) в виде

$$U_n(t) = \varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} a} \psi_n \sin \sqrt{\lambda_n} at + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} a(t - \tau) d\tau. \quad (19.55)$$

Окончательно, подставляя  $U_n(t)$  из (19.55) в ряд (19.50), получим решение исходной краевой задачи (19.47) – (19.49) в форме:

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left( \varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} a} \psi_n \sin \sqrt{\lambda_n} at \right) \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} a} \left( \int_0^t f_n(\phi) \sin \sqrt{\lambda_n} a(t - \phi) d\phi \right) \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (19.56)$$

Наконец, рассмотрим первую краевую задачу для волнового уравнения в общей постановке, описывающей вынужденные колебания струны с заданными законами колебаний концов:

$$u_{,t^2} = a^2 u_{,x^2} + f(x, t), \quad D = \{(x, t) | 0 < x < l, t > 0\}; \quad (19.57)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (19.58)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t), \quad (t \geq 0). \quad (19.59)$$

Для решения этой задачи введем вспомогательную функцию  $\omega(x, t)$  таким образом, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (19.59), т. е.

$$\omega(0, t) = \mu(t), \quad \omega(l, t) = \nu(t).$$

В качестве одной из таких функций можно выбрать, например,

$$\omega(x, t) = \mu(t) + \frac{x}{l} (\nu(t) - \mu(t)), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Тогда с помощью подстановки  $u(x, t) = \omega(x, t) + v(x, t)$  для новой неизвестной функции  $v(x, t)$  получим следующую краевую задачу:

$$v_{t^2} = a^2 v_{x^2} + f_1(x, t), \quad D = \{(x, t) | 0 < x < l, t > 0\}; \quad (19.60)$$

$$v(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (19.61)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (19.62)$$

Здесь новые функции  $f_1(x, t)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\psi_1(x)$  определяются соотношениями:

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \omega_{t^2} = f(x, t) - \left( \mu''(t) + \frac{x}{l} (v''(t) - \mu''(t)) \right);$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \omega(x, 0) = \varphi(x) - \left( \mu(0) + \frac{x}{l} (v(0) - \mu(0)) \right);$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \omega_t(x, 0) = \psi(x) - \left( \mu'(0) + \frac{x}{l} (v'(0) - \mu'(0)) \right).$$

Итак, первая краевая задача для неоднородного волнового уравнения в общей постановке сводится к уже рассмотренной выше задаче (19.47) – (19.49) о вынужденных колебаниях ограниченной струны с заземленными концами.

## Задачи

Найти отклонение  $u(x, t)$  от положения равновесия закрепленной на концах  $x=0, x=l$  однородной горизонтальной струны, если в начальный момент она имела форму  $u(x, 0) = f(x)$  и если в начальный момент ее точкам была придана скорость  $u'_t(x, t) = \varphi(x)$ .

$$1. f(x) = \frac{k}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \varphi(x) = 0.$$

$$2. f(x) = 0, \quad \varphi(x) = \frac{k}{3} \sin \frac{5\pi x}{l}.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{4hx}{l}, & x \in \left[0, \frac{l}{4}\right], \\ \frac{4h(l-x)}{3l}, & x \in \left[\frac{l}{4}, l\right], \end{cases} \quad \varphi(x) = 0.$$

$$4. f(x) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \varphi(x) = 0.$$

$$5. f(x) = 0, \quad \varphi(x) = x \cdot \sin \pi x.$$

$$6. f(x) = 0, \quad \varphi(x) = \sin \frac{\pi}{2} x, \quad l = 2.$$

$$7. f(x) = x^2, \quad \varphi(x) = 0.$$

$$8. f(x) = \sin \frac{\pi}{3} x, \quad \varphi(x) = 0, \quad l = 3.$$

$$9. \quad f(x) = \frac{x}{e^x}, \quad \varphi(x) = 0, \quad u(l, t) = e^{-t}.$$

$$10. \quad f(x) = x, \quad \varphi(x) = \sin x.$$

### 19.3. Интегральные преобразования в решении краевых задач для параболических уравнений

Рассмотрим применение операционного метода при решении краевых задач для уравнения теплопроводности. Найдем распределение температуры в полубесконечном стержне  $x > 0$ , предполагая, что начальная температура стержня равна нулю, а на его левом конце поддерживается заданный температурный режим. Тогда задача состоит в нахождении нетривиальной функции  $u(x, t)$ , ограниченной при  $x \geq 0$ , удовлетворяющей

$$u_t = a^2 u_{x^2}, \quad D = \{(x, t) | x > 0, t > 0\}; \quad (19.63)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad (19.64)$$

$$u(0, t) = g(t). \quad (19.65)$$

Идея операционного метода состоит в применении к уравнению (19.63) и граничным условиям (19.65) по одной из переменных интегрального преобразования и получения граничной задачи для ОДУ в пространстве образов. Решая эту вспомогательную задачу и выполняя обратное преобразование, получаем решение исходной краевой задачи для УЧП.

Основной областью применения преобразования Лапласа являются нестационарные задачи, содержащие в качестве одной из переменных время.

Обозначим через

$$\bar{u}(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt \quad (19.66)$$

преобразование Лапласа от искомой функции  $u(x, t)$ . Переходя в уравнении (19.63) к изображениям, с учетом (19.64)

$$\bar{u}_t = \int_0^{\infty} u_t e^{-pt} dt = u e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} p e^{-pt} u dt = \lim_{t \rightarrow \infty} (u e^{-pt}) - u(x, 0) + p \bar{u} = p \bar{u},$$

$$\bar{u}_{x^2} = \int_0^{\infty} u_{x^2} e^{-pt} dt = \left( \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt \right)_{x^2}.$$

Здесь в первом соотношении принято, что  $u(x, t)$  – ограничена, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u e^{-pt}) = 0,$$

если на комплексный параметр  $p$  преобразования (19.66) наложить условие  $\operatorname{Re} p > 0$ . При этом функция  $\bar{u}$  будет аналитической по  $p$  в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ .

Уравнение (19.63) в изображениях запишется  $a^2 \bar{u}_{x^2} - p \bar{u} = 0$ , общее решение которого

$$\bar{u} = c_1 e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}} + c_2 e^{\frac{\sqrt{px}}{a}}. \quad (19.67)$$

Выберем в (19.67) ту ветвь корня, для которой  $\operatorname{Re} \sqrt{p} > 0$  на линии  $\operatorname{Im} p = 0$ ,  $\operatorname{Re} p > 0$ . Функция  $\bar{u}$  будет ограничена в правой полуплоскости при условии  $c_2 = 0$ .

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям граничного условия (19.65), находим

$$\int_0^{\infty} u(0, t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt$$

или, обозначая правую часть последнего равенства  $\bar{g}(p)$

$$\bar{u}(0, p) = \bar{g}(p). \quad (19.68)$$

Удовлетворяя (19.68) из (19.67), имеем

$$c_1 = \bar{g}(p), \quad \bar{u}(x, p) = \bar{g}(p) e^{\frac{\sqrt{p}}{a} x}. \quad (19.69)$$

Искомое решение можно найти по его изображению  $\bar{u}(x, p)$  (19.69) с помощью формулы обращения изображения. В то же время, удобнее использовать теоремы о дифференцировании изображения и свертки. Для этого представим  $\bar{u}(x, p)$  в виде

$$\bar{u}(x, p) = p \bar{g}(p) \frac{1}{p} e^{\frac{x}{a} \sqrt{p}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p} e^{\frac{x}{a} \sqrt{p}} \div 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_{\frac{x}{a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-o^2} do = G(x, t).$$

Имеем

$$u(x, t) = \int_0^t f(\tau) G_t(x, t - \tau) d\tau,$$

$$\text{где } G_t(x, t - \tau) = \frac{x}{2a\sqrt{p}} (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Итак,

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{p}} \int_0^t \frac{f(\phi)}{(t-\phi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\phi)}} d\phi.$$

**Замечание 19.4.** Интеграл решения является сингулярным в точке  $\tau = t$ .

**Замечание 19.5.** В случае конечной области изменения пространственных переменных, на соответствующем шаге операционного метода, возникает краевая задача для ОДУ в изображениях.

### Задачи

1. Дан полубесконечный стержень, начальное распределение температуры в котором равно нулю. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

На его левом конце поддерживается заданный температурный режим:  
 $u(0, t) = f(t)$ ,  $D = \{(x, t) | x > 0, t > 0\}$ .

Найти решение задачи при условиях:

a)  $a = 1$ ,  $f(t) = e^{-t}$ ;

b)  $a = 3$ ,  $f(t) = t \cdot e^{-t}$ ;

c)  $a = 2$ ,  $f(t) = e^t$ ;

d)  $a = 2$ ,  $f(t) = 1 + e^{-t}$ ;

е)  $a = 1, f(t) = t \cdot e^{at}$ .

2. Дан неограниченный стержень, боковые поверхность которого теплоизолирована. Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Начальное распределение температуры стержня  $u(x,0) = f(x), x > 0, t > 0$ .

Найти решение задачи при условиях:

а)  $a = 1, f(x) = be^{-ax}$ ;

б)  $a = 2, f(x) = e^{-x^2}$ ;

с)  $a = 3, f(x) = 1 - e^{-x}$ .

3. Дан неограниченный стержень  $-\infty < x < +\infty$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Начальное распределение температуры стержня  $u(x,0) = f(x), x \in R, t > 0$ .

Найти решение задачи при условиях:

а)  $f(x) = e^{-|x|}$ ;

$$b) f(x) = e^{-x^2}.$$

#### 19.4. Методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) в решениях краевых задач для эллиптических уравнений

Рассмотрим стационарные краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости.

$$\Delta u = 0 \quad (x, y) \in D \subset R^2, \quad \bar{D} = D \cup \Gamma; \quad (19.70)$$

$$u \Big|_{\Gamma} = \varphi(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}), \quad (x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) \in \Gamma; \quad (19.71)$$

$$\Delta v = 0; \quad (19.72)$$

$$v_n \Big|_{\Gamma} = \psi(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}), \quad (x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) \in \Gamma, \quad (19.73)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – двумерный оператор Лапласа,  $v_n$  – нормальная производная.

Задача Дирихле (19.70), (19.71) и Неймана (19.72), (19.73).

Методы ТФКП для решения указанных задач базируются на интегральных представлениях аналитической в канонических областях функции через граничные значения ее действительной части. Обобщения решений на случаи различных областей с гладкой границей производится с помощью конформного отображения канонической области на область с гладкой границей.

Введем необходимые для дальнейшего понятия и структуры ТФКП. Пусть  $z = x + iy$  – комплексная переменная,  $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  – некоторая функция комплексной переменной  $z$ . Таким образом, зависимость  $\omega = f(z)$

отображает плоскость  $z$  (или ее область) на плоскость  $\omega$  (или ее область). Далее будем рассматривать только аналитические функции в некоторой области  $D$  комплексной плоскости  $z$ , то есть однозначные и дифференцируемые в  $D$  функции. Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции  $\omega = f(z)$  являются условия Коши-Римана (С-Р)

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y \quad (19.73)$$

Известно, что действительная и мнимая части любой аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа на плоскости.

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Такие гармонические функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  при выполнении для них условий С-Р называют сопряженными гармоническими функциями.

Введем понятие конформного отображения. Пусть аналитическая функция  $\omega = f(z)$  отображает область  $D_z$  плоскости  $z$  на область  $D_\omega$  плоскости  $\omega$ , причем  $f'(z) \neq 0$  всюду в  $D_z$ . Такое отображение сохраняет отношение подобия в малом и называется конформным.

В ТФКП известна формула Шварца, дающая интегральное представление аналитической в круге  $|\zeta| < 1$  и непрерывной в замыкании  $|\zeta| \leq 1$  функции  $f(\zeta)$  через граничные значения на окружности  $\gamma: |t|=1$  ее действительной части  $\operatorname{Re} f(\zeta) = u(t)$ :

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} u(\tau) \frac{\tau + \zeta}{\tau - \zeta} \frac{d\tau}{\tau}. \quad (19.74)$$

Интегралы справа в (19.74) называются интегралами типа Коши, и направление обхода  $\gamma$  – положительное.

Пусть теперь функция  $z = \Omega(\zeta)$  задает конформное отображение единичного круга  $|\zeta| < 1$  на область  $D_z$  с границей  $\Gamma_z$ . Тогда решение задачи (19.70), (19.71) будет

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \varphi(\Omega(q)) \frac{\Omega(q) + \Omega(z)}{\Omega(q) - \Omega(z)} \cdot \frac{\Omega'(q) dq}{\Omega(q)} \right), \quad (19.75)$$

где  $q$  – комплексная координата на  $\Gamma_z$ , соответствующая  $t = \Omega(q)$ .

Например, для  $D_z : |z| < 1$  и  $z = \zeta$  формула (19.75) переписывается с учетом  $t = e^{i\bar{\sigma}}$ ,  $z = re^{i\beta}$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\bar{\sigma}) \frac{e^{i\bar{\sigma}} + re^{i\beta}}{e^{i\bar{\sigma}} - re^{i\beta}} d\bar{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\bar{\sigma}) \frac{(1-r^2)d\bar{\sigma}}{1+r^2-2r\cos(\bar{\sigma}-\beta)} +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\bar{\sigma}) \frac{2\sin(\beta-\bar{\sigma})d\bar{\sigma}}{1+r^2-2r\cos(\bar{\sigma}-\beta)},$$

и решение задачи Дирихле для круга представимо в виде интеграла Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\alpha)(1-r^2)d\alpha}{1+r^2-2r\cos(\alpha-\beta)}. \quad (19.76)$$

Вычисление интеграла (19.75) реализуется и средствами ТФКП с помощью вычетов, когда ядро интеграла (19.74) представляется в виде сходящегося ряда

$$\frac{1}{\tau - \zeta} = \frac{1}{\tau \left(1 - \frac{\zeta}{\tau}\right)} = \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{\zeta}{\tau} + \frac{\zeta^2}{\tau^2} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{\tau^{n+1}},$$

т.к.  $\tau \in \gamma_\zeta$ ,  $\zeta \in D_\zeta$ , то  $|\tau|=1$ ,  $|\zeta|<1$ ,  $\left|\frac{\zeta}{\tau}\right|<1$ .

Затем, почленно интегрируя этот ряд, можно получить решение в форме степенного ряда с неизвестными коэффициентами

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (19.77)$$

которые находятся, удовлетворяя граничному условию (19.71).

**Замечание 19.6.** Сходимость интегралов типа Коши в представлении решения обеспечивается условием, что плотность интегралов на конечном множестве точек контура интегрирования имеет бесконечность порядка меньше 1.

**Замечание 19.7.** Задача Неймана (19.72), (19.73) сводится к определению аналитической функции  $f(z)$  по ее мнимой части  $v(t)$  на контуре.

### Задачи

1. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что  $\tilde{u}(r, \varphi) \Big|_{r=1} = f(\varphi)$ , если:

a)  $f(\varphi) = \cos^2 \varphi$ ;

b)  $f(\varphi) = \sin^3 \varphi$ ;

c)  $f(\varphi) = \cos^4 \varphi$ ;

d)  $f(\varphi) = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi$ .

2. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что выполняются краевые условия:

$$\text{a) } \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = A \cos \varphi;$$

$$\text{b) } \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = A \cos 2\varphi.$$

3. Найти решение задачи Лапласа внутри круга радиуса  $R$ , если на его границе выполняется условие  $\tilde{u}(r, \varphi) \Big|_{r=R} = \begin{cases} T_0, & \text{если } 0 \leq \varphi < \pi; \\ -T_0, & \text{если } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$

4. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что выполняются краевые условия:

$$\text{a) } \left. \tilde{u}(r, \varphi) \right|_{r=1} = u_1, \quad \left. \tilde{u}(r, \varphi) \right|_{r=2} = u_2, \quad u_1, u_2 - \text{число};$$

$$\text{b) } \left. \tilde{u}(r, \varphi) \right|_{r=1} = 1 + \cos^2 \varphi, \quad \left. \tilde{u}(r, \varphi) \right|_{r=2} = \sin^2 \varphi.$$

5. Найти решение уравнения Лапласа  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  в прямоугольнике:

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad \text{если граничные условия: } u(x, y) \Big|_{x=0} = A \cdot \sin \frac{\pi y}{b}; \quad u(x, y) \Big|_{x=a} = 0;$$

$$u(x, y) \Big|_{y=0} = B \cdot \sin \frac{\pi x}{a}; \quad u(x, y) \Big|_{y=b} = 0.$$

## 20. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### 20.1. Элементы комбинаторики

#### Понятие комбинаторики

В теории вероятностей одной из важнейших является задача о подсчете числа способов, с помощью которых может осуществиться некоторое событие, или числа способов, которыми можно упорядочить данную совокупность объектов. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то их называют *комбинаторными*. Раздел математики, в котором изучаются эти задачи, называется *комбинаторикой*.

Для комбинаторных задач справедлив *основной принцип перечисления*: если множество  $E_1$  содержит  $n_1$  элементов, множество  $E_2$  –  $n_2$  элементов, ... множество  $E_m$  –  $n_m$  элементов, то число способов выбора по одному элементу из каждого множества равно:

$$n_1 \cdot n_2 \dots n_m.$$

#### Перестановки

Перестановкой  $P_n$  из  $n$  элементов называется расположение этих элементов в определенном порядке. Так, например, из букв  $a, b, c$  можно составить следующие перестановки:  $(a, b, c)$ ,  $(b, a, c)$ ,  $(a, c, b)$ ,  $(c, a, b)$ ,  $(c, b, a)$ ,  $(b, c, a)$ .

Для  $n$  чисел  $1, 2, \dots, n$  существует  $n!$  различных перестановок. Действительно, в перестановке из  $n$  чисел для первого числа имеется  $n$  возможностей его расположения. Зафиксировав его положение, для второго числа имеем уже  $(n - 1)$  возможностей для его расположения и т. д. Таким образом, всего имеется  $n(n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$  возможностей для расположения  $n$  чисел. Поэтому число перестановок из  $n$  элементов равно  $n!$ :

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n. \quad (20.1)$$

### Размещения

Из множества  $n$  элементов можно составить различные упорядоченные множества по  $m$  элементов. Например, из букв  $a, b, c, d$  можно составить 12 упорядоченных множеств по две буквы:

$$(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c). \quad (20.2)$$

Любой выбор  $m$  элементов, взятых в определенном порядке из  $n$  элементов, называется *размещением* из  $n$  элементов по  $m$  и обозначается  $A_n^m$ .

Справедлива формула:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (20.3)$$

Действительно, существует  $n$  способов выбора первого элемента,  $(n-1)$  способов выбора второго элемента, ...  $(n-(m-1))$  способов выбора  $m$ -го элемента. Тогда по основному принципу перечисления число размещений из  $n$  элементов по  $m$  равно произведению  $n(n-1)\dots(n-m+1)$ . Умножив и разделив это произведение на  $(n-m)!$  получим формулу (20.3).

### Сочетания

Любой выбор из  $n$  элементов по  $m$  без учета порядка выбора называется *сочетанием* из  $n$  элементов по  $m$  и обозначается  $C_n^m$ . Отметим, что при подсчете числа сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  порядок расположения выбранных  $m$

элементов несуществен. Так, например, в наборе пар букв (20.2) выборки типа  $(a,c)$  и  $(c,a)$ ,  $(a,b)$  и  $(b,a)$  в сочетаниях неразличимы. Докажем, что

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (20.4)$$

В самом деле, существует  $A_n^m$  возможностей выбора  $m$  элементов из  $n$ . Так как порядок расположения выбранных  $m$  элементов в сочетаниях несуществен, то существует  $m!$  перестановок, которые нельзя отличить от первоначально выбранной перестановки. Поэтому число таких сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  равно числу размещений из  $n$  по  $m$ , деленному на  $m!$  перестановок, т. е. имеет место формула (20.4)

## 20.2 Вероятность события

### Пространство элементарных событий

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. В ее основе лежат определения ряда основных понятий, таких, например, как *событие*, *вероятность*, *случайная величина*, а также исходная система аксиом.

Под *опытом*, или *экспериментом*, или *испытанием* будем понимать осуществление конкретного комплекса условий. Опыт называется *случайным*, если его результат нельзя точно предсказать до его осуществления. Например, пусть опыт заключается в подбрасывании монеты. Результат его – выпадение герба ( $G$ ) или решетки ( $P$ ) – нельзя предсказать заранее. Точно также при стрельбе по мишени нельзя заранее предсказать, будет ли точное попадание в цель или промах.

Всякий результат опыта или наблюдения называется *событием*. В рассмотренных выше примерах случайных опытов событиями являются: выпадение герба или решетки, попадание в цель или промах. Событие называется *случайным*, если в результате опыта оно может произойти, а может и не произойти. Все выше перечисленные события – случайные. Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта. Например, выбор одной годной детали из партии  $n$  годных деталей есть событие достоверное. *Невозможным* называется событие, которое в условиях данного опыта не может произойти. Например, невозможно поразить одну и ту же мишень три раза при двух выстрелах.

Различают элементарные и составные события. События, которые невозможно разложить на более простые, называются *элементарными*. Все остальные события называются *составными*. Например, пусть событие состоит в том, что сумма очков выпавших при бросании двух игральных костей, равна шести. Это событие состоит из пяти возможных элементарных событий – выпадение на гранях костей следующих пар цифр: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) соответственно.

Каждое составное событие представляется суммой элементарных событий. Множество всех элементарных событий в условиях данного опыта называется *пространством элементарных событий* и обозначается  $\Omega$ , а сами элементарные события (исходы опыта) – точками  $\omega$  этого пространства. Событием является любое подмножество  $A$  пространства  $\Omega$  элементарных событий. Будем говорить, что событие  $A$  произошло, если исход опыта  $\omega$  принадлежит  $A$ .

**Пример 20.1.** При подбрасывании двух игральных костей пространством  $\Omega$  является множество 36 пар цифр (1,1), (1,2), ... (2,1), (2,2), ..., (6,5), (6,6). Точкой  $\omega$  (элементарным событием этого пространства) является любая такая пара цифр. Подмножество  $A = [(1,5), (5,1), (2,4), (3,3), (4,2)]$  этого пространства – событие, заключающееся в выпадении шести очков в сумме на двух гранях.

Таким образом, событие  $A$  произошло, если при подбрасывании двух костей сумма выпавших цифр равна шести.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в условиях одного и того же опыта. Например, пусть из урны, в которой находятся белые, голубые и красные шары, извлекается один шар. Тогда извлечение красного шара исключает появление голубого или белого.

Событие  $\bar{A}$ , которое обязательно произойдет, если не произойдет событие  $A$ , называется *противоположным* событию  $A$ . Например, выигрыш и проигрыш в лотерее – противоположные события.

Говорят, что несколько событий в условиях данного опыта образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них. Например, события “извлечение белого шара”, “извлечение красного шара”, “извлечение голубого шара” образуют полную группу событий в опыте извлечения шара из урны, в которой находятся белые, красные и голубые шары.

### Алгебра событий

Пусть  $\Omega$  – пространство элементарных событий. Тогда всякое множество  $A$  точек из  $\Omega$  есть событие. Невозможное событие в пространстве  $\Omega$  не имеет точек в  $\Omega$  и обозначается  $\emptyset$ . Так как достоверное событие является совокупностью всех элементарных событий из  $\Omega$ , то оно совпадает с пространством  $\Omega$  и также обозначается  $\Omega$ . Противоположное событию  $A$  событие  $\bar{A}$  состоит из точек  $\omega \in \Omega$ , не принадлежащих  $A$ , т.е.  $\bar{A}$  является дополнением к  $A$  в  $\Omega$ . Иными словами,  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ .

Говорят, что событие  $A$  влечет событие  $B$ , и пишут  $A \subset B$ , если  $A$  – часть подмножества  $B$ . События  $A$  и  $B$  называются *эквивалентными*, если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

*Суммой* или *объединением* событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A \cup B$ , состоящее из всех исходов, составляющих  $A$  и  $B$ . Другими словами, сумма двух событий есть событие, состоящее в том, что произошло событие  $A$  или  $B$ . Если события  $A$  и  $B$  несовместны, их сумма обозначается  $A + B$ .

**Пример 20.2.** Пусть  $A$  и  $B$  обозначают выпадение при бросании игральной кости соответственно нечетного числа очков и числа очков, кратного трем. Тогда  $A = (1, 3, 5)$ ,  $B = (3, 6)$  и, значит,  $A \cup B = (1, 3, 5, 6)$ .

*Пересечением* или *произведением* двух событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A \cap B$ , состоящее из всех исходов, принадлежащих одновременно и  $A$  и  $B$ . В рассмотренном выше примере таким событием является  $A \cap B = (3)$ , т. е. выпадение “тройки”. Часто пересечение событий  $A$  и  $B$  обозначается  $AB$ .

Если  $A$  и  $B$  – несовместные события (не имеют общих исходов), то  $A \cap B = \emptyset$  – невозможное событие.

Событие, состоящее в том, что событие  $A$  происходит, а событие  $B$  не происходит, называется *разностью* событий  $A$  и  $B$  и обозначается  $A \setminus B$ . Другими словами,  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .

Введенные операции над событиями подчинены правилам операций над множествами.

## Вероятность события

Для качественного сравнения событий по степени возможности их появления вводится определенная мера, которая называется *вероятностью события*. Цель теории вероятностей – вычисление вероятностей событий, их комбинаций и изучение свойств вероятностей. *Математическая модель опыта* включает: 1) описание возможных исходов; 2) описание событий; 3) определение вероятностей наступления этих событий.

При построении вероятностной модели опыта нужно точно определить пространство элементарных событий (исходов опыта) и класс всех событий,

которые могут произойти в процессе опыта. Если пространство элементарных событий состоит из конечного или счетного числа элементарных событий, оно называется *дискретным*.

Рассмотрим дискретное пространство  $\Omega = (\omega_i)$  событий. Каждому элементарному событию  $\omega_i$  поставим в соответствие неотрицательное число  $p(\omega_i)$ , такое, что

$$\sum_i p(\omega_i) = 1, \quad (20.5)$$

где суммирование по  $i$  распространяется на все элементарные события из  $\Omega$ . Число  $p(\omega_i)$  называется *вероятностью элементарного события*  $\omega_i$ .

Если  $A \subset \Omega$  – произвольное событие, то *вероятностью события*  $A$  называется число

$$P(A) = \sum_i p(\omega_i), \quad (20.6)$$

где суммирование по  $i$  распространяется на все исходы, составляющие событие  $A$ .

Пусть  $\Omega$  – пространство с конечным числом  $n$  исходов. Каждому элементарному событию  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  поставим в соответствие одинаковую вероятность  $p(\omega_i) = \frac{1}{n}$ . В результате получим *пространство с равновероятными исходами*. В этом пространстве вероятностью события  $A$ , согласно равенству (20.6), называется число

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (20.7)$$

где  $m$  – число исходов, благоприятствующих появлению события  $A$  в опыте;  $n$  – общее число исходов.

Определение вероятности (20.7) называется *классическим*. Часто число  $\frac{m}{n}$  называют *относительной частотой* появления события  $A$  в опыте. При *статистическом* определении вероятности предполагается, что частоты  $\frac{m}{n}$  при неограниченном увеличении числа исходов  $n$  устойчиво колеблются возле некоторого числа  $p$ , называемого вероятностью события  $A$ , т. е. существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{n} \right)$ , равный этой вероятности  $p$ .

**Пример 20.3.** В урне 10 лотерейных билетов, 4 из них выигрышные. Из урны наугад извлекаются 2 билета. Найти вероятность того, что: а) оба билета выигрышные; б) оба билета без выигрыша; в) один билет выигрышный, а другой нет.

**Решение.** Пусть  $A$  – событие, состоящее в том, что оба билета выигрышные,  $B$  – оба билета без выигрыша;  $C$  – один билет выигрышный, а другой – нет.

а) Выбор двух билетов из десяти можно осуществить  $n = C_{10}^2 = 45$  способами, а двух выигрышных билетов из четырех –  $m = C_4^2 = 6$  способами.

Тогда по формуле (20.7)  $P(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$ .

б) Имеется  $m = C_6^2 = 15$  возможностей выбора билетов без выигрыша. В таком случае  $P(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ .

в) Существует 4 возможности вытащить выигрышный билет и 6 возможностей – билет без выигрыша. Согласно основному принципу пересчета, имеется  $m = 6 \cdot 4 = 24$  возможностей вытащить один билет с выигрышем, а другой – без выигрыша. Тогда по формуле (20.7)  $P(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ .

## Свойства вероятности

Вероятность события обладает следующими свойствами.

1° Для любого события  $A$  справедливо неравенство  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

2° Вероятность невозможного события  $\emptyset$  равна нулю, а вероятность достоверного события  $\Omega$  – единице.

Свойства 1° и 2° следуют непосредственно из определения вероятности.

3° Для любых событий  $A$  и  $B$

$$(A \subset B) \Rightarrow P(A) \leq P(B). \quad (20.8)$$

**Доказательство.** Событие  $B$  включает все элементарные события  $\omega_i$ , составляющие  $A$ , и, возможно элементарные события, не входящие в  $A$ . Отсюда в силу неотрицательности вероятности  $p(\omega_i)$  и формулы (20.6) следует неравенство (20.8).

4° Если события  $A$  и  $B$  несовместны, т. е.  $A \cap B = \emptyset$ , то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (20.9)$$

**Доказательство.** Событие  $A + B$  состоит из элементарных исходов  $\omega_i$  из  $A$  и  $\omega_j$  из  $B$ , причем общих исходов события  $A$  и  $B$  не имеют. Тогда по формуле (20.6)

$$P(A + B) = \sum_i p(\omega_i) + \sum_j p(\omega_j) = P(A) + P(B).$$

5° Для вероятности противоположного события  $\bar{A}$  справедливо равенство

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (20.10)$$

**Доказательство.** Действительно,  $A + \bar{A} = \Omega$ . Тогда согласно свойствам 2° и 4°,  $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$ . Отсюда и следует равенство (20.10).

6° Для произвольных событий  $A$  и  $B$  имеет место равенство

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (20.11)$$

**Доказательство.** Событие  $A \cup B$  состоит из элементарных событий, составляющих  $A$ , и тех событий из  $B$ , которые в  $A$  не входят. Вероятность этого события есть  $P(A \cup B)$ . В сумму  $P(A) + P(B)$  дважды включены вероятности элементарных событий, общих для  $A$  и  $B$ , поэтому из этой суммы нужно вычесть вероятность  $P(A \cap B)$  общих элементарных событий.

7° Если  $A \subset B$ , то для любых  $A$  и  $B$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \quad (20.12)$$

**Доказательство.** Так как  $B = A + B \setminus A$  и  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ , то  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ . Отсюда и получаем равенство (20.12).

Приведем решения задач, иллюстрирующих свойства 1° – 7°.

**Пример 20.4.** В урне 20 шаров: 10 красных, 7 синих и 3 белых. Найти вероятность того, что извлеченный наугад шар – цветной.

**Решение.** Пусть  $A$  – событие, заключающееся в извлечении красного шара,  $B$  – синего. Так как эти события несовместны и  $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ , а  $P(B) = \frac{7}{20}$ , то по формуле (20.9) искомая вероятность  $P(\text{синий или красный}) = \frac{10}{20} + \frac{7}{20} = \frac{17}{20}$ .

**Пример 20.5.** Вероятность того, что будет снег (событие  $A$ ), равна 0,7, а того, что будет дождь (событие  $B$ ) – 0,35. Определить вероятность плохой погоды, если вероятность дождя со снегом (событие  $A \cap B$ ) равна 0,15.

**Решение.** События  $A$  и  $B$  совместны. Тогда, согласно формуле (20.11) вероятность  $P(\text{дождь или снег}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,35 - 0,15 = 0,9$ .

Часто удобнее найти вероятность события  $A$  с помощью вероятности противоположного события  $\bar{A}$  по формуле (20.10).

**Пример 20.6.** В ящике имеется  $n$  деталей, среди которых  $m$  стандартных. Найти вероятность того, что среди  $k$  наугад извлеченных деталей имеется хотя бы одна стандартная.

**Решение.** Пусть  $A$  – событие, состоящее в том, что среди извлеченных деталей имеется хотя бы одна стандартная. Тогда  $\bar{A}$  означает, что среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной. Найдем  $P(\bar{A})$ . Число способов извлечения  $k$  деталей из  $n$  равно  $C_n^k$ , а число способов извлечения  $k$  нестандартных деталей из  $(n-m)$  нестандартных деталей –  $C_{n-m}^k$ . Тогда  $P(\bar{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$  и по формуле (19.10) искомая вероятность

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

### Геометрическая вероятность

Для вычисления вероятности появления события  $A$  в том случае, когда результат опыта определяется случайным положением точек в некоторой области, используется определение *геометрической вероятности*. При этом любые положения точек в этой области считаются равновероятными. Назовем мерой области ее длину, площадь, объем в одно-, двух- и трехмерном случае соответственно. Обозначим меру области  $S$ , а меру части ее –  $s$ . Пусть  $A$  – событие, состоящее в попадании точки в указанную часть области. Тогда искомая вероятность события  $A$  (геометрическая вероятность) определяется равенством

$$P(A) = \frac{s}{S}. \quad (20.13)$$

**Пример 20.7.** На отрезке единичной длины случайным образом появляется точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка больше  $\frac{1}{8}$ .

**Решение.** По условию задачи искомому событию удовлетворяют точки, появляющиеся на интервале  $(a,b)$  (рис. 20.1)



Рис. 20.1

Так как его длина  $s = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ , а длина всего отрезка  $S = 1$ , то искомая вероятность

$$p = \frac{s}{S} = \frac{3}{4}.$$

## 20.3 Условная вероятность

### Понятие условной вероятности

Вероятность события зависит от условий, при которых осуществляется опыт.

Вероятность события  $A$  при условии, что событие  $B$  произошло, называется *условной вероятностью* события  $A$  и обозначается  $P(A/B)$ . Эта вероятность определяется равенством

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (20.14)$$

при условии, что  $P(B) > 0$ .

Обоснуем формулу (20.14) в случае пространства событий с конечным числом исходов.

Пусть общее число исходов равно  $n$ , событию  $A$  благоприятствует  $r$  исходов, событию  $B$  –  $m$  исходов, а совместному событию  $A \cap B$  –  $k$  исходов. Тогда,  $P(B) = \frac{m}{n}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{k}{n}$ . Условная вероятность  $P(A/B)$  наступления события  $A$  при условии, что событие  $B$  произошло, должна вычисляться не по всем  $n$  исходам, а только по тем  $m$  исходам, в результате которых наступило событие  $B$ , т. е.

$$P(A/B) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Аналогично для условной вероятности  $P(B/A)$  по формуле (20.14) имеем

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0. \quad (20.15)$$

Из равенства (20.14) и (20.15) получим *формулу умножения вероятностей*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (20.16)$$

**Пример 20.8.** В коробке 3 красных и 7 синих шариков. Наугад извлекается один шарик, затем второй. Найти вероятность того, что первый шарик красный, а второй – синий.

**Решение.** Пусть событие  $A$  означает, что первый взятый шарик красный, а  $B$  – что второй шарик синий. Тогда  $P(A) = \frac{3}{10}$ . Так как после извлечения красного в коробке осталось 9 шариков, условная вероятность  $P(B/A) = 7/9$ . Тогда по

формуле (20.16) искомая вероятность  $P(A \cap B) = P$  (первый шарик красный, второй – синий)  $= P(A) \cdot P(B/A) = 3/10 \cdot 7/9 = 7/30$ .

Имеет место

*Теорема 20.1.* Для произвольных событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  справедлива формула

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \quad (20.17)$$

**Доказательство.** Докажем эту формулу для случая  $n=3$ . Согласно формуле (20.16), последовательно будем иметь

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2).$$

### Независимые события

События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (20.18)$$

В этом случае, согласно формуле (20.14)  $P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$ , т. е.

появление события  $B$  не оказывает никакого влияния на вероятность события  $A$ .

События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *попарно независимыми*, если любая пара их независима, т. е.  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ ,  $i \neq j$ .

События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *независимыми в совокупности*, если при любом выборе различных событий  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$  из данной совокупности выполняется равенство

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \dots P(A_{ik}). \quad (20.19)$$

Явно, что из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. Однако попарная независимость событий не гарантирует их независимости в совокупности.

Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы в совокупности, то из определения (20.19) получаем равенство

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n) \quad (20.20)$$

обобщающее формулу (20.18).

Из формул (20.20) и (20.12) следует утверждение: вероятность появления хотя бы одного события  $A$  из независимых в совокупности событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n}) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A_i}). \quad (20.21)$$

**Пример 20.9.** Вероятности попадания в цель из трех винтовок  $P(A_1) = 0,8$ ;  $P(A_2) = 0,7$ ;  $P(A_3) = 0,9$  соответственно, где  $A_i$  – попадание в мишень  $i$ -м стрелком,  $i = 1, 2, 3$ . Найти вероятность: а) хотя бы одного попадания; б) только одного попадания.

**Решение.** а) Попадание в цель из каждой винтовки не зависит от результата стрельбы из других винтовок, т. е. стрельба из винтовок – независимые в совокупности события. Промах является событием, противоположным попаданию. Для этих винтовок вероятность промаха  $P(\overline{A_1}) = 0,2$ ;  $P(\overline{A_2}) = 0,3$ ;  $P(\overline{A_3}) = 0,1$  соответственно. Тогда, согласно равенству (20.21), искомая вероятность  $P(A) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994$ .

б) Только одно попадание в мишень может осуществиться в одной из трех ситуаций: 1) 1-й стрелок поразил цель, 2-й и 3-й – промахнулись – событие

$A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$ ; 2) 2-й стрелок попал, а 1-й и 3-й промахнулись – событие  $\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}$ ; 3) 1-й и 2-й стрелки промахнулись, а третий попал – событие  $\overline{A_1} \overline{A_2} A_3$ . События  $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$ ,  $\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}$  и  $\overline{A_1} \overline{A_2} A_3$  несовместны. Тогда искомая вероятность попадания в мишень только одним стрелком

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = \\
 &= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \\
 &= 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,092.
 \end{aligned}$$

### Формула полной вероятности

Пусть событие  $H_1, H_2, \dots, H_n$  попарно независимы и образуют полную группу событий, т. е.  $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ . Такие события иногда называются *гипотезами*. Имеет место

*Теорема 20.2.* Вероятность события  $A$ , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события  $A$ , т. е.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) \quad (20.22)$$

Равенство (20.22) называется *формулой полной вероятности*.

**Доказательство.** Так как  $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ , то

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n H_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n (A \cap H_i),$$

причем события  $A \cap H_i$  попарно несовместны в силу попарной несовместности гипотез  $H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда по формуле (20.9)

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^n (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i).$$

Применив к каждому слагаемому в правой части формулу (20.16), получим равенство  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ , совпадающее с равенством (20.22).

### Формула Байеса

Формула Байеса дает возможность определить условные *апостериорные* (после опыта) вероятности  $P(H_k/A)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , если известны *априорные* (до опыта) вероятности  $P(H_k)$  гипотез  $H_k$ , образующих полную группу событий. Эта формула имеет вид

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (20.23)$$

Для ее вывода достаточно в формуле условной вероятности  $P(H_k/A) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)}$  записать числитель по формуле произведения вероятностей (20.16), а знаменатель – по формуле полной вероятности (20.22).

**Пример 20.10.** В канцелярии работают 4 секретарши, которые отправляют 40, 10, 30, и 20 % исходящих бумаг. Вероятности неверной адресации бумаг секретаршами равны 0,01; 0,05; 0,06; 0,01 соответственно. Найти

вероятность того, что документ, неверно адресованный, отправлен третьей секретаршей.

**Решение.** Введем гипотезы  $H_i$  – документ отправила  $i$ -я секретарша,  $i=1,2,3,4$ . Тогда, по условию задачи  $P(H_1)=0,4$ ;  $P(H_2)=0,1$ ;  $P(H_3)=0,3$ ;  $P(H_4)=0,2$ . Обозначим через  $A$  событие, состоящее в том, что документ адресован неверно. Тогда по условию  $P(A/H_1)=0,01$ ;  $P(A/H_2)=0,04$ ;  $P(A/H_3)=0,06$ ;  $P(A/H_4)=0,01$  и искомая вероятность

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,06}{0,4 \cdot 0,01 + 0,1 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,06 + 0,2 \cdot 0,01} = 0,391.$$

Итак, 3-я секретарша допускает примерно 39 % всех ошибок.

## 20.4 Последовательность независимых испытаний.

### Схема испытаний Бернулли

На практике часто решаются задачи, связанные с многократно повторяющимися испытаниями (опытами), в результате каждого из которых может появиться или не появиться некоторое событие  $A$ . При этом представляет интерес исход не каждого отдельного испытания, а общее число появления события  $A$  в результате определенного числа опытов.

Последовательные испытания называются *независимыми*, если вероятность осуществления любого исхода в каждом  $n$ -м испытании не зависит от реализации исходов предыдущих испытаний. Легко представить испытания с двумя возможными исходами  $A$  и  $\bar{A}$ , где  $A$  означает, например, “успех”, а  $\bar{A}$  – “неудачу”, причем в каждом испытании вероятность  $p$  “успеха” и вероятность

$q = 1 - p$  – “неудачи” постоянны. Серию независимых испытаний с одной и той же вероятностью “успеха”  $p = P(A)$  называют *испытаниями или схемой Бернулли*.

Обозначим через  $P_n(m)$  вероятность появления  $m$  раз события  $A$  в серии из  $n$  независимых испытаний. Тогда, справедлива *формула Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (20.24)$$

Действительно, вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит  $m$  раз и, следовательно, не появится  $n - m$  раз, согласно формуле (20.20) умножения событий, равна  $p^m q^{n-m}$ . Но событие  $A$  может наступить при любом  $m$  из  $n$  возможных испытаний. Так как число возможных комбинаций  $m$  элементов из  $n$  равно  $C_n^m$ , то по формуле (20.9) искомая вероятность  $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ .

### Биномиальное распределение вероятностей

Правая часть формулы Бернулли (20.24) есть общий член разложения бинома Ньютона

$$(q + p)^n = q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + p^n \quad (20.25)$$

поэтому, если  $m$  придавать значения  $0, 1, 2, \dots, (n - 1), n$ , получим соответствующую последовательность вероятностей

$$P_n(0), P_n(1), P_n(2), \dots, P_n(n - 1), P_n(n). \quad (20.26)$$

Совокупность вероятностей (20.26) называется *биномиальным распределением вероятностей*. Поскольку  $p + q = 1$ , то из формулы (20.25) следует, что  $\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1$ .

Биномиальное распределение (20.26) позволяет определить не только вероятность появления события  $A$  ровно  $m$  раз при  $n$  испытаниях, но и вероятность  $P_n(k \leq m \leq l)$  того, что число  $m$  появлений события  $A$  заключено на некотором отрезке  $[k, l]$ ,  $0 \leq k < l \leq n$ . В силу несовместности событий  $(k, k + 1, \dots, l - 1, l)$  искомая вероятность

$$p_n(k \leq m \leq l) = p_n(k) + p_n(k + 1) + \dots + p_n(l - 1) + p_n(l). \quad (20.27)$$

### Вероятнейшее число появлений события

Покажем, что при некотором числе  $m_0$  вероятность  $P_n(m)$  как функция целочисленного аргумента  $m$  достигает своего наибольшего значения. Число  $m_0$  называется *вероятнейшим числом* появлений события  $A$  в серии из  $n$  испытаний.

Рассмотрим отношение

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n! p^{m+1} q^{n-m-1} (n-m)! m!}{(m+1)! (n-m-1)! n! p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Замечаем, что  $P_n(m+1) > P_n(m) \Leftrightarrow \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} > 1$ , т. е. функция  $P_n(m)$  возрастает,

если  $m < np - q$ . Аналогично,  $P_n(m+1) > P_n(m) \Leftrightarrow \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} < 1$ , т. е.  $P_n(m)$

убывает, если  $m > np - q$ .

Итак, при  $m < np - q$  функция  $P_n(m)$  возрастает, а при  $m > np - q$  – убывает. Таким образом, существует число  $m_0$ , при котором  $P_n(m)$  достигает наибольшего

значения. Найдем его. По смыслу числа  $m_0$  имеем  $P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1)$  и  $P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1)$ . Отсюда

$$\frac{n! p^{m_0} q^{n-m_0}}{(n-m_0)! m_0!} \geq \frac{n! p^{m_0-1} q^{n-m_0+1}}{(m_0-1)! (n-m_0+1)!} \quad (20.28)$$

и

$$\frac{n! p^{m_0} q^{n-m_0}}{(n-m_0)! m_0!} \geq \frac{n! p^{m_0+1} q^{n-m_0-1}}{(m_0+1)! (n-m_0-1)!}. \quad (20.29)$$

Решая неравенства (20.28) и (20.29) относительно  $m_0$  получаем:

$$\begin{cases} m_0 \leq np + p, \\ m_0 \geq np - q. \end{cases}$$

Итак, искомое число  $m_0$  удовлетворяет неравенствам

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \quad (20.30)$$

Так как  $p + q = 1$ , то имеется по крайней мере одно целое число  $m_0$  удовлетворяющее неравенствам (20.30).

### **Предельные теоремы в схеме Бернулли. Распределение Пуассона**

Формула Бернулли в схеме независимых испытаний при больших  $n$  приводит обычно к громоздким вычислениям. Поэтому для вычисления соответствующих вероятностей важно иметь приближенные, достаточно простые формулы. В частности, в задачах, в которых рассматривается большое число независимых испытаний, а вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом

испытании мала, вероятность  $P_n(m)$  может быть приближенно вычислена по формуле Пуассона (при достаточно больших  $n$ ). Справедлива

**Теорема 20.3 (Пуассона).** Пусть вероятность события  $A$  при каждом испытании в серии из  $n$  независимых испытаний равна  $\lambda/n$ , где  $\lambda > 0$  – постоянная, не зависящая от  $n$ . Тогда вероятность  $P_n(m)$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $m$  стремиться к  $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \right) = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \right) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ .

Таким образом, если  $n \rightarrow \infty$ , при выполнении условий теоремы получаем:

$$P(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (20.31)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $\lambda = np$ .

Соотношение (20.31) называется формулой Пуассона. Из-за малости  $p$  распределение Пуассона (20.31) называют *законом распределения редких явлений*.

Итак, если вероятность  $p$  события  $A$  мала, а число  $n$  независимых испытаний велико, можно пользоваться приближенной формулой

$$P_n(m) = \frac{\pi^m}{m!} e^{-\pi}, \quad \pi = np, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (20.32)$$

### Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Приближенную формулу для вычисления вероятности  $P_n(m)$  устанавливает Теорема 20.4 (локальная теорема Муавра-Лапласа). Пусть вероятность события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях равна  $p$ ,  $0 < p < 1$ . Тогда вероятность  $P_n(m)$  того, что в этих испытаниях событие  $A$  наступит  $m$  раз, удовлетворяет при  $n \rightarrow \infty$  соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

где  $q = 1 - p$ ,  $x = \frac{(m - np)}{\sqrt{npq}}$ .

Другими словами, при больших  $n$  имеет место приближенная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (20.33)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (20.34)$$

Формула (20.33) дает удовлетворительное значение вероятности при достаточно больших значениях  $n$ , а также если  $p$  не слишком близко к 0 или 1.

Функция  $\varphi(x)$ , определенная равенством (20.34), четная. Ее значения для  $x > 0$  заданы таблицей.

## Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа

На практике при большом числе испытаний  $n$  и не слишком малой вероятности  $p$  важно оценить вероятность того, что число появлений события  $A$  лежит в некоторых границах. Эту оценку устанавливает

*Теорема 20.5 (интегральная теорема Муавра-Лапласа).* Пусть  $m$  – число наступления события  $A$  в серии из  $n$  независимых испытаний,  $p$  – вероятность наступления события  $A$  при каждом испытании,  $0 < p < 1$ . Тогда вероятность  $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$  того, что в этих испытаниях событие  $A$  появится не менее  $m_1$  раз и не более  $m_2$  раз, удовлетворяет при  $n \rightarrow \infty$  соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz,$$

$$\text{где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Другими словами, при больших значениях  $n$  имеет место приближенная *интегральная формула Муавра-Лапласа*

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (20.35)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz. \quad (20.36)$$

Функция (20.36) называется *интегралом ошибок*. Она нечетная, т. е.  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ . Ее значения при  $x \geq 0$  задаются таблицей.

Оценка погрешности при использовании формулы (20.35) показывает, что эта формула обеспечивает хорошую точность уже при  $npq \geq 10$ .

Пусть  $n$  – число испытаний,  $p$  – вероятность появления события  $A$  в каждом испытании,  $\frac{m}{n}$  – относительная частота появления события  $A$ . Найдем вероятность  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$  того, что отклонение относительной частоты  $\frac{m}{n}$  от вероятности  $p$  по абсолютной величине не превосходит заданного числа  $\varepsilon$ .

Задача состоит в отыскании вероятности  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(p - \varepsilon \leq \frac{m}{n} \leq p + \varepsilon\right) = P(np - n\varepsilon \leq m \leq np + n\varepsilon)$ , т. е.  $m_1 = np - n\varepsilon$ ,  $m_2 = np + n\varepsilon$ .

Из интегральной формулы Муавра-Лапласа следует, что

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -e\sqrt{\frac{n}{pq}}; \quad x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = e\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Тогда искомая вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (20.37)$$

**Пример 20.11.** Вероятность того, что деталь нестандартная, равная 0,1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклоняется от постоянной вероятности  $p = 0,1$  по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

**Решение.** Имеем  $p = 0,1$ ,  $q = 0,9$ ,  $\varepsilon = 0,03$ ,  $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,1\right| \leq 0,03\right) = 0,9544$ .

Требуемое число  $n$  найдем по формуле (20.37)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq 0,03\right) = 0,9544 = 2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{n}{0,1 \cdot 0,9}}\right), \text{ т. е. } \Phi(0,1\sqrt{n}) = 0,4772. \text{ По таблице}$$

находим, что  $0,4772 = \Phi(2)$ , или  $2 = 0,1 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow n = 400$ .

## 20.5. Скалярные случайные величины

### Понятие случайной величины

*Случайной величиной (с.в.)* называют величину, которая в результате испытания принимает то или иное возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных обстоятельств. Примерами с.в. являются: сумма выпавших очков на верхних гранях при подбрасывании двух игральных костей; число  $m$  появления события в схеме испытаний Бернулли; число вызовов, поступивших на АТС в течение определенного времени и т. д.

Дадим строгое определение скалярной с.в. Пусть  $(\Omega, F, p)$  – вероятностное пространство,  $F$  – некоторая система подмножеств  $\Omega$ , называемых событиями и  $X = X(\omega)$  – действительная функция определенная на  $\Omega$ . Обозначим через  $A$  для каждого  $x \in R$  множество всех точек  $\omega \in \Omega$ , удовлетворяющих условию  $X(\omega) < x$ , т. е.

$$A = (\omega \in \Omega / X(\omega) < x), \quad x \in R. \quad (20.38)$$

Кратко соотношение (20.38) записывается в виде  $A = (X(\omega) < x)$  или  $A = (X < x)$ .

Действительная функция  $X = X(\omega)$ , определенная на пространстве событий  $\Omega$ , называется *случайной величиной*, если для любого  $x \in R$  множество  $A = (X < x)$  принадлежит  $F$ , т. е. является событием. Скалярная с.в.  $X$  присваивает действительное значение  $X(\omega)$  каждой точке  $\omega \in \Omega$ .

Обычно рассматривают два типа с. в.: дискретные и непрерывные. Дискретной называется такая с. в., которая принимает конечное или счетное множество значений. Дискретная с. в. используется при описании измерений, принимающих целочисленные значения; число дефектных изделий, число телефонных вызовов и т. д.

Для некоторых с. в. число возможных значений, принимаемых этой величиной, бывает настолько велико, что удобнее представлять измерения в виде непрерывных с. в., которые принимают любое значение в некотором интервале, например продолжительность работы электролампы, дальность полета снаряда и т. д.

### Закон распределения вероятностей случайной величины

Для полного описания дискретной с. в. недостаточно знать ее возможные значения. Необходимо, кроме этого, охарактеризовать вероятности, с которыми принимаются эти значения. Такое полное описание дискретной с. в. называется *законом распределения*.

Пусть дискретная с. в.  $X$  может принимать значения  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ . Обозначим  $p_i = P(X = x_i)$ , вероятность того, что с. в.  $X$  принимает значения  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

Таблица

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_i$	...	$p_i$	...	$p_n$

(20.39)

называется *законом распределения дискретной с. в.* В дальнейшем предполагается, что  $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n$ .

Поскольку дискретная с. в.  $X$  обязательно принимает одно из значений  $x_i$ , то события  $(X = x_i)$  образуют полную группу событий, поэтому  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

## Функция распределения случайной величины

Пусть  $(\Omega, F, p)$  – вероятностное пространство и  $X = X(\omega)$  – случайная величина. Тогда  $A = (X < x)$ ,  $\forall x \in R$ , является событием и, следовательно, для каждого  $x \in R$  определена вероятность

$$P(A) = P(X < x) = F(x). \quad (20.40)$$

Функция (20.40), определенная для всех  $x \in R$ , называется *функцией распределения* случайной величины  $X$  или интегральной функцией распределения случайной величины  $X$ .

Выясним ее свойства.

1° Значения  $F(x)$  принадлежат отрезку  $[0,1]$ , т. е.  $0 \leq F(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in R$ . Это следует из того, что  $F(x)$  есть вероятность события  $A = (X < x)$ .

2°  $F(x)$  – неубывающая функция, т. е.  $(x_1 < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_1 < x_2$ . Событие  $(X < x_2)$  можно представить в виде суммы двух несовместных событий  $(X < x_1)$  и  $(x_1 \leq X \leq x_2)$ , т. е.  $(X < x_2) = (X < x_1) \cup (x_1 \leq X \leq x_2)$  (рис. 20.2)

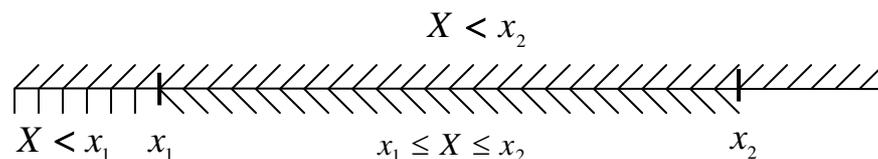


Рис. 20.2

Тогда по формуле сложения вероятностей несовместных событий  $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X \leq x_2)$ , т. е.  $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X \leq x_2)$ . Отсюда

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2) \geq 0, \quad (20.41)$$

т. е. свойство  $2^0$  имеет место.

3° Справедливы равенства  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

**Доказательство.** Если  $x \rightarrow -\infty$ , то событие  $(X < -\infty)$  невозможно, и, следовательно, вероятность  $P(X < -\infty) = 0$ . Если же  $x \rightarrow +\infty$ , то событие  $(X < +\infty)$  – достоверное и, значит  $P(X < +\infty) = 1$ .

4° Вероятность  $P(a \leq X \leq b)$  того, что случайная величина  $X$  принимает значения из промежутка  $[a, b)$ ,

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (20.42)$$

Равенство (20.42) вытекает непосредственно из соотношения (20.41) при  $x_1 = a$  и  $x_2 = b$ .

### Построение функции распределения дискретной случайной величины

Распределение дискретной случайной величины задается таблицей (20.39). Используя свойства функции  $F(x)$ , получаем, что при  $x_{i-1} < X \leq x_i$

$$F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} p_k.$$

В точке  $x_i$   $F(x)$  имеет скачок  $p_i = P(X = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i)$  и, значит, для  $x \in [x_i, x_{i+1}]$   $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + p_i = \sum_{k=1}^i p_k$ .

Таким образом, функция распределения  $F(x)$  дискретной случайной величины  $X$  кусочно-постоянна, имеет скачки  $p_i$  в точках разрыва  $x_i$  и непрерывна слева в точках разрыва  $x_i$ . График функции  $F(x)$  изображен на рисунке 20.3.

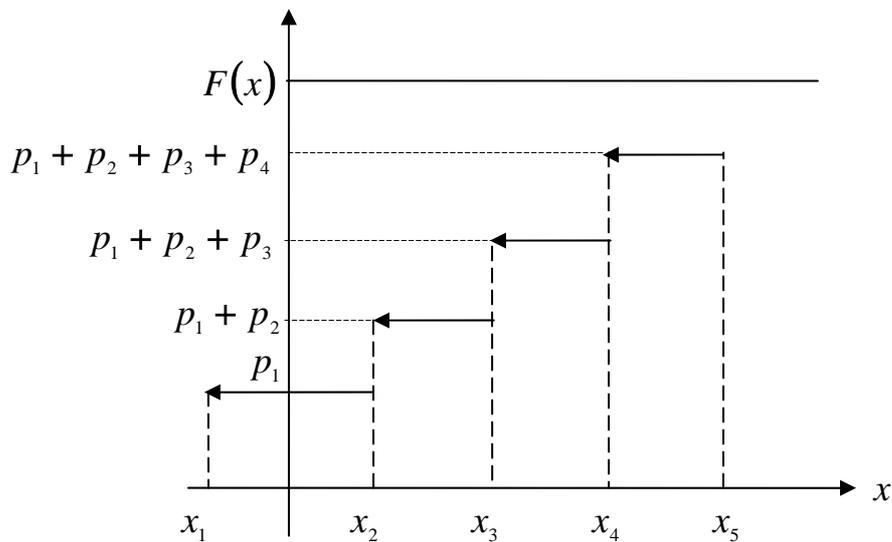


Рис. 20.3

### Плотность вероятностей с. в.

*Плотностью вероятностей случайной величины  $X$  или дифференциальной функцией распределения* называется предел

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}, \quad (20.43)$$

если он существует.

Пусть  $F(x)$  – функция распределения с. в.  $X$ . Если существует  $F'(x)$ , то равенство (20.43) равносильно соотношению

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x), \quad (20.44)$$

Итак, плотность вероятностей равна производной от функции распределения.

Выясним свойства плотности вероятностей

1° Функция  $f(x) \geq 0, \forall x \in R$ .

В самом деле,  $F(x)$  – неубывающая функция. Следовательно  $f(x) = F'(x) \geq 0$ .

2° Справедливо равенство

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (20.45)$$

Действительно,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx} dx = \int_a^b f(x) dx.$$

3° Если  $f(x)$  – плотность вероятностей с. в.  $X$ , то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (20.46)$$

В самом деле, так как  $F(-\infty) = 0$ , то

$$F(x) = F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

4° Имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (20.47)$$

называемое условием нормировки.

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F'(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

## Законы распределения некоторых с. в.

Приведем несколько наиболее употребительных законов распределения с. в.

1. *Биномиальный закон.* В схеме испытаний Бернулли функция распределения  $F(x)$  имеет вид ступенчатой функции с разрывами в точках  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ , причем величина скачка в точке  $x = m$  равна  $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ , то закон распределения имеет вид

$X$	0	1	2	...	m	...	n	(20.48)
$P$	$q^n$	$npq^{n-1}$	$\frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	$p^n$	

2. *Распределение Пуассона.* С. в. называется распределенной по закону Пуассона, если она принимает дискретные значения из ряда чисел  $0, 1, 2, \dots, m, \dots$  с вероятностями

$$P(X = m) = p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где  $\lambda$  – параметр распределения.

3. *Равномерное распределение.* С. в.  $X$  называется *равномерно распределенной* на  $[a, b]$ , если ее плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, \quad x > b. \end{cases} \quad (20.49)$$

4. *Нормальное распределение* (распределение Гаусса). С. в.  $X$  называется *распределенной по нормальному закону* или имеет *гауссовское распределение*, если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{y\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2y^2}}, \quad y > 0. \quad (20.50)$$

Согласно формуле (20.46), ее функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{y\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2y^2}} dt, \quad (20.51)$$

Как видно из формул (20.50) и (20.51), нормальное распределение зависит от параметров  $m$  и  $\sigma$  и полностью определяется ими. Графики  $f(x)$  и  $F(x)$  изображены на рис. (20.4) и рис. (20.5) соответственно

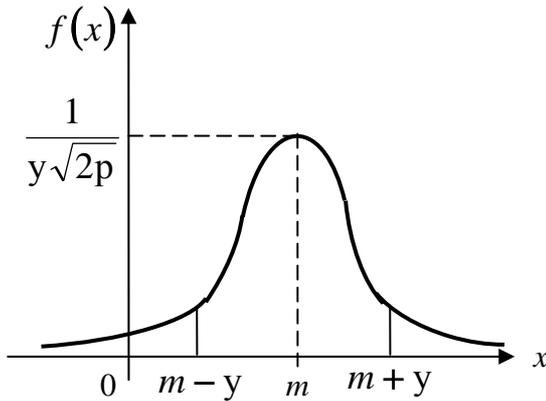


Рис. 20.4

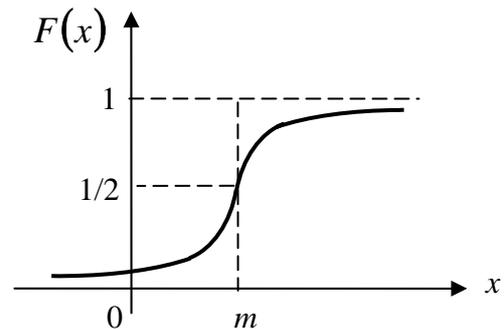


Рис. 20.5

Максимум ординаты кривой  $y = f(x)$  равен  $\frac{1}{y\sqrt{2p}}$ . Отсюда следует, что чем больше  $\sigma$ , тем шире кривая и тем ниже ее максимум. График плотности  $y = f(x)$  симметричен относительно прямой  $x = m$ . В сокращенном виде нормальное распределение записывают так:  $N(m, y)$  или  $N(m, y^2)$ . При  $m = 0$ ,  $y = 1$  получаем так называемое *стандартное нормальное распределение*  $N(0, 1)$ .

5. *Экспоненциальное распределение.* С. в.  $X$  называется распределенной по *экспоненциальному закону*, если ее плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0. \end{cases} \quad (20.52)$$

Отсюда функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0. \end{cases} \quad (20.53)$$

## 20.6 Числовые характеристики скалярных случайных величин

### Математическое ожидание

К числовым характеристикам случайных величин относятся: математическое ожидание, дисперсия и т. д.

Пусть  $X$  – дискретная случайной величины принимающая значения  $x_1, x_2, \dots$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots$  соответственно. *Математическим ожиданием* (м.о.) или *средним значением* с. в.  $X$  называется число

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = m_x \quad (20.54)$$

в предположении, что этот ряд сходится абсолютно. Если же ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$  расходится, то говорят, что с. в.  $X$  не имеет конечного м. о. Если  $X$  – непрерывная с. в. с плотностью вероятностей  $f(x)$ , то ее м. о. определяется интегралом

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (20.55)$$

при условии, что он сходится абсолютно.

Выясним основные свойства м. о.

1° М. о. числа появлений события  $A$  в одном испытании равно вероятности  $p$  этого события.

Действительно, событие  $A$  появляется в одном испытании 0 или 1 раз с вероятностями  $1-p$  и  $p$  соответственно. Тогда по формуле (20.54)  $M(A) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$ .

2° М. о. постоянной неслучайной величины  $C$  равно  $C$ .

В самом деле, константу  $C$  можно рассматриваться как с. в.  $X$ , принимающая значение  $C$  с вероятностью  $p=1$ . Тогда  $M(X) = C \cdot 1 = C$ .

3° Постоянный неслучайный множитель  $C$  можно выносить за знак математического ожидания.

Действительно,  $M(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CM(X)$ .

4° М. о. суммы с. в.  $X$  и  $Y$  равно сумме м. о. этих величин.

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

5° М. о. произведения независимых с. в.  $X$  и  $Y$  равно произведению м. о. этих с. в., т. е.  $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$

## Дисперсия

М. о. характеризует среднее значение с. в. Отклонением с. в.  $X$  от своего математического ожидания (среднего значения) называется с. в.  $X^\circ = X - M(X)$ . Часто величина  $X^\circ$  называется *центрированной* с. в.

*Дисперсией* или *рассеянием*  $D(X)$  с. в.  $X$  называется м. о. квадрата отклонения с. в.  $X$  от ее м. о.:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx, \quad (20.56)$$

если этот интеграл существует. Здесь  $f(x)$  – плотность вероятностей с. в.  $X$ , а  $m_x = M(X)$ . Корень квадратный из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением* с. в.  $X$  и обозначается  $y_x = \sqrt{D(X)}$ , так что  $D(X) = y_x^2$ .

Для дискретной с. в.  $X$ , принимающей значения  $x_i$  с вероятностью  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  дисперсия определяется равенством

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^2 p_i = y_x^2. \quad (20.57)$$

Из свойств м. о. и определения дисперсии имеем

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) = \\ &= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X). \end{aligned}$$

Итак,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_x^2. \quad (20.58)$$

Для дискретной с. в.  $X$  равенство (20.58) имеет вид

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - m_x^2. \quad (20.59)$$

Формула (20.59) удобна для вычисления дисперсии.

Установим свойства дисперсии.

1° Дисперсия постоянной неслучайной величины равна нулю.

Действительно,  $D(C) = M(C^2) - M^2(C) = C^2 - C^2 = 0$ .

2° Постоянный неслучайный множитель  $C$  можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:  $D(CX) = C^2 D(X)$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned} D(CX) &= M((CX)^2) - M^2(CX) = C^2 M(X^2) - C^2 M^2(X) = \\ &= C^2 (M(X^2) - M^2(X)) = C^2 D(X). \end{aligned}$$

3° Дисперсия суммы или разности независимых с. в.  $X$  и  $Y$  равна сумме дисперсий этих величин  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ .

**Доказательство.** Так как  $X$  и  $Y$  независимые с. в., то  $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M((X + Y)^2) - M^2(X + Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - \\ &- (M(X) + M(Y))^2 = M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) = \\ &= (M(X^2) - M^2(X)) + (M(Y^2) - M^2(Y)) = D(X) + D(Y). \end{aligned}$$

Итак,  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ . Отсюда и из свойства 2° дисперсии получим

$$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

**Математическое ожидание  
и дисперсия основных законов распределения с. в.**

Найдем м. о. и дисперсию некоторых законов распределения.

1. Найдем м. о. и дисперсию закона распределения Пуассона

$$P_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\lambda$  – параметр распределения.

Имеем

$$M(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Далее, с учетом равенства  $m^2 = m(m-1) + m$  получаем

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - M^2(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{m!} \lambda^m e^{-\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Итак, выяснен смысл параметра  $\lambda$  распределения Пуассона:  
 $M(X) = D(X) = \lambda$ .

2. Для равномерного распределения с. в.  $X$  с плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, \quad x > b, \end{cases}$$

имеем

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{a+b}{2},$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. Для *нормального распределения*  $N(m, y^2)$  с. в.  $X$  с *плотностью вероятностей*

$$f(x) = \frac{1}{y\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2y^2}}$$

имеем

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{y\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2y^2}} dx = \left| \frac{x-m}{y} = t \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} (m+yt)e^{-t^2/2} dt = \frac{m}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + \frac{y}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

первый интеграл в правой части равен  $\sqrt{2p}$ , второй же равен нулю как интеграл от нечетной функции по бесконечному симметричному промежутку, т. о.  $M(X) = m$ .

Далее по формуле (20.56)

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-M(x))^2 f(x)dx = \frac{1}{y\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2y^2}} dx = \left| \frac{x-m}{y} = t \right| = \\ &= \frac{y^2}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = -\frac{y^2}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} td(e^{-t^2/2}) = -\frac{y^2}{\sqrt{2p}} te^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{y^2}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = y^2. \end{aligned}$$

Итак, смысл параметров  $m$  и  $y^2$  нормального распределения  $N(m, y^2)$  с. в.  $X$  следующий:  $m = M(X)$ ,  $y^2 = D(X)$ .

## 20.6 Векторные случайные величины

### Понятие векторной с. в.

Наряду с одномерными рассматриваются многомерные с. в. – векторы, координаты которых являются одномерными с. в. Такие с. в. называются *векторными*.

Рассмотрим совокупность  $n$  с. в.  $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ , определенных на пространстве элементарных событий  $\Omega$ . Эту совокупность можно рассматривать как векторную с. в.  $\bar{X} = \bar{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ . Вектор  $\bar{X}(\omega)$  геометрически интерпретируется как случайная точка  $\bar{X} = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  в пространстве  $R^n$ , зависящая от элементарного события  $\omega \in \Omega$ .

Для простоты рассмотрим двумерный случайный вектор  $\bar{Z} = (X, Y)$ , где  $X = X(\omega)$ ,  $Y = Y(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

### Закон распределения вероятностей дискретной векторной с. в.

Если  $X$  и  $Y$  – дискретные с. в., вектор  $\bar{Z} = (X, Y)$  называется *дискретным случайным вектором*.

Пусть с. в.  $X$  принимает значение  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , а с. в.  $Y$  – значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Тогда очевидно, что с. в.  $\bar{Z} = (X, Y)$  принимает значения  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$  вероятность того, что с. в.  $X$  принимает значение  $x_i$ , а с. в.  $Y$  – значение  $y_j$ . Для полного описания дискретного случайного вектора  $\bar{Z} = (X, Y)$  необходимо знать значения  $(x_i, y_j)$  этого вектора и

соответствующие вероятности  $P_{ij}$ . Такое полное описание удобно осуществлять с помощью табл. 20.1

Таблица 20.1

$x \backslash y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$
$x_1$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	...	$P_{1n}$
$x_2$	$P_{21}$	$P_{22}$	$P_{23}$	...	$P_{2n}$
$x_3$	$P_{31}$	$P_{32}$	$P_{33}$	...	$P_{3n}$
...	...	...	...	...	...
$x_m$	$P_{m1}$	$P_{m2}$	$P_{m3}$		$P_{mn}$

Табл. 20.1 называется *законом распределения двумерной с. в.* Так как события  $(X = x_i, Y = y_j), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1.$$

### Функция распределения векторной с. в.

Пусть  $\bar{Z} = (X, Y)$ - двумерная с. в. Обозначим

$$P(X < x, Y < y), \forall x, y \in R \quad (20.60)$$

вероятность того, что одновременно с. в.  $X$  принимает значения, меньше  $x$ , а с. в.  $Y$  – значения, меньше  $y$ , т. е.  $P(X < x, Y < y)$  определяет вероятность совместного появления события  $(X < x, Y < y)$ . Функция

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y), \forall x, y \in R \quad (20.61)$$

называется *функцией распределения двумерной с. в. (X,Y)*. Геометрически  $F(x, y)$  задает вероятность попадания случайной точки  $(X,Y)$  в бесконечный прямой угол с вершиной в точке  $(x,y)$  рис. 20.6.

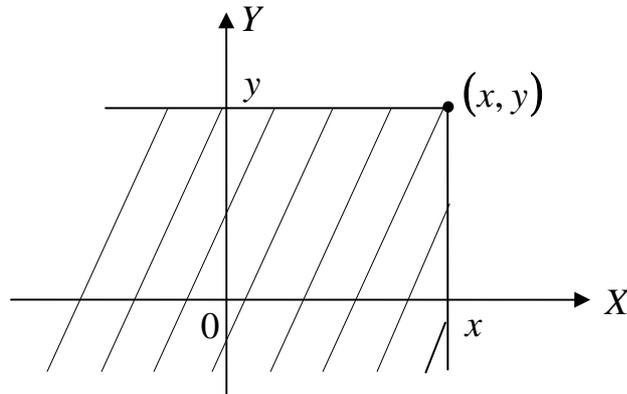


Рис. 20.6

Функция распределения  $F(x, y)$  обладает следующими свойствами.

1° Значения  $F(x, y)$  принадлежат отрезку  $[0,1]$ , т. е.  $0 \leq F(x, y) \leq 1, \forall x, y \in R$ .

2° Функция  $F(x, y)$  является неубывающей по каждому из своих аргументов,

т. е.

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \forall y \in R, \quad (20.61)$$

$$(y_2 > y_1) \Rightarrow F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \forall x \in R.$$

$$3^\circ \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = 1.$$

$$4^\circ \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0.$$

## Плотность вероятностей векторной с. в.

Плотностью вероятностей двумерной с. в.  $\bar{Z} = (X, Y)$  называется предел

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}, \quad (20.62)$$

если он существует.

Соотношение (20.62) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)) - (F(x + \Delta x, y) - F(x, y))}{\Delta x \Delta y} = \\ &= F''_{xy}(x, y) \end{aligned} \quad (20.63)$$

Итак, плотность вероятностей двумерной с. в.  $(X, Y)$  равна смешанной частичной производной функции распределения  $F(x, y)$ , если эта производная существует.

Выясним свойства  $f(x, y)$ .

1° Функция  $f(x, y)$  неотрицательна, т. е.  $f(x, y) \geq 0, \forall x, y \in R$ .

2° Для произвольной замкнутой области  $D$  на плоскости вероятность  $P((X, Y) \in D)$  попадания случайной точки  $(X, Y)$  в  $D$  равна

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (20.64)$$

где  $f(x, y)$  – плотность вероятностей с. в.  $(X, Y)$ .

3° Функция распределения с. в.  $F(x, y)$  случайного вектора  $(X, Y)$  связана с его плотностью вероятностей соотношением

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \quad (20.65)$$

4° Имеет место условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (20.66)$$

### Математическое ожидание двумерной с. в.

Математическим ожиданием двумерной с. в.  $\bar{Z} = (X, Y)$  называется вектор

$$\overline{M(Z)} = (M(X), M(Y)) = (m_x, m_y), \quad (20.67)$$

где  $m_x$  и  $m_y$  - м.о. случайных величин  $X$  и  $Y$  соответственно, т. е. для дискретных с. в. с законом распределения  $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$  имеем

$$m_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij},$$

$$m_y = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}.$$

**Пример 20.12.** Случайный вектор  $\bar{Z} = (X, Y)$  имеет плотность вероятностей  $f(x, y) = \frac{A}{p^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$ ,  $x, y \in R$ . Найти: а) величину  $A$ ;

б) функцию распределения  $F(x, y)$ ; в) вероятность попадания случайной точки  $(X, Y)$  в прямоугольник  $\Pi = (-4 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5)$ .

**Решение.** а) Величину  $A$  найдем из условия нормировки (20.66)

$$\left( \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{A dx dy}{p^2 (16 + x^2)(25 + y^2)} = 1 \right) \Rightarrow \left( \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} \Big|_{-\infty}^{\infty} \cdot \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{4} p \cdot \frac{1}{5} p = 1 \right) \Rightarrow (A = 20).$$

б) По формуле (20.65)

$$F(x, y) = \frac{20}{p^2} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{dudv}{(16 + u^2)(25 + v^2)} = \frac{20}{p^2} \cdot \frac{1}{5} \left( \operatorname{arctg} \frac{v}{5} \Big|_{-\infty}^y \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{u}{4} \Big|_{-\infty}^x \right) =$$

$$= \left( \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{1}{2} \right).$$

в) По формуле (20.64) искомая вероятность

$$P((X, Y) \in \Pi) = \frac{20}{p^2} \iint_{\Pi} \frac{dx dy}{(16 + x^2)(25 + y^2)} = \frac{20}{p^2} \int_{-4}^4 \frac{dx}{16 + x^2} \cdot \int_0^5 \frac{dy}{25 + y^2} =$$

$$= \frac{1}{p^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} \Big|_{-4}^4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{5} \Big|_0^5 = \frac{1}{4}.$$

## 20.7 Закон больших чисел. Предельные теоремы

Как уже известно, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Но оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайных характер и становится закономерным. Для практики очень важно знание условий, при

выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим.

*Теорема 20.6 Чебышева.* Если  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа  $C$ ), то как бы мало ни было положительное число  $\varepsilon$ , вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Таким образом теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых с. в., имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколько угодно малым.

Формулируя теорему Чебышева, мы предполагали, что с. в. имеет различные м. о. На практике часто бывает, что с. в. имеют одно и то же математическое ожидание, если допустить, что дисперсии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема Чебышева.

Обозначим м. о. каждой из с. в. через  $a$ , в рассматриваемом случае среднее арифметическое м. о. также равно  $a$  и теорема Чебышева для частного случая будет:

Если  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же м. о.  $a$ , и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число  $\epsilon > 0$ , вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \epsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число  $n$  достаточно велико.

Итак, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины.

Пусть производится  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна  $p$ . Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появлений события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема Бернулли, которая получила название “закона больших чисел” и положила начало теории вероятностей как науке.

*Теорема 20.7 Бернулли.* Если в каждом из  $n$  независимых испытаний вероятность  $p$  появления события  $A$  постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности  $p$  по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико, т. е. имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \epsilon) = 1.$$

Итак, теорема Бернулли утверждает, что при  $n \rightarrow \infty$  относительная частота стремится по вероятности к  $P$ .

## 21. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

### Предмет и задачи курса

Предмет математической статистики (МС) определяется как разработка методов сбора, описания и обработки данных (результатов наблюдений или измерений). В данном курсе рассматриваются некоторые основные понятия МС. В отличие от обычного подхода к изложению данного материала здесь проведено различие между понятиями выборка и реализация выборки.

#### 21.1. Выборка. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма

Пусть проводится эксперимент, состоящий из одной или более серий по  $n$  наблюдений (измерений) случайной величины (СВ)  $o$ . Условия неизменности ее закона распределения и независимости результатов измерений считаем выполненными. Следовательно, априорно результаты наблюдений образуют совокупность  $n$  независимых, одинаково распределенных СВ  $(o_1, \dots, o_n)$  ( $n$  “экземпляров” СВ  $o$ ). Эту совокупность называют *выборкой* объема  $n$  из распределения, задаваемого функцией  $F_o(x)$ . В результате проведения опыта получим набор чисел  $(x_1, \dots, x_n)$ , называемый *реализацией* выборки.

**Пример 21.1.** В таблице 1 приведены результаты двух серий по 30 измерений некоторой непрерывно распределенной СВ. Эти результаты полностью отражены на рисунке 21.1 (на рисунке указаны значения СВ в зависимости от порядка их появления).

Таблица 1

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Серия 1	-0.925	-0.307	1.428	0.044	-0.667	-0.028	2.077	-0.213	-0.784	-1.482	0.028	0.094
Серия 2	-0.416	-0.752	-0.159	0.452	-0.831	0.183	2.089	-0.802	-1.492	0.189	-0.822	-1.622

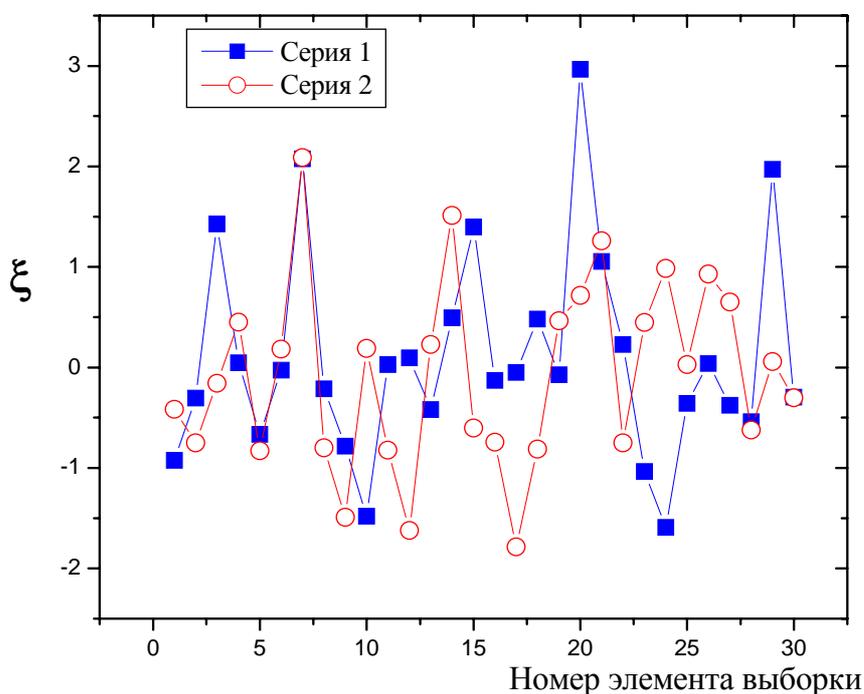
Таблица 1 (продолжение).

№ измерения	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Серия 1	-0.420	0.494	1.398	-0.128	-0.049	0.479	-0.072	2.965	1.054	0.229	-1.036	-1.592
Серия 2	-0.416	-0.752	-0.159	0.452	-0.831	0.183	2.089	-0.802	-1.492	0.189	-0.822	-1.622

Таблица 1 (продолжение).

№ измерения	25	26	27	28	29	30
Серия 1	-0.358	0.038	-0.376	-0.542	1.971	-0.296
Серия 2	-0.416	-0.752	-0.159	0.452	-0.831	0.183

Глядя на рисунок 21.1, можем высказать только самые общие суждения об измеряемой СВ. Например, видно, что значения СВ занимают область примерно от -2 до 3; видим также, что данные группируются в основном на отрезке  $[-1,1]$ . Но мы не можем полностью быть уверены, например, в том, что вторая серия наблюдений реализована при тех же условиях, что и первая. Следовательно, необходимо построить вероятностную модель, объясняющую эти данные.

Рис. 21.1. Реализации выборки объема  $n = 30$

Основная характеристика СВ – функция распределения  $F_0(x)$ . Априори она неизвестна, либо известен только класс распределений, которому она принадлежит. Теоретическую функцию распределения  $F_0(x)$  необходимо оценить по реализации выборки. Этой оценкой является эмпирическая функция распределения  $F_n(x)$ . Она определяется следующим образом. Пусть случайная величина  $m_n(x)$  есть количество элементов выборки, меньших заданного числа  $x$ . Тогда эмпирическая функция распределения есть случайная величина

$$F_n(x) = \frac{M_n(x)}{n}. \quad (21.1)$$

В соответствии с (21.1) для реализации  $F_n^*(x)$  СВ  $F_n(x)$  имеет место формула

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{\{j|x_j < x\}} 1. \quad (21.2)$$

Как следует из (21.2), функция  $F_n^*(x)$  может принимать значения  $0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1$ . Она является неубывающей, непрерывной слева и, очевидно,  $F_n^*(-\infty) = 0$ ,  $F_n^*(\infty) = 1$ . Следовательно, эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами функции распределения.

На рисунке 21.2 приведены графики двух реализаций эмпирической функции распределения  $F_n(x)$ , описывающей данные, приведенные в таблице 1 и на рисунке 21.1. Из рисунка 21.2 видим, что функция распределения и в самом деле меняется от реализации к реализации выборки. Видим также, что эмпирическая функция распределения дает дополнительную информацию по сравнению с исходной таблицей данных. Например, на основании графиков  $F_n^*(x)$  определяем медиану распределения  $x_m$ : и для первой серии измерений, и для второй  $x_m \approx 0$ .

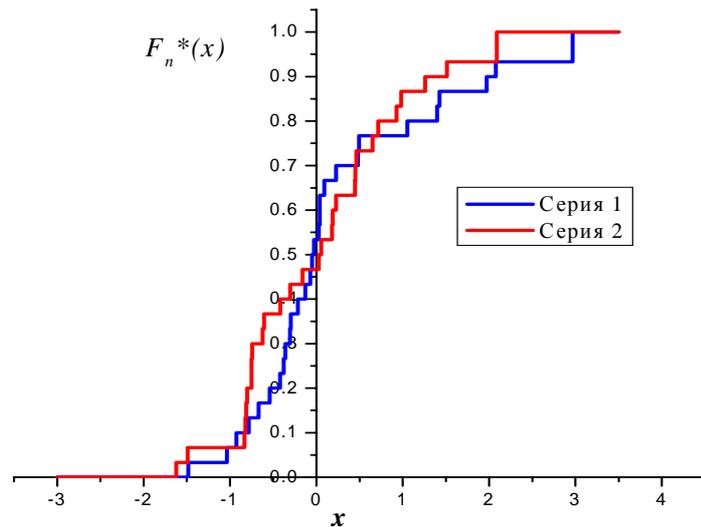


Рис. 21.2. Реализации эмпирической функции распределения  
(Графики построены по данным, приведенным на рис. 21.1)

Покажем теперь, что, в пределе бесконечного объема выборки  $n \rightarrow \infty$ , эмпирическая функция распределения  $F_n(x)$  с достоверностью “становится” теоретической функцией распределения  $F_0(x)$ . Иначе говоря, следует доказать утверждение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n(x) - F_0(x)| < \epsilon) = 1 \quad \forall x (-\infty < x < \infty) \text{ и } \forall \epsilon > 0 \quad (21.3)$$

(Формула (21.3) читается так: эмпирическая функция распределения при неограниченном возрастании объема выборки сходится по вероятности к теоретической функции распределения.) Суть доказательства (21.3) состоит в следующем:

1) СВ  $F_n(x)$  есть частота “успехов” в схеме последовательных независимых испытаний с двумя элементарными исходами (схема Бернулли). Действительно, значение  $m_n(x)$  получается подсчетом количества тех наблюдений, в которых произошло событие  $o_n < x$ .

2) Вероятность “успеха” в каждом испытании  $P(o_n < x) = p = F_o(x)$  по определению. Соответственно, вероятность “неуспеха”  $P(o_n \geq x) = q = 1 - F_o(x)$ .

Количество успехов в  $n$  испытаниях определено биномиальным законом распределения:  $P(F_n(x) = k/n) = P(M_n(x) = k) = C_n^k F_o(x)^k (1 - F_o(x))^{n-k}$ .

3) По теореме Бернулли (рассмотренной в курсе ТВ) частота события  $(o_n < x)$ , то есть  $F_n(x)$ , при  $n \rightarrow \infty$  сходится (по вероятности) к вероятности  $p$  наступления события в одном испытании, то есть к  $F_o(x)$ . Что и требовалось доказать.

Таким образом, реализуя выборку достаточно большого объема  $n$ , и используя формулу (21.2), получаем *статистический аналог* теоретической функции распределения. Доказанная теорема дает уверенность в том, что при увеличении  $n$  эмпирическая функция распределения будет “приближаться” по форме к теоретической.

Для задания *абсолютно непрерывной* СВ наряду с функцией распределения используется плотность распределения вероятностей  $f_o(x)$ . Следовательно, возникает задача построения ее статистического аналога – *эмпирической плотности распределения вероятностей*  $f_n(x)$ . Основанием для определения  $f_n(x)$  является определение плотности вероятности  $f_o(x)$  (см. курс теории вероятностей):

$$f_o(x) = F_o'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(o < x + \Delta x) - P(o < x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq o < x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (21.4)$$

При переходе к выборке вероятность  $P(x \leq o < x + \Delta x)$  следует заменить частотой  $n(x, x + \Delta x) = \Delta n(x, x + \Delta x) / n$ , где  $\Delta n(x, x + \Delta x)$  – количество элементов выборки попавших в интервал  $(x, x + \Delta x)$ . Поскольку выборка содержит конечное число элементов, нельзя осуществить предельный переход  $\Delta x \rightarrow 0$ . Поэтому, производную в (21.4) заменяем разностным отношением. При этом, в отличие от

обычной процедуры перехода к разностным отношениям, данная процедура осложнена следующими двумя обстоятельствами. С одной стороны “шаг дискретизации”  $h \equiv \Delta x$  должен быть достаточно мал, чтобы обеспечить сколь угодно приемлемую точность дискретизации, с другой стороны интервал  $(x, x + h)$  должен содержать достаточное количество элементов выборки, чтобы обеспечить асимптотическое поведение частоты. С учетом этого замечания, можно сформулировать следующее правило построения эмпирической плотности вероятности. Разбиваем область значений выборки на  $N$  равных промежутков  $I_i \equiv [b_i, b_{i+1})$  ( $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) длиной  $h = b_{i+1} - b_i$ . За эмпирическую плотность распределения принимаем величину

$$f_n(x) = \frac{n_i}{nh} = \frac{F_n(b_{i+1}) - F_n(b_i)}{h}, \quad x \in I_i \quad (i = 0, \dots, N - 1). \quad (21.5)$$

Здесь СВ  $n_i$  – число элементов выборки, попавших в интервал  $I_i$ .

Соответственно, для реализации эмпирической плотности распределения имеем формулу:

$$f_n^*(x) = \frac{1}{nh} \sum_{\{j|b_j \leq x_j < b_{j+1}\}} 1 = \frac{n_i}{nh}, \quad x \in I_i \quad (i = 0, \dots, N - 1). \quad (21.6)$$

Очевидно  $f_n^*(x) = 0$  при  $x < b_0$  и при  $x > b_N$ . График функции  $f_n^*(x)$  называют *гистограммой*. Видно, что построенная таким образом кусочно-постоянная функция  $f_n^*(x)$  обладает свойствами плотности распределения вероятностей: она неотрицательна, и удовлетворяет условию нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$ . Из формулы (21.5) следует, что величина  $f_n(x)h$  сходится по вероятности к теоретической вероятности  $p_i$  попадания СВ  $\xi$  в  $i$ -ый интервал. Таким образом, функция  $f_n(x)$

есть оценка теоретической плотности вероятностей. Однако, при небольших объемах выборки функция  $f_n(x)$  малоинформативна.

**Пример 21.2.** Приведем гистограммы для реализаций выборок объемом  $n = 100$  и  $n = 1000$  из того же распределения, что и в примере 21.1.

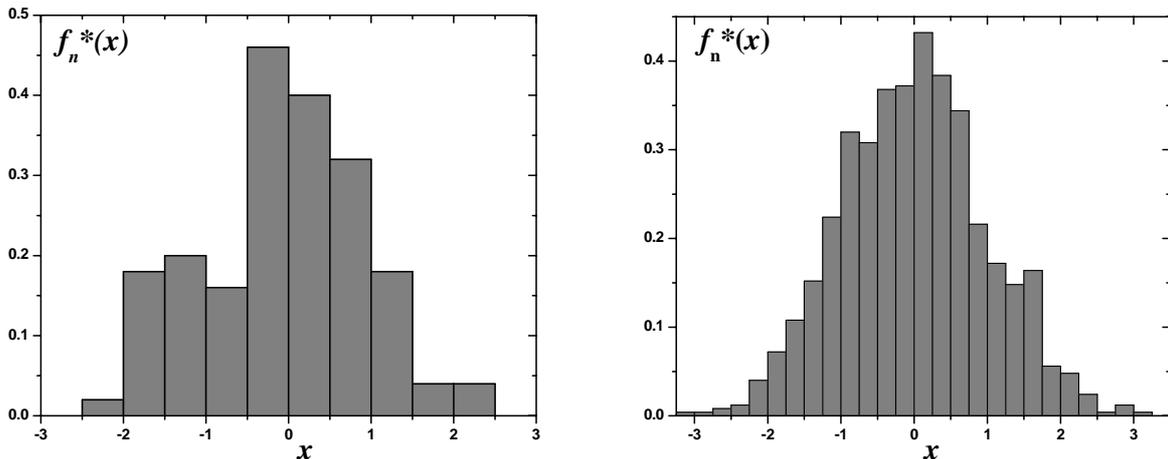


Рис. 21.3. а. Гистограмма для  $n = 100$     Рис. 21.3. б. Гистограмма для  $n = 1000$

Позднее будет показано, как, используя гистограмму, проверить простую гипотезу о виде распределения.

## 21.2. Элементы теории оценок. Выборочные характеристики

Термин оценка уже использовался выше, и понятен интуитивно. В применении к МС он означает приближенное выражение для неизвестного параметра или характеристики распределения СВ. Формально данное понятие определяется следующим образом.

*Оценка* есть любая функция  $T(o_1, \dots, o_n)$  выборки.

Ясно, что без контекста близости к какому-либо параметру или характеристике распределения СВ это определение бессодержательно.

## Точечные оценки

Пусть функция распределения  $F_{\theta}(x)$  зависит от некоторого параметра  $\theta$ .  
Необходимо построить функцию

$$\tilde{y} = \Phi(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (21.7)$$

чтобы при реализации выборки  $(x_1, \dots, x_n)$  можно было сказать

$$y \approx \Phi(x_1, \dots, x_n). \quad (21.8)$$

Соотношение (21.7) называется точечной оценкой. Следует задать требования к оценке (21.7), гарантирующие в той или иной мере выполнение (21.8). Эти требования – состоятельность, несмещенность и эффективность.

Оценка  $\tilde{y}$  называется *состоятельной*, если она сходится к параметру  $\theta$  по вероятности, иначе говоря, если  $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{y} - \theta| < \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T(o_1, \dots, o_n) - \theta| < \epsilon) = 1. \quad (21.9)$$

Оценка  $\tilde{y}$  называется *несмещенной*, если при любом  $n$  ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру:

$$M[\tilde{y}] = \theta. \quad (21.10)$$

Оценка  $\tilde{y}$  называется *эффективной*, если при заданном  $n$  ее дисперсия минимальна:

$$D[\tilde{y}] = D_{\min}. \quad (21.11)$$

Оценками числовых характеристик исследуемой СВ служат соответствующие выборочные характеристики. Они определяются следующим образом.

*Эмпирическим (выборочным) средним* называется величина

$$\tilde{m}_1 \equiv \bar{o} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n o_i. \quad (21.12)$$

*Эмпирической (выборочной) дисперсией* называется величина

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (o_i - \bar{o})^2. \quad (21.13)$$

*Эмпирическим  $k$ -м моментом* называется величина

$$\tilde{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n o_i^k. \quad (21.14)$$

Легко установить, что  $\tilde{S}^2 = \tilde{m}_2 - (\bar{o})^2$ .

Можно доказать, что характеристики (21.12) – (21.14) есть состоятельные оценки математического ожидания, дисперсии и  $k$ -го момента СВ  $\xi$  соответственно. Кроме того, элементарно устанавливается, что (21.14) – несмещенная оценка  $M[o^k]$ :

$$M[\tilde{m}_k] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n o_i^k\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[o_i^k] = \frac{1}{n} n M[o^k] = M[o^k].$$

В частности  $M[\bar{o}] \equiv M[\tilde{m}_1] = M[o]$ .

Между тем, выборочная дисперсия оказывается смещенной оценкой теоретической дисперсии. Покажем это. Введем обозначение  $a \equiv M[o]$ . Тогда

$$\begin{aligned} M[\tilde{S}^2] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((o_i - a) - (\bar{o} - a))^2\right] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (o_i - a)^2\right] - M[(\bar{o} - a)^2] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(o_i - a)^2] - M[(\bar{o} - a)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(o - a)^2] - M[(\bar{o} - a)^2] = D[o] - M[(\bar{o} - a)^2]. \end{aligned}$$

Далее

$$M[(\bar{o} - a)^2] = M\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (o_i - a)(o_j - a)\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[(o_i - a)(o_j - a)].$$

Но  $M[(\xi_i - a)(\xi_j - a)] = 0$  при  $i \neq j$  в силу независимости СВ  $o_i$  и  $o_j$ , и  $M[(o_i - a)(o_i - a)] = D[o_i] = D[o]$ .

$$\text{Отсюда имеем. } M[(\bar{o} - a)^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D[o] \delta_{ij} = \frac{1}{n} D[o].$$

Таким образом  $M[\tilde{S}^2] = \frac{n-1}{n} D[o]$ . Следовательно, для того чтобы получить несмещенную оценку дисперсии  $D[\xi]$  формулу (21.13) нужно немного исправить, поставив перед суммой множитель  $(1/(n-1))$  вместо  $(1/n)$ . Полученную величину

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (o_i - \bar{o})^2 \quad (21.15)$$

называют *исправленной выборочной дисперсией*, а величину  $\tilde{s}$  – *эмпирическим стандартом* или *стандартным отклонением*.

Эффективность оценок (21.12) – (21.14) доказываться сложнее.

Приведем значения  $\bar{x}$ ,  $s$  оценок математического ожидания и стандартного отклонения, соответственно, для двух реализаций выборки из примера 21.1. Для первой реализации  $\bar{x} = 0.10079$ ,  $s = 1.03451$ , для второй реализации  $\bar{x} = -0.0761$ ,  $s = 0.92858$ .

### **21.3. Интервальное оценивание параметров распределения. Доверительный интервал. Доверительная вероятность**

Так как выборочная оценка есть случайная величина, то она меняет свое значение от реализации к реализации выборки. Проведя достаточно большое количество серий экспериментов по  $n$  испытаний, мы можем получить с различной вероятностью значения оцениваемого параметра, занимающие всю область определения функции  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ , зависящую от области значений СВ  $\xi$ . Если оценка удовлетворяет требованиям состоятельности, несмещенности и эффективности, мы вправе ожидать, что ее реализации группируются в достаточно узком интервале возле значения оцениваемого параметра. Но, как правило, проводится одна серия испытаний, и, следовательно, мы получим одно реализованное значение оценки параметра. Не является невозможным то, что искомый параметр находится далеко слева или справа от полученного его приближенного значения. Следовательно, возникает задача определения интервала, в котором с заданной (достаточно высокой) вероятностью лежит оцениваемый параметр. Этот интервал и задаваемую для него вероятность называют доверительным интервалом и доверительной вероятностью соответственно. Дадим более строгое определение этих понятий.

Пусть  $\tilde{y}_1 = T_1(o_1, \dots, o_n)$ ,  $\tilde{y}_2 = T_2(o_1, \dots, o_n)$  – функции выборки такие, что для любых реализаций  $(x_1, \dots, x_n)$  выполняется неравенство  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n) \leq \Phi_2(x_1, \dots, x_n)$ , и при заданном значении  $\gamma \in (0, 1)$  выполняется условие

$$P(\tilde{y}_1 \leq \theta \leq \tilde{y}_2) \geq \gamma. \quad (21.16)$$

Тогда интервал  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  называется *доверительным интервалом* для параметра  $\theta$  с доверительной вероятностью (надежностью)  $\gamma$ ; функции  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  называются *доверительными границами*.

Построим доверительные интервалы для моментов  $m_k \equiv M[o^k]$ . Их *точечные* оценки даются формулой (21.14). Для построения интервальных оценок необходимо задать функции  $\Phi_1(o_1, \dots, o_n), \Phi_2(o_1, \dots, o_n)$ . Очевидным выбором является  $\Phi_1(o_1, \dots, o_n) = \tilde{m}_k - \varepsilon, \Phi_2(o_1, \dots, o_n) = \tilde{m}_k + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – положительное число, подлежащее определению из (21.16). Видим, что неравенство  $\Phi_1 \leq \Phi_2$  выполнено. Далее следует решить в соответствии с (21.16) неравенство

$$P(\tilde{m}_k - \varepsilon \leq m_k \leq \tilde{m}_k + \varepsilon) \geq \gamma. \quad (21.17)$$

Мы не можем в общем случае точно рассчитать вероятность в левой части (21.17), поскольку теоретическая функция распределения СВ  $\xi$  неизвестна. Тем не менее, проблема решается по двум причинам. Во-первых, во многих случаях есть основания считать теоретическое распределение нормальным. Во-вторых, если это и не так, то, подразумевая объем выборки достаточно большим, можем сослаться на центральную предельную теорему. В соответствии с ней распределение СВ  $\tilde{m}_k$ , являющейся средним арифметическим независимых СВ из одного распределения, асимптотически стремится к нормальному (при выполнении условий центральной предельной теоремы, например, условий Ляпунова). Это значит, что

$$P(\tilde{m}_k - \varepsilon \leq m_k \leq \tilde{m}_k + \varepsilon) = P(|\tilde{m}_k - m_k| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{y_k}\right). \quad (21.18)$$

В (21.18)  $\Phi(t)$  – функция Лапласа,  $\sigma_k \equiv \sqrt{D[o^k]} = \sqrt{M[o^{2k}] - (M[o^k])^2} = \sqrt{m_{2k} - m_k^2}$  есть дисперсия теоретического  $k$ -го момента. Нет оснований считать величину  $\sigma_k$  известной. Поэтому приходится заменить ее тоже оценкой. Подставляя далее (21.18) в левую часть (21.17), получим доверительный интервал с помощью таблицы для функции Лапласа. В частности, доверительный интервал для математического ожидания  $a = M[o]$  определяется уравнением

$$P(\tilde{m}_k - \varepsilon \leq a \leq \tilde{m}_k + \varepsilon) \approx 2\Pi\left(\frac{e\sqrt{n}}{s}\right) = \Gamma \quad (21.19)$$

откуда

$$e = \frac{s}{\sqrt{n}} \Pi^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2}\right), \quad (21.20)$$

где  $\Phi^{-1}(t)$  – функция, обратная функции Лапласа. Таким образом, доверительный интервал для математического ( $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ ) ожидания имеет вид:

$$(\tilde{y}_{1a}, \tilde{y}_{2a}) = \left( \bar{o} - \frac{s}{\sqrt{n}} \Pi^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2}\right), \bar{o} + \frac{s}{\sqrt{n}} \Pi^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \right). \quad (21.21)$$

Для выборки большого объема (так что можно принять  $n \rightarrow \infty$ ) функция Лапласа  $\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_k)$  стремится к своему асимптотическому значению  $\Phi(\infty) = 0.5$ . В этом случае, как видно из формул (21.18), (21.19), оценка почти со 100 %-й вероятностью находится в узком интервале  $e \ll y_k$  возле оцениваемого параметра.

Заметим, что, хотя формулы (21.19), (21.20) и не являются строгими, они вполне пригодны для решения поставленной задачи. Тем не менее, обратим внимание на причину, вынудившую допустить погрешность при записи уравнения (21.19). Эта причина заключается в не самом удачном, хотя и

напрашивающемся, выборе функций  $\Phi_1(o_1, \dots, o_n)$ ,  $\Phi_2(o_1, \dots, o_n)$ . На самом деле эти функции лучше всего задать так, чтобы при построении доверительного интервала для неизвестного параметра распределения (в данном случае – это математическое ожидание  $a$ ) другие неизвестные параметры в уравнениях не появлялись. В нашем же случае, в силу (21.17), в уравнении для  $a$  содержится еще одна неизвестная  $\sigma$ . С другой стороны, функции  $\Phi_1(o_1, \dots, o_n)$ ,  $\Phi_2(o_1, \dots, o_n)$  желательно “сконструировать” так, чтобы функция распределения этих СВ была по возможности табличной. Например, при построении доверительного интервала для математического ожидания  $a$  привлекается тот факт, что, при нормальном законе распределения СВ  $\xi$ , случайная величина  $\frac{\bar{o} - a}{\sqrt{\tilde{s}^2/n}}$  распределена по закону

Стьюдента с  $(n - 1)$  степенями свободы. В соответствии с этим  $T_{1,2}(o_1, \dots, o_n) = \bar{o} \mp e \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}}$ , и формула (21.21) заменяется формулой

$$[\tilde{y}_{1a}, \tilde{y}_{2a}] = \left( \bar{o} - \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}} S_{n-1}^{-1} \left( \frac{1+\gamma}{2} \right), \bar{o} + \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}} S_{n-1}^{-1} \left( \frac{1+\gamma}{2} \right) \right). \quad (21.22)$$

Здесь  $S_{n-1}^{-1}(t)$  – функция, обратная к функции распределения Стьюдента. При больших объемах выборки формулы (21.21) и (21.22) дают примерно одинаковые результаты.

Построим доверительные интервалы для математического ожидания СВ по данным, приведенным в примере 21.1. Для доверительной вероятности  $\gamma$  возьмем значение 0.95 (95%). В соответствии с (21.20) находим

$$e = \frac{s}{\sqrt{30}} \Pi^{-1} \left( \frac{0.95}{2} \right) = \frac{s}{\sqrt{30}} \cdot 1.96 \approx 0.358 \cdot s. \text{ Тогда, имея вычисленные ранее значения}$$

$\bar{x}$  и  $s$ , по первой реализации выборки заключаем, что неизвестное математическое ожидание содержится с вероятностью 95 % в интервале

$(-0.27, 0.47)$ , а по второй – в интервале  $(-0.42, 0.25)$ . Эти результаты получены по формуле (21.21). Если правда, что исследуемая СВ распределена по нормальному закону, то можем использовать для построения доверительного интервала формулу (21.22). В этом случае, определив по таблице распределения Стьюдента  $S_{29}^{-1}(1.95/2) \approx 2.04$ , получим доверительные интервалы  $(-0.29, 0.49)$ ,  $(-0.42, 0.27)$  по первой и второй реализациям соответственно. Видим, что обе формулы (21.21, 21.22) дают примерно одинаковый результат.

Рассмотрим теперь задачу построения доверительного интервала для дисперсии  $y^2 = D[o]$ . Как и для математического ожидания, можно в качестве границ интервала взять отклонения  $\tilde{s}^2 \pm e$  от точечной оценки, и далее с использованием центральной предельной теоремы приближенно определить вероятность  $P(\tilde{s}^2 - e \leq y^2 \leq \tilde{s}^2 + e)$ . При этом придется выполнить достаточно громоздкие вычисления. Это связано с тем, что в правой части формулы (21.15) суммируются взаимно зависимые СВ  $(o_i - \bar{o})^2$ . Задача решается проще, если принять нормальный закон распределения для СВ  $\xi$ . В этом случае нормализованная СВ  $(n-1) \frac{\tilde{s}^2}{y^2}$  распределена по закону  $\chi_{n-1}^2$  (распределение Пирсона с числом степеней свободы  $n-1$ ). Тогда уравнение, определяющее доверительные границы, запишется в виде

$$P\left(\frac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{x_2} \leq y^2 \leq \frac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{x_1}\right) = \int_{x_1}^{x_2} k_{n-1}(t) dt = \gamma, \quad (21.23)$$

где  $k_{n-1}(x)$  – плотность распределения вероятностей по закону Пирсона. В (21.23) – две неизвестных  $x_1, x_2$ , а не одна, что связано с несимметричностью распределения. Для устранения неопределенности принято по договоренности вероятность  $1-\gamma$  распределять поровну между событиями  $(0 \leq \chi_{n-1}^2 < x_1)$  и  $(x_2 \leq \chi_{n-1}^2 < \infty)$ . Тогда доверительный интервал для дисперсии запишется в виде

$$(\tilde{y}_1^2, \tilde{y}_2^2) = \left( \frac{(n-1)\tilde{s}^2}{\chi_{n-1}^2((1+\gamma)/2)}, \frac{(n-1)\tilde{s}^2}{\chi_{n-1}^2((1-\gamma)/2)} \right). \quad (21.24)$$

В формуле (21.24) величина  $\chi_{n-1}^2(\bar{\sigma})$  определяется уравнением

$$\int_0^{\chi_{n-1}^2(\bar{\sigma})} k_{n-1}(x) dx = \bar{\sigma}. \quad (21.25)$$

Построим доверительный интервал по реализациям выборки исследуемого в примере 21.1 распределения. При доверительной вероятности  $\gamma = 0.95$   $\chi_{n-1}^2((1-0.95)/2) = 16.05$ ,  $\chi_{n-1}^2((1+0.95)/2) = 45.72$ . Тогда по первой реализации выборки получим  $(\tilde{y}_1^2, \tilde{y}_2^2) = (0.66, 1.87)$ , а по второй –  $(\tilde{y}_1^2, \tilde{y}_2^2) = (0.59, 1.68)$ . Столь широкий доверительный интервал связан со слишком большим значением доверительной вероятности. Если уменьшить требования к уровню доверия до  $\gamma = 0.9$ , то получим, соответственно  $(\tilde{y}_1^2, \tilde{y}_2^2) = (0.705, 1.69)$  и  $(\tilde{y}_1^2, \tilde{y}_2^2) = (0.63, 1.52)$ .

#### 21.4. Проверка статистической гипотезы о виде распределения.

##### Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия Пирсона ( $\chi^2$ )

В 21.1. был описан метод построения оценок для функции распределения  $F_\xi(x)$  и плотности распределения вероятностей  $f_\xi(x)$ , а именно, эмпирической функции распределения  $F_n(x)$ , и эмпирической плотности распределения вероятностей  $f_n(x)$  соответственно. При этом была показана их состоятельность. Поэтому законно ожидать, что реализации  $F_n^*(x)$  и  $f_n^*(x)$  приближенно воспроизводят соответствующие теоретические функции. Следующей задачей, как и при оценивании числовых параметров распределения, может быть оценка степени близости функций  $F_n^*(x)$  и  $f_n^*(x)$  к теоретическим функциям распределения. Эту задачу можно сформулировать как задачу построения

доверительных “зон” для  $F_\xi(x)$  и  $f_\xi(x)$ . Возможна и более сильная постановка задачи: проверить гипотезу  $H$  – не является ли  $(x_1, \dots, x_n)$  реализацией выборки из известного распределения  $F_\xi^{(H)}(x)$ . Иначе говоря, речь идет о том, чтобы по функции  $F_n^*(x)$  “угадать” функцию  $F_\xi^{(H)}(x)$ , которой и оказывается функция  $F_\xi(x)$ . Постановка задачи – странная, поскольку можно придумать бесконечное количество функций, обладающих свойствами функции распределения. Однако она перестает быть странной, если иметь в виду следующие возможные ответы в данной задаче: “статистические данные не противоречат гипотезе  $H$ , и гипотеза принимается”; “статистические данные противоречат гипотезе  $H$ , и гипотеза с определенной вероятностью ошибки отвергается”. Очевидно, необходим критерий, для того, чтобы принять или отвергнуть гипотезу о распределении – *критерий согласия*.

Рассмотрим два способа построения критерия согласия.

**Первый способ** основан на двух теоремах – теореме Гливленко и теореме Колмогорова. По теореме Гливленко отклонение  $D_n \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_\xi(x)|$  эмпирической функции распределения от теоретической при неограниченном увеличении объема выборки стремится к нулю по вероятности на всей числовой оси:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0) = 1 \quad (21.26)$$

Теорема Колмогорова позволяет определить распределение вероятностей для отклонения  $D_n$  при больших объемах выборки:

$$P(D_n \leq t/\sqrt{n}) = K(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-2m^2 t^2} . \quad (21.27)$$

Функция  $K(t)$  в (21.27) называется функцией Колмогорова. Если гипотетическое распределение  $F_\xi^{(H)}(x)$  близко к истинному распределению  $F_\xi(x)$ , то в

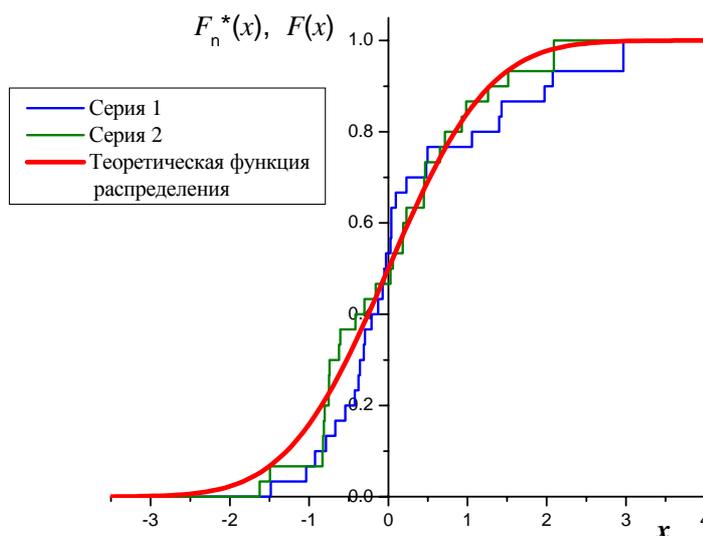
соответствии с приведенными теоремами вероятность больших значений отклонения  $D_n^{(H)} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_\xi^{(H)}(x)|$  должна быть мала. Можно принять по договоренности, что при  $F_\xi^{(H)}(x) = F_\xi(x)$  событие  $\left(D_n^{(H)} \geq \frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ , вероятность которого меньше заданного числа  $\alpha \ll 1$ , есть с практической точки зрения невозможное событие. Число  $\alpha$  называют уровнем значимости критерия согласия. По уровню значимости  $\alpha$  определяется критическая граница  $\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}$  для отклонения  $D_n^{(H)}$ :

$$P\left(D_n^{(H)} \geq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) = 1 - K(t_\alpha) = \alpha. \quad (21.28)$$

Если событие  $\left(D_n^{(H)} \geq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)$  реализовалось, то есть, если отклонение  $D_n^{(H)} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n^*(x) - F_\xi^{(H)}(x)|$  оказалось большим величины  $\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}$ , то следует отвергнуть гипотезу  $F_\xi^{(H)}(x)$ . Если же произошло событие  $\left(D_n^{(H)} \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)$ , то статистические данные не противоречат гипотезе, и гипотеза принимается.

Проверим с уровнем значимости  $\alpha = 0.01$  гипотезу  $H$  о том, что в примере 21.1 реализуется выборка из нормального распределения с параметрами  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$ . Если эта гипотеза верна, то отклонение  $F_n^*(x)$  от  $F_\xi^{(H)}(x)$  на величину большую, чем  $\frac{t_{0.01}}{\sqrt{30}} = \frac{1.3581}{\sqrt{30}} = 0.248$ , считаем невозможным событием. Для первой реализации выборки значение  $D_{30}^{(H)} = 0.129$ , для второй реализации  $D_{30}^{(H)} = 0.103$ . Следовательно, гипотеза о нормальном распределении  $N(0,1)$  принимается. На рисунке 21.4 представлены графики для реализаций эмпирической функции распределения вместе с графиком принятой по гипотезе  $H$  функции нормального распределения.

**Замечание.** Выбор параметров  $a=0$ ,  $\sigma=1$  нормального распределения вполне обоснован предыдущими вычислениями. По первой реализации выборки математическое ожидание  $a$  оценивается выборочным средним  $\bar{x} \approx 0.1$ , для второй реализации  $\bar{x} \approx 0.08$ . Параметр  $\sigma$  оценивается значениями  $s \approx 1$  и  $s \approx 0.93$  для первой и второй реализаций соответственно. Кроме того, принятые значения для  $a$  и  $\sigma$  покрываются соответствующими доверительными интервалами, построенными и по первой, и по второй реализациям.



**Рис. 21.4.** Реализации эмпирической функции распределения и функция нормального распределения  $N(0,1)$ .

**Второй способ.** Проверка гипотезы о виде распределения по критерию Пирсона основана (для абсолютно непрерывных распределений) на сравнении плотности распределения вероятностей  $f_{\xi}^{(H)}(x)$ , принимаемой по гипотезе, и эмпирической плотности распределения  $f_n(x)$ . В качестве меры отклонения функции  $f_n(x)$  от  $f_{\xi}^{(H)}(x)$  используется величина

$$\chi_n^2 = n \sum_{i=0}^n \frac{((H_i/n) - p_i^{(H)})^2}{p_i^{(H)}}. \quad (21.29)$$

В формуле (21.29)  $p_i^{(H)}$  – вероятности попадания СВ в интервал  $I_i$ , определяемые плотностью распределения вероятностей  $f_\xi^{(H)}(x)$  (выборочные частоты  $n_i/n$  определены в 21.1). Выбор меры отклонения (21.4) обусловлен тем, что в пределе  $n \rightarrow \infty$  распределение СВ  $\chi_n^2$ , во-первых, не зависит от принимаемой гипотезы  $f_\xi^{(H)}(x)$ , и, во-вторых, оно известно: это распределение  $k_{N-1}(x)$  Пирсона с числом степеней свободы  $N - 1$ . Далее рассуждения проводятся так же, как и в 21.4. Если функция  $f_\xi^{(H)}(x)$  “угадана”, то есть, если  $f_\xi^{(H)}(x) \approx f_\xi(x)$ , то вероятность больших значений СВ  $\chi_n^2$  мала, так как при  $n \rightarrow \infty$  относительные частоты  $n_i/n$  близки (по вероятности) к вероятностям  $p_i^{(H)}$ . Принимаем, что большие отклонения  $\chi_n^2 \geq \chi_{N-1}^2$ , вероятность которых меньше заданного очень малого числа  $\alpha \ll 1$ , нереализуемы. Если же по реализации выборки такое отклонение

$$X_n^2 = n \sum_{i=0}^{N-1} \frac{((n_i/n) - p_i^{(H)})^2}{p_i^{(H)}} \quad (21.30)$$

получено, то гипотеза  $H$  должна быть отвергнута. Критическая граница  $\chi_{1-\alpha, N-1}^2$  для отклонения  $X_n^2$ , соответствующая уровню значимости  $\alpha$ , определяется уравнением

$$P(\chi_n^2 \geq \chi_{1-\alpha, N-1}^2) = \int_{\chi_{1-\alpha, N-1}^2}^{\infty} k_{N-1}(x) dx = \alpha. \quad (21.31)$$

Проверим с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$  гипотезу о том, что 2 выборки объемом  $n = 100$  и  $n = 1000$ , приведенные в примере 21.2, принадлежат нормальному распределению с параметрами  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$ . При построении гистограммы для первой выборки ( $n = 100$ ) данные были сгруппированы в 10 интервалов, следовательно число степеней свободы равно 9. Из таблицы находим значение для критической границы  $\chi_{0.95, 9}^2 = 16.9$ . По формуле (21.30) вычисляем величину

$X_{100}^2 = 12.0899$ . Поскольку  $X_n^2 < \chi_{0.95,9}^2$ , гипотеза о принадлежности первой выборки нормальному распределению  $N(0,1)$  принимается. Для выборки объемом  $n = 1000$ , сгруппированной в 26 интервалов,  $\chi_{0.95,25}^2 = 37.7$  и  $X_{100}^2 = 22.5238$ . И в данном случае гипотеза о нормальном распределении  $N(0,1)$  подтверждается. На рисунках 21.5(a), 21.5(b) представлены соответствующие гистограммы вместе с графиком принятой по гипотезе плотности распределения вероятностей.

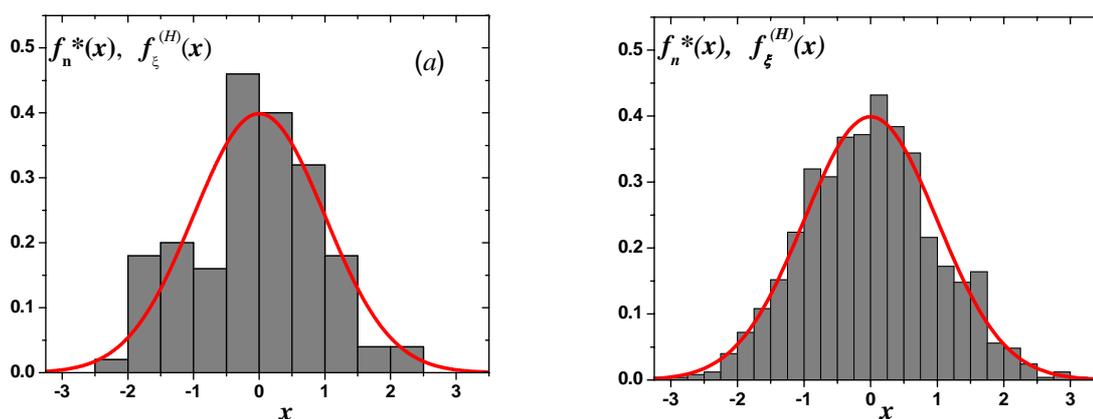


Рис. 21.5. a, b Гистограммы, построенные для выборок объемом 100 (a) и 1000 (b), и функция нормального распределения  $N(0,1)$ .

## 21.5. Регрессионный анализ

### Модели регрессии

Одной из важнейших задач математической статистики является задача о нахождении связи между двумя случайными величинами  $X$  и  $Y$ . Во многих случаях одна из двух величин может быть и неслучайной. Предположим, что функциональная зависимость между переменными, называемая моделью, известна из предварительных сведений с точностью до параметров  $\mu_1, \dots, \mu_k$  и имеет вид

$$y_i = f(x_i, \mu_1, \dots, \mu_k), \quad i = \overline{1, n}. \quad (21.32)$$

Требуется по результатам наблюдений  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , найти оценки неизвестных параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Модель в простейшем линейном случае имеет вид, т. е.

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \alpha_j x_{i,j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (21.33)$$

где  $x_i$  – неслучайные аргументы, а  $y$  – случайная величина. Таким образом, здесь аргументы  $x_i$  определяют  $y$  лишь в среднем, оставляя просторы для случайных колебаний.

Ситуация, в которой экспериментатор может выбирать значения аргументов  $x_i$  по своему желанию и таким образом планировать будущие эксперименты, называется активным экспериментом. В этом случае значения аргументов  $x_i$  обычно рассматриваются как неслучайные. В отличие от этой ситуации в пассивном эксперименте значения переменных  $x_i$ , складываются вне воли экспериментатора, под действием других обстоятельств. Поэтому значения  $x_i$  приходится толковать как случайные величины, что накладывает особые черты на интерпретацию результатов.

Итак, в регрессионном анализе предполагается, что можно прямо или косвенно контролировать одну или несколько независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$  и их значения вместе с множеством параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  определяют математическое ожидание зависимой переменной  $Y$ . Задача состоит в вычислении оценок параметров с помощью выборочных данных.

Возникает вопрос, почему представляет интерес регрессия? Очень часто применение регрессии связано с необходимостью оценить (или предсказать) среднее значение  $Y$  при конкретных значениях переменных  $x_i$ . Иногда требуется установить определенную функциональную связь между  $x_i$  и математическим ожиданием  $Y$ . В общем случае какая-нибудь форма функциональной связи является полезным источником информации о зависимости переменной  $Y$  от  $x_i$ .

При попытках аппроксимировать данные кривой или поверхностью сначала предполагается существование функциональной зависимости определенного вида. С помощью данных и соответствующих математических вычислений находят оценки параметров, дающие наилучшее приближение согласно какому-либо критерию. Можно выяснить, насколько хороша данная зависимость, но не исключено, что удастся получить лучшую, выбрав другую функцию и другой критерий.

Здесь стоит подчеркнуть одно существенное обстоятельство. Имея в своем распоряжении компьютер, сравнительно легко перебрать большое количество разных функций, аппроксимирующих данные. Это сильное искушение, так как можно без конца перебирать комбинации и преобразования данных, надеясь получить идеальный вариант. Совершенно неправильно считать, что найденное уравнение будет наилучшим только потому, что оно дает хорошее приближение, если оно несколько не соответствует реальным физическим или техническим связям. В любой регрессионной задаче в первую очередь следует рассматривать физически обоснованную конкретную функциональную форму независимо от того, была ли она получена с помощью аналитических выводов или благодаря какому-нибудь иному предварительному знанию свойств переменных. Вполне возможно, что для аппроксимации этой функции понадобятся другие функциональные связи.

В последнее время регрессионный анализ – очень бурно развивающаяся отрасль вычислительной математики. Благодаря этому возникло целое направление, связанное с решением плохо обусловленных задач. Появилось огромное число подходов, алгоритмов и программ, позволяющих в этих нелегких условиях более или менее рационально организовывать вычислительные процедуры.

При оценивании параметров регрессий приходится прибегать к поисковым методам, имеющим итеративный характер. Для их реализации написаны многочисленные программы, развитие которых вылилось в метод всех возможных

регрессий, а затем в шаговый регрессионный анализ. При этом необходимо отметить несколько тенденций, определяющих методы и темпы развития регрессионного анализа.

Первая тенденция заключается в пересмотре довольно жестких базовых предпосылок классического регрессионного анализа. Это касается таких предположений, как нормальность распределения ошибок, однородность, независимость и т. п. Отказ хотя бы от одного из перечисленных предположений фактически приводит к созданию новой модели.

Вторая тенденция состоит в вовлечении в регрессионный анализ более тонких математических методов, таких как функциональный анализ, теория групп, обобщение регрессионной задачи на бесконечномерные пространства.

Третья тенденция – обращение ко все более сложным объектам исследования. Речь может идти о моделях в форме обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, уравнений математической физики.

Наконец, четвертая тенденция – одновременный выбор модели и метода оценивания, итеративная обработка результатов и адаптация модели и метода оценивания друг к другу.

Рассмотрим сначала простейшую регрессионную задачу: построим уравнение линейной регрессии в рамках гауссовской модели наблюдений.

Пусть имеется  $n$  парных наблюдений  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , причем примем, что переменная  $x$  – регрессор – неслучайна и измеряется без ошибок. Если при этом есть признаки связи между наблюдениями, то обычно исследователь спешит построить некоторую кривую, чаще всего прямую линию, связывающую все эти наблюдения. Для нахождения параметров уравнения регрессии обычно используется метод наименьших квадратов или метод максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов при оценке параметров регрессии не требует никаких предположений о нормальности распределения ошибок, но

они становятся необходимыми при построении доверительных интервалов и для проверки гипотез о значениях параметров уравнения регрессии.

Рассмотрим одномерную линейную модель вида

$$y_i = \bar{b} + v x_i + e_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (21.34)$$

где  $e_i$  – ошибки измерений переменной  $y$  предполагаются независимыми случайными величинами, распределенными нормально:  $e_i \in N(0, D_e)$ .

Наша задача состоит в том, чтобы по наблюдениям найти оценки  $a = \hat{\alpha}$ ,  $b = \hat{v}$  и  $s^2 = \hat{D}$  для параметров  $\alpha, \beta, D$  соответственно.

Перечислим еще раз все явные и неявные предположения, принимаемые в рамках модели наблюдений. От их выполнения зависит качество получаемых оценок и возможность применения к ним процедур статистического анализа.

1. Значения  $x$  задаются или измеряются без ошибок.
2. Регрессия  $Y$  на  $X$  линейна, т. е.  $M(Y/X) = \bar{b} + v x$ .
3. Отклонения  $y_i - M(Y/x_i)$  взаимно независимы.
4. Эти отклонения имеют одну и ту же дисперсию  $D$ , точное значение которой неизвестно, при всех  $x$ . Это свойство называется *гомоскедастичностью*, а сами дисперсии – гомоскедастичными.
5. Отклонения распределены по нормальному закону.
6. Данные действительно были взяты из совокупности, относительно которой должны быть сделаны выводы.
7. Не было посторонних переменных, существенно уменьшающих значения связи между  $X$  и  $Y$ .

Полезно отметить последствия невыполнения некоторых предположений. Невыполнение третьего предположения может существенно повлиять на характеристики применяемых статистических методов из-за не учета зависимости между переменными, представляющими измерения над разными объектами. Хотя

отклонения от нормальности встречаются довольно часто, они имеют значение, только если очень значительны. Отсутствие гомоскедастичности приводит к тому, что метод наименьших квадратов не гарантирует минимальных дисперсий оценок. Невыполнение последних двух предположений также имеет принципиальное значение. Если они нарушены, полезность проведенного исследования незначительна.

## 21.6. Оценка параметров линейной одномерной регрессии

### Оценка параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов (МНК)

Перепишем уравнение регрессии в другом виде

$$y = \bar{b} + b(x - \bar{x}), \quad (21.35)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Эта прямая называется *теоретической линией регрессии* или *прямой отклика*. Уравнение

$$\hat{y} = a + b(x - \bar{x}) \quad (21.36)$$

определяет кривую, которая является оценкой для прямой регрессии.

Суть метода наименьших квадратов состоит в выборе таких оценок  $a$  и  $b$ , которые бы минимизировали сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений  $y_i$  от прогнозируемых величин  $\hat{y}_i$ , полученных подстановкой значений  $x_i$  в уравнение (21.33), т. е.  $R = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - a - b(x_i - \bar{x}) \right]^2 \Rightarrow \min$ . Чтобы найти значения  $a$  и  $b$ , минимизирующие  $R$ , продифференцируем эту функцию по  $a$  и  $b$  и приравняем производные нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - a - b(x_i - \hat{x})] = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - a - b(x_i - \bar{x})](x_i - \bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Раскроем здесь члены под знаком суммы:

$$\sum_{i=1}^n y_i - a - b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x}) - a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) - b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0.$$

Но  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$ .

Тогда  $na \sum_{i=1}^n y_i$ ,  $b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i$ . Отсюда легко получить оценки параметров  $a$  и  $b$ :

$$a = \hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}, \quad b = \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (21.37)$$

Вторую оценку часто видоизменяют и переписывают в следующем виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \bar{y} = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}). \end{aligned}$$

Тогда

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (21.38)$$

Рассмотрим теперь свойства полученных оценок. Они являются несмещенными, состоятельными и эффективными в классе линейных (относительно наблюдений) оценок. Действительно,

$$M(a) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(\bar{b} + \mathbf{b}(x_i - \bar{x}) + \mathbf{e}_i) = \frac{1}{n} \left[ \bar{b} n + \mathbf{b} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \right] = \bar{b}$$

$$\begin{aligned} M(b) &= M\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 M(y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x}) M(\bar{b} + \mathbf{b}(x_i - \bar{x}) + \mathbf{e}_i))}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \\ &= \bar{b} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \mathbf{b} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что переменные  $x_i$  – неслучайные, а  $y_i$  – случайные величины. Кроме того, математическое ожидание  $y_i$  – есть теоретическая линия регрессии (21.35).

Найдем теперь дисперсии оценок  $a$  и  $b$  в предположении, что наблюдения  $y_i$ , независимы и нормально распределены, причем  $D(y_i) = D = y^2$  (предположения 21.34, 21.35 и 21.36 предыдущего раздела). Имеем:

$$D(a) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(y_i) = \frac{D}{n^2} n = \frac{D}{n},$$

$$D(b) = D \left( \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 D(y_i) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 D}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} = \frac{D}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Состоятельность оценок  $a$  и  $b$  немедленно следует после применения к ним неравенства Чебышева. Например, для оценки  $a$  получим

$$P(|a - \bar{\sigma}| \geq \epsilon) \leq \frac{D(a)}{\epsilon^2} = \frac{D}{n\epsilon^2}.$$

Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|a - \bar{\sigma}| \geq \epsilon) = 0$ .

В общем случае доказательство того, что метод наименьших квадратов дает оценки с наименьшей дисперсией в классе всех несмещенных линейных оценок, довольно сложно. Приведем его для оценки  $b$  параметра  $v$ . Предположим, что существует еще одна линейная оценка  $b'$  параметра  $v$ , отличная от оценки  $b$  и пусть, например,  $b' = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ . Очевидно, что

$$M(b') = \sum_{i=1}^n c_i M(y_i) = \sum_{i=1}^n c_i (\bar{\sigma} + v(x_i - \bar{x})) = \bar{\sigma} \sum_{i=1}^n c_i + v \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) c_i.$$

Оценка  $b'$  будет несмещенной, если  $M(b') = v$ , т. е.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) c_i = 1. \end{cases} \quad (21.39)$$

В этих условиях

$$\begin{aligned}
D(b') &= \sum_{i=1}^n c_i^2 D(y_i) = D \sum_{i=1}^n c_i^2 = D \sum_{i=1}^n \left( c_i - \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 = \\
&= D \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} - 2 \sum_{i=1}^n c_i \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n c_i \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} \right) = D \left( \sum_{i=1}^n \left( c_i - \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left( c_i - \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right).
\end{aligned}$$

Но  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  – это константа, т. е. выражение под этой суммой уже не зависит от индекса внешнего суммирования. Тогда

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

с учетом условий (21.39). Аналогично

$$\sum_{i=1}^n \left( c_i - \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} \sum_{i=1}^n \left( c_i (x_i - \bar{x}) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - (x_i - \bar{x})^2 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \sum_{i=1}^n \left( (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}) - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) = \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Поэтому  $D(b') = D \sum_{i=1}^n \left( c_i - \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 + \frac{D}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ .

Последний член в полученном выражении является константой. Следовательно, минимизировать  $D(b')$  можно только за счет уменьшения первого члена. Полагая

$$c_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

мы обратим первый член в нуль (меньше он не может быть) и тем самым минимизируем  $D(b')$ . Но если в формулу  $b' = \sum_{i=1}^n c_i y_i$  подставить значения  $c_i$ , при которых  $D(b')$  минимальна, то альтернативная оценка  $b'$  примет вид

$$b' = \sum_{i=1}^n c_i y_i = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

что совпадает с оценкой наименьших квадратов. Поэтому  $b$  – линейная несмещенная оценка параметра  $\beta$  с минимальной дисперсией.

## Интервальные оценки параметров линейной регрессии и кривой регрессии

Построим теперь доверительные интервалы для параметров  $\bar{b}$  и  $b$  в линейной регрессии. Так как

$$\hat{y} = a + b(x - \bar{x}) \text{ и } D(a) = \frac{D}{n}, \quad D(b) = \frac{D}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

то

$$M(\hat{y}) = M(a + b(x - \bar{x})) = M(a) + (x - \bar{x})M(b) = \bar{b} + b(x - \bar{x}) = y,$$

$$D(\hat{y}) = D(a + b(x - \bar{x})) = D(a) + (x - \bar{x})^2 D(b) = \frac{D}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2 D}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) D.$$

$D(\hat{y})$  есть выражение для дисперсии в текущей точке  $x$ .

Очевидно, что  $\hat{y}$  – кроме того линейная функция от оценок  $a$  и  $b$ , которые в свою очередь являются линейными оценками от нормально распределенных наблюдений  $y_i$ .

Следовательно,  $\hat{y}$  – нормально распределенная случайная величина, и для нее может быть построен доверительный интервал стандартным образом. То же можно сказать и об оценках коэффициентов регрессии.

Заметим, что  $a$  и  $b$  независимы друг от друга, так же как независима от них оценка  $\hat{D}$  дисперсии  $D$ . Это можно доказать, рассмотрев, например,  $M(ab)$ . После несложных вычислений будет видно, что  $M(ab) = K(a, b) = 0$ .

Следовательно  $a$  и  $b$  – некоррелированы, а поскольку мы остаемся в рамках гауссовской модели, то и независимы.

В предыдущих разделах было показано, что дробь

$$nD/D \in \chi_{n-1}^2, \quad \hat{D} = D^*.$$

В нашем случае

$$\hat{D} = D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - a - b(x_i - \bar{x}))^2.$$

Так как на случайные величины  $y_i$ , входящие в эту формулу, наложены два условия связи вида  $\frac{\partial R}{\partial a} = 0$  и  $\frac{\partial R}{\partial b} = 0$ , то число степеней свободы уменьшается на число связей и  $nD/D \in \chi_{n-2}^2$ .

Составим дроби Стьюдента для  $a$  и  $b$ . В нашем случае

$$a \in N\left(\alpha, \frac{D}{n}\right), \quad b \in N\left(\beta, \frac{D}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right),$$

а по теории

$$t = \frac{z\sqrt{n}}{\sqrt{\nu}}, \quad \text{где } z \in N(0,1), \quad \nu \in \chi_n^2,$$

причем в этой дроби под корнем в числителе стоит число степеней свободы случайной величины  $\nu$ . Выберем в качестве стандартной нормальной случайной величины  $z$  сначала выражение

$$\frac{a - \alpha}{\sqrt{D/n}} = \frac{(a - \alpha)\sqrt{n}}{\sigma} \in N(0,1),$$

затем

$$\frac{b - \beta}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \in N(0,1).$$

Подставляя эти результаты в дробь Стьюдента, будем иметь

$$t_\alpha = \frac{a - \alpha}{\sqrt{D} \left( \sqrt{n\hat{D}} / \sqrt{D} \right)} = \frac{(a - \alpha)\sqrt{n-2}}{\sqrt{\hat{D}}} \in t_{n-2}.$$

Аналогично

$$t_b = \frac{(b - \beta) \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{n-2}}{\sqrt{D} \sqrt{n\hat{D}/D}} = \frac{(b - \beta) \sqrt{(n-2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n\hat{D}}} \in t_{n-2}.$$

Наконец, получим в явном виде доверительные интервалы для коэффициентов линейной регрессии.  $P(|a - \alpha| < \varepsilon) = \beta'$  по определению, где  $\beta'$  – доверительная вероятность.

$$P\left(\frac{(a - \alpha)\sqrt{n-2}}{\sqrt{\hat{D}}} < \frac{\varepsilon\sqrt{n-2}}{\sqrt{\hat{D}}}\right) = P\left(\frac{(a - \alpha)\sqrt{n-2}}{\sqrt{\hat{D}}} < t_{\beta'}\right) = P(|t| < t_{\beta'}) = \beta',$$

величина  $t_{\beta'}$  – может быть найдена из уравнения

$$2 \int_0^{t_{\beta'}} S_{n-2}(t) dt = \beta'.$$

Тогда

$$\varepsilon = t_{\beta', n-2} \sqrt{\frac{\hat{D}}{n-2}} \text{ и } I_\alpha = \left( a - t_{\beta', n-2} \sqrt{\frac{\hat{D}}{n-2}}, a + t_{\beta', n-2} \sqrt{\frac{\hat{D}}{n-2}} \right).$$

Точно такие же преобразования дают интервал для второго коэффициента

$$P(|b - \beta| < \varepsilon) = \beta',$$

тогда

$$P\left( \left| \frac{(b - \beta) \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n \hat{D} / (n-2)}} \right| < \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sqrt{n \hat{D} / (n-2)}} \right) = P(|t| < t_{\beta'}) = \beta'.$$

Отсюда

$$\varepsilon = t_{\beta', n-2} \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\hat{D}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$\text{и } I_\beta = \left( b - t_{\beta', n-2} \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\hat{D}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, b + t_{\beta', n-2} \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\hat{D}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right).$$

На практике часто возникает вопрос об оценке отклонения истинной прямой  $y = \alpha + \beta(x - \bar{x})$  от ее оценки  $\hat{y} = a + b(x - \bar{x})$  при некотором заданном значении  $x$ . Особенно важен этот вопрос при построении прогноза. Оценкой точности здесь также может служить интервальная оценка  $y$ .

Используя обычные рассуждения, приводящие к  $t$ -статистикам, получаем:

$$M(\hat{y}) = \alpha + \beta(x - \bar{x}) = y, \quad D(\hat{y}) = \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2} \right), \quad \hat{y} \in N\left(M(\hat{y}), D(\hat{y})\right).$$

Тогда

$$z = \frac{\hat{y} - y}{\sqrt{D(\hat{y})}} \in N(0,1), \quad \text{а } t = \frac{z\sqrt{n-2}}{\sqrt{n\hat{D}/D}} \in t_{n-2}.$$

В нашем случае дробь Стьюдента равна

$$t = \frac{(\hat{y} - y)}{\sqrt{D\left(\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}\right)} \frac{\sqrt{n\hat{D}}}{D}} \sqrt{n-2} = \frac{(\hat{y} - y)\sqrt{n-2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}\right) \hat{D}}} = (\hat{y} - y) d \in t_{n-2},$$

$$P\left(|\hat{y} - y| < \varepsilon\right) = \beta' \quad \text{и} \quad P\left(|(\hat{y} - y)d| < \varepsilon d\right) = P\left(|(\hat{y} - y)d| < t_{\beta'}\right) = P(|t| < t_{\beta'}) = \beta'.$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{t_{\beta'}}{d} = t_{\beta', n-2} \sqrt{\frac{\hat{D}}{n-2}} \sqrt{\left(1 + \frac{n(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}\right)}, \quad I_y = (\hat{y} - \varepsilon, \hat{y} + \varepsilon)$$

для любого конкретного  $x$ , так как  $\varepsilon = \varepsilon(x)$ . Очевидно, что длина доверительного интервала минимальна в точке  $x = \bar{x}$ . По мере удаления от  $\bar{x}$  точность оценки будет заметно снижаться.

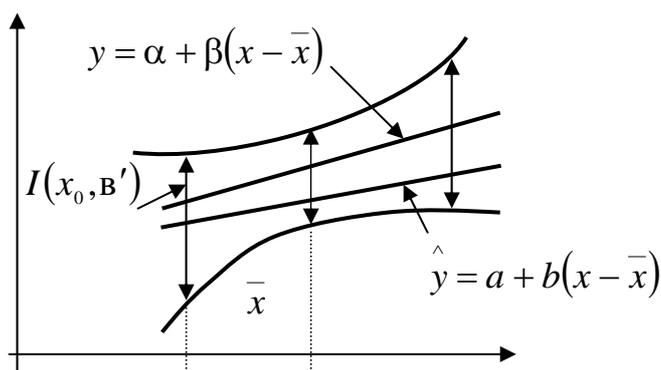


Рис. 21.6. Доверительные интервалы для линейной регрессии

Наименее надежная оценка МНК будет получаться для ординат, отвечающим точкам, наиболее удаленным от  $\bar{x}$  (рис. 21.6). Вертикальные отрезки на рисунке представляют собой доверительные интервалы в соответствующих точках.

### Проверка адекватности линейной регрессии

Проверка адекватности линейной регрессии проводится для оценки точности линейной регрессионной модели.

Основой такой проверки служат взаимные отклонения от установленной закономерности, т. е. величины  $y_i - \hat{y}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $\hat{y}_i = a + b(x_i - \bar{x})$ .

Поскольку аргумент  $x$  – одномерная переменная, точки  $(x_i, y_i - \hat{y}_i)$  можно изобразить на чертеже. Такое наглядное представление наблюдений позволяет иногда обнаружить в поведении остатков какую-либо зависимость от  $x$ . Однако визуальный анализ остатков возможен не всегда и не является правилом с контролируруемыми свойствами. Нужны точные методы.

Один из таких методов основывается на применении методов дисперсионного анализа к результатам регрессионного анализа. В этом случае

общая вариация отклика относительно его среднего распадается на вариацию, обусловленную моделью, и остаточную вариацию, приписываемую случайным ошибкам.

Рассмотрим тождество

$$y_i - \bar{y} = \left( y_i - \hat{y}_i \right) + \left( \hat{y}_i - \bar{y} \right).$$

Возведем его в квадрат и просуммируем по  $i$  от единицы до  $n$ . Получим

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \hat{y}_i - \bar{y} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_i \right) \left( \hat{y}_i - \bar{y} \right).$$

Но  $\bar{y} = a$ , тогда

$$\hat{y}_i - \bar{y} = \left( a + b(x_i - \bar{x}) \right) - a = b(x_i - \bar{x}) \text{ и } \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_i \right) \left( \hat{y}_i - \bar{y} \right) = 0$$

в силу условия

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_i \right) \left( x_i - \bar{x} \right) = 0.$$

Тогда для линейной модели будем иметь следующий вид разложения:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \left( a + b(x_i - \bar{x}) - \bar{y} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( a + b(x_i - \bar{x}) - \bar{y}_1 \right)^2, \quad (21.40)$$

где величина в левой части называется общей вариацией или суммой квадратов относительно среднего, первое слагаемое в правой части – суммой квадратов, обусловленной регрессией или моделью, второе слагаемое – сумма квадратов относительно модели регрессии или сумма квадратов ошибок. Формулу (21.40) можно переписать в виде  $R_{\Sigma} = R_0 + R_p$ . Отношение  $R^2 = R_p / R_{\Sigma} = 1 - R_0 / R_{\Sigma}$

называется множественным коэффициентом детерминации, а  $R$  – множественным коэффициентом корреляции. Они служат для оценки степени точности описания имеющихся данных уравнением регрессии, так как показывают долю разброса наблюдений около среднего значения  $\bar{y}$ , которая объясняется регрессией. Величина  $R^2$  принимает значения от 0 до 1. Если уравнение регрессии идеально описывает данные, то  $\hat{y}_i = y_i$  для всех  $i$  и поэтому  $R_0 = 0$   $R^2 = 1$ . Если  $\beta = 0$ , то есть регрессия  $y$  на  $x$  отсутствует, то  $\hat{y}_i = \bar{y}$  для всех  $i$  и поэтому  $R_p = 0$   $R^2 = 0$ .

При отсутствии повторных наблюдений проверяется гипотеза о равенстве коэффициента  $b$  нулю (в общем случае – об адекватности предлагаемой модели) с помощью  $F$ -критерия. Другими словами проверяется гипотеза о незначимости регрессии, то есть об отсутствии линейной зависимости переменной  $y$  от предикторной переменной  $x$ . Разность между наблюдениями  $y_i$  и теоретическими значениями  $y_i^T$ , определяемыми уравнением регрессии, можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_i - y_i^T &= \left( y_i - \hat{y}_i \right) + \left( \hat{y}_i - y_i^T \right) = \left( y_i - \hat{y}_i \right) + \left( a + b(x_i - \bar{x}) - \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) \right) = \\ &= \left( y_i - \hat{y}_i \right) + (a - \alpha) + (b - \beta)(x_i - \bar{x}). \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация последнего соотношения представлена на рис. 21.7. Возведем это равенство в квадрат и просуммируем по  $i = \overline{1, n}$ . В результате получим

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^T)^2 = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{y}_i \right)^2 + n(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (21.41)$$

Дробь  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^T)^2 / D$  имеет вид  $\chi_n^2$ -статистики, т. е. сумма  $\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^T)^2 \in \chi_n^2 D$ . Эта сумма разбита на три компоненты. Вторая и третья из них зависят лишь от  $a$  и  $b$  соответственно, и, следовательно, каждая имеет одну степень свободы. Первый член в правой части включает  $n$  разностей  $y_i - \hat{y}_i$ , на которые наложены два ограничения  $\frac{\partial R}{\partial a} = 0$  и  $\frac{\partial R}{\partial b} = 0$ , в силу чего он имеет  $n - 2$  степени свободы.

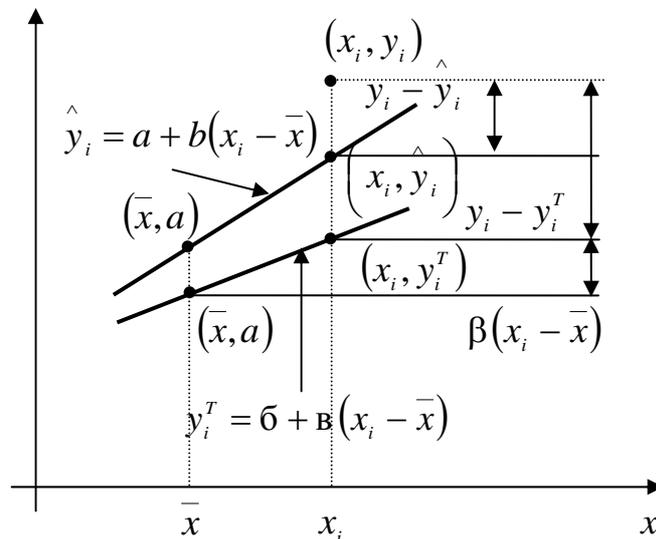


Рис. 21.7. Наблюдаемая и теоретическая линии регрессии

Поскольку сумма трех сумм квадратов в правой части (21.10) равна сумме квадратов левой части и это же имеет место для степеней свободы, каждый член в правой части распределен как  $\chi_n^2 D$  с соответствующим числом степеней свободы и эти члены независимы между собой.

Таким образом,

$$\frac{n(a - \alpha)^2}{D} \in \chi_1^2, \quad \frac{(b - \beta)^2 (x_i - \bar{x})^2}{D} \in \chi_1^2, \quad \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{d} \in \chi_{n-2}^2.$$

Теперь можно построить критерий для проверки гипотезы  $H_0: \beta = 0$ , составив отношение

$$\frac{\left( (b - \beta)^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / D \right) / 1}{\left( \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / D \right) / (n - 2)} = \frac{(b - \beta)^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\tilde{D}} \in F_{1, n-2},$$

где  $\tilde{D} = \frac{1}{n - 2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  – несмещенная оценка дисперсии ошибок наблюдений.

Если гипотеза  $H_0$  справедлива, то

$$\beta = 0 \text{ и } b^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / \tilde{D} \in F_{1, n-2}.$$

Практически при вычислении этого отношения величину  $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ , входящую в  $\tilde{D}$ , получают с помощью соотношения (21.40).

Надо заметить, что сформулированный критерий может сигнализировать скорее о наличии зависимости между  $x$  и  $y$ . О качестве аппроксимации исходных данных данной моделью лучше судить по ошибке  $\tilde{D}$ .

### Выбор наилучшей регрессии

Одна из основных задач регрессионного анализа состоит в решении вопроса о том, какие именно регрессоры (независимые переменные) следует включать в модель. Пусть  $x_1, \dots, x_k$  – полный набор всех возможных регрессоров, содержащий такие функции, как квадраты, смешанные произведения и прочие функции, которые кажутся подходящими. Для выбора некоторого подмножества из этой полной совокупности регрессоров есть два противоположных подхода.

С одной стороны, в модель для полноты учета следует включать по возможности наибольшее число регрессоров. С другой – при увеличении числа

регрессоров возрастают затраты на построение и использование модели, а также возрастает дисперсия прогноза. Подходящим компромиссом между этими двумя крайностями является процедура, называемая обычно “выбором наилучшего уравнения регрессии”. Термин “наилучшее”, конечно, субъективен. Нет никакой единой статистической процедуры для выбора соответствующего подмножества, и все статистические методы предполагают необходимость субъективного решения.

Подбор конкретного вида функциональной зависимости – наиболее трудная и творческая часть задачи регрессии.

## 21.7. Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 2-е, Наука, 1971.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. Наука, 1971.
3. Кошляков Н.С., Глипер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Высшая школа, 1970.
4. Лебедев И.И. Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
5. Михлин С.Г. Курс математической физики. Наука, 1968.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. 3-е, Физматгиз, 1961.
7. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. Наука, 1974.
8. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. Наука, 1966.
9. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Наука, 1966.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
11. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.
12. Арлей Н., Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., ИЛ, 1951.
13. Большев Л.Н., Смирнов С.В. Таблицы математической статистики. М., “Наука”, 1968.
14. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.
15. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., 1966.
16. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
17. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., 1964.

18. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
19. Смирнов И.В., Дунин-Барковский И.В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., «Наука», 1980.
20. Уилкс С. Математическая статистика. М., 1967.
21. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956.