Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет
Кафедра «Техническая физика»

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Пособие по физике для студентов дневной
и заочной формы обучения

Электронное учебное издание

Минск 2005

Составители: В.И. Кудин, М.Б. Ржевский

Рецензент: В.А. Самойлюкович, кафедра физики, БНТУ

В пособии рассмотрены физические основы классической механики в объеме первых пяти лекций по первой части курса общей физики «Механика и молекулярная физика». Изложенный материал может оказать помощь студентам первого курса в освоении лекционного материала, а также в подготовке к выполнению лабораторных работ физического практикума по данному разделу физики.

Оглавление

Физические основы классической механики

Классическая механика или механика Ньютона есть наука о движении и равновесии тел. Под движением в механике понимается перемещение тел или их частей друг относительно друга. Механику можно разделить на три раздела: кинематику, динамику и статику.

Кинематика изучает движение тел, не интересуясь причинами, обусловливающими это движение.

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обусловливают тот или иной характер движения.

Статика изучает условия равновесия тел под действием сил.

При изучении движения какого-либо тела обязательно нужно указать, по отношению к каким другим телам происходит данное движение. Кроме того, для описания движения необходимо также определять время. Это делается с помощью любого периодического процесса (в частности, с помощью часов).

Система отсчета – это совокупность тела отсчета, системы координат (например, декартовой), связанной с телом отсчета, и выбранного способа измерения времени (часы).

1. Кинематика материальной точки

Материальная точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. При движении такого тела можно считать, что все вещество тела как бы сосредоточено в одной геометрической точке. Материальная точка есть идеализированный образ реально существующих тел. Вопрос о том, можно ли данное конкретное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров этого тела, а от условий задачи. Одно и то же тело в одних случаях может рассматриваться как материальная точка, в других – как протяженное тело. Например, Землю при рассмотрении ее орбитального движения вокруг Солнца с большой точностью можно принять за материальную точку. Но эта идеализация не годится при рассмотрении вращения Земли вокруг собственной оси, ибо бессмысленно говорить о вращении геометрической точки вокруг оси, проходящей через эту точку.

Материальная точка при своем движении описывает некоторую линию, которая называется *траекторией*. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движение. Основными понятиями в кинематике являются: путь и перемещение.

Путь s – это расстояние между точками *1* и *2*, отсчитанное вдоль траектории (рис. 1.1). Путь s – величина скалярная.

Перемещение $\Delta\vec{r}$ – это вектор, проведенный из точки *1* в точку *2*. Перемещение $\Delta\vec{r}$ – величина векторная.

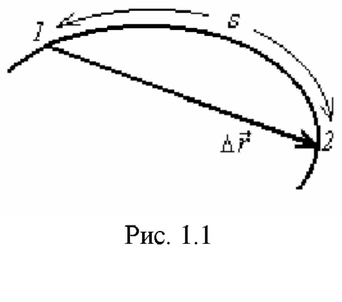

Рис. 1.1

Путь и перемещение в СИ измеряются в метрах (м).

Следует заметить, что в общем случае $s \neq |\Delta\vec{r}|$, но если материальная точка движется по прямой и в одну сторону, то $s = |\Delta\vec{r}|$. Это можно проиллюстрировать следующими примерами:

1. Материальная точка, движущаяся по окружности радиуса R, совершила один оборот. При этом перемещение точки $\Delta\vec{r} = 0$, а путь $s = 2\pi R \neq 0$.
2. Тело брошено вертикально вверх. Пока тело движется вверх $s = |\Delta\vec{r}|$, но для моментов времени, когда тело при своем движении начнет падать вниз, путь его становится больше модуля перемещения $s > |\Delta\vec{r}|$.

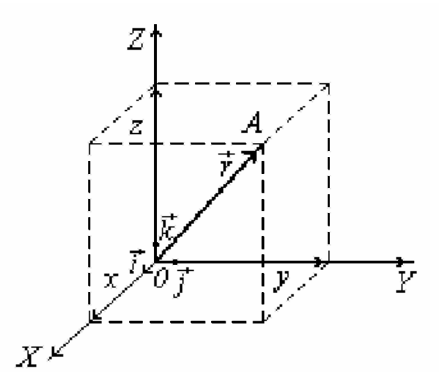

Рис. 1.2

Существуют три способа описания движения материальной точки: координатный, векторный и естественный.

1. Координатный способ.

Если с системой отсчета связать декартову систему координат (X, Y, Z) (рис. 1.2) , то положение материальной точки A можно задать с помощью координат (x, y, z). Траекторию движения определим, если будем знать функции:

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

2. Векторный способ.

В этом случае положение точки A будет определяться вектором $\vec{r}$, проведенным из начала отсчета O в данную точку A. Этот вектор $\vec{r}$ называется *радиусом-вектором* точки A. Траектория движения будет определяться функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Как видно, векторный способ описания движения более экономный, поскольку требует определения только одной векторной функции от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Для того чтобы установить связь между этими двумя способами описания, введем три единичных вектора, орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленных вдоль осей X, Y, Z, соответственно. Тогда, как видно из рис. 1.2,

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\ ,$$

а модуль радиуса-вектора $\vec{r}$ равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

3. Естественный способ.

При естественном способе описания движения материальной точки необходимо знать траекторию движения материальной точки. Тогда положение точки на траектории в разные моменты времени будет задаваться функцией пути от времени: $s = s(t)$.

Скорость при криволинейном движении материальной точки

Пусть материальная точка движется по траектории $\vec{r}\,(t)$, и пусть в момент времени t она находится в точке *1*, описываемой радиусом-вектором $\vec{r}_1$ (рис. 1.3). Рассмотрим достаточно близкий следующий момент времени $t + \Delta t$.

В этот момент времени материальная точка находится в точке *2*, и положение ее описывается радиусом-вектором $\vec{r}_2$. Тогда $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – *перемещение* материальной точки за время Δt, величина $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ – средняя скорость перемещения точки на участке траектории *1→2*, а величина $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ – средняя путевая скорость точки. Мгновенная скорость $\vec{v}$ материальной точки равна

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

где $\vec{v}$ – мгновенная скорость в данной точке траектории.

Эта формула справедлива и для прямолинейного движения материальной точки.

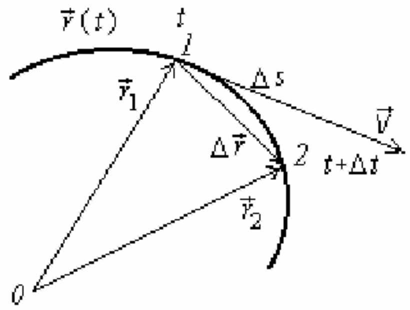

Рис. 1.3

Как видно из рис. 1.3, скорость $\vec{v}$ направлена по касательной к траектории. Далее при $\Delta t\to 0$ $\Delta r\to \Delta s$, и модуль скорости v равен производной от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Как всякий вектор, вектор скорости $\vec{v}$ можно выразить через его проекции на оси координат:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Скорость v в СИ измеряется в метрах в секунду (м/с).

Ускорение при криволинейном движении материальной точки

В механике вводится еще одна важная характеристика движения – *ускорение* $\vec{a}$, т. е. скорость изменения вектора скорости $\vec{v}$ во времени.

Среднее ускорение $<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, а мгновенное ускорение материальной точки равно

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Учитывая определение скорости $\vec{v}$, мгновенное ускорение $\vec{a}$ есть вторая производная от радиуса-вектора $\vec{r}$ по времени *t* (две точки означают вторую производную по времени *t*). Ускорение *a* в СИ измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с^2).

Легко установить связь с координатным представлением ускорения:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Особенно удобен естественный способ представления ускорения. В общем случае криволинейного движения мгновенное ускорение $\vec{a}$ направлено под некоторым углом к скорости $\vec{v}$. Представим вектор $\vec{a}$ в виде суммы двух векторов, один из которых направлен вдоль вектора скорости $\vec{v}$, т. е. по касательной к траектории, а второй по нормали к траектории в этой точке:

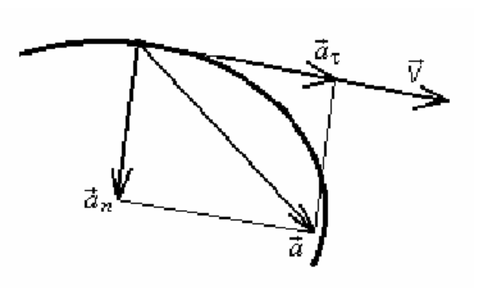

Рис. 1.4

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,.$$

Эти две составляющие ускорения имеют специальные названия: $\vec{a}_\tau$ – вектор тангенциального ускорения, $\vec{a}_n$ – вектор нормального ускорения.

Приступим теперь к определению величин векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Для этого нарисуем траекторию движения $\vec{r}\,(t)$ и снова выберем два близких момента времени t и $t + \Delta t$ (рис. 1.5).

В момент времени t материальная точка находилась в точке *1*, и скорость ее равнялась $\vec{v}_1$, а в момент времени $t + \Delta t$ – в точке *2*, и скорость ее равнялась $\vec{v}_2$. За время Δt вектор скорости $\vec{v}$ изменился как по модулю, так и по направлению. Для того чтобы определить $\Delta\vec{v}$, перенесем вектор $\vec{v}_2$ в точку *1* и представим $\Delta\vec{v}$ в виде суммы двух векторов $\Delta\vec{v}_n$ и $\Delta\vec{v}_\tau$:

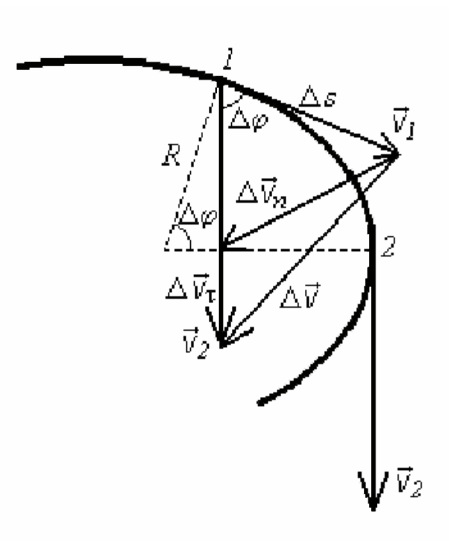

Рис. 1.5

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n\,.$$

При этом модуль вектора

$$\Delta v_\tau = v_2 - v_1\,.$$

Согласно определению ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,.$$

1. Как видно из построения, $\Delta v_\tau = \Delta v$ и модуль вектора $\vec{a}_\tau$ равен производной от модуля вектора скорости, т. е.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

2. Для нахождения модуля вектора $\vec{a}_n$ сделаем дополнительные построения (см. рис. 1.5), а именно, в точках *1* и *2* проведем нормали к траектории и будем считать достаточно малый участок кривой *1–2* дугой окружности радиуса R. Тогда $\Delta s = R\Delta\varphi$, откуда следует, что

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}.$$

Зная угол $\Delta\varphi$, найдем модуль вектора $\Delta \vec{v}_n$:

$$\Delta v_n = v_1 \Delta\varphi = \frac{v_1 \Delta s}{R}.$$

Возвращаясь к определению a_n, находим

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \Delta s}{R \Delta t} = \frac{v_1^2}{R},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где v – мгновенная скорость в данной точке траектории.

Рассмотрим два частных случая:

1. Равномерное движение материальной точки по окружности:

v = const.

Тогда тангенциальное ускорение равно нулю и полное ускорение равно нормальному, т. е. центростремительному ускорению:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$a = a_n = \frac{v^2}{R}.$$

2. Прямолинейное движение материальной точки.

В этом случае радиус кривизны траектории равен бесконечности и нормальное ускорение равно нулю. Полное ускорение равно тангенциальному и направлено вдоль направления движения, а именно, если $a > 0$, по направлению движения, если $a < 0$, против направления движения.

$$R = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R} = 0, \; a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Рассмотрим прямолинейное равноускоренное движение материальной точки, т. е. движение, при котором ускорение точки остается постоянным. Координатную ось X выберем вдоль прямой, по которой движется точка. Тогда из формулы

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt.$$

Интегрирование последнего уравнения при a = const дает

$$v = v_0 + at, \tag{1.1}$$

где v_0 – начальная скорость точки, т. е. скорость точки в момент времени $t = 0$. В этой формуле v – проекция вектора скорости на ось X.

Далее из определения

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt = v_0 dt + atdt .$$

Интегрирование этого выражения приводит к формуле для координаты точки

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где x_0 – начальная координата точки. Выбирая ее равной нулю, получим

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (1.2)$$

Однако заметим, что эта формула для перемещения точки, а не для пути. Исключая из формул (1.1) и (1.2) время t, получим полезную формулу для зависимости $s = f(v)$:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad \text{или} \quad v^2 - v_0^2 = 2as .$$

В заключение приведем графики скорости и координаты точки при прямолинейном равноускоренном движении (рис. 1.6).

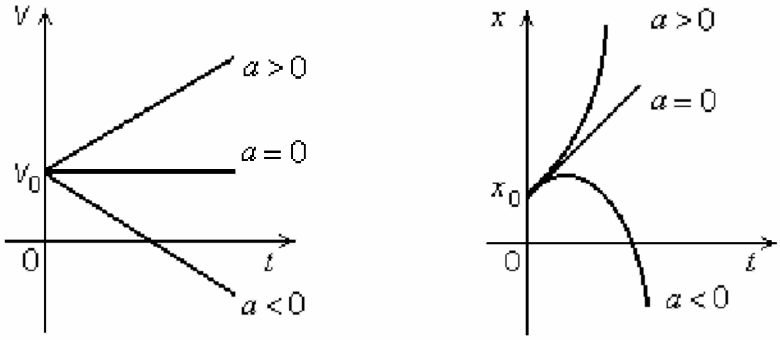

Рис. 1.6

2. Кинематика вращательного движения твердого тела

Абсолютно твердым телом или просто твердым телом в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми остаются неизменными при движении этой системы как целого в пространстве и времени. Реальные тела можно приближенно рассматривать как абсолютно твердые тела, если деформации, возникающие под действием внешних сил, малы и при решении поставленной задачи о движении твердого тела не учитываются.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

Вращательное движение – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*. Ось вращения может находиться и вне тела.

Вращение твердого тела описывается углом поворота $\varphi(t)$, на который повернулось тело за время t. Поворот тела на некоторый угол φ можно задать в виде отрезка, длина которого равна φ, а направление совпадает с осью, вокруг которой производится поворот. Направление поворота и изображающего его отрезка связывается *правилом правого винта*, т. е. направление отрезка должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него, видели поворот, совершающимся по часовой стрелке. Повороты на конечные углы складываются не по правилу параллелограмма и поэтому не являются векторами. Иначе обстоит дело для поворотов на очень малые углы $\Delta\varphi$. В этом случае два совершаемых последовательно малых поворота $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ обусловливают такое же перемещение любой точки тела, как и поворот $\Delta\varphi_3$, получаемый из $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ сложением по правилу параллелограмма, т. е. очень малые повороты можно рассматривать как векторы $\vec{\Delta\varphi}$, и в нашем случае

$$\vec{\Delta\varphi_3} = \vec{\Delta\varphi_1} + \vec{\Delta\varphi_2}.$$

Введем следующие понятия:

среднюю угловую скорость $\langle \vec{\omega} \rangle = \dfrac{\vec{\Delta\varphi}}{\Delta t}$ и мгновенную угловую скорость вращающегося твердого тела

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta\varphi}}{\Delta t} = \frac{\vec{d\varphi}}{dt},$$

где Δt – время, за которое совершается поворот $\vec{\Delta\varphi}$. Угловая скорость ω в СИ измеряется в радианах в секунду (рад/с).

Угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую правилом правого винта. Модуль угловой скорости равен $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Вращение с постоянной угловой скоростью называется *равномерным вращением*. Если вращение является равномерным, то $\omega = \dfrac{\varphi}{t}$, где φ – конечный угол поворота за время t. Равномерное вращение можно характеризовать *периодом обращения* T – временем, в течение которого тело делает один оборот, т. е. поворачивается на угол 2π.

Тогда $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, откуда $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Число оборотов в единицу времени или *частота вращения* n равна:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi n$$ – *связь угловой скорости с частотой вращения.*

В СИ величина T измеряется в секундах (с), а n – в оборотах в секунду ($с^{-1}$).

Вектор $\vec{\omega}$ может изменяться как за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси, так и за счет поворота оси вращения в пространстве. Пусть за время Δt вектор $\vec{\omega}$ получает приращение $\Delta\vec{\omega}$. Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуется величи-

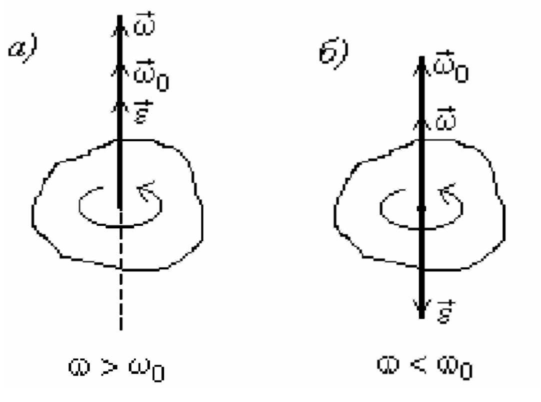

Рис. 2.1

ной, которая называется *угловым ускорением* $\vec{\varepsilon}$ и определяется следующим образом:

среднее угловое ускорение $<\vec{\varepsilon}>=\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ и мгновенное угловое ускорение вращающегося твердого тела

$$\vec{\varepsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Угловое ускорение ε измеряется в радианах на секунду в квадрате (рад/с^2).

Если ось вращения неподвижная, то угловое ускорение направлено вдоль оси вращения. При этом возможны два случая (рис. 2.1).

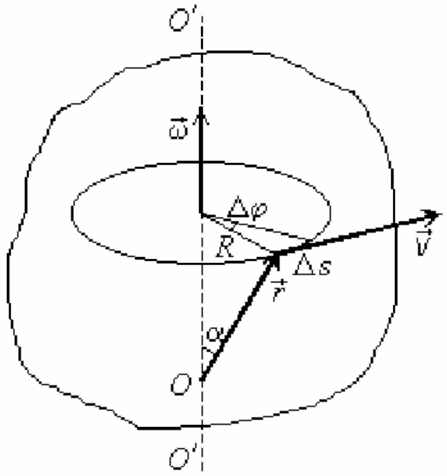

Рис. 2.2

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости $\vec{V}$. Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости V определяется скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ (рис. 2.2). Точка, находящаяся на расстоянии R от оси, проходит при этом путь $\Delta s = R\,\Delta\varphi$. Линейная скорость точки равна

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega$$

т. е.

$$V=\omega R. \qquad (2.1)$$

Теперь найдем выражение, связывающее векторы $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$. Положение рассматриваемой точки тела будем определять радиусом-вектором $\vec{r}$. Как видно из рис. 2.2, $R = r\sin\alpha$, и формула (2.1) примет вид

$$V=\omega r\sin\alpha,$$

откуда следует

$$\vec{V}=[\vec{\omega}\,\vec{r}]$$ - *связь между линейной и угловой скоростью для точек вращающегося твердого тела.*

Ускорение отдельной точки вращающегося тела представим в виде суммы

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n.$$

Действительно,

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\,\vec{r}]=[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\,\vec{r}]+[\vec{\omega}\,\frac{d\vec{r}}{dt}]=$$

$$=[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]+[\vec{\omega}\,\vec{V}]=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n.$$

Величина нормального ускорения a_n равна

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

величина тангенциального ускорения a_τ равна

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R,$$

а величина полного ускорения a равна

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что линейные кинематические величины могут быть выражены как произведение соответствующей угловой величины (скорость, ускорение) на радиус окружности.

В заключение приведем таблицу аналогии между прямолинейным и вращательным движением.

Прямолинейное движение	*Вращательное движение*
s	φ
v	ω
a	ε
$v =$	ωR
$a_\tau =$	εR
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$\varphi =$	$2\pi N$
$\omega =$	$2\pi n$
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$

где N – полное число оборотов, n – число оборотов в единицу времени.

3. Динамика материальной точки

В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в 1687 г.

Первый закон Ньютона: *Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Такое тело называется *свободным*, а его движение – *свободным движением* или *движением по инерции*. Первый закон Ньютона является идеализацией, так как все встречающиеся в природе движения возмущены различными воздействиями (силами), например, трением или гравитацией. Однако можно поставить тело в такие условия, когда внешние воздействия на него по возможности устранены или практически компенсируют друг друга.

Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется *инерциальной системой отсчета*. Инерциальных систем отсчета существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью), будет также инерциальной. Инерциальная система отсчета – это идеализированная модель. Только опытным путем устанавливается, можно ли данную систему отсчета считать инерциальной или она является неинерциальной. Так, опытными фактами доказывается, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является инерциальной, по крайней мере при изучении движений, происходящих в масштабе нашей планетной системы. Эта система отсчета называется *гелиоцентрической системой отсчета.*

Земля движется относительно Солнца по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и не является инерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большинстве случаев ее можно считать практически инерциальной. Вот почему при установлении основных законов динамики можно начать с изучения движения тел относительно Земли, т. е. принять Землю за инерциальную систему отсчета. Эта система отсчета называется *геоцентрической системой отсчета*.

Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения. Это свойство тел называется *инертностью*. В качестве количественной характеристики инертности используется величина, называемая *массой* тела m. Масса m в СИ измеряется в килограммах (кг).

Для количественной характеристики взаимодействия тел или полей вводится физическая величина, называемая *силой* $\vec{F}$. Все силы, встречающиеся в природе, известные в настоящее время, сводятся к силам гравитационного притяжения, электромагнитным силам, сильным и слабым взаимодействиям. Сильные и слабые взаимодействия проявляются в атомных ядрах и в мире элементарных частиц. Они действуют на малых расстояниях: сильные – на расстояниях порядка 10^{-15} м, слабые – на расстояниях порядка 10^{-18} м. В классической механике имеют дело с дальнодействующими силами (гравитационными и электромагнитными силами), а также с упругими силами и силами трения. Два последних вида сил определяются характером взаимодействия между молекулами вещества. Силы взаимодействия между молекулами имеют электромагнитное происхождение, и, следовательно, упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными.

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости или деформацию тела, или и то и другое вместе. Опыт показывает, что в случае, когда на разные тела действуют одинаковые воздействия, они могут вызывать разные по величине изменения скоростей этих тел. Чтобы описать этот опытный факт, вводится понятие *импульса* тела или *количества движения:*

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Единицей измерения импульса p в СИ является [1 кг·м/с].

Второй закон Ньютона: *Скорость изменения импульса тела равна геометрической сумме сил, действующих на данное тело:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (3.1)$$

Некоторая сила только тогда оказывает заметное воздействие, когда ее действие длится достаточное время. Это становится очевидным, если проинтегрировать уравнение

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

где $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$ – *импульс силы.*

Подставляя в (3.1) выражение для импульса тела $\vec{p} = m\vec{v}$, получим формулу:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Единицей измерения силы F в СИ является *ньютон* [1Н = 1 кг·м/с^2].

Следует отметить, что $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ не означает, что $\vec{F} = f(m, \vec{a})$.

Наоборот, $\vec{a} = f(m, \vec{F})$, т. е.

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} .$$

Это вторая формулировка второго закона Ньютона:

Ускорение, с которым движется тело, пропорционально геометрической сумме сил, действующих на данное тело, и обратно пропорционально массе этого тела.

Таким образом, признаками действия силы являются: 1) изменение скорости, т. е. наличие у тела ускорения; 2) существование деформации тела.

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело *1* действует на тело *2* с силой $\vec{F}_{21}$, то и тело *2* в свою очередь действует на тело *1* с силой $\vec{F}_{12}$ (рис. 3.1).

Третий закон Ньютона: *Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

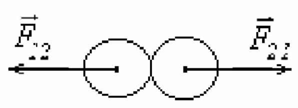

Рис. 3.1

Эти силы не компенсируют друг друга, поскольку приложены к разным телам.

Из третьего закона Ньютона вытекает, что силы возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу, взаимодействующему с данным.

В связи с этим рассмотрим силу тяжести и вес тела. Под действием силы гравитационного притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, которое принято обозначать $\vec{g}$. Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массы m действует сила $\vec{F}_T = m\vec{g}$, называемая *силой тяжести*. Когда тело покоится относительно поверхности Земли, сила $\vec{F}_T$ уравновешивается реакцией подвеса или опоры $\vec{N}$, удерживающей тело от падения ($\vec{N} = -\vec{F}_T$). По третьему закону Ньютона тело в этом случае действует на подвес или опору с силой $\vec{P}$, равной $-\vec{N}$, т. е. с силой

$$\vec{P} = \vec{F}_T = m\vec{g}\,.$$

Сила, с которой тело действует на подвес или опору, называется *весом тела*. Эта сила равна $m\vec{g}$ лишь в том случае, если тело и опора (или подвес) неподвижны относительно Земли. В случае их движения с некоторым ускорением $\vec{a}$ вес тела $\vec{P}$ не будет равен силе тяжести $m\vec{g}$.

4. Закон сохранения импульса системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Между материальными точками действуют *силы внутреннего взаимодействия* $\vec{F}_{ik}$, а также на материальные точки действуют *внешние силы* $\vec{F}_i$. Здесь $\vec{F}_{ik}$ – внутренняя сила, действующая на i-ю материальную точку со стороны k-й материальной точки, $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i-ю материальную точку.

Материальные точки системы обладают импульсом:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \text{ – импульс } i\text{-й материальной точки.}$$

Система материальных точек называется *замкнутой*, если внешними силами можно пренебречь или их равнодействующая равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0.$$

Запишем для каждой материальной точки второй закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1\,,$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2\,,$$

…………………………………

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{F}_n\,.$$

Просуммировав левые и правые части этих уравнений, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,.$$

Сумма производных равна производной от суммы, а также по третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, …, $\vec{F}_{1n} + \vec{F}_{n1} = 0$. В результате получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,.$$

Если система материальных точек замкнута, т. е. $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = 0\,,$$

и имеет место ***закон сохранения импульса системы материальных точек:***

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const}.$$

Если система материальных точек является замкнутой, то суммарный импульс системы остаётся постоянным, т. е. сохраняется во времени.

В законе сохранения импульса все величины скоростей должны быть определены по отношению к одной и той же системе отсчета.

Заметим, что закон сохранения импульса можно применить и для незамкнутой системы в следующих случаях:

a) если для какого-то направления в пространстве проекция всех внешних сил равна нулю.

b) если время действия внешних сил пренебрежимо мало, т. е. $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt \to 0$.

Центр масс системы материальных точек и его свойства

Важное значение для системы материальных точек имеет такое понятие, как *центр масс*. Сначала рассмотрим две материальные точки с массами m_1 и m_2 и найдём их центр масс (рис. 4.1). В данном случае центр масс – это точка C, которая лежит на прямой, соединяющей материальные точки. Если положение материальных точек описывается радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то положение центра масс C будет описываться радиусом-вектором $\vec{r}_c$, который равен

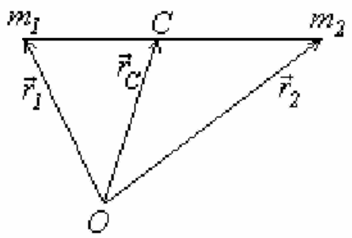

Рис. 4.1

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

В общем случае системы из n материальных точек положение центра масс будет описываться радиусом-вектором:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M},$$

где $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ – полная масса системы материальных точек.

Взяв производную, получим скорость центра масс

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n}{M} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n}{M}.$$

Если система материальных точек замкнута, то

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \text{const}, \text{ и тогда}$$

$$\vec{v}_c = \text{const}.$$

Таким образом, при отсутствии внешних сил центр масс системы материальных точек остается в покое или движется прямолинейно и равн-

номерно, т. е. внутренние силы не могут изменить состояние центра масс системы.

5. Движение тела с переменной массой. Реактивное движение

Под движением тел с переменной массой подразумевается движение тел, масса которых в процессе движения меняется за счет потери или приобретения вещества. Например, масса ракеты или реактивного самолета уменьшается за счет истечения газов, образующихся при сгорании топлива. Уравнения движения тел с переменной массой являются следствиями уравнений Ньютона.

Рассмотрим случай движения тела с переменной массой при наличии внешней силы, например, движение ракеты в гравитационном поле Земли (рис. 5.1).

Для этого возьмем два близких момента времени t и $t+dt$ и вычислим изменение импульса системы (ракета + вытекающий газ).

Пусть в момент времени t импульс системы равен

$$\vec{p}_1 = m\vec{v}.$$

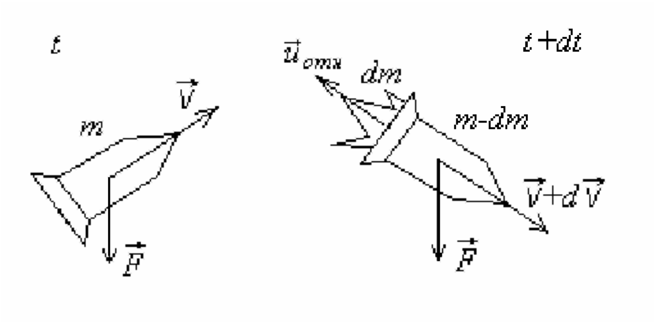

Рис. 5.1

За время dt выброшен газ массой dm со скоростью $\vec{u}_{отн}$ относительно ракеты, и импульс системы (ракета + газ) стал равен

$$\vec{p}_2 = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} - \vec{u}_{отн}).$$

Подчеркнем, что выражения для импульсов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ записаны относительно системы отсчета, связанной с Землей, и $(\vec{v} - \vec{u}_{отн})$ – скорость газа относительно Земли.

В выражении для $\vec{p}_2$ раскроем скобки и пренебрежем малой величиной более высокого порядка ($dm\,dv \approx 0$). В результате получим

$$\vec{p}_2 = m\vec{v} + md\vec{v} - \vec{u}_{отн}\,dm.$$

Тогда изменение импульса системы (ракета + газ) за время dt равно

$$d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = md\vec{v} - \vec{u}_{отн}\,dm.$$

Подставляя это во второй закон Ньютона $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, получим уравнение движения тела с переменной массой:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}_{отн}\frac{dm}{dt}$$ – *уравнение Мещерского.*

Второй член справа в этом уравнении представляет собой $\vec{u}_{\text{отн}} \dfrac{dm}{dt} \equiv \vec{F}_p$ – *силу реактивной тяги,* где $\dfrac{dm}{dt}$ – *секундный расход топлива.*

Уравнение Циолковского

Рассмотрим движение ракеты, на которую действие всех внешних сил равно нулю, т. е. $\vec{F} = 0$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ скорость ракеты $\vec{v} = 0$. Масса ракеты вместе с топливом равна M, масса самой ракеты – M_0. Ракета при горении топлива может выбрасывать газы со скоростью $\vec{u}_{\text{отн}}$ относительно ракеты. Какую максимальную скорость v может развить ракета при полном расходовании топлива?

Из уравнения Мещерского в этом случае получаем:

$$m dv = -u_{\text{отн}} dm \quad \text{или} \quad dv = -u_{\text{отн}} \frac{dm}{m}.$$

Проинтегрируем левую и правую части этого уравнения

$$\int_0^v dv = -u_{\text{отн}} \int_M^{M_0} \frac{dm}{m} \Rightarrow v = -u_{\text{отн}} \ln \frac{M_0}{M} = u_{\text{отн}} \ln \frac{M}{M_0},$$

$$v = u_{\text{отн}} \ln r \quad \text{– \textit{уравнение Циолковского},}$$

где $r \equiv \dfrac{M}{M_0}$ – *число Циолковского.*

При движении ракеты в вертикальном направлении в гравитационном поле Земли уравнение движения ракеты принимает вид

$$m\frac{dv}{dt} = -u_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} - mg.$$

Его решение при $u_{\text{отн}} = \text{const}$:

$$v = u_{\text{отн}} \ln \frac{M}{M_0} - gt.$$

При этом сопротивление воздуха и изменение величины g с высотой не учитывается.

Чтобы ракета при существующих видах топлива развивала первую космическую скорость 8 км/с, необходимо иметь очень большое число $r = \dfrac{M}{M_0}$, т. е. масса топлива во много раз должна была превышать массу оболочки ракеты. Чтобы избежать этого, Циолковский предложил использовать многоступенчатые ракеты. После выгорания топлива в одной ступени ракеты эта ступень отбрасывается и начинает работать следующая ступень. Таким образом, Циолковский предсказал полеты человека в космическое пространство.

6. Динамика вращательного движения твердого тела

При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*. Для описания вращательного движения нужно задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость тела в каждый момент времени. Рассмотрим твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Чтобы удержать ось от перемещений в пространстве, заключим её в подшипники. Опирающийся на нижний подшипник фланец предотвращает передвижение оси в вертикальном направлении. Представим твердое тело как систему материальных точек массы m_i, взаимное расположение которых остается неизменным. Для описания вращательного движения элементарных масс m_i необходимо ввести новые физические величины.

Момент импульса материальной точки относительно оси вращения

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси траектории движения материальных точек представляют собой окружности, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. На рис. 6.1 показана траектория движения одной из материальных точек массы m. Начало координат O поместим на оси вращения Z и положение материальной точки

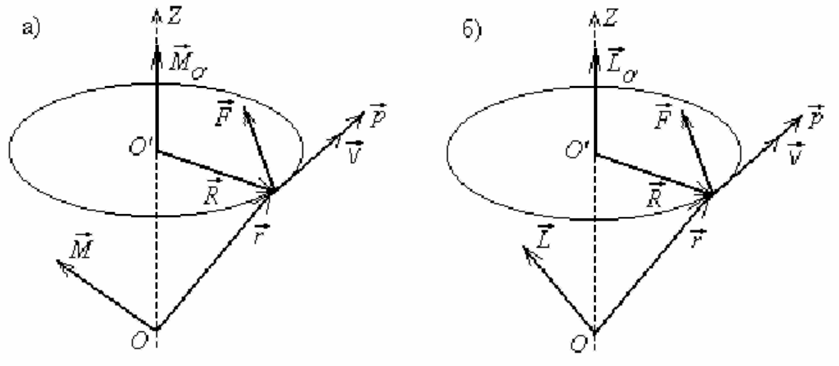

Рис. 6.1

будем описывать радиусом-вектором $\vec{r}$. Пусть скорость материальной точки равна $\vec{v}$, ее импульс $\vec{p} = m\vec{v}$, и пусть на материальную точку действует сила $\vec{F}$.

Моментом силы $\vec{M}$ относительно точки O (рис. 6.1, а) называется физическая величина равная

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{F}].$$

Модуль вектора $\vec{M}$ равен

$$M = rF\sin\alpha,$$

где $\alpha = (\widehat{\vec{r}, \vec{F}})$ – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Если опустить перпендикуляр из точки O на направление действия силы, то его длина d_F будет плечом силы $\vec{F}$, $d_F = r\sin\alpha$ и модуль момента сил будет равен произведению силы на плечо, т. е. $M = Fd_F$.

Аналогично вводится *момент импульса* $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O (рис. 6.1, б)

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}].$$

Модуль вектора $\vec{L}$ равен

$$L = r\,p\sin\beta,$$

где $\beta = (\vec{r}\,\hat{,}\,\vec{p})$ – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$; $d_p = r\sin\beta$ – плечо импульса $\vec{p}$, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на направление вектора $\vec{p}$. Оба вектора $\vec{M}$ и $\vec{L}$ согласно определению направлены перпендикулярно радиусу-вектору $\vec{r}$ материальной точки.
В общем случае направления векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$ не совпадают, но существует закон, который связывает момент импульса $\vec{L}$ с моментом силы $\vec{M}$. Чтобы установить этот закон, возьмем производную от вектора $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{v}\,\vec{p}] + \left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Так как $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{v}$ и так как согласно второму закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{r}\,\vec{F}] = \vec{M}.$$

В результате получаем *закон изменения момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки или уравнение моментов для материальной точки*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{6.1}$$

Определенные таким образом момент силы $\vec{M}$ и момент импульса $\vec{L}$ для материальных точек вращающегося твердого тела существенно зависят от выбора точки O на оси вращения Z. Поэтому более удобными характеристиками при вращении твердого тела являются не сами векторы $\vec{M}$ и $\vec{L}$, а их проекции на ось вращения Z.

Проекции векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$ на ось вращения Z называют *моментом силы и моментом импульса относительно этой оси* и обозначают M_Z и L_Z соответственно. Можно показать, что величины M_Z и L_Z определяются только составляющими векторов $\vec{r}$, $\vec{F}$ и $\vec{p}$, перпендикулярными оси вращения Z, и поэтому момент силы M_Z и момент импульса L_Z не зависят от выбора точки O на оси вращения Z. Если в качестве точки O выбрать центр вращения O' материальной точки, то момент силы $\vec{M}_{O'}$ и момент импульса

$\vec{L}_O$, относительно этого центра вращения оба будут направлены вдоль оси Z (см. рис. 6.1). Плечом силы $\vec{F}$ относительно оси вращения Z называется кратчайшее расстояние между осью Z и линией действия силы $\vec{F}$. Аналогично плечом импульса $\vec{p}$ относительно оси вращения Z называется кратчайшее расстояние между осью Z и направлением вектора $\vec{p}$.

Если спроектировать уравнение (6.1) на ось Z, то получим *уравнение моментов для материальной точки относительно оси вращения Z*:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \tag{6.2}$$

7. Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси. Момент инерции твердого тела

Если рассматривать твердое тело как систему жестко связанных материальных точек m_i, то момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения Z будет равен сумме моментов импульса материальных точек, составляющих твердое тело, относительно этой же оси. Момент импульса i-й материальной точки L_{Zi} относительно оси вращения Z равен модулю момента импульса $\vec{L}_i$ относительно центра вращения O'. При этом

$$\vec{L}_i = [\vec{R}_i\,\vec{p}_i] = m_i[\vec{R}_i\,\vec{v}_i]$$

или, используя связь между линейной скоростью точек тела и угловой скоростью вращения твердого тела: $\vec{v}_i = [\vec{\omega}\,\vec{R}_i]$,

$$\vec{L}_i = m_i R_i^2\,\vec{\omega}.$$

В результате суммирования получим выражение для момента импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения Z:

$$L_Z = \sum_{i=1}^{n} L_{Zi} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2\right)\omega \quad \text{или} \quad L_Z = I\omega,$$

где

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2.$$

Величина I, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от оси вращения, называется моментом инерции твердого тела относительно этой оси.

Слагаемые этой суммы представляют моменты инерции материальных точек относительно оси вращения. Момент инерции твердого тела характеризует инертные свойства тела при его вращении. В СИ момент инерции измеряется в кг·м^2.

Вычисление моментов инерции некоторых тел правильной формы

Согласно определению момент инерции твёрдого тела равен

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, r_i^2 = \int_V r^2 dm,$$

где символом Δm_i обозначена элементарная масса m_i, r_i – ее расстояние от оси вращения.

Элементарная масса Δm_i равна произведению плотности тела ρ_i в данной точке на соответствующий элементарный объём ΔV_i:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i \, .$$

Следовательно, момент инерции тела можно представить в виде

$$I = \int_V r^2 \rho \, dV = \rho \int_V r^2 dV \, .$$

Пример 1. *Вычисление момента инерции тонкого стержня массой m и длинной l, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс* (рис. 7.1).

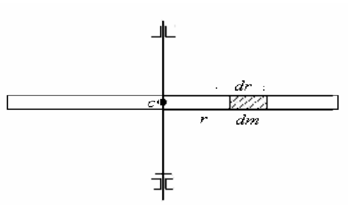

Рис. 7.1

Будем считать стержень однородным, тогда $dm = \dfrac{m}{l} dr$,

$$I_0 = 2\int_0^{\frac{l}{2}} r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{2m}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \frac{ml^2}{12},$$

$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2 .$$

Другие примеры выражений моментов инерции для некоторых тел правильной формы приведём без вычислений.

Пример 2. *Полый тонкостенный цилиндр, тонкое кольцо* (рис. 7.2).

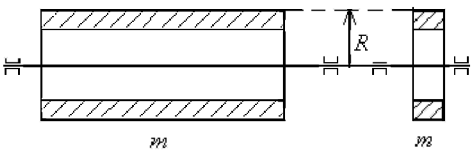

Рис. 7.2

$I_0 = mR^2$ – *момент инерции тонкостенного цилиндра или тонкого кольца.*

Пример 3. *Сплошной цилиндр, диск* (рис. 7.3).

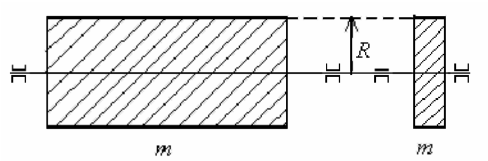

Рис. 7.3

$I_0 = \dfrac{1}{2} mR^2$ – *момент инерции сплошного цилиндра или диска.*

Пример 4. *Сплошной шар* (рис. 7.4).

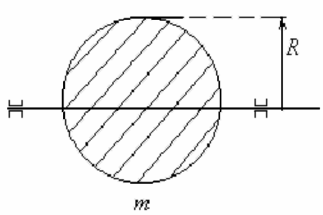

Рис. 7.4

$I_0 = \dfrac{2}{5} mR^2$ – *момент инерции шара.*

Заметим, что во всех приведённых примерах тела считаются однородными и вычисляются моменты инерции относительно *центральных осей*, т. е. осей проходящих через центр масс.

Момент инерции тела относительно нецентральной оси. Теорема Штейнера

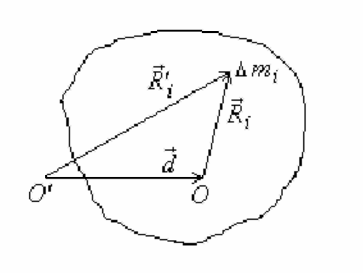

Рис. 7.5

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. На рис. 7.5 обе они перпендикулярны плоскости рисунка и обозначены O и O'. Разобьем мысленно тело на элементарные массы Δm_i. Радиусы-векторы одной из этих элементарных масс, проведенные от осей O и O' параллельно плоскости рисунка, обозначим $\vec{R}_i$ и $\vec{R}'_i$ соответственно. Тогда $\vec{R}'_i = \vec{R}_i + \vec{d}$, где $\vec{d}$ означает радиус-вектор $\vec{O'O}$. Следовательно

$$R_i'^2 = R_i^2 + d^2 + 2\vec{d}\,\vec{R}_i .$$

С учетом последнего соотношения момент инерции тела относительно оси O' можно представить в виде

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 + d^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i + 2\vec{d} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{R}_i .$$

Первый член в этом выражении есть момент инерции I_0 тела относительно оси O. Сумма элементарных масс дает массу тела m. Последнюю сумму этого выражения можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{R}_i = m\vec{R}_C ,$$

где $\vec{R}_C$ – радиус-вектор центра масс C тела относительно оси O (точнее, $\vec{R}_C$ есть слагающая радиуса-вектора центра масс, параллельная плоскости рисунка).

Допустим, что ось O проходит через центр масс C тела. Тогда $\vec{R}_C = 0$ и формула для I принимает вид

$$I = I_0 + md^2 .$$

Это важное геометрическое соотношение называется теоремой Штейнера.

***Теорема Штейнера**: Момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:* $I = I_0 + md^2$.

Таким образом, теорема Штейнера по существу сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Главные оси и главные моменты инерции

Вернемся еще раз к твёрдому телу, которое вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Возьмём на оси вращения точку O и будем характеризовать положение образующих тело материальных точек с помощью радиусов-векторов $\vec{r}_i$, проведённых из этой точки. На рис. 7.6 показана i-я материальная точка с массой m_i. Согласно определению момент импульса i-й материальной точки относительно точки O равен

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i\,\vec{p}_i] = m_i[\vec{r}_i\,\vec{v}_i]$$

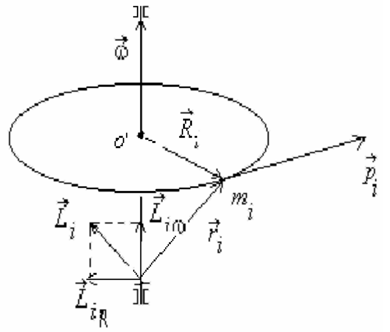

Рис. 7.6

или, используя связь между линейной скоростью точек тела и угловой скоростью вращения твердого тела: $\vec{v}_i = [\vec{\omega}\,\vec{R}_i]$,

$$\vec{L}_i = m_i[\vec{r}_i[\vec{\omega}\,\vec{R}_i]].$$

Для раскрытия двойного векторного произведения воспользуемся формулой

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}).$$

$$\vec{L}_i = m_i[\vec{r}_i[\vec{\omega}\,\vec{R}_i]] = m_i\vec{\omega}\,(\vec{r}_i\,\vec{R}_i) - m_i\vec{R}_i(\vec{r}_i\,\vec{\omega}) =$$
$$= m_i R_i^2\,\vec{\omega} - m_i(\vec{r}_i\,\vec{\omega})\vec{R}_i.$$

Мы видим, что момент импульса i-й материальной точки $\vec{L}_i$ не совпадает по направлению с угловой скоростью $\vec{\omega}$, и его можно представить как сумму двух составляющих – осевой $\vec{L}_{i\omega} = m_i R_i^2\,\vec{\omega}$ и радиальной $\vec{L}_{iR} = -m_i(\vec{r}_i\,\vec{\omega})\vec{R}_i$:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_{i\omega} + \vec{L}_{iR}.$$

Момент импульса твёрдого тела относительно точки O равен сумме моментов импульса элементарных масс:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2\right)\vec{\omega} + \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{iR} \quad \text{или} \quad \vec{L} = I\,\vec{\omega} + \vec{L}_R,$$

где $I\vec{\omega}$ – составляющая момента импульса тела, направленная вдоль оси вращения; $\vec{L}_R$ – составляющая момента импульса тела, перпендикулярная оси вращения; $I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ – момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

Нетрудно сообразить, что для однородного тела симметричного относительно оси вращения (для однородного тела вращения) суммарный момент импульса направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$, и равен $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$.

Действительно в этом случае тело можно разбить на пары равных по массе, расположенных симметрично материальных точек. Сумма моментов каждой пары направлена вдоль вектора $\vec{\omega}$, следовательно, и суммарный момент импульса $\vec{L}$ будет совпадать по направлению с $\vec{\omega}$ и равен $I\vec{\omega}$.

Для несимметричного (или неоднородного) тела момент импульса $\vec{L}$ не совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$. При вращении тела вектор $\vec{L}$ поворачивается вместе с ним, описывая конус.

Заметим, что в случае вращения однородного симметричного тела, силы бокового давления подшипников на ось не возникают. В отсутствие силы тяжести подшипники можно было бы убрать – ось и без них сохраняла бы своё положение в пространстве. Ось, положение которой в пространстве остаётся неизменным при вращении вокруг неё тела в отсутствие внешних сил, называется *свободной осью* тела.

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением масс существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс оси, которые могут служить свободными осями: эти оси называются *главными осями инерции тела*. Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции тела*.

В общем случае эти моменты различны: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Для тела с осевой симметрией два главных момента инерции имеют одинаковую величину, третий же отличен от них: $I_1 = I_2 \neq I_3$. И, наконец, в случае тела с центральной симметрией все три главных момента одинаковы: $I_1 = I_2 = I_3$.

Примеры.

Параллелепипед (рис. 7.7, а): $I_1 > I_2 > I_3$; *диск* (рис. 7.7, б): $I_1 > I_2 = I_3$; *цилиндр* (рис. 7.7, в): $I_1 > I_2 = I_3$; *шар* (рис. 7.7, г): $I_1 = I_2 = I_3$.

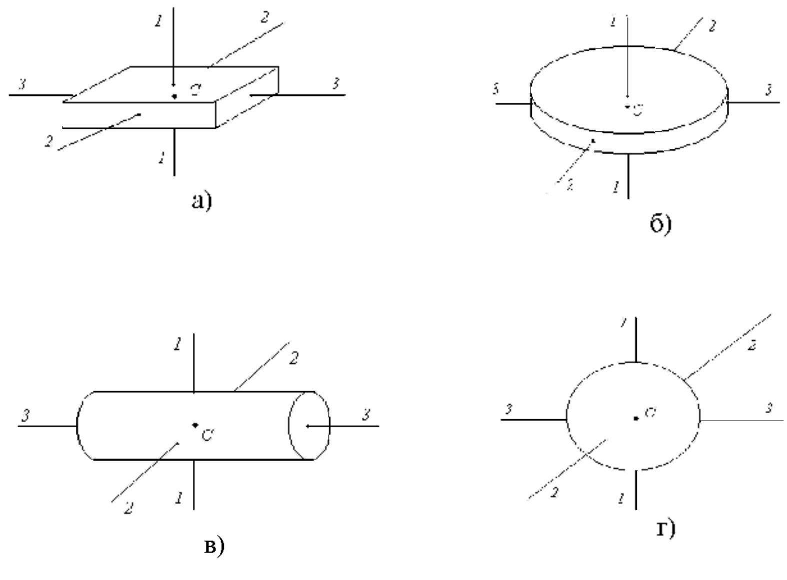

Рис. 7.7

8. Основной закон динамики вращения твердого тела

Применим теперь уравнение моментов относительно оси вращения (6.2) к рассмотрению вращательного движения твердого тела. Опять будем рассматривать твёрдое тело как систему жёстко связанных материальных точек с массой m_i. Записав уравнение моментов (6.2) для каждой материальной точки m_i

$$\frac{d L_{Zi}}{d t} = M_{Zi}$$

и просуммировав по всем материальным точкам твердого тела, получим *основной закон динамики вращения твёрдого тела*:

$$\frac{d L_Z}{dt} = M_Z, \tag{8.1}$$

где $L_Z = I\omega$ – момент импульса твердого тела относительно оси вращения;

M_Z – момент внешних сил относительно оси вращения.

Заметим, что при суммировании моменты внутренних сил исключаются. Действительно внутренние силы действуют внутри твердого тела попарно. Эти силы направлены противоположно и действуют вдоль одной и той же прямой. Моменты таких двух сил, а значит и момент всех внутренних сил равны нулю.

В случае вращения твердого тела около неподвижной оси момент инерции остается постоянным и уравнение (8.1) переходит в

$$I\varepsilon = M_Z. \tag{8.2}$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно той же оси.

Если ось вращения главная, то имеют место выражения, аналогичные (8.1) – (8.2), но записанные для векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$, где $\vec{L}$ – момент импульса твердого тела, а $\vec{M}$ – сумма моментов внешних сил относительно точки, лежащей на оси вращения. При этом $\vec{L} = I\vec{\omega}$, и тогда *основной закон динамики вращения твёрдого тела* примет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{или} \quad I\vec{\varepsilon} = \vec{M}.$$

Как уже было показано, в случае, когда неподвижная ось вращения не является главной, это уравнение справедливо только для проекций момента импульса и момента сил на ось вращения *Z*: $I\varepsilon = M_z$.

В случае главной оси вращения при суммарном моменте внешних сил, действующих на тело, равном нулю, имеет место *закон сохранения момента импульса твёрдого тела:* $I\vec{\omega} = \text{const}$.

Момент импульса относительно оси вращения или *вращательный импульс* $I\omega$ сохраняется и в общем случае, если *момент внешних сил относительно оси вращения* M_z равен нулю.

Основной закон динамики вращения твёрдого тела $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$ аналогичен второму закону Ньютона для движения материальной точки $m\vec{a} = \vec{F}$.

Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела относительно неподвижной оси может быть прослежена и дальше.

Аналогия между поступательным и вращательным движением

Поступательное движение	*Вращательное движение*
$s(t)$ – путь	$\varphi(t)$ – угол поворота
$\vec{v}$ – линейная скорость	$\vec{\omega}$ – угловая скорость
$\vec{a}$ – линейное ускорение	$\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение
m – масса	I – момент инерции
$\vec{F}$ – сила	$\vec{M}$ – момент силы
$m\vec{a} = \vec{F}$ – 2-й закон Ньютона	$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$ – 2-й закон Ньютона для вращательного движения
$\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс	$\vec{L} = I\vec{\omega}$ – момент импульса тв. тела
$W = \dfrac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия	$W = \dfrac{I\omega^2}{2}$ – кииетическая энергия вращающегося твёрдого тела
$dA = \vec{F}\,d\vec{r}$ – работа	$dA = \vec{M}\,d\vec{\varphi}$ – работа при вращательном движении
$P = \vec{F}\vec{v}$ – мощность	$P = \vec{M}\vec{\omega}$ – мощность при вращ. дв.

Из этого сопоставления видно, что во всех случаях роль массы m играет момент инерции I, роль силы $\vec{F}$ – момент силы $\vec{M}$, роль импульса $\vec{p}$ – момент импульса $\vec{L}$ и т. д.

9. Гироскопы

Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии (рис. 9.1). Эту ось будем называть осью гироскопа. Ось гироскопа является одной из главных осей инерции. Поэтому, если она не поворачивается в пространстве, момент импульса равен $\vec{L} = I\vec{\omega}$, где I – момент инерции относительно оси гироскопа. При попытке вызвать поворот оси гироскопа наблюдается своеобразное явление, получившее название *гироскопического эффекта*: под действием сил, которые, казалось бы, должны вызвать поворот оси гироскопа OO вокруг прямой $O'O'$, ось гироскопа поворачивается вокруг прямой $O''O''$, направленной вдоль направления действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Поведение гироскопа оказывается полностью соответствующим законам динамики вращательного движения. Действительно момент сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлен вдоль

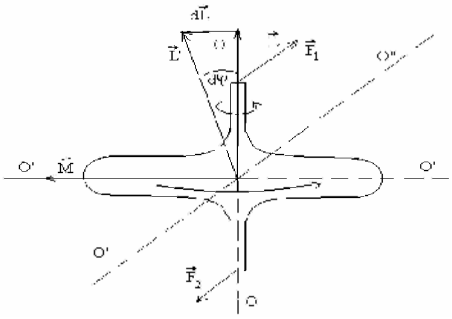

Рис. 9.1

прямой $O'O''$. За время dt момент импульса гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}\,dt$, которое имеет такое же направление, как и $\vec{M}$. Спустя время dt момент импульса гироскопа будет равен $\vec{L'} = \vec{L} + d\vec{L}$ и будет лежать в плоскости рисунка. Таким образом, ось гироскопа повернётся вокруг прямой $O'O''$ на некоторый угол $d\varphi$. Из рис. 9.1 видно, что

$$d\varphi = \frac{|d\vec{L}|}{L} = \frac{Mdt}{L}.$$

Отсюда следует, что поворот оси гироскопа в новое положение произошел с угловой скоростью $\omega' = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{M}{L}$.

Перепишем это соотношение в виде $M = \omega' L$

Векторы $\vec{M}$, $\vec{L}$ и $\vec{\omega}'$ взаимно перпендикулярны (вектор $\vec{\omega}'$ направлен вдоль прямой $O'O''$, на нас). Поэтому связь между ними можно записать в векторном виде:

$$\vec{M} = [\vec{\omega}'\vec{L}].$$

Заметим, что эта формула справедлива лишь в том случае, если $\omega' << \omega$.

Допустим, что ось гироскопа может свободно поворачивается вокруг некоторой точки O (рис. 9.2). Рассмотрим поведение такого гироскопа в поле сил тяжести. Момент сил, приложенных к гироскопу, равен по величине : $M = mgl\sin\alpha$, где m – масса гироскопа; l – расстояние от точки O до центра инерции гироскопа; α – угол, образованный осью гироскопа с вертикалью.

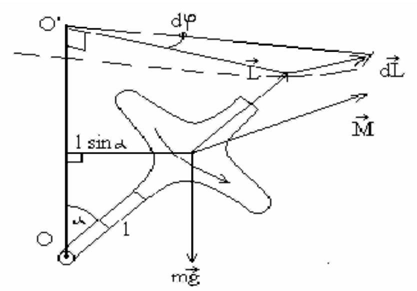

Рис. 9.2

Под действием момента сил $\vec{M}$ момент импульса $\vec{L}$ получит за время dt приращение $d\vec{L} = \vec{M}\,dt$, перпендикулярное вектору $\vec{L}$.

При этом вертикальная плоскость, проходящая через ось гироскопа, повернётся на угол $d\varphi$. Угол α при этом не меняется.

Таким образом, в поле сил тяжести ось гироскопа с неподвижной точкой O поворачивается вокруг вертикали, описывая конус. Такое движение гироскопа называется *прецессией*. Угловую скорость прецессии ω' можно найти, приняв во внимание полученное ранее соотношение

$$M = \omega' L\sin\alpha.$$

Подставляя сюда M, получим

$mgl\sin\alpha = \omega' l\sin\alpha$, отсюда $\omega' = \dfrac{mgl}{L} = \dfrac{mgl}{I\omega}$ – *угловая скорость прецессии.*

10. Механическая работа и мощность

Если на тело действует сила и при этом тело перемещается, то эта сила совершает работу. Прежде чем дать определение работы при криволинейном движении материальной точки, рассмотрим частные случаи:

1. Сила постоянная $\vec{F} = \text{const}$, *движение прямолинейное* (рис. 10.1, а).

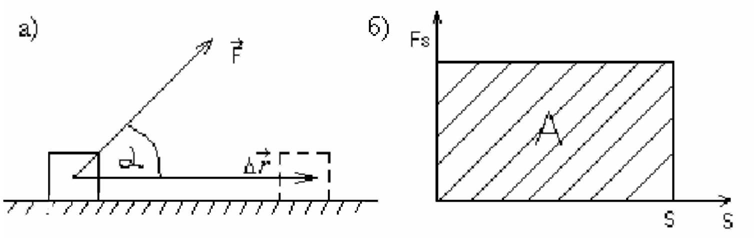

Рис. 10.1

В этом случае механическая работа A равна

$$A = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cos\alpha,$$

где $\alpha = (\vec{F} \hat{,} \Delta\vec{r})$ – угол между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$. Так как $|\Delta\vec{r}| = s$, а $F\cos\alpha = F_s$, то

$$A = F_s \cdot s,$$

где F_s – проекция силы $\vec{F}$ на направление движения. В данном случае F_s = const, и геометрический смысл работы A – это площадь прямоугольника, построенного в координатах F_s и s (рис. 10.1, б).

2. Движение прямолинейное, сила переменная, т. е. $F_s \neq \text{const}$.

Построим график проекции силы на направление перемещения F_s как функции пути s. Полный путь представим как сумму n малых отрезков пути Δs_i. Для малого i-го отрезка пути Δs_i работа равна $\Delta A_i = F_{si}\,\Delta s_i$ или площади заштрихованной трапеции (рис. 10.2).

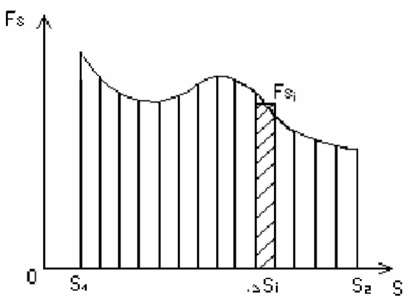

Рис. 10.2

Полная механическая работа по перемещению из точки *1* в точку *2* будет равна

$$A_{12} = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_{si} \Delta s_i = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds.$$

Величина, стоящая под интегралом, будет представлять элементарную работу по бесконечно малому отрезку пути ds:

$$dA = F_s ds = \vec{F}\, d\vec{r}.$$

3. Движение криволинейное, сила $\vec{F}$ *переменная* (рис. 10.3).

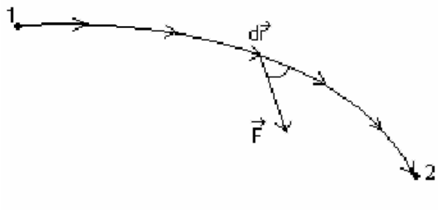

Рис. 10.3

Разбиваем траекторию движения материальной точки на бесконечно малые перемещения $d\vec{r}$ и определяем работу силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки из точки *1* в точку *2* как криволинейный интеграл:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r}\,.$$

Пример 1. *Работа силы тяжести* $\vec{F} = m\vec{g}$ *при условии* g = const (рис. 10.4).

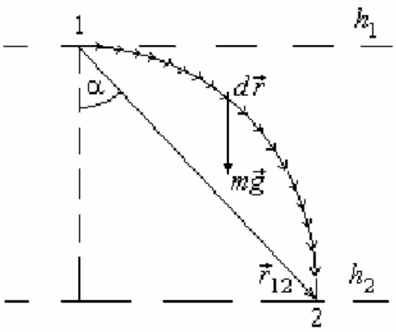

Рис. 10.4

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 m\vec{g}\, d\vec{r}\,.$$

Далее $m\vec{g}$, как постоянную величину, можно вынести за знак интеграла, а интеграл $\int_1^2 d\vec{r}$ согласно рисунку будет представлять полное перемещение $\vec{r}_{12}$.

$$A_{12} = m\vec{g}\int_1^2 d\vec{r} = m\vec{g}\,\vec{r}_{12} = mgr_{12}\cos\alpha\,.$$

Если обозначить высоту точки *1* от поверхности Земли через h_1, а высоту точки *2* через h_2, то

$$A_{12} = mgr_{12}\cos\alpha = mgh_1 - mgh_2\,.$$

В данном случае работа определяется положением материальной точки в начальный и конечный момент времени и не зависит от формы траектории или пути. Работа силы тяжести по замкнутому пути равна нулю: $A_{12} + A_{21} = 0$.

Силы, работа которых на замкнутом пути равна нулю, называются ***консервативными***.

Пример 2. *Работа силы трения.*

Это пример неконсервативной силы. Чтобы показать это достаточно рассмотреть элементарную работу силы трения:

$$dA = \vec{F}_{\text{тр}}\, d\vec{r} = -F_{\text{тр}} dr < 0\,,$$

т. е. работа силы трения всегда отрицательная величина и на замкнутом пути не может быть равной нулю.

К неконсервативным силам, кроме силы трения, относятся *гироскопические силы* – это силы, которые зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно к этой скорости. К ним относятся сила

Лоренца и сила Кориолиса. Работа этих сил равна нулю при любом перемещении материальной точки, в частности при ее движении по замкнутому пути. От консервативных гироскопические силы отличаются тем, что они определяются не только положением, но и скоростью движущейся материальной точки.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется *мощностью*. Если за время dt совершается работа dA, то мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Взяв dA в виде

$$dA = \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}\, dt,$$

получим для механической мощности выражение

$$P = \vec{F}\vec{v}.$$

Средней мощностью $<P>$ называется работа ΔA за единицу времени Δt, затраченного на совершение этой работы:

$$<P> = \frac{\Delta A}{\Delta t} = F \cdot <v>,$$

где $<v>$ – средняя путевая скорость. При равноускоренном движении

$$<v> = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Мгновенная мощность или просто мощность есть предел, к которому стремится $<P>$ при стремлении $\Delta t \to 0$:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = F \cdot v,$$

где v – мгновенная скорость.

В СИ единицей измерения работы является джоуль: $[A]$ = 1 Дж = 1Н·1м, а единицей измерения мощности является ватт: 1 Вт = 1 Дж/с.

Коэффициентом полезного действия (КПД) η называется отношение полезной работы $A_{\text{полезн}}$, совершаемой силами при перемещении тела, к общей работе (затраченной) $A_{\text{затр}}$ сил, приложенных к телу:

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{затр}}}.$$

Коэффициент полезного действия можно определить и как отношение отдаваемой (полезной) мощности $P_{\text{полезн}}$ к подводимой (затраченной) мощности $P_{\text{затр}}$:

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{затр}}}.$$

$P_{\text{полезн}}$ есть мощность равная разности между затраченной мощностью $P_{\text{затр}}$ и мощностью потерь $P_{\text{потерь}}$, идущей на преодоление сил трения, сопротивления воздуха, на нагревание и т. д., т. е.

$$P_{\text{полезн}} = P_{\text{затр}} - P_{\text{потерь}}.$$

КПД принято выражать в процентах. Если тело участвует в различных процессах, связанных с передачей или превращениями энергии, то общий КПД равен произведению КПД каждого из этих процессов: $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots$.

11. Механическая энергия

Энергия является общей количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи. Энергия не исчезает и не возникает из нечего: она лишь может переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления в природе. В соответствии с различными формами движения материи рассматривают разные виды энергии – механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и др.

Понятия энергии и работы тесно связаны друг с другом. Известно, что работа совершается за счет запаса энергии и, наоборот, совершая работу, можно увеличить запас энергии в каком-либо устройстве. Другими словами, *работа – это количественная мера изменения энергии*:

$$dA = dE .$$

Энергия, также как и работа, в СИ измеряется в джоулях: [E] = 1 Дж.

Механическая энергия бывает двух видов – *кинетическая и потенциальная*.

Кинетическая энергия *(или энергия движения)* W определяется массами и скоростями движущихся тел.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием силы $\vec{F}$. Работа этой силы увеличивает кинетическую энергию W материальной точки, (т. е. работа всех внешних сил, действующих на материальную точку, равна приращению кинетической энергии этой точки). Вычислим в этом случае малое приращение (дифференциал) кинетической энергии:

$$dW = dA = \vec{F}\, d\vec{r} = F_s ds = ma_\tau ds = m\frac{d\mathrm{v}}{dt}ds = m\mathrm{v}d\mathrm{v} .$$

При вычислении dW использовали второй закон Ньютона $F_s = ma_\tau$, а также $\frac{ds}{dt} = \mathrm{v}$ – модуль скорости материальной точки. Тогда *кинетическую энергию движущейся материальной точки* можно представить в виде

$$dW = d\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right) \Rightarrow W = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}.$$

Умножив и разделив это выражение на m, и учитывая, что $m\mathrm{v} = p$, получим

$$W = \frac{p^2}{2m} ,$$

т. е. кинетическая энергия является однозначной функцией импульса движущейся материальной точки.

Следует заметить, что кинетическая энергия материальной точки зависит от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается ее движение.

Если на систему материальных точек действуют только консервативные и гироскопические силы, то для этой системы можно ввести понятие потенциальной энергии.

Потенциальная энергия *(или энергия взаимодействия тел)* $\Pi(\vec{r})$ определяется действием на тело консервативных сил и является функцией пространственных координат тела.

Как было показано, работу силы тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ при криволинейном движении материальной точки в однородном поле тяготения можно представить в виде разности значений функции mgh, взятых в точке *1* и в точке *2*:

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2 .$$

Оказывается, что всегда, когда силы консервативны, работу этих сил на пути *1* $\rightarrow$ *2* можно представить в виде

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = -\Delta\Pi .$$

Работа консервативной силы равна *убыли потенциальной энергии* Π материальной точки при ее перемещении из положения 1 в положение 2, иначе можно сказать, что работа совершается за счёт запаса потенциальной энергии.

Величину E, равную сумме кинетической и потенциальной энергий частицы, называют *полной механической энергией* тела:

$$E = W + \Pi .$$

Дифференциалы кинетической энергии dW и потенциальной энергии $d\Pi$ можно представить в виде

$$dW = dA = \vec{F}\, d\vec{r} ,$$

$$d\Pi = -dA = -\vec{F}\, d\vec{r} .$$

В результате получаем, что если сила $\vec{F}$ – консервативная сила (или гироскопическая), то

$$dE = dW + d\Pi = 0 \implies E = W + \Pi = \text{const} ,$$

т. е. в этом случае полная механическая энергия тела сохраняется.

Заметим, что, используя второй закон Ньютона $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$, дифференциал кинетической энергии dW можно представить в виде

$$dW = dA = \vec{F}\, d\vec{r} = \dot{\vec{p}} d\vec{r} .$$

Это выражение для dW будет использовано при выводе закона сохранения полной механической энергии системы материальных точек.

12. Закон сохранения полной механической энергии системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек, между которыми действуют консервативные силы внутреннего взаимодействия $\vec{F}_{ik}$ и, кроме того, на материальные точки действуют внешние консервативные силы $\vec{F}_i$ и внешние неконсервативные силы $\vec{F}_i^{\,*}$.

Для каждой материальной точки запишем второй закон Ньютона:

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1 + \vec{F}_1^{\,*} ,$$

$$\dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{22} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2 + \vec{F}_2^{\,*} ,$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\dot{\vec{p}}_n = \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n3} + \ldots + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{F}_n + \vec{F}_n^{\,*} .$$

Далее левые и правые части каждого уравнения умножим скалярно на $d\vec{r}_i$ соответственно, где i – номер материальной точки. Покажем это на примере i-й материальной точки:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^{\,*} \mid d\vec{r}_i ,$$

$$\dot{\vec{p}}_i\, d\vec{r}_i = (\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in})d\vec{r}_i + \vec{F}_i\, d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{\,*}\, d\vec{r}_i\,.$$

Это равенство можно записать в виде

$$dW_i = -d\varPi_{i(\text{внутр})} - d\varPi_{i(\text{внеш})} + dA_i$$

или

$$d(W_i + \varPi_{i(\text{внутр})} + \varPi_{i(\text{внеш})}) = dA_i\,,$$

где W_i – кинетическая энергия i-й материальной точки;

$\varPi_{i(внутр)}$ – потенциальная энергия, обусловленная действием внутренних сил на i-ю материальную точку;

$\varPi_{i(внеш)}$ – потенциальная энергия, обусловленная действием внешних сил на i-ю материальную точку;

dA_i – работа, которую совершает над i-й материальной точкой внешняя неконсервативная сила.

Просуммируем левые и правые части преобразованных указанным образом уравнений движения:

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} W_i + \sum_{i=1}^{n} \varPi_{i(\text{внутр})} + \sum_{i=1}^{n} \varPi_{i(\text{внеш})}\right) = \sum_{i=1}^{n} dA_i$$

или

$$d(W + \varPi_{\text{внутр}} + \varPi_{\text{внеш}}) = dA\,,$$

где W – кинетическая энергия системы материальных точек.

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, правая часть полученного уравнения будет равна нулю и, следовательно, полная механическая энергия системы остается постоянной:

$$E = W + \varPi_{(\text{внутр})} + \varPi_{(\text{внеш})} = \text{const}\,.$$

Это - ***закон сохранения полной механической энергии системы материальных точек:***

Полная механическая энергия системы (незамкнутой) материальных точек, на которые действуют лишь консервативные силы, остается постоянной, т. е. сохраняется во времени.

Для замкнутой системы закон сохранения полной механической энергии имеет вид

$$E = W + \varPi_{(\text{внутр})} = \text{const}\,.$$

Полная механическая энергия замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной, т. е. сохраняется во времени.

Если в замкнутой системе кроме консервативных действуют также неконсервативные силы, например силы трения, то полная механическая энергия системы не сохраняется (точнее убывает).

13. Связь между потенциальной энергией и консервативной силой

Если тело в каждой точке пространства подвержено воздействию других тел, то говорят, что это тело находится в поле сил. Так, например, тело вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести.

Поле консервативных сил называется *потенциальным полем сил*. В каждой точке такого поля потенциальная энергия имеет определенное значение. Зная потенциальную энергию $\varPi$ как функцию пространственных координат, можно найти силу $\vec{F}$, действующую на тело. Для этого рассмотрим материальную точку, находящуюся в потенциальном силовом поле и вычислим элементарную работу по ее перемещению из точки *1* в близко расположенную точку *2* (рис. 13.1). Через точки *1* и *2* проведем поверхности, на которых потенциальная энергия Π остается постоянной, и которые находятся на расстоянии dn друг от друга. Сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку, направлена перпендикулярно этим поверхностям, так как работа этой силы по перемещению материальной точки вдоль этих поверхностей $dA = -d\Pi = 0$.

Далее элементарную работу dA по перемещению материальной точки из точки *1* в точку *2* можно вычислить двумя способами:

$$dA = -d\Pi,$$

$$dA = \vec{F}\, d\vec{r} = F\, dr \cos\alpha = F\, dn.$$

Решая совместно эти уравнения, находим силу F:

$$F = -\frac{d\Pi}{dn}.$$

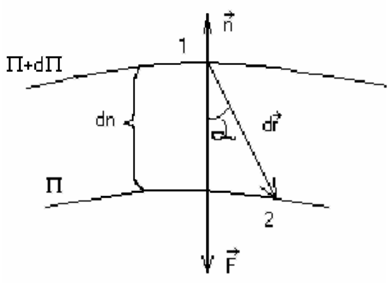

Рис. 13.1

Это соотношение можно записать в векторной форме, если ввести векторную величину – *градиент* потенциальной энергии $\mathrm{grad}\,\Pi$. По определению это вектор, направленный в сторону максимального возрастания потенциальной энергии Π:

$$\mathrm{grad}\,\Pi = \frac{d\Pi}{dn}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности, на которой потенциальная энергия имеет одинаковое значение. Тогда соотношение между потенциальной энергией и консервативной силой принимает вид

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,\Pi.$$

В заключение заметим, что *градиент скалярной функции* $\varphi(x, y, z)$ обозначается либо символом $\mathrm{grad}\,\varphi$, либо $\vec{\nabla}\varphi$,

где $\vec{\nabla}$ ("вектор набла") означает *векторный оператор*:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда градиент скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ равен

$$\mathrm{grad}\,\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

14. Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело (например, сжатая или растянутая пружина и т. п.). В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения отдельных частей тела (например, от расстояния между соседними витками пружины). Возьмем материальную точку m, закрепленную на конце пружины (рис. 14.1). Положение этой точки будет описываться радиусом-вектором $\vec{r}$, на неё действует возвращающая сила упругой деформации (закон Гука) $\vec{F} = -k\,\vec{r}$. Вычислим элементарную работу, которую необходимо затратить на дополнительное растяжение пружины на величину $d\vec{r}$. Эта работа увеличит запас потенциальной энергии на $d\Pi$:

$$d\Pi = -dA = -\vec{F}\,d\vec{r} = k\vec{r}\,d\vec{r} = krdr = d\left(\frac{kr^2}{2}\right).$$

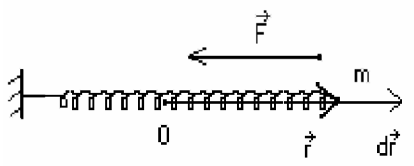

Рис. 14.1

Итак, получили формулу для потенциальной энергии упруго сжатой или растянутой пружины:

$$\Pi = \frac{kr^2}{2}.$$

При этом потенциальная энергия пружины в недеформированном состоянии принята равной нулю.

15. Потенциальные кривые. Потенциальные ямы и барьеры. Движение материальной точки в потенциальной яме

Потенциальная кривая *– это кривая, выражающая зависимость потенциальной энергии от координаты.* Потенциальные кривые позволяют качественно описать характер движения тела. На рис 15.1 приведены примеры потенциальных кривых.

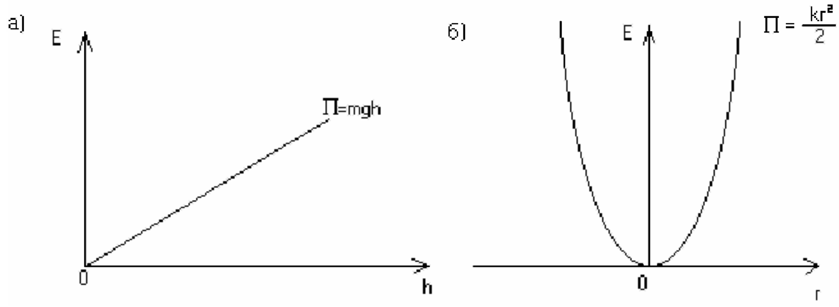

Рис. 15.1

Рассмотрим теперь материальную точку, которая находится в потенциальном поле сил. Для простоты ограничимся случаем, когда положение материальной точки может быть определено с помощью одной величины, например координаты x.

Пусть график потенциальной энергии имеет вид, изображенный на рис. 15.2. Зная вид потенциальной кривой, можно сделать ряд заключений о характере движения материальной точки. Полная механическая энергия материальной точки в процессе движения остается постоянной:

$$E = W + \Pi = \text{const}.$$

При этом её слагаемые: кинетическая и потенциальная энергия изменяются:

$$W \neq \text{const},\ \Pi \neq \text{const}.$$

Если полная энергия E имеет значение, указанное на рис. 15.2, то материальная точка может совершать движение либо в пределах от x_1 до x_2, либо в пределах от x_3 до бесконечности. Области $x < x_1$ и $x_2 < x < x_3$ представляют собой *потенциальный барьер*, через который материальная точка не может проникнуть, имея данный запас полной энергии. Область $x_1 < x < x_2$ называется *потенциальной ямой*. Материальная частица в потенциальной яме совершает *финитное* движение, т. е. она все время находится в ограниченной области пространства и не может удалиться на бесконечность. Если же материальная точка может уходить сколь угодно далеко, движение называется *инфинитным*. В точке x_0 потенциальная энергия Π имеет минимум. Условие минимума потенциальной энергии имеет вид

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0 .$$

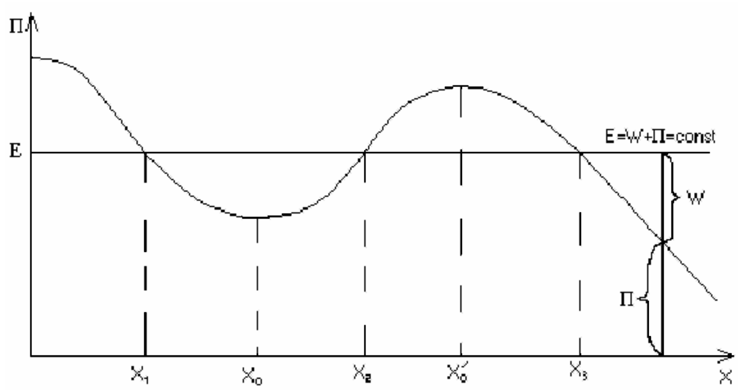

Рис. 15.2

В соответствии с соотношением $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,\Pi$ это равнозначно тому, что $\vec{F} = 0$. Таким образом, положение материальной точки, определяемое значением x_0, является *равновесным*. В изображенном на рис. 15.2 случае условие $\frac{d\Pi}{dx} = 0$, $\vec{F} = 0$ выполняется также для x, равного $x_0^{'}$ (т.е. для максимума потенциальной энергии Π). Это положение материальной точки также будет равновесным. Однако это равновесие в отличие от равновесия при $x = x_0$ будет неустойчивым. Силы, возникающие при смещении материальной точки из положения устойчивого равновесия (для которого $x = x_0$), направлены так, что стремятся вернуть материальную точку в положение равновесия.

16. Законы сохранения в механике и симметрии пространства и времени

Законы Ньютона позволяют решить любую задачу классической механики. Они устанавливают уравнения движения тела, которые в общем случае являются нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка и могут быть решены только численными методами. В некоторых случаях уравнения движения представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений, решение которых может быть представлено в аналитическом виде, т. е. в виде некоторых известных функций. В общем случае решение уравнений движения тела может представлять серьезную математическую проблему.

Однако в механике можно ввести физические величины, которые при определённых условиях сохраняются во времени и могут существенно упростить решение задач механики. Таких физических величин три: *импульс, энергия и момент импульса*. Наличие законов сохранения этих величин связано со свойствами пространства и времени. Так, законы сохранения импульса и энергии отражают такое свойство пространства и времени, как их однородность. *Однородность пространства* означает, что при любом параллельном переносе замкнутой системы как целого в пространстве ее механические свойства не изменяются. *Однородность времени* означает, что при любой замене момента времени t_1 моментом t_2 без изменения значений координат и скоростей тел механические свойства замкнутой системы не изменяются. Закон сохранения момента импульса выражает *изотропные свойства пространства*, т. е. равноправность всех направлений в пространстве.

Разумеется, законы сохранения энергии, импульса и момента импульса должны вытекать из законов Ньютона.

17. Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выберем начало координат O, тогда положение точек будет задаваться радиусами-векторами

$$\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \dots,\ \vec{r}_n.$$

Пусть материальные точки обладают импульсами

$$\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \dots,\ \vec{p}_n,$$

и пусть между материальными точками системы действуют силы внутреннего взаимодействия $\vec{F}_{ik}$, а также на материальные точки действуют внешние силы $\vec{F}_i$. Определим моменты этих сил относительно начала координат:

$\vec{M}_{ik}$ – момент внутренней силы $\vec{F}_{ik}$;

$\vec{M}_i$ – момент внешней силы $\vec{F}_i$.

Определим также моменты импульсов материальных точек

$$\vec{L}_1,\ \vec{L}_2,\ \dots,\ \vec{L}_n.$$

Далее для каждой материальной точки запишем закон изменения момента импульса

$$\dot{\vec{L}}_1=\vec{M}_1+\vec{M}_{12}+\vec{M}_{13}+\ldots+\vec{M}_{1n},$$

$$\dot{\vec{L}}_2=\vec{M}_2+\vec{M}_{21}+\vec{M}_{23}+\ldots+\vec{M}_{2n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\vec{L}}_n=\vec{M}_n+\vec{M}_{n1}+\vec{M}_{n2}+\ldots+\vec{M}_{n(n-1)}.$$

Просуммировав левые и правые части этих уравнений, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{L}}_i=\underbrace{(\vec{M}_1+\vec{M}_2+\ldots+\vec{M}_n)}_{\vec{M}}+\underbrace{(\vec{M}_{12}+\vec{M}_{12})+\ldots+(\vec{M}_{n(n-1)}+\vec{M}_{(n-1)n})}_{0}.$$

Силы взаимодействия между материальными точками действуют в противоположные стороны вдоль одной и той же прямой. Их моменты относительно начала координат O равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга и сумма моментов всех внутренних сил равна нулю. В результате получим

$$\frac{d}{dt}(\vec{l}_1+\vec{l}_2+\ldots+\vec{l}_n)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i\,.$$

Если система материальных точек является замкнутой, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0$, и тогда имеет место ***закон сохранения момента импульса системы материальных точек:***

$$\vec{L}_1+\vec{L}_2+\ldots+\vec{L}_n=\text{const}\,.$$

Если система материальных точек является замкнутой, то суммарный момент импульса системы остаётся постоянным, т.е. сохраняется во времени.

18. Движение тела в центральном гравитационном поле

Это задача небесной механики. Она является одной из наиболее важных задач в классической механике. При ее решении используется почти все, что уже знаем. Рассмотрим гравитационное поле Солнца, и пусть в нем движется планета (рис. 18.1). Поскольку масса Солнца намного больше массы планеты, то Солнце можно считать неподвижным и рассматривать его в качестве тела отсчета. На планету действует сила гравитационного притяжения Солнца, которая направлена по прямой, соединяющей ее с центром Солнца, и величина которой определяется законом всемирного тяготения:

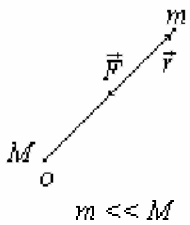

Рис. 18.1

$$F=G\frac{mM}{r^2}\,,$$

где $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг² – *гравитационная постоянная.*

Выражение силы гравитационного притяжения в векторной форме имеет вид

$$\vec{F}=-G\frac{mM\,\vec{r}}{r^3}\,.$$

Гравитационное взаимодействие осуществляется через гравитационное поле. Гравитационное поле Солнца является центральным потенциальным полем и для него имеет место закон сохранения полной механической энергии и закон сохранения момента импульса. В этом легко убедиться.

1. Гравитационная сила – *консервативная сила*, и для нее можно ввести понятие потенциальной энергии, а именно:

$$dП=-dA=-\vec{F}\,d\vec{r}=G\frac{mM}{r^3}\vec{r}\,d\vec{r}=G\frac{mM}{r^3}r\,dr=G\frac{mMdr}{r^2}=d\left(-\frac{GmM}{r}\right),$$

то есть

$$П=-\frac{GmM}{r}+\text{const}\,.$$

Обычно условливаются считать потенциальную энергию на бесконечности (т. е. при $r=\infty$) равной нулю. При этом условии const = 0 и формула для *потенциальной энергии гравитационного поля* имеет вид

$$П=-\frac{GmM}{r}\,.$$

Как было показано, для системы материальных точек в случае присутствия только консервативных сил имеет место *закон сохранения полной механической энергии*:

$$E=W+П=\text{const}\,.$$

2. Гравитационная сила – *центральная сила*.

Рассмотрим закон изменения во времени момента импульса $\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right]$ тела, находящегося в центральном гравитационном поле:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Так как сила $\vec{F}$ и радиус-вектор $\vec{r}$ направлены вдоль одной прямой, то момент силы $\vec{F}$ равен нулю:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = 0.$$

Тогда $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда следует *закон сохранения момента импульса тела*:

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Поскольку момент импульса тела сохраняется, движение тела происходит в одной плоскости.

Рассмотрим теперь уравнение движения тела:

$$m\vec{a} = -G\frac{mM\vec{r}}{r^3}. \qquad (18.1)$$

Так как движение тела происходит в одной плоскости, то его положение на плоскости определяется только двумя координатами. Выберем полярную систему координат, тогда положение тела будет определяться расстоянием r до начала координат и углом φ, на который повернется радиус-вектор $\vec{r}$ (рис. 18.2). Спроектируем уравнение (18.1) на направление, задаваемое радиусом-вектором $\vec{r}$:

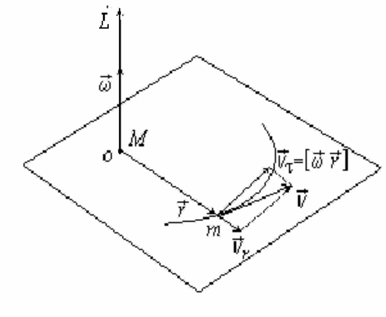

Рис. 18.2

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = -G\frac{mM}{r^2}. \qquad (18.2)$$

Второе слагаемое в левой части уравнения (18.2) обусловлено центростремительным ускорением, поскольку радиус-вектор $\vec{r}$ вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$. Определим момент импульса $\vec{L}$:

$$\vec{L} = m\left[\vec{r}, \vec{v}\right] = m\left[\vec{r}, \vec{v}_r\right] + m\left[\vec{r}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] = mr^2\vec{\omega}. \qquad (18.3)$$

При вычислении $\vec{L}$ использовано разложение скорости $\vec{v}$ на две составляющие (рис. 18.2):

$$\vec{v} = \vec{v}_r + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

а также применена формула раскрытия двойного векторного произведения:

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}, \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Из соотношения (18.3) можно найти угловую скорость $\omega = \dfrac{L}{mr^2}$, где L = const в силу закона сохранения момента импульса. Тогда уравнение (18.2) примет вид

$$m\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}. \qquad (18.4)$$

Решение уравнения (18.4) имело огромное значение в истории небесной механики. Оно позволило рассчитать движение планет, двойных звезд и спутников.

Для решения уравнения (18.4) искомую функцию $r(t)$ удобно представить как сложную функцию $r(\varphi(t))$. Можно показать, что функция $r = r(\varphi)$ имеет следующий вид:

$$r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \qquad (18.5)$$

где ε и ρ – некоторые постоянные. Формула (18.5) определяет траекторию движения тела в полярных координатах. Параметр ε называется *эксцентриситетом*, и от его величины зависит тип траектории. При этом возможны 4 типа траекторий:

1) $\varepsilon = 0$ – окружность;

2) $0 < \varepsilon < 1$ – эллипс;

3) $\varepsilon = 1$ – парабола;

4) $\varepsilon > 1$ – гипербола.

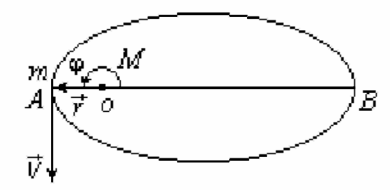

Рис. 18.3

Рассмотрим случай, когда траекторией движения тела является эллипс, в одном из фокусов которого расположено Солнце, с которым связали начало координат. Пусть тело в некоторый момент времени находится в точке A (рис. 18.3). Для точки A угловая координата $\varphi = \pi$, тогда согласно (18.5) $\rho = (1+\varepsilon)r$, и видим, что ρ является некоторым параметром орбиты. Воспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса тела для точки A:

$$L = mrv = \text{const} \Rightarrow v = \frac{L}{mr},$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \text{const}.$$

Выражая из первого уравнения скорость v и подставляя ее во второе уравнение, получим квадратное уравнение для r:

$$Er^2 + GmMr - \frac{L^2}{2m} = 0 . \qquad (18.6)$$

Корни этого квадратного уравнения задают положение точек A и B эллипса (см. рис. 18.3).

$$r_{1,2} = \frac{GmM}{2E}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{2L^2E}{G^2m^3M^2}}\right).$$

Как видно из формулы (18.5), радиальные координаты точек A и B определяют эксцентриситет эллипса ε. Действительно, $r_1 = \dfrac{\rho}{1+\varepsilon}$ и $r_2 = \dfrac{\rho}{1-\varepsilon}$, тогда

$$\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon . \qquad (18.7)$$

Подставляя в (18.7) корни квадратного уравнения (18.6), получим выражение для эксцентриситета эллипса ε через физические параметры:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2m^3M^2}} . \qquad (18.8)$$

Выражение для параметра орбиты ρ через физические параметры получим, подставляя ε и r_1 в соотношение $\rho = (1+\varepsilon)r_1$,

$$\rho = \frac{L^2}{Gm^2M} . \qquad (18.9)$$

Из формулы (18.8) получим полную механическую энергию тела:

$$E = -\frac{G^2m^3M^2}{2L^2}\left(1-\varepsilon^2\right).$$

В точке A ускорение свободного падения тела равно $g = \dfrac{GM}{r^2}$. Тогда

$$L = mrv , \qquad E = \frac{mv^2}{2} - mgr .$$

Подставляя L и E в (18.8) и (18.9), получим

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{v^2\left(v^2 - 2gr\right)}{g^2r^2}}, \qquad \rho = \frac{v^2}{g} . \qquad (18.10)$$

Эти формулы очень удобны при компьютерном моделировании движения тела в центральном гравитационном поле. Из (18.10) также следуют формулы для первой и второй космических скоростей, которые можно получить и более простым способом:

$\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{I}} = \sqrt{gr} = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ – *первая космическая скорость*;

$\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2gr} = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$ – *вторая космическая скорость.*

Характер движения тела в гравитационном поле Солнца можно качественно описать с помощью потенциальной кривой. Используя разложение полной скорости $\vec{v}$ тела на радиальную составляющую $\vec{v}_r$ и азимутальную составляющую $[\vec{\omega}, \vec{r}]$, можно законы сохранения момента импульса и полной механической энергии тела записать в виде

$$mr^2\omega = L = \text{const},$$

$$\frac{mv_r^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{2} - \frac{GmM}{r} = E = \text{const}.$$

Исключая из этих уравнений угловую скорость ω, получим уравнение

$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = \text{const}. \qquad (18.11)$$

Это уравнение содержит только одну неизвестную – радиальную скорость v_r. Формально оно может рассматриваться как уравнение энергии для одномерного (радиального) движения тела. Роль потенциальной энергии играет функция

$$\Pi_{\text{эфф}} = -\frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению условий одномерного движения с потенциальной энергией $\Pi_{\text{эфф}}(r)$. Для этого построим график потенциальной энергии $\Pi_{\text{эфф}}(r)$ (рис. 18.4).

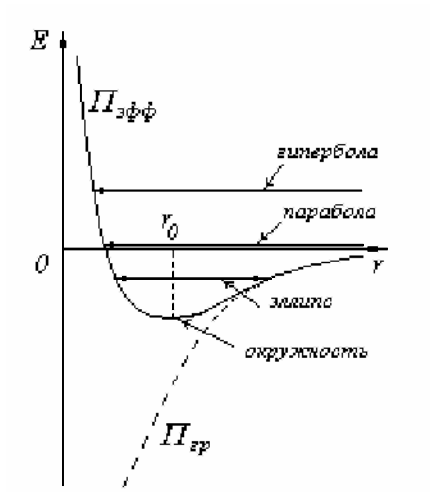

Рис. 18.4

На рис. 18.4 штриховые кривые представляют соответственно графики функций

$\Pi_1(r) = -\dfrac{GmM}{r}$ и $\Pi_2(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2}$, причем предполагается, что $L \neq 0$.

Интересующая нас кривая найдется сложением ординат этих двух графиков. При $r \to 0$ функция $\Pi_2(r)$ быстрее стремится к бесконечности, чем функция $\Pi_1(r)$. Поэтому при малых r функция $\Pi_{\text{эфф}}(r) = \Pi_1(r) + \Pi_2(r)$ положительна и асимптотически стремится к $+\infty$, когда $r \to 0$. Наоборот, при $r \to \infty$ функция $\Pi_1(r)$ медленнее приближается к нулю, чем $\Pi_2(r)$. Поэтому при больших r функция $\Pi_{\text{эфф}}(r)$ отрицательна и асимптотически приближается к нулю, когда $r \to \infty$. График этой функции представлен на рис. 18.4 сплошной линией. Кривая $\Pi_{\text{эфф}}(r)$ имеет вид “потенциальной ямы”.

Так как величина $\frac{m v_r^2}{2}$ не может быть отрицательной, то из уравнения (18.11) следует, что область, в которой может находиться тело, определяется условием $П_{эфф}(r) \le E$. Проведем горизонтальную прямую $П_{эфф}(r) = E = \text{const}$. Участки кривой $П_{эфф}(r)$, лежащие выше этой прямой, соответствуют точкам пространства, которые не могут быть достигнуты телом с энергией E. Если $E < 0$, то указанная прямая пересечет кривую $П_{эфф}(r)$ в двух точках. Тело может совершать движение только в области между этими точками, оно будет “локализовано в потенциальной яме”. В этом случае движение тела *финитно* и траектория будет *эллиптической*. Если $E > 0$, то прямая пересечет кривую $П_{эфф}(r)$ только в одной точке. Если тело двигалось справа налево, то в этой точке оно переменит направление движения на противоположное и начнет двигаться вправо, монотонно удаляясь в бесконечность. Его движение *инфинитно*, а траектория – *гиперболическая*. Наконец, при $E = 0$ движение также *инфинитно*. Этому промежуточному случаю между эллиптическим и гиперболическим движениями соответствует *движение по параболе*.

Таким образом, *при $E > 0$ движение гиперболическое, при $E < 0$ – эллиптическое, при $E = 0$ – параболическое*. Частным случаем эллиптического движения является *движение по круговой траектории*.

Законы Кеплера

Законы Кеплера являются одним из величайших открытий в истории науки. Эмпирические формулировки законов движения планет, данные Кеплером, послужили исходным экспериментальным материалом для вывода основных законов механики и теории всемирного тяготения. Кеплер сформулировал свои законы следующим образом:

1. Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов орбиты.

Только что было показано, что замкнутые орбиты являются эллипсами.

2. Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает равные площади за равные промежутки времени.

Второй закон Кеплера представляет собой закон сохранения момента импульса.

Это можно показать, если ввести вектор $\Delta \vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}, \Delta\vec{r}\right]$. Модуль этого вектора равен площади треугольника (рис. 18.5). Производная от этого вектора представляет собой площадь, которую “заметает” отрезок, соединяющий Солнце с планетой, за единицу времени:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}] = \frac{1}{2m}[\vec{r}, \vec{p}] = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const}.$$

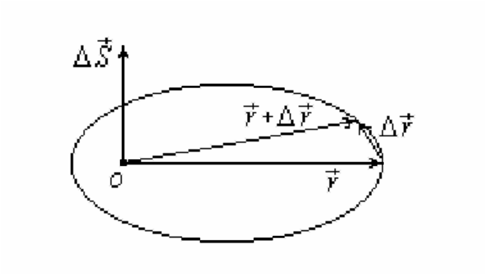

Рис. 18.5

3. Квадраты периодов обращения нескольких планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей эллипсов.

Для эллипсов вывод более громоздкий, но для круговых орбит он простой:

$$ma_ц = \frac{GmM}{r^2}, \quad m\omega^2 r = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow \omega^2 r^3 = \text{const},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = \text{const}, \quad \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Литература

1. Савельев, И.В. Курс общей физики. Кн. 1. Механика. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2000.
2. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1989.
3. Головейко, А.Г. Конспект лекций по курсу физики (рукописный). – Мн.: БПИ, 1983.