

Министерство образования Республики Беларусь  
*Белорусский национальный технический университет*  
Кафедра «Техническая физика»

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.  
ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ**

Пособие по физике для студентов дневной  
и заочной формы обучения

Электронное учебное издание

**Минск 2007**

Составители:

В.И. Кудин, М.Б. Ржевский, Е.Е. Трофименко

Рецензент:

В.А. Самойлюкович, кафедра физики, БНТУ

В данном пособии рассмотрены гармонические колебания, волны в упругой среде, а также элементы квантовой механики в объеме программы по первой части курса физики «Механика и молекулярная физика». Изложенный материал окажет помощь студентам в освоении лекционного материала, а также при подготовке к выполнению лабораторных работ физического практикума по данному разделу физики.

© Кудин В.И., Ржевский М.Б., Трофименко Е.Е., 2007

© БНТУ, 2007

## Оглавление

1. Гармонические колебания.....	4
Дифференциальное уравнение незатухающих свободных гармонических колебаний.....	4
Маятники.....	6
Энергия гармонических колебаний.....	7
Затухающие гармонические колебания.....	8
Вынужденные колебания.....	10
Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Метод векторной диаграммы.....	12
Бисения.....	13
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.....	14
2. Упругие волны.....	16
Механизм образования и распространения волн в упругой среде.	
Продольные и поперечные волны.....	16
Уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в направлении оси $x$ .....	17
Уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в произвольном направлении.....	19
Волновое уравнение.....	19
Энергия волны. Перенос энергии волновым движением. Вектор Умова.....	20
Стоячие волны.....	22
Колебания струны.....	24
3. Элементы квантовой механики.....	24
Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза де Бройля.....	25
Волновая функция свободно движущейся частицы.....	27
Волновое уравнение Шредингера.....	28
Квантование. Движение частицы в прямоугольной потенциальной яме.....	29
Статистический смысл волновой функции.....	30
Принцип неопределенности Гейзенберга.....	33
Литература.....	35

## 1. Гармонические колебания

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. п.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т. д. В данной части курса физики рассматриваются механические колебания.

В зависимости от характера воздействия на колебательную систему различают свободные (или собственные) колебания и вынужденные колебания. *Свободными* называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити (маятник). *Вынужденными* называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Простейшим видом колебаний являются *гармонические колебания*, т. е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам: во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер очень близкий к гармоническим колебаниям, и, во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

### Дифференциальное уравнение незатухающих свободных гармонических колебаний

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массы  $m$ , подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с  $m$  (рис. 1.1). В положении равновесия сила тяжести  $mg$  уравновешивается упругой силой пружины, равной  $k\Delta l_0$ :

$$mg = k\Delta l_0. \quad (1.1)$$

Далее будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой  $x$ , причем ось  $x$  направим вниз, а нуль оси  $x$  совместим с положением равновесия шарика.

Если сместить шарик в положение, характеризуемое координатой  $x$ , то удлинение пружины станет  $\Delta l_0 + x$  и проекция результирующей силы на ось  $x$  примет значение

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x),$$

или, учитывая (1.1):

$$F = -kx.$$

В дальнейшем силы вида  $F = -kx$ , независимо от их природы, будем называть *квазиупругими силами*. Эти силы всегда направлены к положению равновесия, а модуль их пропорционален величине отклонения системы от равновесного положения. Такие силы еще называют *возвращающими силами*.

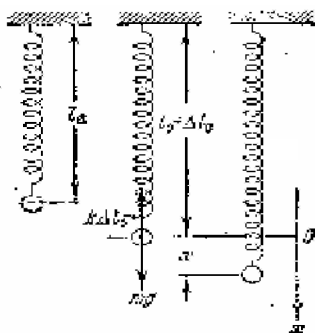


Рис. 1.1

Сообщим шарикю смещение  $x = A$ , после чего предоставим систему самой себе. Уравнение второго закона Ньютона для шарика имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx$$

Разделим правую и левую часть этого уравнения на  $m$  и введем обозначение  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , тогда получим:

$$\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.2)$$

– дифференциальное уравнение незатухающих свободных гармонических колебаний.

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.3)$$

или  $x = A \sin(\omega t + \varphi_1)$ ,

где  $x$  – смещение точки от положения равновесия;  $A$  и  $\varphi$  – некоторые постоянные.

Таким образом, движение системы, находящейся под действием силы вида  $F = -kx$ , представляет собой гармоническое колебание, а такая колебательная система называется *гармоническим осциллятором*.

#### **Параметры гармонического колебания:**

$A$  – амплитуда, т. е. максимальное смещение от положения равновесия;  
 $(\omega t + \varphi)$  – фаза колебаний, которая измеряется в радианах и которая определяет положение шарика (тела) в пространстве в момент времени  $t$ ;

$\varphi$  – начальная фаза, т. е. фаза в момент времени  $t = 0$ ;

$T$  – период колебаний, т. е. время одного полного колебания;

$\nu = \frac{1}{T}$  – частота колебаний, т. е. число колебаний в единицу времени (измеряется в герцах,  $[\nu] = 1 \text{ Гц} = 1 \text{ колеб./1 с}$ ).

Поскольку косинус – функция периодическая с периодом  $2\pi$ , то

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \text{ – циклическая частота.}$$

В случае колеблющегося шарика, подвешенного на пружине:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Продифференцировав по времени выражение для координаты точки

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

получим выражение для скорости:

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$$

а продифференцировав еще раз, найдем выражение для ускорения

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Из сравнения этих выражений следует, что скорость  $V$  опережает смещение  $x$  по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ , а ускорение  $a$  и смещение  $x$  находятся в противофазе.

На рис. 1.2 сопоставлены графики для смещения, скорости и ускорения.

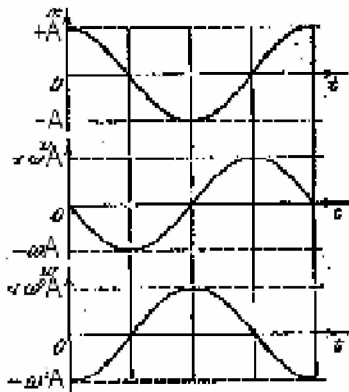


Рис. 1.2

### Маятники

В физике под маятником понимают твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси, не проходящей через центр инерции. Принято различать математический и физический маятники.

*Математическим маятником* называется идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

*Физическим маятником* называется колеблющееся тело, которое нельзя представить как материальную точку. При отклонении от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия (рис. 1.3). Этот момент равен

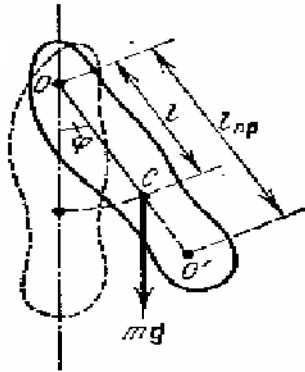


Рис. 1.3

$$M = -mgr \sin \varphi,$$

где  $m$  – масса маятника,  $r$  – расстояние между точкой подвеса  $O$  и центром инерции  $C$  маятника. Знак “–” имеет тоже значение, что и в случае квазиупругой силы  $F = -kx$ . Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой  $I$ , можно написать основной закон динамики вращательного движения:

$$I \ddot{\varphi} = -mgr \sin \varphi.$$

В случае малых колебаний это уравнение переходит в уже известное нам уравнение незатухающих гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

где через  $\omega^2$  обозначена в данном случае следующая величина:

$$\omega^2 = \frac{mgr}{I}.$$

Из этого уравнения следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания. При этом период колебаний физического маятника определяется выражением:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}.$$

Проведенное выше рассмотрение имеет место и для математического маятника. В этом случае маятник представляет собой материальную точку, момент инерции которой относительно оси, проходящей через точку подвеса, равен  $I = ml^2$ . С учетом этого, получаем формулу для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Для физического маятника вводится понятие приведенной длины  $l_{np}$ . *Приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника, т. е.

$$T_{\varphi} = T_M \Rightarrow l_{np} = \frac{I}{mr}.$$

Точка, лежащая на продолжении прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, и расположенная от оси вращения на расстоянии приведенной длины, называется *центром качания* физического маятника (см. точку  $O'$  на рис. 1.3). Можно показать, что при подвешивании маятника в центре качания  $O'$  приведенная длина, а значит, и период колебаний будут теми же, что и вначале. Следовательно, точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания точка подвеса становится новым центром качания (теорема Гюйгенса).

### Энергия гармонических колебаний

Квазиупругая сила является консервативной силой, поэтому полная энергия незатухающих свободных гармонических колебаний должна оставаться постоянной

$$E = W + \Pi = \text{const},$$

где  $W = \frac{m\dot{x}^2}{2}$  – кинетическая энергия,

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} \text{ – потенциальная энергия.}$$

Качественно колебательное движение можно описать с помощью потенциальной кривой, т. е. графика функции  $\Pi = \frac{kx^2}{2}$

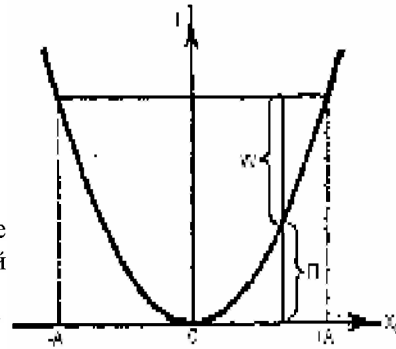


Рис. 1.4

(рис. 1.4). В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия  $E$  состоит только из потенциальной, которая достигает своего наибольшего значения:

$$E = \Pi_{\text{max}} = \frac{kA^2}{2}.$$

При прохождении же системы через положение равновесия полная энергия системы состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения

$$E = W_{\text{max}} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

Эти выражения равны друг другу, так как  $m\omega^2 = k$ . Выясним, как изменяется со временем кинетическая и потенциальная энергия гармонического колебания:

$$W = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi),$$

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Сложив два этих выражения и приняв во внимание, что  $m\omega^2 = k$ , получим формулу для полной энергии

$$E = W + \Pi = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \text{const}.$$

Таким образом, полная энергия незатухающего гармонического колебания действительно оказывается постоянной.

### Затухающие гармонические колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, колебания будут затухать. Итак, *затухающие гармонические колебания* – это колебания, при которых полная механическая энергия системы уменьшается со временем, т. е.  $\frac{dE}{dt} < 0$ . В простейшем, и вместе с тем наиболее часто встречающемся случае, сила сопротивления  $F_{\text{сопр}}$  пропорциональна величине скорости:

$$F_{\text{сопр}} = -R\dot{x},$$

где  $R$  – постоянная, называемая коэффициентом сопротивления. Знак минус обусловлен тем, что сила  $\vec{F}$  и скорость  $\vec{v}$  имеют противоположные направления; следовательно, их проекции на ось  $x$  имеют разные знаки.

Второй закон Ньютона при наличии сил сопротивления имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - R\dot{x}.$$

Используя обозначения

$$2\beta = \frac{R}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.4)$$

– дифференциальное уравнение затухающих гармонических колебаний.

Отметим, что  $\omega_0$  представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды (при  $R = 0$ ). Эту частоту называют *собственной частотой* системы.

1. При не слишком сильном затухании (при  $\beta < \omega_0$ ) общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.5)$$

где  $A_0$  и  $\varphi$  – постоянные,  $\omega$  – величина, определяемая формулой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

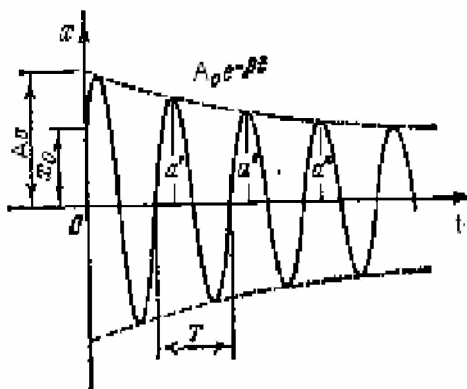


Рис. 1.5

На рис. 1.5 дан график функции (1.5). Пунктирными линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки  $x$ .

В соответствии с видом функции (1.5) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание частоты  $\omega$  с амплитудой, изменяющейся по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}.$$

Верхняя из пунктирных кривых дает график функции  $A(t)$ , причем величина  $A_0$

представляет собой амплитуду в начальный момент времени.



Скорость затухания колебаний определяется величиной  $\beta = \frac{R}{2m}$ , которую называют *коэффициентом затухания*.

Период затухания колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.6)$$

При незначительном сопротивлении среды ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) период колебаний практически не изменяется и равен  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Последующие наибольшие отклонения в какую-либо сторону (например,  $A', A'', A'''$  на рис. 1.5) образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если  $A' = A_0 e^{-\beta t}$ , то  $A'' = A_0 e^{-\beta(t+T)} = A' e^{-\beta T}$ ,  $A''' = A_0 e^{-\beta(t+2T)} = A'' e^{-\beta T}$  и т. д.

Вообще, отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Это отношение называется *декрементом затухания*, а его логарифм – *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (1.7)$$

Для характеристики колебательной системы обычно используется логарифмический декремент затухания  $\theta$ . Выразив в соответствии с (1.7)  $\beta$  через  $\theta$  и  $T$ , можно закон убывания амплитуды со временем записать в виде

$$A = A_0 e^{-\frac{\theta t}{T}}.$$

Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина

$$Q = \frac{\pi}{\theta}, \text{ называемая добротностью колебательной системы.}$$

Ранее мы установили, что полная энергия колеблющейся системы пропорциональна квадрату амплитуды. В соответствии с этим энергия системы при затухающих колебаниях убывает со временем по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta t},$$

где  $E_0$  – значение энергии при  $t=0$ .

Из формулы периода затухающих колебаний (1.6) следует, что с ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается. При  $\beta = \omega_0$  период колебаний обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим.

2. При  $\beta > \omega_0$  решение дифференциального уравнения (1.5) оказывается равным сумме двух экспонент:

$$x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, значения которых зависят от начальных условий (от  $x_0$  и  $V_0 = (\dot{x})_0$ ),

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} ,$$

$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} .$$

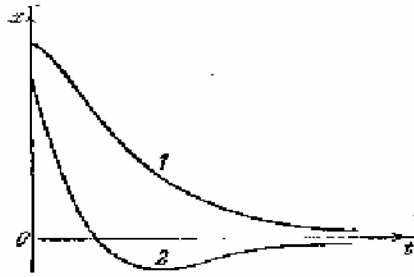


Рис. 1.6

Движение в этом случае носит *апериодический* (непериодический) характер – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний.

На рис. 1.6 показаны два возможных способа возвращения системы в положение равновесия при апериодическом движении. Каким из этих способов приходит система в положение равновесия, зависит от начальных условий.

### Вынужденные колебания

*Вынужденные колебания* – это колебания, которые происходят в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы:

$$F_{\text{вн}} = F_0 \cos \Omega t ,$$

где  $\Omega$  – частота внешней силы.

В этом случае уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - R\dot{x} + F_0 \cos \Omega t .$$

Введем обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{R}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

тогда получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \quad (1.8)$$

– дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

Это уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Общее решение однородного уравнения мы уже знаем (см. уравнение (1.4) и его решение (1.5)).

Остается найти частное (не содержащее постоянных) решение уравнения (1.8). Это частное решение имеет вид

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t - \varphi), \quad (1.9)$$

где 
$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} .$$

Функция (1.9) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (1.10)$$

пропорциональна амплитуде вынуждающей силы, а также зависит от частоты  $\Omega$  вынуждающей силы.

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания  $\varphi$  также зависит от частоты вынуждающей силы

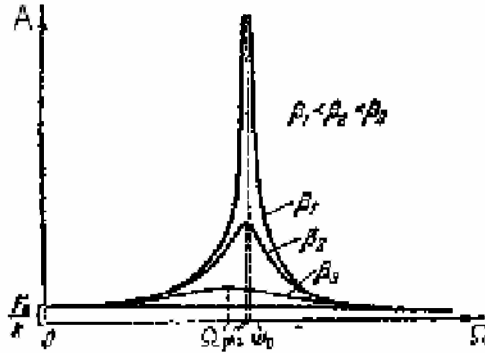


Рис. 1.7

На рис. 1.7 приведены графики функции  $A(\Omega)$  при различных значениях коэффициента затухания  $\beta$ . Как видно из рисунка, при некоторой определенной для данной системы частоте  $\Omega_{\text{рез}}$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется *резонансом*, а соответствующая частота  $\Omega_{\text{рез}}$  — *резонансной*

*частотой*. Чтобы определить резонансную частоту  $\Omega_{\text{рез}}$ , нужно найти максимум функции (1.10) или, что тоже самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе.

Продифференцировав это выражение по  $\Omega$  и приравняв нулю, получим условие, определяющее  $\Omega_{\text{рез}}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\beta^2 \Omega = 0.$$

Это уравнение имеет три решения:  $\Omega=0$  и  $\Omega = +\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ .

Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено, как не имеющее физического смысла. Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1.11)$$

Подставив это значение частоты в (1.10), получим выражение для амплитуды при резонансе

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.12)$$

Из этого выражения следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Согласно (1.11) резонансная частота при тех же условиях (при  $\beta=0$ ) совпадает с собственной частотой колебания системы  $\omega_0$ .

Изображенная на рис. 1.7 совокупность графиков функции  $A(\Omega)$ , соответствующих различным значениям параметра  $\beta$ , называется *резонансными кривыми*.

Из формулы (1.12) вытекает, что при малом затухании (т. е. при  $\beta \ll \omega_0$ ) амплитуда колебаний при резонансе приближенно равна

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}.$$

Разделим это выражение на смещение  $x_0$  от положения равновесия под действием постоянной силы ( $\Omega=0$ ), равное  $\frac{f_0}{\omega_0^2}$ . В результате получим

$$\frac{A_{\text{рез}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\theta} = Q.$$

Таким образом, добротность  $Q$  показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы (это справедливо лишь при небольшом затухании).

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различного рода сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств ни в коем случае не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий, т. к. в этом случае возникают вибрации, которые могут вызвать катастрофу. Вместе с тем явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике и т. д.

### Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Метод векторной диаграммы

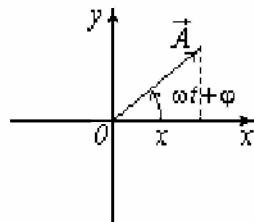


Рис. 1.8

В системе координат  $(x, y)$  рассмотрим радиус-вектор  $\vec{A}$ , который вращается с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1.8). Проекция этого вектора на ось  $x$  изменяется во времени по гармоническому закону

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

и описывает гармонические колебания с амплитудой  $A$ , циклической частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi$ .

Этот метод очень удобен для описания сложения колебаний одного направления и одинаковой частоты. Пусть имеются два гармонических колебания

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Надо найти результат сложения этих колебаний

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi),$$

т.е. найти амплитуду результирующего колебания  $A$  и его начальную фазу  $\varphi$ . На векторной диаграмме (рис. 1.9) гармонические колебания  $x_1$  и  $x_2$  представим вращающимися векторами  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ . Тогда результирующее колебание  $x$  будет представляться вращающимся вектором

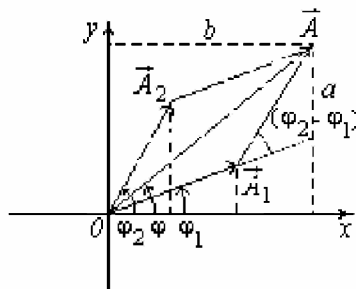


Рис. 1.9

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2.$$

Из треугольника  $OAC$  по теореме косинусов находим амплитуду результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Из чисто геометрических соображений можно найти и начальную фазу результирующего колебания  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Как мы видим, результат сложения двух колебаний существенно зависит от разности фаз этих колебаний  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Рассмотрим два важных случая:

а)  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$  – колебания *синфазные*.

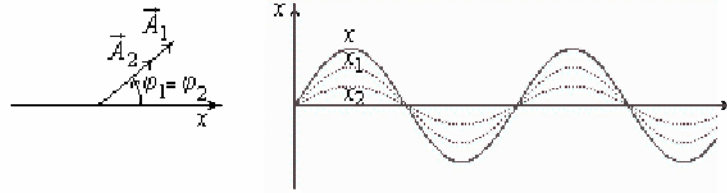


Рис. 1.10

В этом случае (рис. 1.10) амплитуды колебаний складываются, т. е. колебания усиливают друг друга:

$$A = A_1 + A_2.$$

б)  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$  – колебания *противофазные*.

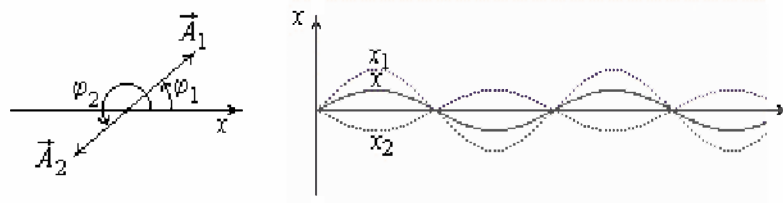


Рис. 1.11

В этом случае (рис. 1.11) амплитуды колебаний вычитаются, т. е. гасят друг друга:

$$A = |A_1 - A_2|.$$

### Битения

Особый случай представляет результат сложения двух гармонических колебаний одного направления, с одинаковой амплитудой, но частоты которых немного отличаются друг от друга, т.е.  $\omega_1 \approx \omega_2$ , но  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega$ . Так как  $\omega_1 \neq \omega_2$ , мы не можем воспользоваться методом векторной диаграммы, и будем пользоваться формулой сложения косинусов двух углов.

Итак, пусть имеются два гармонических колебания:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A \cos \omega_2 t.$$

Сложим эти два колебания

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \omega t = \\ &= \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cdot \cos \omega t = A(t) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Мы видим, что амплитуда результирующего колебания изменяется со временем  $A(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$  с частотой  $\frac{\Delta\omega}{2}$ , которая намного меньше  $\omega$ .

Результат приведен на графике (рис. 1.12).

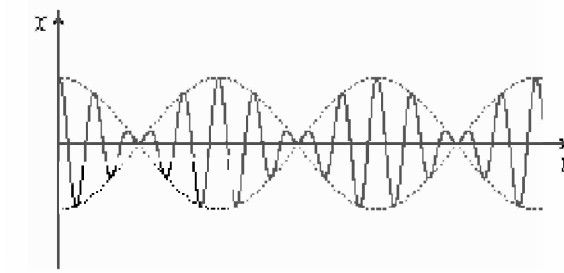


Рис. 1.12

### Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Такое сложение можно осуществить с помощью двойного математического маятника. Сложение электрических колебаний можно наблюдать на экране осциллографа, если на отклоняющиеся пластины  $X$  электронного осциллографа подать одно гармонически изменяющееся напряжение  $U_x$ , а на пластины  $Y$  второе гармонически изменяющееся напряжение  $U_y$ . Результат сложения зависит от соотношения частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  гармонических колебаний, а также от разности фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$ .

Пусть материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega_1 t, \\ y = b \cos(\omega_2 t + \alpha), \end{cases}$$

где  $\alpha$  – разность фаз этих колебаний.

1. Вначале рассмотрим простейший случай, когда  $\omega_1 = \omega_2$ , т. е. соотношение частот  $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = b \cos(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

Найти результат сложения, означает найти вид функции  $y(x)$ , т. е. найти траекторию движения материальной точки в плоскости  $(x, y)$ . Запишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos \omega t, \\ \frac{y}{b} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}, \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

С учетом первого уравнения, второе уравнение системы преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} &= \frac{x}{a} \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \alpha &= -\sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \end{aligned}$$

Возведем обе стороны этого уравнения в квадрат,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \alpha - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha - \frac{x^2}{a^2} \sin^2 \alpha$$

и, произведя тригонометрические преобразования, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha - \text{уравнение траектории } y(x).$$

Вид траектории  $y(x)$  (рис. 1.13) существенно зависит от разности фаз  $\alpha$ :

а)  $\alpha = 0$ ,  $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$ ,  $y = \frac{b}{a}x$  — отрезок прямой линии,

б)  $\alpha = +\pi$ ,  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$  — отрезок прямой линии,

в)  $\alpha = +\pi/2$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  — эллипс.

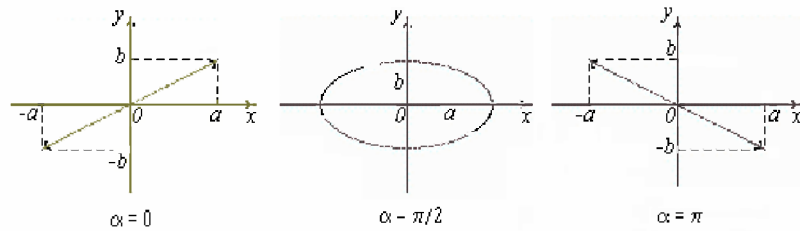


Рис. 1.13

2. Пусть частоты двух взаимно перпендикулярных колебаний отличаются друг от друга, но кратны между собой

Например,  $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$  (рис. 1.14).

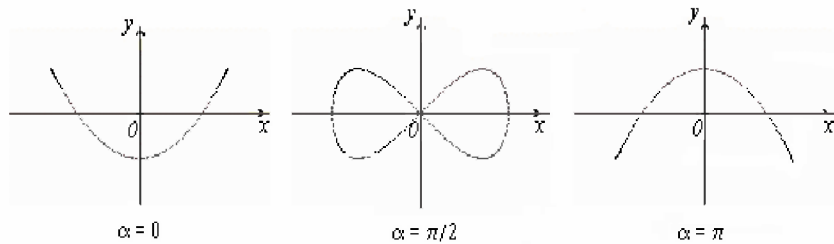


Рис. 1.14

Если  $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 3$  (рис. 1.15).

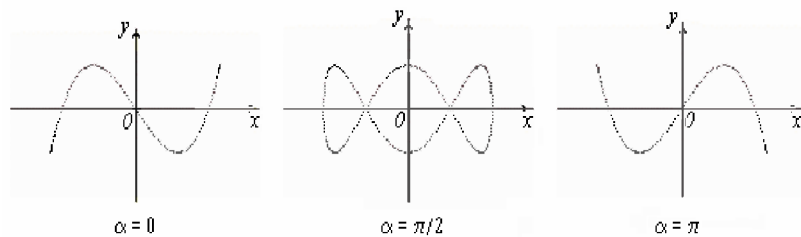


Рис. 1.15

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, которые называются фигурами Лиссажу.

## 2. Упругие волны

### Механизм образования и распространения волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны

Волной называется процесс распространения колебаний в пространстве. Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью  $v$ .

Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению распространения волны, различают продольные и поперечные волны.

Продольная волна – это волна, в которой частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.

Поперечная волна – это волна, в которой частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Упругие поперечные волны могут возникать лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

Скорость волны в среде зависит от упругих свойств среды и ее параметров. В случае продольных волн в твердой и жидкой средах скорость волны равна  $v = \sqrt{E/\rho}$ , где  $\rho$  – плотность среды,  $E$  – модуль Юнга. В случае поперечных волн в твердой среде скорость волны равна  $v = \sqrt{G/\rho}$ , где  $\rho$  – плотность среды,  $G$  – модуль сдвига. В газообразной среде скорость волны равна  $v = \sqrt{\gamma RT/M}$ , где  $M$  – молярная масса газа,  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – температура газа,  $\gamma = C_p/C_v$  – отношение молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме.

На рис. 2.1 показано движение частиц среды при распространении в ней поперечной волны. Номерами 1, 2 и т.д. обозначены частицы среды, отстоящие друг от друга на расстоянии  $1/4 vT$ , т.е. на расстояние, проходимое волной за четверть периода колебаний, совершаемых частицами. В момент

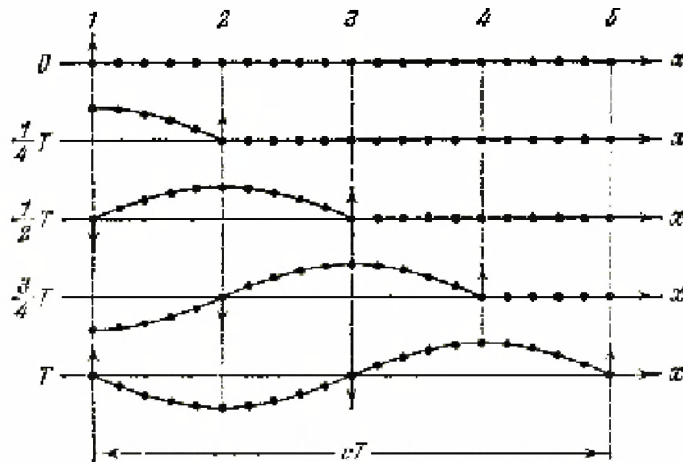


Рис. 2.1

времени, принятый за нулевой, волна, распространяясь вдоль оси слева направо, достигла частицы 1, вследствие чего частица начала смещаться из положения равновесия вверх, увлекая за собой следующие частицы. Спустя



четверть периода частица 1 достигнет крайнего верхнего положения; одновременно начинает смещаться из положения равновесия частица 2. По прошествии еще четверти периода частица 1 будет проходить положение равновесия, двигаясь в направлении сверху вниз, вторая частица 2 достигнет крайнего верхнего положения, а частица 3 начнет смещаться вверх из положения равновесия. В момент времени, равный  $T$ , частица 1 закончит полный цикл колебания, и будет находиться в таком же состоянии движения, как и в начальный момент времени. Волна к моменту времени  $T$ , пройдет путь  $vT$  и достигнет частицы 5.

На рис. 2.1 показаны колебания частиц, положения равновесия которых лежат на оси  $x$ . В действительности колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси  $x$ , а совокупность частиц в некотором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется *фронтом волны* (или *волновым фронтом*).

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт каждый момент времени только один. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно, волна в этих случаях называется плоской или сферической.

Расстояние  $\lambda$ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебания частиц среды, называется *длиной волны*. Очевидно, что

$$\lambda = vT,$$

где  $v$  – скорость волны,  $T$  – период колебаний. Длину волны можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе, т. е. имеющими разность фаз, равную  $2\pi$ . Заменяя  $T$  через  $1/\nu$ , где  $\nu$  – частота колебаний, получим связь между длиной волны, частотой колебаний и скоростью распространения волны:

$$\lambda \nu = v.$$

### Уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в направлении оси $x$

Обозначим буквой  $\Psi$  (пси) смещение колеблющейся частицы от положения равновесия. *Уравнением волны* называется выражение, определяющее смещение частицы как функцию ее координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ :

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t),$$

где имеются в виду координаты равновесного положения частицы. Найдем вид функции  $\Psi$  в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для простоты направим оси координат так, чтобы

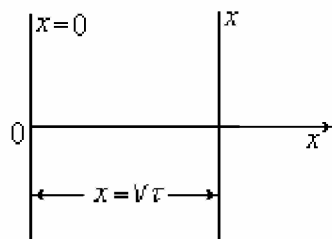


Рис. 2.2

ось  $x$  совпадала с направлением распространения волны (рис. 2.2). Тогда волновые поверхности будут перпендикулярными к оси  $x$  и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение  $\Psi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ :

$$\Psi = \Psi(x, t).$$

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$ , имеют вид

$$\Psi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Найдем смещение точек в плоскости, соответствующей произвольному значению  $x$ . Для того чтобы пройти путь от плоскости  $x = 0$  до этой плоскости, волне требуется время  $\tau = x/v$ , где  $v$  – скорость распространения волны. Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости  $x$ , будут отставать по времени на  $\tau$  от колебаний частиц в плоскости  $x = 0$ , т. е. будут иметь вид:

$$\Psi(x, t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right].$$

Итак, уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении оси  $x$ , выглядит следующим образом:

$$\Psi = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right].$$

Начальная фаза волны  $\varphi$  определяется выбором начал отсчета  $x$  и  $t$ . При рассмотрении одной волны начала отсчета времени и координаты обычно выбираются так, чтобы  $\varphi = 0$ . Зафиксируем какое-либо значение фазы, положив

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi = \text{const}.$$

Это выражение определяет связь между временем  $t$  и тем местом  $x$ , в котором фаза имеет зафиксированное значение. Вытекающее из него значение  $dx/dt$  дает скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав указанное выше выражение, получим

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v.$$

Таким образом, скорость распространения волны  $v$  есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют *фазовой скоростью*.

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно  $x$  и  $t$  вид (полагаем  $\varphi = 0$ ):

$$\Psi = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right) = A \cos(\omega t - kx),$$

где введена величина  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , которая называется *волновым числом*. Таким образом

$$\Psi = A \cos(\omega t - kx)$$

– уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ .

Учитывая, что  $\omega = 2\pi/T$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , уравнение плоской бегущей волны можно записать в виде

$$\Psi = A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Теперь найдем уравнение сферической волны. Амплитуда колебаний в этом случае убывает с расстоянием от источника по закону  $1/r$ . Тогда получим

$$\Psi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi) \text{ – уравнение сферической волны,}$$

где  $A$  – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице.

### Уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в произвольном направлении

Найдем уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, задаваемым единичным вектором нормали  $\vec{n}$  (рис. 2.3). Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат имеют вид:

$$\Psi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Возьмем волновую поверхность, отстоящую от начала координат на расстоянии  $l$ .

Колебания в этой точке будут отставать от колебаний  $\Psi(0, t)$  на время  $\tau = l/v$

$$\Psi = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{l}{v} \right) + \varphi \right] = A \cos(\omega t - kl + \varphi),$$

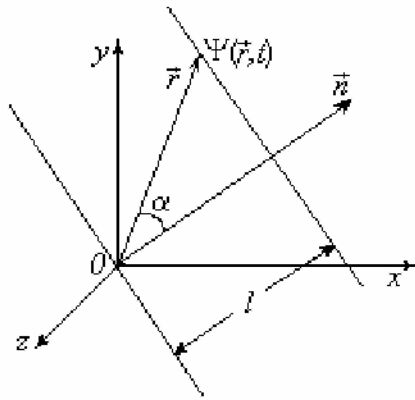


Рис. 2.3

где  $k = \omega/v$ . Выразим  $l$  через радиус-вектор  $\vec{r}$  точек рассматриваемой поверхности и вектор нормали  $\vec{n}$  этой поверхности:

$$l = r \cos \alpha = \vec{n} \cdot \vec{r}. \quad \text{Тогда}$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi),$$

где  $\vec{k} = k \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$  — волновой вектор.

Полагая  $\varphi = 0$ , получим уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в направлении единичного вектора  $\vec{n}$ :

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}).$$

### Волновое уравнение

Волновое уравнение — это дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет смещение  $\Psi(x, y, z, t)$ . Чтобы установить вид волнового уравнения, сопоставим вторые частные производные по времени и по координатам от функции  $\Psi(x, y, z, t)$ , описывающей плоскую волну. Для простоты рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ :

$$\Psi = A \cos(\omega t - kx).$$

Продифференцировав эту функцию дважды по  $t$  и дважды по  $x$ , получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx), \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx),$$

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\Psi, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -kA \sin(\omega t - kx), \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx),$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\Psi. \quad (2.2)$$

Сопоставив (2.1) и (2.2) и заменив  $\frac{k^2}{\omega^2}$  через  $\frac{1}{v^2}$ , получим

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \text{волновое уравнение,}$$

где  $v$  – скорость волны.

В случае плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, аналогичным образом получим:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.$$

Это выражение можно записать в краткой форме, если ввести дифференциальный вектор-оператор  $\vec{\nabla}$  (набла):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

В математике под оператором понимают символ, который обозначает математическую операцию, действующую на функцию  $f(x)$ . Тогда волновое уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi - \text{волновое уравнение,}$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

### **Энергия волны. Перенос энергии волновым движением. Вектор Умова**

Пусть в некоторой среде распространяется в направлении оси  $x$  плоская продольная волна

$$\Psi = A \cos(\omega t - kx).$$

Выделим в среде элементарный объем  $dV$  (рис.2.4), настолько малый, чтобы скорость движения частиц среды во всех точках объема и деформацию объема в разных поперечных сечениях можно было считать одинаковыми и равными, соответственно

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

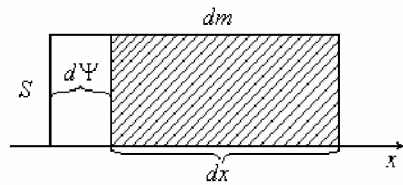


Рис. 2.4

Пусть  $dm$  – масса элемента среды,  $dV = Sdx$  – элементарный объем. Выделенный объем обладает  $dW$  – кинетической энергией, связанной с его движением, и  $d\Pi$  – потенциальной энергией, связанной с его деформацией.

Введем плотность полной энергии объема  $dV$ :

$$w = \frac{dW}{dV} + \frac{d\Pi}{dV} = w_k + w_n,$$

где  $w_k$  – плотность кинетической энергии,  $w_n$  – плотность потенциальной энергии.

Вычислим  $w_k$  и  $w_n$ .

$$w_k = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2, \quad (2.3)$$

где  $\rho = \frac{dm}{dV}$  – плотность среды.

Потенциальную энергию  $d\Pi$ , связанную с деформацией элементарного объема, можно выразить через упругую силу  $F$ , действующую на этот объем, используя их выражения:  $d\Pi = \frac{k d\Psi^2}{2}$ ,  $F = k d\Psi$ , где  $k$  – коэффициент упругости. Тогда получим

$$w_n = \frac{d\Pi}{dV} = \frac{1}{2} \frac{F d\Psi}{dV} = \frac{1}{2} \frac{F}{S} \frac{d\Psi}{dx} = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2. \quad (2.4)$$

При вычислении  $w_n$  использован закон Гука:  $\sigma = E \varepsilon$ , где  $\sigma = \frac{F}{S}$  –

напряжение,  $\varepsilon = \frac{d\Psi}{dx}$  – относительная деформация,  $E$  – модуль Юнга.

Модуль Юнга выразим через фазовую скорость волны  $v$  согласно соотношению

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow E = \rho v^2.$$

Тогда для плотности энергии среды в волновом поле получим следующее выражение:

$$w = w_k + w_n = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Подставив сюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\omega A \sin(\omega t - kx), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= kA \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

и приняв во внимание, что  $k^2 v^2 = \omega^2$ , получим

$$w = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (2.5)$$

В случае поперечной волны для плотности энергии получается такое же выражение. Из (2.5) следует, что плотность энергии каждый момент времени в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Среднее значение квадрата синуса равно половине. Соответственно, среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Итак, среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной; следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется *поток энергии* через эту поверхность:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}$$

– поток энергии, переносимой волной через некоторую поверхность.

Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*:

$$\vec{j} = \frac{dW}{dSdt} - \text{плотность потока энергии.}$$

*Плотность потока энергии* – это энергия, переносимая волной через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны, в единицу времени.

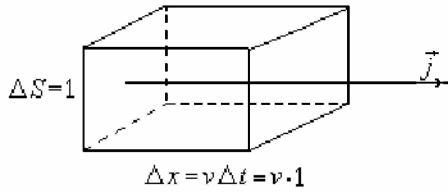


Рис. 2.5

Как видно из рис. 2.5, энергия, переносимая через площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$ , заключена в объеме параллелепипеда с основанием  $\Delta S$  и высотой  $x = v\Delta t$ , где  $v$  – фазовая скорость волны.

$$\Delta W = w \Delta S \Delta x = w v \Delta S \Delta t.$$

Тогда плотность потока энергии равна  $\vec{j} = w \vec{V}$ . Наконец, введя вектор  $\vec{V}$ , модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны, можно написать

$$\vec{j} = w \vec{V} - \text{вектор плотности потока энергии.}$$

Этот вектор был впервые введен в рассмотрение русским физиком Н.А.

Умовым и называется *вектором Умова*. Вектор  $\vec{j}$ , как и плотность энергии  $w$ , различен в различных точках пространства, а в данной точке изменяется со временем по закону квадрата синуса. Его среднее значение равно

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \vec{V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \vec{V}.$$

Это выражение справедливо для волны любого вида (сферической, затухающей и т.д.).

### Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн по отдельности. Это вытекающее из опыта утверждение называется *принципом суперпозиции (наложения) волн*.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются *когерентными*. При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга. Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется *стоячей волной*.

*Стоячая волна* – это волна, которая образуется при наложении двух волн с одинаковой амплитудой и частотой, когда волны движутся навстречу друг другу. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преграды. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A \cos(\omega t - kx + \varphi_1), \\ \Psi_2 &= A \cos(\omega t + kx + \varphi_2). \end{aligned}$$

Сложив эти уравнения и преобразовав результат по формуле для суммы косинусов, получим:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Чтобы упростить это уравнение, выберем начало отсчета  $x$  так, чтобы разность  $\varphi_2 - \varphi_1$  стала равной нулю, а начало отсчета  $t$  – так, чтобы оказалась равной нулю сумма  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Тогда получим

$$\Psi = 2A \cos kx \cos \omega t - \text{уравнение стоячей волны.}$$

Заменив волновое число  $k$  его значением  $k = 2\pi/\lambda$ , получим уравнение стоячей волны, удобное для анализа колебаний частиц в стоячей волне:

$$\Psi = \left(2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t.$$

Из этого уравнения видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда колебаний зависит от  $x$ :

$$A(x) = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 2n \frac{\pi}{2} \quad \text{для } (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны. Значения координат пучностей равны:

$$x_{\text{пучн}} = \pm 2n \frac{\lambda}{4} \quad \text{для } (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{для } (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют значения:

$$x_{\text{узел}} = \pm (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{для } (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Из этих формул следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно  $\lambda/2$ . Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

На рис. 2.6 представлен график отклонений точек от положения равновесия для момента времени  $t$  (сплошная кривая) и график отклонений точек для момента времени  $t + T/2$  (пунктирная кривая). Как видно из рисунка, точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т. е. в одинаковой фазе).

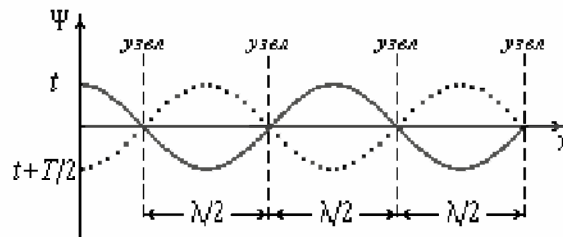


Рис. 2.6

Стоячая волна не переносит энергию. Дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную энергию, сосредоточенную в основном вблизи узлов волны, то полностью в кинетическую энергию, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны. В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

### Колебания струны

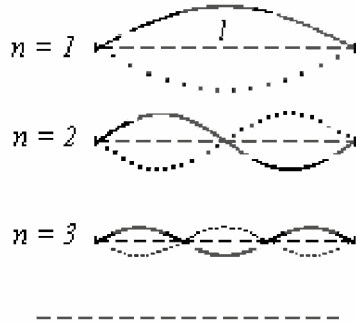


Рис. 2.7

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причем в местах закрепления струны должны располагаться узлы (рис. 2.7). Поэтому в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только такие колебания, половина длины волны которых укладывается на длине струны целое число раз. Отсюда вытекает условие

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

для  $(n = 1, 2, 3, \dots)$ , где  $l$  – длина струны. Этим длинам волны соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad \text{для} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $v$  – фазовая скорость волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины. Частоты  $\nu_n$  называются *собственными частотами* струны. Собственные частоты являются кратными частоте  $\nu_1 = v/2l$ , которая называется *основной частотой*. Гармонические колебания с частотами  $\nu_n$  называются *собственными* или *нормальными колебаниями*. Их называют также *гармониками*. В общем случае колебание струны представляет собой наложение различных гармоник.

### 3. Элементы квантовой механики

Квантовая механика была создана в 1925–1926 годах В. Гейзенбергом, П. Дираком и Э. Шредингером. Период с 1900 по 1930 год был особенно плодотворным в истории физики. Физиками в этот период были выдвинуты новые гипотезы, базирующиеся на неклассическом подходе, которые совершили революцию в понимании окружающего нас мира. Главной среди этих гипотез была идея о том, что энергия световой волны квантуется, т. е. принимает дискретные значения. Эти гипотезы привели к формулировке ряда новых принципов и к созданию новой физики, квантовой механики.

Квантовая механика вводит много кажущихся странными и парадоксальными концепций, которые, тем не менее, оказываются максимально продуктивными. Она заставляет физиков пересмотреть связь между частицами и волнами. Точнее говоря, квантовая механика демонстрирует тот факт, что частицы часто проявляют волновые свойства, а волны наоборот частично ведут себя подобно частицам. Она также показывает, что в пределах атома рассмотрение имеет скорее вероятностный характер, вместо точного определения значений физических величин в классической теории.



### Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза де Бройля

Первоначальная квантовая теория создала неожиданную ситуацию в физике, поскольку она указывала на то, что свет (электромагнитное излучение) имеет двойную природу, т. е. обладает корпускулярно-волновым дуализмом. С одной стороны, во многих опытах свет проявляет классические волновые свойства. С другой стороны, объяснение некоторых явлений требует, чтобы свет имел квантовую или корпускулярную природу.

С точки зрения теории относительности фотон, движущийся со скоростью света, является безмассовой частицей, т. е. частицей, не имеющей массы покоя  $m_0$ . Можно показать, что полная энергия и релятивистский импульс частицы связаны соотношением  $E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$ . Тогда фотон, не обладающий массой покоя, имеет энергию  $E = pc$  и релятивистский импульс  $p = E/c$ .

Однако, согласно гипотезе Планка, энергия фотона может быть записана в виде  $E = h\nu = hc/\lambda$ , поэтому импульс фотона связан с его длиной волны соотношением

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.1)$$

Таким образом, можно сказать, что энергия электромагнитных волн с длиной волны  $\lambda$  будет определяться энергией частиц-фотонов, имеющих импульс  $p = h/\lambda$ .

Поскольку природа обладает симметрией, французский физик Луи де Бройль предположил, что имеет место симметрия: волна – частица, т. е., если свет одновременно ведет себя подобно частице, то возможно, частицы вещества, такие как электроны, также имеют волновые свойства. В 1924 году де Бройль выдвинул гипотезу, что движущаяся частица имеет волну, связанную с ней. Он предположил, что длина волны частицы вещества связана с импульсом частицы посредством соотношения, аналогичного соотношению (3.1) для фотона.

Более точная формулировка гипотезы де Бройля следующая: *всем частицам вещества присущ корпускулярно-волновой дуализм, т. е. с движущейся частицей, обладающей импульсом  $p$ , связана волна, которая имеет длину*

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\nu}. \quad (3.2)$$

Эти волны, связанные с движущимися частицами, называются *волнами вещества* или более просто *волнами де Бройля*, и, надо полагать, они каким-то образом влияют или «управляют» движением частиц. Можно думать, что электромагнитная волна является волной де Бройля для фотона, но волны де Бройля, связанные с частицами, такими как электрон и протон, не являются электромагнитными волнами. Формула де Бройля для длины волны не отвечает, однако, на вопрос, какой тип волны связан с частицами вещества (частицами, имеющими ненулевую массу покоя).

Гипотеза де Бройля была встречена с большим скептицизмом. Идея, что движение фотонов каким-то образом управляется электромагнитными волновыми свойствами света, не казалась неразумной. Но обобщить эту идею и сказать, что движение частиц с массой также каким-то образом управляется волной, связанной с частицами, было тяжелым для восприятия. Более того, в то время не было экспериментальных доказательств того, что частицы проявляют волновые свойства, такие как интерференция и дифракция.

В 1927 году американские физики Девиссон и Джермер наблюдали дифракцию пучка электронов на кристалле, и тем самым экспериментально

подтвердили волновые свойства частиц. В опыте был использован монокристалл никеля. Кристалл, вырезанный для опыта, имел расстояние между плоскостями равно  $d = 0,215$  нм. Когда пучок электронов был направлен перпендикулярно грани кристалла, наблюдался максимум интенсивности рассеянных электронов под углом  $50^\circ$  относительно нормали к поверхности (рис. 3.1). Рассеяние было наиболее интенсивным при ускоряющем напряжении 54,0 В.

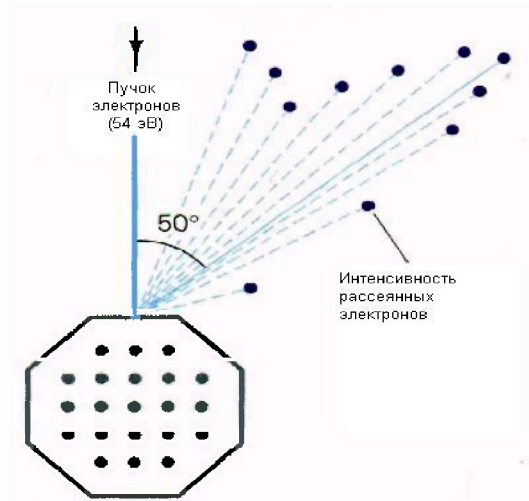


Рис. 3.1

Согласно волновой теории, максимум первого порядка будет наблюдаться под углом, даваемым соотношением

$$d \sin \theta = \lambda .$$

Из этого условия получается длина волны

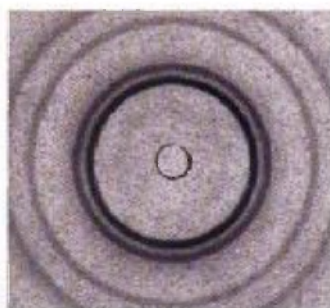
$$d \sin \theta = 0,215 \cdot \sin 50^\circ = 0,165 \text{ нм} .$$

С другой стороны, используя формулу для длины волны де Бройля для электронов, ускоренных напряжением  $U$ , получим

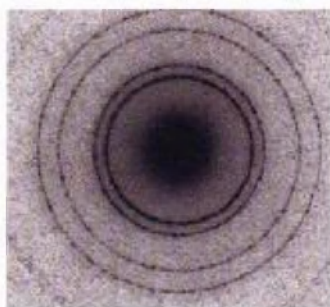
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \sqrt{\frac{1,50}{U}} \text{ нм} = 0,167 \text{ нм} .$$

Совпадение длин волн превосходное с учетом экспериментальной погрешности, и опыт Девиссона-Джермера дал убедительное доказательство справедливости гипотезы де Бройля.

Другой опыт, выполненный Томсоном в Великобритании в том же году, дал дальнейшее подтверждение. Томсон пропускал пучок ускоренных электронов через тонкую металлическую фольгу. Дифракционная картина электронов была такая же, как



(a)



(b)

Рис. 3.2

для рентгеновских лучей. Сравнение этих картин, показанное на рис. 3.2, не оставляет никакого сомнения в том, что частицы проявляют волновые свойства.

### Волновая функция свободно движущейся частицы

Гипотеза де Бройля предсказывает, что движущиеся частицы имеют связанные с ними волны, которые каким-то образом управляют или описывают их поведение. Однако она ничего не говорит о виде этих волн, кроме их длины. Чтобы иметь подходящую теорию, необходимо уравнение, которое будет давать вид волн вещества, в частности вид волны для частицы, движущейся под действием силы, например, для электрона, вращающегося вокруг протона под действием электрической силы. Такое уравнение получил австрийский физик Эрвин Шредингер в 1926 г.

Прежде чем приступить к волновому уравнению, обратимся к волне де Бройля для свободно движущейся частицы. Как всякая волна, волна де Бройля описывается волновой функцией, которая обозначается  $\psi(\mathbf{r}, t)$  и которая зависит от пространственных и временных координат, т. е.  $\psi(\vec{r}, t)$ . В случае одномерной классической бегущей волны волновая функция имеет вид:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx), \quad (3.3)$$

где  $\omega = 2\pi\nu$  – циклическая частота,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число.

Так как волна де Бройля описывает движение частиц, то ее волновая функция должна быть связана с энергией и импульсом частицы. Такая связь устанавливается гипотезами Планка и де Бройля, т. е.

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = h/\lambda = \hbar k, \quad (3.4)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  – другая форма постоянной Планка.

Тогда в случае фотона после замены в (3.3)  $\omega$  на  $E/\hbar$  и  $k$  на  $p/\hbar$  волновая функция будет иметь вид:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos \frac{1}{\hbar}(Et - px). \quad (3.5)$$

Для фотона соотношение  $k = \omega/c$  с учетом (3.4) приводит к релятивистской связи между энергией и импульсом  $p = E/c$ . Поскольку для свободно движущейся нерелятивистской частицы имеет место другая связь:  $E = \frac{p^2}{2m}$ , то ее волновая функция будет отличаться от волновой функции (3.5).

В случае свободно движущейся частицы волновая функция является комплексной функцией, которая получается из (3.5), если к правой части добавить чисто мнимую часть  $-i\psi_0 \sin \frac{1}{\hbar}(Et - px)$ . В результате, записав комплексную функцию в показательной форме, получим волновую функцию для волны де Бройля в случае свободно движущейся частицы:

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}. \quad (3.6)$$

Продифференцируем волновую функцию (3.6) по времени  $t$  и по координате  $x$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p \psi. \quad (3.7)$$

Вид выражений (3.7) подсказывает нам выбрать дифференциальные операторы энергии  $\hat{E}$  и импульса  $\hat{p}$  в одномерном случае в виде

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Тогда на языке операторов выражения (3.7) запишутся следующим образом:

$$\hat{E}\psi = E\psi, \quad \hat{p}\psi = p\psi. \quad (3.9)$$

### Волновое уравнение Шредингера

**Первый постулат квантовой механики:** каждая динамическая переменная, характеризующая движение частицы, может быть представлена на линейным оператором.

Далее, чтобы перейти к квантовой механике, нужно классические соотношения между динамическими переменными заменить на операторные соотношения, действующие на волновую функцию  $\psi(x, t)$ .

Если в качестве такого соотношения взять выражение для полной механической энергии  $E = W + \Pi$ , то получим волновое уравнение

$$\hat{E}\psi = \hat{W}\psi + \hat{\Pi}\psi, \quad (3.10)$$

где оператор потенциальной энергии  $\hat{\Pi}$  есть просто функция  $\Pi(x, t)$ , а

оператор кинетической энергии  $\hat{W}$  равен

$$\hat{W} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (3.11)$$

В явном виде уравнение (3.10) примет форму

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \Pi\psi. \quad (3.12)$$

Это и есть *одномерное волновое уравнение Шредингера* для нахождения волновой функции, вид которой определяется потенциальной энергией.

Можно проверить, что в случае свободно движущейся частицы волновая функция (3.6) удовлетворяет уравнению Шредингера (3.12) с  $\Pi = 0$ . Действительно, если продифференцировать функцию (3.6) один раз по времени  $t$ , а другой раз дважды по координате  $x$  и подставить в уравнение (3.12), то получим соотношение

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi.$$

Это соотношение с учетом нерелятивистской связи между энергией и им-

пульсом частицы  $E = \frac{p^2}{2m}$  превращается в тождество.

Как известно из классической механики, в консервативной замкнутой системе имеет место закон сохранения полной механической энергии, т. е.  $W + \Pi = E = \text{const}$ . Как видно из (3.9), в случае  $E = \text{const}$  зависимость волновой функции  $\psi(x, t)$  от времени имеет такой же вид, как и для свободно движущейся частицы. Состояния системы, описываемые волновой функцией в этом случае, называются *стационарными состояниями*. Теперь волновую функцию можно представить как произведение двух функций

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et},$$

и волновое уравнение Шредингера примет вид:

$$\hat{W}\psi - (E - \Pi)\psi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \Pi)\psi = 0, \quad (3.13)$$

где  $\psi = \psi(x)$ . Это одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний.

В случае трех пространственных измерений стационарное уравнение Шредингера для волновой функции  $\psi = \psi(x, y, z)$  запишется следующим образом:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \Pi)\psi = 0,$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

### Квантование. Движение частицы в прямоугольной потенциальной яме

**Второй постулат квантовой механики:** в результате точного измерения динамической переменной, характеризуемой оператором, может получаться лишь какое-либо из собственных значений этого оператора.

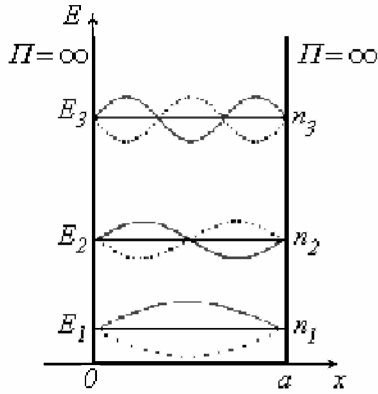


Рис. 3.3

Это мы установим на частном примере. Рассмотрим электрон, движущийся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. На рис. 3.3 представлена потенциальная кривая для этого случая. Поведение электрона, находящегося в потенциальной яме, описывается стационарным уравнением Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0, \quad (3.14)$$

которое имеет простой вид и может быть легко решено. При решении уравнения (3.14) необходимо наложить на волновую функцию  $\psi(x)$  граничные условия:

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \psi = 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Заметим, что  $\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} = k^2$  – квадрат волнового числа, тогда общее решение уравнения (3.14) имеет вид

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx,$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные. При наложении граничного условия при  $x = 0$  получим

$$\psi(0) = B \cdot 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Далее воспользуемся граничным условием при  $x = a$

$$\psi(a) = A \sin ka = 0,$$

откуда следует, что  $ka = n\pi$  или  $k = \frac{n\pi}{a}$  для  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Таким образом, волновое число, а следовательно, и длина волны, связанной с электроном, принимают только дискретные значения. Поскольку

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \text{ то и энергия электрона принимает дискретные значения:}$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \text{ для } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Так как внутри потенциальной ямы  $E = W$ , то с учетом выражения (3.11) для оператора кинетической энергии уравнение (3.14) можно записать в виде

$$\hat{W} \psi = E \psi. \quad (3.16)$$

Это уравнение представляет собой задачу на отыскание собственных значений оператора  $\hat{W}$ . Как видим, собственные значения оператора  $\hat{W}$  в данном случае представляют набор дискретных значений  $E_n$ .

Волновые функции представляют собой набор из  $\psi_n$  собственных функций оператора  $\hat{W}$ . Тогда любую волновую функцию  $\psi$ , удовлетворяющую уравнению  $\hat{W} \psi = E \psi$ , можно представить в виде разложения в ряд

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n. \quad (3.17)$$

В случае электрона, находящегося в потенциальной яме, собственные волновые функции имеют вид

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n}{a} x \text{ для } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

К определению постоянной  $A$  вернемся позже, после рассмотрения третьего постулата квантовой механики.

### **Статистический смысл волновой функции**

Теперь обратимся к физическому смыслу волновой функции  $\psi$ . В ранние годы развития квантовой механики не было ясно, как интерпретировать волновую функцию. После многих размышлений и исследований был сделан вывод, что квадрат модуль волновой функции  $|\psi|^2$  представляет собой вероятность нахождения частицы в определенном месте и в определенный момент времени. Эта интерпретация волновой функции  $\psi$  была предложена немецким физиком Максом Борном в 1926 г.

Вспомним, что энергия или интенсивность классической волны пропорциональна квадрату ее амплитуды. Подобно этому интенсивность световой волны пропорциональна  $E^2$ , где  $E$  – амплитуда электрического поля. Если смотреть на это с точки зрения частиц-фотонов, интенсивность светового пучка пропорциональна числу ( $n$ ) фотонов в пучке, т. е.  $n \sim E^2$ . Итак, число фотонов пропорционально квадрату амплитуды электрического поля волны.

Волновая функция  $\psi$  интерпретируется аналогичным способом. Волновая функция в общем случае изменяется по величине в пространстве и во времени. Если  $\psi$  описывает электронный пучок, тогда  $|\psi|^2$  будет пропорционально числу электронов, которые, как можно ожидать, будут находиться в малом объеме вокруг данной точки в некоторый момент времени. Однако когда мы имеем дело с отдельной частицей,  $|\psi|^2$  представляет собой вероятность нахождения частицы в данной точке.

В этом и заключается **физический смысл квадрата модуля волновой функции**: *квадрат модуля волновой функции  $|\psi|^2$  пропорционален вероятности нахождения частицы в данном месте пространства и в данный момент времени или, точнее говоря, является плотностью вероятности.*

Таким образом, если поведение частицы описывается волновой функцией  $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ , то квадрат модуля волновой функции  $|\psi|^2 = \psi\psi^* = w$  является *плотностью вероятности*, а  $|\psi|^2 dV = w dV$  – *вероятностью* нахождения частицы в данном элементе объема  $dV = dx dy dz$ .

Тогда интеграл от  $|\psi|^2$ , взятый по всему объему, должен равняться единице:

$$\int |\psi|^2 dV = 1.$$

Это условие носит название *условия нормировки*.

Проиллюстрируем статистический смысл волновой функции на примере двух квантово-механических задач.

### 1. Атом водорода

Интерпретация  $|\psi|^2$  как вероятности нахождения частицы в определенном месте изменила идею теории Бора о том, что электрон в атоме водорода может находиться только на определенных орбитах, расположенных на дискретных расстояниях от ядра. Когда было решено уравнение Шредингера для атома водорода, были найдены радиальные волновые функции для каждого энергетического уровня, которые имеют отличные от нуля значения для любых расстояний от ядра. Например, относительная вероятность для электрона в основном состоянии ( $n = 1$ ) в зависимости от радиуса показана на рис. 3.4. Максимум вероятности совпадает с боровским радиусом 0,0529 нм, но возможно (так как имеется конечная вероятность), что электрон может быть почти на любом расстоянии от ядра. Волновая функция отлична от нуля и для расстояний больших 0,20 нм, но имеется очень маленький шанс (вероятность) найти электрон в основном состоянии на этих расстояниях. Распределение плотности вероятности приводит к идее об *электронном «облаке»* вокруг ядра (рис. 3.4). Плотность облака отражает плотность вероятности, что электрон находится в определенной области.

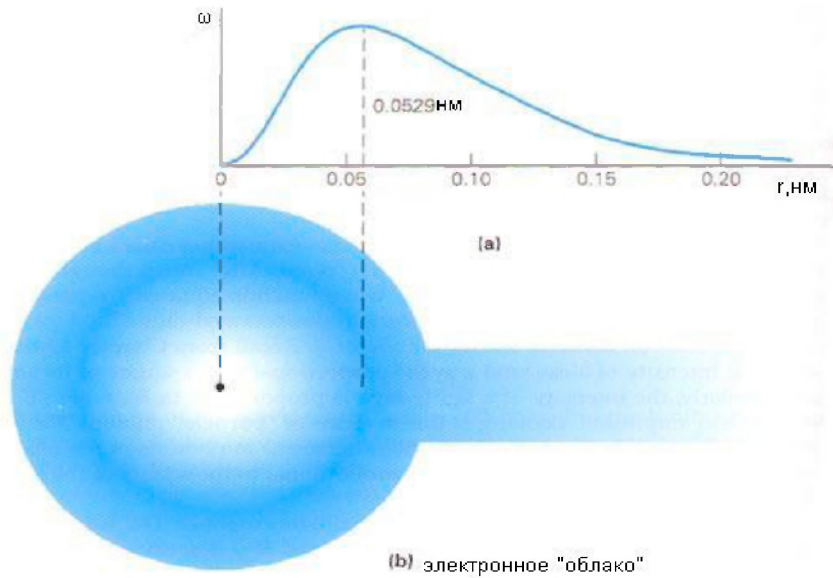


Рис. 3.4

С целью экономии места часть электронного облака на рис. 3.4, расположенная за пределами сферы некоторого радиуса, вырезана. При этом оставлен сегмент этого облака, чтобы показать, как с увеличением расстояния от ядра уменьшается плотность электронного облака.

Таким образом, квантовая механика использует волновые функции частиц для предсказаний вероятности явлений с этими частицами. Это применимо также к свету и частицам-фотонам. Например, квадрат классической электромагнитной волновой функции, которая является волной де Бройля для ее фотонов, дает вероятность нахождения фотонов в определенных местах пространства. Как мы знаем, в опыте по дифракции света на одной щели большинство фотонов попадает в область центрального максимума на экране, меньшее количество фотонов будет достигать областей первой светлой полосы, и даже некоторые фотоны попадут в область второй светлой полосы, но ни один в темную область между ними, и так далее. Квантово-механическое распределение вероятности, или плотности частиц на экране имеет тоже самое относительное распределение, как и распределение классической интенсивности или яркости.

## 2. Прохождение частиц через потенциальный барьер

Другое квантово-механическое явление, которое приводит к противоречию с нашим повседневным опытом с большими объектами, называется *туннелированием*. Как мы видели, основной идеей квантовой механики является то, что местоположение частицы описывается волной вероятности, но поведение волн отличается от поведения частиц.

Из классической физики мы знаем, что имеются области в поле потенциальных сил, где запрещено находиться частицам, обладающим данным значением полной энергии (рис. 3.5). Это области, где потенциальная энергия частицы больше, чем полная энергия. Частица не попадает в такие области, потому что она должна была бы иметь отрицательную кинетическую энергию ( $E - \Pi = W < 0$ ), что невозможно. В таких ситуациях мы говорим, что место пребывания

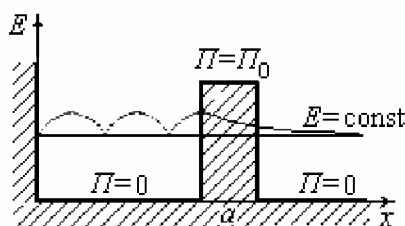


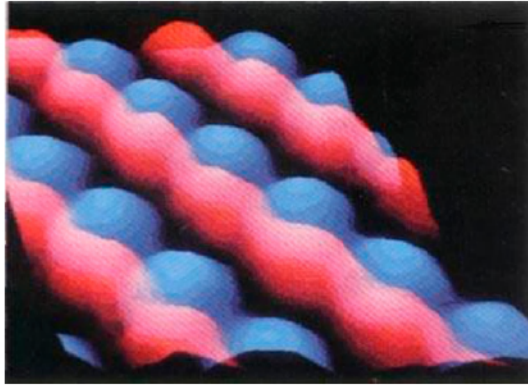
Рис. 3.5



частицы ограничено потенциальным энергетическим барьером.

Однако в определенных случаях квантовая механика предсказывает малую, но конечную вероятность того, что волновая функция частицы проникает во внутрь барьера и может быть отличной от нуля за барьером, т.е. частица может находиться по другую сторону барьера. Мы видим, что имеется определенная вероятность «туннелирования» частицы через барьер.

Такое туннелирование действительно наблюдается и положено в основу



работы сканирующего туннельного микроскопа, который дает изображение с разрешением порядка размера отдельного атома (рис. 3.6). Такое же проникновение через барьер используется также для объяснения определенных процессов распада ядра, что классически не должно было бы иметь место.

Рис. 3.6

Вернемся к нашему случаю электрона, находящегося в потенциальной яме, который может принимать только дискретный набор собственных значений энергии  $E_n$  и который при этом описывается собственными волновыми функциями:

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n}{a} x \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \dots$$

Для нахождения коэффициента  $A$  воспользуемся условием нормировки волновой функции, которое в данном случае запишется следующим образом:

$$A^2 \int_0^a \sin^2 \frac{\pi n x}{a} dx = 1.$$

На концах промежутка интегрирования подинтегральная функция обращается в нуль. Поэтому значение интеграла можно получить, умножив среднее значение  $\sin^2(\pi n x/a)$  (равное, как известно,  $1/2$ ) на длину промежутка  $a$ . В результате получится:  $A^2(1/2)a = 1$ , откуда  $A = \sqrt{2/a}$ . Таким образом, собственные волновые функции имеют вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a} \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$

На рис.3.3 изображены стоячие волны, соответствующие этим функциям.

В общем случае можно следующим образом сформулировать **третий постулат квантовой механики**: *число измерений, при которых получается  $n$ -е собственное значение оператора, пропорционально квадрату абсолютной величины коэффициента  $\alpha_n$  в разложении волновой функции  $\Psi$  по собственным функциям  $\psi_n(x)$ :*

$$\Psi(x) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x).$$

### Принцип неопределенности Гейзенберга

Важный вывод квантовой механики связан с измерением и точностью измерения. В классической механике не существует предела точности измерения. Теоретически посредством последовательного усовершенствования

измерительного инструмента и методики может быть достигнута любая точность измерения, т. е. можно получить точное значение величины. Это является следствием детерминистического взгляда на природу. Например, если вы знаете точно положение и скорость тела в некоторый момент времени, вы можете определить, где оно будет в будущем, и где оно было в прошлом (предполагая, что вы знаете все силы в будущем и прошлом).

Однако квантовая механика предсказывает совсем другое и устанавливает пределы возможной точности измерения. Эта идея была выдвинута в 1927 г. немецким физиком Вернером Гейзенбергом, который развил другой подход к квантовой механике, дополняющий волновую теорию Шредингера.

**Принцип неопределенности Гейзенберга** в применении к координате и импульсу (или скорости) частицы может быть сформулирован следующим образом: *невозможно знать одновременно точное местоположение объекта и его импульс.*

Эта концепция часто иллюстрируется с помощью простого мысленного эксперимента. Предположим, что вы хотите измерить координату и импульс (в действительности, скорость) электрона. Для того чтобы вы видели местоположение электрона, по крайней мере, хотя бы один фотон должен отразиться от электрона и попасть вам в глаза. Однако в процессе столкновения некоторая доля энергии и импульса фотона передается электрону. После столкновения электрон отклонится. Таким образом, при всех попытках точнее определить местоположение электрона (попытках сделать неопределенность координаты  $\Delta x$  очень малой) вы вызываете все большую неопределенность ваших знаний о скорости электрона или о его импульсе ( $\Delta p = m \Delta v$ ), в результате процесс определения точного положения электрона приведет к тому, что электрон улетит прочь. В повседневном макроскопическом мире неопределенность вследствие наблюдения объекта будет ничтожно малой, свет не производит ощутимого изменения движения или положения объекта обычных размеров.

Для нашего случая положение электрона может быть в лучшем случае измерено с точностью порядка длины волны  $\lambda$  падающего света, так что  $\Delta x \approx \lambda$ . Фотон имеет импульс  $p = h/\lambda$ . Так как мы не можем сказать, какая часть этого импульса может быть передана в процессе столкновения, то конечный импульс электрона будет иметь неопределенность  $\Delta p \approx h/\lambda$ . Полная неопределенность дается произведением отдельных неопределенностей и будет следующей:

$$(\Delta p)(\Delta x) \approx \left(\frac{h}{\lambda}\right)(\lambda) = h.$$

Это выражение дает оценку минимальной неопределенности или максимальной точности одновременного измерения импульса и координаты электрона. В действительности, неопределенности будут хуже, поскольку зависят от интенсивности испускаемого света (числа фотонов), аппаратуры и техники. После подробных теоретических вычислений Гейзенберг нашел, что в лучшем случае

$$(\Delta p)(\Delta x) \geq \hbar, \quad \text{где } \hbar = h/2\pi. \quad (3.20)$$

Таким образом, принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что произведение минимальных неопределенностей координаты и импульса частицы есть величина порядка постоянной Планка, деленной на  $2\pi$ , т. е. сам процесс измерения ограничивает точность, с которой мы можем одновременно измерить координату и импульс частицы.

Соотношение (3.20) записано для одномерного случая. В случае трех пространственных измерений имеют место три соотношения:

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \geq \hbar, \quad (\Delta p_y)(\Delta y) \geq \hbar, \quad (\Delta p_z)(\Delta z) \geq \hbar. \quad (3.21)$$

Другой вид принципа неопределенности связан с энергией и временем. Чтобы понять это, обратимся опять к предыдущему мысленному эксперименту, в котором положение электрона может быть известно с неопределенностью  $\Delta x \approx \lambda$ . Фотон, используемый для детектирования электрона, распространяется со скоростью  $c$ , и ему необходимо время  $\frac{\Delta x}{c} \approx \frac{\lambda}{c}$ , для того чтобы фотон прошел расстояние, равное неопределенности положения электрона. Таким образом, время, в течение которого измеряется положение электрона, является неопределенным с

$$\Delta t \approx \frac{\lambda}{c}.$$

Так как мы не можем сказать, передал ли фотон только часть или всю свою энергию  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$  электрону, то неопределенность энергии равна

$$\Delta E \approx \frac{hc}{\lambda}.$$

Полная неопределенность будет следующей:

$$(\Delta E)(\Delta t) \approx \left(\frac{hc}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{c}\right) = h.$$

Как и в случае соотношения между неопределенностями координаты – импульса, мы имеем в лучшем случае

$$(\Delta E)(\Delta t) \geq \hbar. \quad (3.22)$$

Эта форма принципа неопределенности указывает, что энергия объекта может быть неопределенной по величине  $\Delta E$  в течение времени  $\Delta t \approx \frac{h}{2\pi \Delta E}$ . В течение этого времени энергия является неопределенной и

может даже не сохраняться.

Итак, мы не можем измерить энергию частицы точно, если измерение не будет продолжаться бесконечно долго. Если измерение энергии проводилось в течение времени  $\Delta t$ , тогда будет неопределенность в величине энергии  $\Delta E$ . Например, измерение частоты фотона, испускаемого атомным электроном, является измерением энергии, связанной с переходом из возбужденного состояния в основное состояние. Измерение может быть проведено за время сравнимое со временем нахождения электрона в возбужденном состоянии, т. е. со временем жизни возбужденного состояния. Как результат, наблюдаемые линии испускания в спектре должны иметь конечную энергетическую ширину, так как  $\Delta E = h \Delta \nu$ . Это есть *естественное уширение* линий спектра.

### Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 1–3. – М.: Наука, 1977–1989.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5 т. Т. 1–5. – М.: Наука, 1977–1990.
3. Кудин В.И., Ржевский М.Б. Физические основы классической механики. – [Электронный ресурс]: Рег. № ЭИ БНТУ / ФИТР 47-2, 2005.
4. Джилавдари И.З., Головейко А.Г., Круглик Г.С. Методические указания по разделу «Элементы квантовой механики в первой части курса физики». – Мн.: БПИ, 1981. – 35с.
5. Wilson J.D., Buffa A.J. Physics, Third Edition. – Prentice Hall. Upper Saddle River, 1997.