А. В. Метельский, Задача успокоения динамической системы с запаздыванием по неполным измерениям, *Автомат. и телемех.*, 1996, выпуск 2, 56–66

15. *Фиакко А., Мак Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.
16. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
17. *Michael E.M.* Continuous selections. I, II, III // Ann. Math. 1956. V. 63. № 2. P. 361–381; 1956. V. 64. № 3. P. 562–580; 1957. V. 65. № 2. P. 375–390.
18. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Многозначные отображения // Математический анализ. Т. 19. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ СССР, 1982. С. 127–230.

Поступила в редакцию 29.11.94

УДК 517.938

А. В. МЕТЕЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(Белгосуниверситет, Минск)

ЗАДАЧА УСПОКОЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Рассматривается задача успокоения дифференциально-разностной системы по доступному измерению выходному сигналу. Через разложение пространства состояний в прямую сумму обобщенного собственного пространства системы и дополнительного подпространства формулируются граничные задачи для вычисления текущего состояния системы и успокаивающего управления.

1. Введение

Пусть $C = C(H^-, \mathbb{R}^n)$ – банахово пространство непрерывных n-вектор-функций $\varphi : H^- = [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$, записанных в столбец $(h > 0)$, $\|\varphi\| = \max\limits_{\theta \in H^-} |\varphi(\theta)|$. Если задана функция $f(s)$, $s \geqslant -h$, то определим функцию f_t соотношением $f_t = f_t(\tau) = f(t+\tau)$, $\tau \in H^-$, $t \geqslant 0$.

Будем иметь дело с линейной автономной дифференциально-разностной системой, которую назовем системой Σ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 s(t-h) + Bu(t), \quad t \in T = [0, t_1]; \tag{1.1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in H^-, \quad \eta \in C; \tag{1.2}$$

$$y(t) = Gx(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Здесь x – n-вектор-столбец решения уравнения (1.1) $(n \geqslant 2)$; u – r-вектор управляющих воздействий (управление) $(r \geqslant 1)$, y – ℓ-вектор величин, доступных измерению при $t \geqslant 0$ $(\ell \geqslant 1)$, называемый выходом системы Σ; $h > 0$ – постоянное запаздывание; $t_1 > 0$ – фиксированный момент времени; A, A_1, B, G – постоянные матрицы подходящих размеров. Основной класс допустимых управлений $\overline{C} = \overline{C}(T, \mathbb{R}^r)$ – линейное многообразие кусочно-непрерывных функций.

Под состоянием системы Σ в момент времени $t \geqslant 0$ понимается [1, 2] функция $x_t \in C$. Набор данных $\overline{x}_t = \{x(t), A_1 x_t\}$ назовем [3] s-состоянием системы Σ в момент времени $t \geqslant 0$.

Определение 1. *Начальное состояние $\eta \in C$ называется [3] управляемым, если существует управление $u \in \overline{C}$, при котором s-состояние системы Σ в момент времени t_1 удовлетворяет равенству:*

$$\overline{x}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow x(t_1) = 0, \quad A_1 x_{t_1}(\tau) = 0, \quad \tau \in H^-. \tag{1.4}$$

Управление, обеспечивающее (1.4), назовем успокаивающим. Если управляемы все начальные состояния, то система Σ называется [4] полностью управляемой.

Из (1.1) и (1.4) видно, что, взяв $u(t) = 0$, $t > t_1$, получим $x(t) = 0$, $t \geqslant t_1$. Задача успокоения (полной управляемости) системы Σ поставлена Н. Н. Красовским [4] в 1963 г. на II конгрессе ИФАК. Им же предпринято и первое исследование этой задачи, результаты которого приведены в монографии [5]. Современное состояние алгоритмической теории управления динамическими системами с последействием изложено в книге [6].

Обозначим: $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, E – единичную матрицу, $W(\lambda) = \lambda E - A - A_1 e^{-\lambda h}$ – характеристическую матрицу уравнения (1.1) ($\lambda \in \mathbb{C}$). Спектральный критерий полной управляемости

$$(1.5) \qquad \operatorname{rank}[W(\lambda),\, B] = n \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

для системы Σ второго порядка ($n = 2$) доказан авторами работ [7, 8]. Для системы произвольного порядка критерий (1.5) доказан в работе [9]. Однако вопрос построения успокаивающего управления для системы Σ мало изучен и поэтому в данной работе является основным.

Рассмотрим задачу управления системой Σ в смысле определения 1 только по измерениям выхода (1.3), считая начальное состояние (1.2) неизвестным. В решении данной задачи выделим два этапа: 1) идентификация текущего состояния системы Σ, 2) построение успокаивающего управления.

2. Определение и критерий идентифицируемости

Один и тот же выход $y = y(t)$, $t \in T_0 = [0, t_0]$ может порождаться несколькими начальными функциями (1.2). Поэтому выходу y может соответствовать несколько текущих состояний x_{t_0}. Каждое такое состояние называется [5, 10] совместимым с выходом y.

Пусть $Y = \{y \,|\, \eta \in C\}$ – совокупность всех выходов системы Σ, $\{x_{t_0}\}_y$ – класс текущих состояний, совместимых с выходом y. Множество Y будем рассматривать как многообразие в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(T, \mathbb{R}^\ell)$. Введем оператор $L_{t_0} : y \to \{x_{t_0}\}_y$ с областью определения Y, который назовем оператором восстановления класса текущих состояний, совместимых с измеренным выходом y.

Определение 2. Систему Σ назовем идентифицируемой, если оператор восстановления $L_{t_0} : L_2 \to C$ однозначен и непрерывен.

Необходимым и достаточным условием идентифицируемости системы Σ, $t_0 \geqslant nh$ является равенство

$$(2.1) \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G \\ W(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Однозначность оператора восстановления при условии (2.1) доказана в работах [11, 12], непрерывность следует из результатов [13, 14]. Считая критерий (2.1) выполненным, получим граничную задачу для вычисления текущего состояния x_{t_0} системы Σ по известному выходу y. Этот результат также является новым для обсуждаемой постановки задачи идентификации.

3. Элементы теории разложения

Приведем сведения из теории разложения [15, 16], необходимые для понимания используемых обозначений.

Множество корней характеристического уравнения

$$(3.1) \qquad \det W(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

называемое спектром уравнения (1.1), обозначим Λ. Каждому $\lambda \in \Lambda$ соответствует [16] обобщенное собственное пространство системы Σ $P_\lambda \subset C$. P_λ – действительная линейная оболочка функций

$$(3.2) \qquad \varphi(\theta) = \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_{j+1} \frac{\theta^j}{j!} e^{\lambda\theta}, \quad \theta \in H^-, \quad q \geqslant 1,$$

$\gamma = \mathrm{col}\,[\gamma_1, \ldots, \gamma_q]$ – nq-вектор-столбец, удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений

$$(3.3) \qquad M_q(\lambda)\gamma = 0.$$

Постоянная $nq \times nq$-матрица $M_q(\lambda)$ имеет вид

$$(3.4) \qquad M_q(\lambda) = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \ldots & W_q \\ 0 & W_1 & \ldots & W_{q-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & W_1 \end{bmatrix}, \quad W_{j+1} = \frac{W^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad j = \overline{0, q-1}.$$

Размерность пространства P_λ равна [16] алгебраической кратности q_λ значения λ как нуля характеристического уравнения (3.1), поэтому в системе (3.3) достаточно взять $q = q_\lambda$.

Рассмотрим систему Σ^*, сопряженную к Σ:

$$\begin{aligned} &\dot{z}^*(\tau) = -z^*(\tau)\,A - z^*(\tau + h)\,A_1, \quad \tau < t_1, \\ &z^*(t_0 + \tau) = \xi^*(\tau), \quad \tau \in H^+ = [0, h], \quad \xi^* \in C^* = C^*(H^+, \mathbb{R}^{*n}), \\ &v^*(\tau) = z^*(\tau)\,B, \quad \tau \in T. \end{aligned}$$

Здесь и ниже звездочка помечает вектор-строку или указывает, что элементы векторного пространства записываются в строку. Аналогично P_λ определяется [16] P_λ^*-обобщенное собственное пространство для сопряженной системы Σ^* $(P_\lambda^* \subset C^*)$:

$$\psi^*(s) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j^* \, \frac{(-s)^{q-j}}{(q-j)!} \, e^{-\lambda s}, \quad s \in H^+,$$

где $\beta^* = [\beta_1^*, \ldots, \beta_q^*]$ – nq-вектор-строка, удовлетворяющая уравнению: $\beta^* M_q(\lambda) = 0$. P_λ^* имеет ту же размерность q_λ, что и P_λ.

Введем [15, 16] билинейную форму

$$(3.5) \qquad (\psi^*, \varphi) = \psi^*(0)\,\varphi(0) + \int_0^h \psi^*(\tau) A_1 \varphi(\tau - h) d\tau, \quad \varphi \in C, \quad \psi^* \in C^*.$$

Решения систем Σ, Σ^* связаны [16] равенством

$$(3.6) \qquad (z^{t*}, x_t) = (z^{0*}, x_0) + \int_0^t v^*(\tau)\,u(\tau) d\tau, \quad t \in T,$$

в котором $z^{t*} = z^{t*}(s) = z^*(t + s)$, $s \in H^+$, $t \leqslant t_0$ – состояние, v^* – выход системы Σ^*. Обозначим: Λ_N – множество из N характеристических значений $\lambda \in \Lambda$; P, P^* – линейные оболочки пространств P_λ, P_λ^* соответственно, $\lambda \in \Lambda_N$. Пусть Φ,

Ψ – матрицы, составленные из базисных векторов конечномерных пространств P, P^* размерности q. Столбцы φ_j и строки ψ_i^* матриц Φ, Ψ соответственно можно выбрать такими, что матрица $(\Psi, \Phi) = ((\psi_i^*, \varphi_j))$, i, $j = \overline{1, q}$ значений билинейной формы (3.5) будет равна E. Тогда имеет место разложение:

$$C = P \oplus Q, \tag{3.7}$$

где $P = \{\varphi \in C \,|\, \varphi = \Phi b,\ b$ – вектор-столбец$\}$, $Q = \{\varphi \in C \,|\, (\Psi, \varphi) = 0\}$. Операторы проектирования задаются формулами

$$\varphi^P = \Phi(\Psi, \varphi), \quad \varphi^Q = \varphi - \varphi^P, \quad \varphi \in C.$$

Разложение (3.7) называют [16] разложением пространства C по Λ_N.

4. Вспомогательные результаты

При $t_0 \geqslant n^2 h$ справедливо [17] дифференциальное соотношение

$$(D(p)A_1)^j x_{t_2}(\tau) = \Delta^j(p) x_{t_0}(\tau), \quad \tau \in H^-, \quad j = \overline{0, n}, \tag{4.1}$$

где $t_2 = t_0 - jh$; $p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования; $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$; $D(\lambda)$ – матрица, присоединенная к $\lambda E - A$:

$$D(\lambda) = D_0\lambda^{n-1} + D_1\lambda^{n-2} + \ldots + D_{n-1}, \quad D_0 = E,$$
$$D_k = A^k - r_1 A^{k-1} - \ldots - r_k E, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad r_k = \frac{\operatorname{tr}(AD_{k-1})}{k};$$

$\operatorname{tr} M$ – след матрицы M. Умножая обе части (4.1) на G, имеем

$$L_j(p) x_{t_2}(\tau) = \widetilde{y}(\tau), \tag{4.2}$$

где

$$L_j(\lambda) = \begin{bmatrix} G \\ G(D(\lambda)A_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ G(D(\lambda)A_1)^{j-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{bmatrix} y_{t_2} \\ \Delta(p)\, y_{t_2+h} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{j-1}(p)\, y_{t_2+(j-1)h} \end{bmatrix},$$
$$y_t = y_t(\tau) = y(t + \tau), \quad \tau \in H^-, \quad t \geqslant h.$$

Чтобы получить граничную задачу для определения текущего состояния, обоснуем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Если начальная функция в (1.2) k раз ($k \geqslant 1$) непрерывно дифференцируема: $\eta \in C^k = C^k(H^-, \mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет граничным условиям*

$$\eta^{(j+1)}(0) = A\eta^{(j)}(0) + A_1\eta^{(j)}(-h), \quad j = \overline{0, k-1}, \tag{4.3}$$

то решение уравнения (1.1) также k раз непрерывно дифференцируемо при $t = 0$.

Доказательство см. в приложении.

Будем считать, что P – обобщенное собственное пространство уравнения (1.1), связанное со спектральным набором $\Lambda_N = \{\lambda \in \Lambda \,|\, d(\lambda) = 0\}$, где $d(\lambda)$ – некоторый полином степени k. Если $\Lambda_N = \varnothing$, то по определению $P = \{0\}$.

Лемма 2. *Пусть $d(\lambda)$ – полином степени k, $k \geqslant 1$. Если начальная функция $\eta \in C^k$ удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению $d(p)\eta = 0$ и граничным условиям (4.3), то $\eta \in P$.* Верно и обратное утверждение.

Доказательство см. в приложении.

5. Граничная задача для определения текущего состояния

Получим граничную задачу, которой удовлетворяет всякое текущее состояние x_{t_0}, совместимое с выходом y.

Считаем, что условие (2.1) выполнено. Как доказано в работе [14], для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме, возможно, конечного числа значений, справедливо равенство

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} L_n(\lambda) \\ (D(\lambda)A_1)^n \end{bmatrix} = \operatorname{rank} L_n(\lambda). \tag{5.1}$$

В силу (5.1) найдется целое $j = \beta$: $1 \leqslant \beta \leqslant n$ и $n \times \beta m$-матрица $\widetilde{L}(p)$, такая, что

$$\widetilde{L}(\lambda)L_\beta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(D(\lambda)A_1)^\beta, \tag{5.2}$$

где $\Delta_0(\lambda)$ – базисный минор матрицы $L_\beta(\lambda)$. Обозначим: $\alpha_0 = \deg \Delta_0(\lambda)$ и $\alpha_1 = \deg \widetilde{L}(\lambda)$, тогда $\alpha_0 \leqslant n(n-1)(\beta-1)$, $\alpha_1 \leqslant (n-1)((n-1)(\beta-1)+\beta)$. Для $\alpha_2 = \max(n\beta + \alpha_0,\ n(\beta-1)+\alpha_1)$ верна теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (2.1). При достаточно большом $t_0 (t_0 \geqslant \alpha_2 h)$ текущее состояние x_{t_0} системы Σ, совместимое с выходом y, однозначно находится как решение граничной задачи

$$Gx_{t_0}(\tau) = y_{t_0}(\tau), \quad \Delta_0(p)\Delta^\beta(p)\,x_{t_0}(\tau) = \widetilde{L}(p)\,\widetilde{y}(\tau), \quad \tau \in H^-; \tag{5.3}$$

$$x_{t_0}^{(i+1)}(0) = Ax_{t_0}^{(i)}(0) + A_1 x_{t_0}^{(i)}(-h), \quad i = \overline{0, \alpha_3 - 1}, \quad \alpha_3 = \alpha_0 + \beta n. \tag{5.4}$$

Доказательство см. в приложении.

Замечание 1. В работе [14] доказано, что оператор восстановления L_{t_0} непрерывен, по крайней мере, при $t_0 \geqslant \alpha_4 h$, $\alpha_4 = \max(n+1,\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\beta n - 2)$.

Во второй части работы получим граничную задачу для нахождения успокаивающего управления по идентифицированному текущему состоянию. Для этого разложим [16] пространство состояний в прямую сумму (3.7) по набору Λ_N, указанному ниже. Успокаивающее управление $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ будем находить из условий: $x_{t_1+h} \in P$ и $x_{t_1+h} \in Q$, обеспечивающих ввиду (3.7) $x_{t_1+h} = 0$ при $u(t) = 0$, $t > t_1$.

6. Граничная задача для вычисления успокаивающего управления

Пусть $t_1 \geqslant (n(k+1)-1)h$, $k = 1, 2\ldots$, запишем уравнение (1.1) в виде:

$$(pE - A)x_{t_1+h}(\tau) = A_1 x_{t_1}(\tau) + Bu_{t_1+h}(\tau), \quad \tau \in H^-. \tag{6.1}$$

Умножим обе части (6.1) на матрицу $D(p)$ (см. раздел 4):

$$\Delta(p)x_{t_1+h}(\tau) = D(p)A_1 x_{t_1}(\tau) + D(p)Bu_{t_1+h}(\tau), \quad \tau \in H^-.$$

Применяя оператор $\Delta(p)$ еще k раз и полагая в соответствии с определением 2 $u_{t_1+h} = 0$, получим

$$\Delta^{k+1}(p)x_{t_1+h}(\tau) = (D(p)A_1)^{k+1}x_{t_0}(\tau) + \sum_{i=0}^{k-1}(D(p)A_1)^{k-i} \times D(p)B\Delta^i(p)\,u_{t_0+(i+1)h}(\tau), \quad \tau \in H^-, \quad t_0 = t_1 - kh. \tag{6.2}$$

Следуя [2], введем рекуррентное соотношение

$$X_i(t) = AX_{i-1}(t) + A_1X_{i-1}(t-h), \quad i - \text{ целое число}, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$X_0(0) = E, \quad X_i(t) = 0, \quad i < 0 \vee t < 0,$$

называемое определяющим уравнением. Пусть

$$U_i(\tau) \doteq \sum_{j=1}^{i}\sum_{\ell=0}^{j-1} X_j((\ell+1)h)Bu^{(i-j)}_{t_1-\ell h}(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots;$$
$$U_0(\tau) = 0, \quad \tau \in H^-.$$

$\Lambda_A = \{\lambda \in \Lambda \,|\, \Delta(\lambda) = 0\}$ – спектральное подмножество. Разложим пространство $C = \widetilde{P} \oplus \widetilde{Q}$ по спектральному набору Λ_A. Обозначим через $\widetilde{P}^*$ обобщенное собственное пространство сопряженной системы Σ^*, $\widetilde{\Psi}$ – базис этого пространства.

Лемма 3. Если кусочно-дифференцируемое управление $u\,(u\,(t) = 0,\ t < t_1 - kh)$, $t_1 \geqslant \alpha_5 h$, $\alpha_5 = n(k+1) - 1$, $k = 1, 2, \ldots$ *удовлетворяет граничной задаче*

$$\sum_{i=0}^{k-1}(D\,(p)A_1)^{k-i}D\,(p)B\Delta^i(p)u_{t_0+(i+1)h}(\tau)+(D\,(p)A_1)^{k+1}x_{t_0}(\tau)=0, \ \tau \in H^-; \tag{6.3}$$

$$U_i(-0) = AU_{i-1}(-0) + A_1U_{i-1}(-h+0), \quad i = \overline{1, \alpha_5}, \tag{6.4}$$

то состояние $x_{t_1+h} \in \widetilde{P}$ *при* $u\,(t) = 0$, $t > t_1$.

Доказательство см. в приложении.

Теорема 2. Пусть система Σ *полностью управляема (см. условие (1.5)). Тогда всякое кусочно-дифференцируемое успокаивающее управление* $u\,(u\,(t) = 0,$ $t < t_1 - kh)$, $t_1 \geqslant \alpha_5 h$, $k = 1, 2\ldots$ *можно найти как решение граничной задачи (6.3), (6.4), дополненной условием*

$$\int_{t_0}^{t_1} v^*_\xi(\tau)\,u\,(\tau)d\tau + \left(z^{t_0*}_\xi,\ x_{t_0}\right) = 0 \quad \forall \xi^* \in \widetilde{\Psi}. \tag{6.5}$$

Состояние $z^{t_0*}_\xi$ и выход $v^*_\xi(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_1]$, $t_0 = t_1 - kh$ сопряженной системы Σ^* порождаются начальной функцией $\xi^* \in \widetilde{\Psi}$.

Доказательство см. в приложении.

Замечание 2. Из работы [14] следует, что время $t_1 - t_0$ успокоения полностью управляемой системы Σ не превышает $2n\,(n+1)\,h$.

7. Пример

Рассмотрим систему Σ с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G = [1;\ 0], \tag{7.1}$$

которую назовем системой (7.1). Здесь условия полной управляемости (1.5) и идентифицируемости (2.1) выполнены при любом $h > 0$.

Для идентификации текущего состояния $x_{t_0} = \mathrm{col}\,\left[x^1_{t_0},\, x^2_{t_0}\right]$ по выходу $y(t) = x^1(t)$, $t \in T_0$ обратимся к теореме 1. В данном случае

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2, \quad D\,(\lambda) = \lambda E + A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad D\,(\lambda)A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\beta = 1, \quad \Delta_0(\lambda) = 1, \quad \widetilde{L}\,(\lambda) = \mathrm{col}\,[\lambda;\, 0], \quad \alpha_2 = 2.$$

При $t_0 \geqslant 2h$ граничная задача (5.3) – (5.4) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&x^1_{t_0}(\tau) = y_{t_0}(\tau), \quad x^{1(2)}_{t_0}(\tau) = \dot{y}_{t_0-h}(\tau), \quad x^{2(2)}_{t_0}(\tau) = 0, \quad \tau \in H^-;\\
&\dot{x}^1_{t_0}(0) = -x^2_{t_0}(0) + x^1_{t_0}(-h), \quad \dot{x}^2_{t_0}(0) = 0;\\
&x^{1(2)}_{t_0}(0) = -\dot{x}^2_{t_0}(0) + \dot{x}^1_{t_0}(-h), \quad x^{2(2)}_{t_0}(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
x^1_{t_0}(\tau) = y_{t_0}(\tau), \quad x^2_{t_0}(\tau) = y\,(t_0 - h) - \dot{y}\,(t_0), \quad \tau \in H^-. \tag{7.2}
$$

Очевидно, что формулы (7.2) верны при $t_0 \geqslant h$.

Замечание 3. Согласно замечанию 1 оператор восстановления заведомо непрерывен при $t_0 \geqslant 3h$. Ввиду системы (7.1) $\dot{y}\,(t) = -x^2(t) + x^1(t-h)$, $t \geqslant 0$, поэтому дифференцирование в формуле (7.2) можно исключить, измеряя последнюю величину в момент времени t_0.

Пользуясь теоремой 2, получим успокаивающее управление при $k = 2 : u\,(t) = 0$, $t < t_0 = t_1 - 2h$, $t_1 \geqslant 5h$.

Вычисляя, находим: $\det W(\lambda) = \lambda(\lambda - \mu)$, $\mu = e^{-\lambda h}$. Следовательно, $\Lambda_A = \{0\}$, где $\lambda = 0$ – простой корень характеристического уравнения (3.1). Обобщенное собственное пространство $\widetilde{P}$ сопряженной системы Σ^* состоит из функций $\psi^* = [0,\ a]$, $a \in \mathbb{R}$. В качестве матрицы $\widetilde{\Psi}$ можно взять $[0;\,1]$, тогда условие (6.5) таково:

$$
\int\limits_{t_0}^{t_1} u\,(\tau)d\tau + x^2_{t_0}(0) = 0. \tag{7.3}
$$

Запишем граничную задачу (6.3) – (6.4). Уравнение (6.3) имеет вид

$$
u^{(3)}_{t_1}(\tau) + u^{(2)}_{t_1-h}(\tau) + x^{1(3)}_{t_0}(\tau) = 0, \quad \tau \in H^-. \tag{7.4}
$$

Граничные условия (6.4) следующие:

$$
\begin{aligned}
&u_{t_1}(-0) = 0; \quad \dot{u}_{t_1}(-0) + u_{t_1-h}(-0) = u_{t_1}(-h+0);\\
&u^{(i)}_{t_1}(0) + u^{(i-1)}_{t_1-h}(0) = u^{(i-1)}_{t_1}(-h+0) + u^{(i-2)}_{t_1-h}(-h+0), \quad i = 2, 3.
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

Решая задачу (7.4), (7.5), с учетом (7.3) получаем

$$
u_{t_1}(\tau) = x^1_{t_0}(\tau) - x^2(t_0) - \int\limits_{-h}^{\tau} u_{t_1-h}(\tau)d\tau, \quad \tau \in H^-; \tag{7.6}
$$

$$
u_{t_1-h} : \int\limits_{-h}^{0} u_{t_1-h}(\tau)\,d\tau - x^1(t_0) + x^2(t_0) = 0,
$$

$$
\int\limits_{-h}^{0} \tau u_{t_1-h}(\tau)\,d\tau + x^1(t_0) - hx^2(t_0) + \int\limits_{-h}^{0} x^1_{t_0}(\tau)\,d\tau = 0.
$$

Управление (7.6) будет успокаивающим для $\eta \in C$ при любом $t_1 \geqslant 2h$, что легко проверить, подставляя (7.6) в систему (7.1).

Замечание 4. Условие отсутствия произвольных функций в решении граничной задачи (6.3) – (6.5) состоит [18] в том, что матричный дифференциальный оператор в уравнении (6.3) должен быть невырожденным. В общем случае, как видно из рассмотренного примера, успокаивающее управление находится неоднозначно. Единственность решения задачи (6.3) – (6.5) можно обеспечить [5], дополнив ее требованием оптимальности успокаивающего управления.

Замечание 5. Предположение о кусочной дифференцируемости успокаивающего управления в теореме 2 связано лишь с формой записи граничной задачи для его отыскания. Проинтегрировав задачу (6.3) – (6.5), получим выражение (см. (7.6)), определяющее необходимый порядок гладкости управляемого состояния x_{t_0}, $t_0 \geqslant 0$ и успокаивающего управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_0 + kh]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Из уравнения (1.1) при $t = +0$ имеем

$$\dot{x}(+0) = Ax(+0) + A_1 x(+0 - h).$$

В силу начального условия (1.2) $x(+0) = \eta(0)$ и $x(+0 - h) = \eta(-h)$, поэтому $\dot{x}(+0) = A\eta(0) + A_1\eta(-h)$. Отсюда с учетом граничного условия (4.3) при $j = 0$ получаем равенство $\dot{x}(+0) = \dot{\eta}(0)$.

Считаем доказанными равенства

$$x^{(i)}(+0) = \eta^{(i)}(0), \quad i = \overline{1, j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k - 1. \tag{П.1}$$

Установим, что $x^{(j+1)}(+0) = \eta^{(j+1)}(0)$, если $k \geqslant 2$. Дифференцируя уравнение (1.1) j раз, при $t = +0$ получим

$$x^{(j+1)}(+0) = Ax^{(j)}(+0) + A_1 x^{(j)}(-h + 0).$$

Ввиду равенств (П.1), начального условия (1.2) и граничных условий (4.3) заключаем, что $x^{(j+1)}(+0) = \eta^{(j+1)}(0)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Если $t \in (0, h)$, то из уравнения (1.1) имеем $(pE - A)x(t) = A_1\eta(t - h)$. Применим оператор $d(p)$ к данному соотношению. Учитывая, что $d(p)\eta(t) = 0$, $t \in H^-$, получим $(pE - A)d(p)\,x(t) = 0$, $t \in (0, h)$. Согласно лемме 1 $(d(p)x)(0) = (d(p)\,\eta)(0) = 0$, поэтому

$$d(p)\,x(t) = 0, \quad t \in (-h, h). \tag{П.2}$$

Таким образом, решение $x(t)$ системы Σ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению на интервале меры, большей, чем h.

Обозначим через $\sigma = \{\lambda_i \in \mathbb{C} \mid i = \overline{1, s}\}$ множество корней уравнения: $d(\lambda) = 0$ с алгебраическими кратностями k_i. Ввиду (П.2) функция $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{s} v_i(t)\, e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i \in \sigma, \quad t \in (-h, h), \tag{П.3}$$

где $v_i(t)$ – n-векторные полиномы степени не выше $k_i - 1$:

$$v_i(t) = \sum_{j=0}^{k_i - 1} \gamma_{i,j+1} \frac{t^j}{j!}, \quad t \in (-h, h).$$

Чтобы определить n-векторные коэффициенты $\gamma_{i,j}$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, k_i}$, подставим (П.3) в уравнение (1.1). Получим

$$M_{k_i}(\lambda_i)\gamma_i = 0, \quad \gamma_i = \mathrm{col}\,[\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,k_i}], \quad \lambda_i \in \sigma, \quad i = \overline{1, s}, \tag{П.4}$$

где постоянная $nk_i \times nk_i$-матрица $M_{k_i}(\lambda_i)$ задается формулой (3.4). Обращение к формуле (3.2) доказывает, что функция $\eta \in P$.

Обратное утверждение: если функция $\eta \in P$, то она удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению $d(p)\,\eta = 0$, где

$$d(\lambda) = \prod_{i=1}^{N} (\lambda - \lambda_i)^{q_i}, \quad q = \sum_{i=1}^{N} q_i, \quad \lambda_i \in \Lambda_N \subseteq \Lambda,$$

и граничным условиям (4.3). Это утверждение следует из формул (3.2) – (3.4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что при $t_0 \geqslant \alpha_2 h$ текущее состояние x_{t_0} системы Σ удовлетворяет граничной задаче (5.3) – (5.4). Равенство $Gx_{t_0}(\tau) = y_{t_0}(\tau)$, $\tau \in H^-$ следует из определения выхода (1.3). Дифференциальное соотношение

$$\Delta_0(p)\Delta^\beta(p)\, x_{t_0}(\tau) = \widetilde{L}\,(p)\, \widetilde{y}\,(\tau), \quad \tau \in H^-$$

получается применением к обеим частям равенства (4.2) дифференциального оператора $\widetilde{L}(p)$ с учетом (5.2). Граничные условия (5.4) есть результат того [19], что с возрастанием t гладкость решения $x(t)$ повышается.

Осталось доказать, что решение задачи (5.3) – (5.4) единственно. В виду ее линейности достаточно установить, что однородная задача

$$\text{(П.5)} \qquad \begin{aligned} &Gx_{t_0}(\tau) = 0, \quad \Delta_0(p)\Delta^\beta(p)x_{t_0}(\tau) = 0, \quad \tau \in H^-; \\ &x_{t_0} \quad \text{удовлетворяет (5.4)} \end{aligned}$$

для системы Σ с нулевым выходом имеет лишь тривиальное решение.

Пусть $\delta x^{(k)}(t) = x^{(k)}(t+0) - x^{(k)}(t-0)$, $k = 0, 1, \ldots$ – скачок k-й производной решения системы Σ в момент времени $t \geqslant 0$. Если x_{t_0} удовлетворяет (5.4), то ввиду леммы 1 все $\delta x^{(k)}(t_0) = 0$, $k = \overline{0, \alpha_3 - 1}$, где $\alpha_3 = \deg \Delta_0(\lambda)\Delta^\beta(\lambda)$ (см. (5.4)). Согласно лемме 2 $x_{t_0} \in P$ – обобщенному собственному пространству, связанному с $\Lambda_N = \{\lambda \in \Lambda \mid \Delta_0(\lambda)\Delta(\lambda) = 0\}$, и имеет вид (П.3), где $\sigma = \Lambda_N$, $s = N$. Если множество Λ_N пусто, то $P = \{0\}$ и $x(t) = 0$, $t \geqslant t_0 - h$.

Считаем, что $\Lambda_N \neq \varnothing$. Ввиду первого из равенств (П.5) и (П.3)

$$\text{(П.6)} \qquad G\gamma_{i,j} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, q_i}.$$

Поскольку выполнено (2.1), то из (П.4), (П.6) следует [8], что $\gamma_i = 0$, $i = \overline{1, N}$. Итак, $x(t) = 0$, $t \geqslant t_0 - h$. Теорема доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть для начального состояния $\eta \in C$ существует управление $u\,(u\,(t) = 0,\ t < t_1 - kh,\ k = 1, 2, \ldots)$, обеспечивающее соотношение (6.3). Согласно (6.2) имеем

$$\text{(П.7)} \qquad \Delta^{k+1}(p)\, x_{t_1+h}(\tau) = 0, \quad \tau \in H^-, \quad t_1 \geqslant \alpha_5 h$$

при $u\,(t) = 0$, $t > t_1$.

В силу линейности системы Σ [19] получим

$$x_{t_1+h}(\tau) = x_{t_1+h,\eta}(\tau) + x_{t_1+h,u}(\tau), \quad \tau \in H^-,$$

где

$$x_{t_1+h,\eta}(\tau) = F\,(t_1 + h + \tau)\,\eta\,(0) + \int_0^h F\,(t_1 + h + \tau - s)A_1\eta\,(s - h)\,ds,$$

$$x_{t_1+h,u}(\tau) = \int\limits_0^{t_1+h+\tau} F(t_1+h+\tau-s)Bu(s)\,ds, \quad \tau \in H^-;$$

$$\dot F(t) = AF(t) + A_1F(t-h); \quad F(0) = E; \quad F(t) = 0, \quad t < 0.$$

При $t_1 \geqslant \alpha_5 h$ решение однородной системы Σ $(u = 0)$ удовлетворяет [19] граничным условиям

$$(\text{П}.8) \qquad x^{(i+1)}_{t_1+h,\eta}(0) = Ax^{(i)}_{t_1+h,\eta}(0) + A_1x^{(i)}_{t_1+h,\eta}(-h), \quad i = \overline{0,\alpha_5}.$$

Непосредственно из (6.4) следует, что функция $x_{t_1+h,u}$, а вместе с ней и x_{t_1+h} также удовлетворяют граничным условиям (П.8).

Доказано, что состояние x_{t_1+h} системы Σ есть решение граничной задачи (П.7), (П.8). Ввиду леммы 2 $x_{t_1+h} \in \widetilde{P}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем необходимость условий (6.3) – (6.5) для успокаивающего управления. Условия (6.3), (6.4) необходимы ввиду леммы 2. Условие (6.5) вытекает из (3.6) и того факта, что если начальное состояние η управляемо, то $x_{t_1+h} \in \widetilde{Q}$.

Покажем, что управление u, найденное из (6.3) – (6.5), будет успокаивающим. Из условий (6.3), (6.4) вытекает (см. лемму 2), что $x_{t_1+h} \in \widetilde{P}$. Условие (6.5) в силу (3.6) обеспечивает: $\left(\widetilde{\Psi}, x_{t_1}\right) = 0$, т.е. $x_{t_1+h} \in \widetilde{Q}$. Но $\widetilde{Q} \cap \widetilde{P} = \varnothing$, поэтому $x_{t_1+h} = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
3. *Метельский А. В.* Двойственность по Калману в теории управления динамическими дифференциально-разностными системами // АиТ. 1989. № 9. С. 81–90.
4. *Красовский Н. Н.* Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Оптимальные системы. Статистические методы. Тр. II международного конгресса ИФАК, т. 2. М.: Наука, 1965. С. 201–210.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
6. *Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.
7. *Габелая А. Г.* Критерий полной управляемости двумерных систем с запаздыванием // Сообщения АН ГССР. 1976. Т. 83. № 1. С. 53–55.
8. *Минюк С. А., Метельский А. В.* Полная управляемость линейных систем с запаздыванием второго порядка // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1977. № 4. С. 30–36.
9. *Марченко В. М.* О полной управляемости систем с запаздыванием // Problems of Control and Information Theory. 1979. V. 8. № 5–6. P. 421–432.
10. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
11. *Метельский А. В., Минюк С. А.* К теории полной наблюдаемости систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 624–633.
12. *Шкляр Б. Ш.* К наблюдаемости линейных систем с сосредоточенными запаздываниями // Problems of Control and Information Theory. 1980. V. 9. № 6. P. 417–428.
13. *Водичев А. В.* Об условиях непрерывного восстановления текущего состояния линейной системы с запаздыванием по результатам наблюдения // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 2. С. 217–227.

14. *Метельский А. В.* Выделение идентифицируемой и управляемой компонент состояния динамической системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28 № 6. С. 972–984.
15. *Шиманов С. Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 102–116.
16. *Hale J. K., Lunel S. M. V.* Introduction to Functional Differential Equations. Springer, 1993.
17. *Метельский А. В., Минюк С. А.* Алгебраический подход к решению задачи полной наблюдаемости систем с запаздыванием // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1976. № 2. С. 9–13.
18. *Лузин Н. Н.* К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // АиТ. 1940. № 5. С. 3–66.
19. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию 28.02.95

УДК 62-50:530.145

© 1996 г. С.В. ПРАНЦ, д-р физ.-мат. наук
(Тихоокеанский океанологический институт Дальневосточного отделения РАН, Владивосток)

ФИНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАСЕЛЕННОСТЯМИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ НА ИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРУППАХ[1]

Развит аналитический метод решения задач финитного управления квантовыми системами при помощи внешних модулированных электромагнитных полей, основанный на их свойствах динамической симметрии. Метод позволяет вычислять в явном виде матрицу эволюции, являющуюся представлением соответствующей динамической группы системы. В качестве примеров получены формальные решения задач финитного управления населенностями двухуровневого и трехуровневого атомов, управляемых лазерами с произвольными допустимыми законами модуляции параметров излучения.

1. Введение

Современная техника позволяет осуществлять манипулирование и мониторинг отдельных атомов [1]. Такие фундаментальные вопросы квантовой теории, как принципы суперпозиции и неопределенностей, редукция волновой функции и квантовые скачки, исследуются теперь не только в мысленных (gedanken experiments), но и в лабораторных экспериментах. Как постановка экспериментов, так и их интерпретация требуют на уровне теории аналитического описания эволюции нестационарной квантовой динамической системы (КДС), не прибегая по возможности к различным пертурбативным методам решения. Полную картину динамики КДС в рамках квантовой теории дает, как известно, матрица эволюции, с помощью которой находится вектор-функция управления, реализующая заданную управляемость системы. В роли управлений обычно выступают напряженности, частоты и фазы внешних электромагнитных полей. Целью эксперимента, как правило, является управляемый перевод КДС из заданного начального состояния в желаемое конечное состояние за определенный промежуток времени. Это типичная задача финитного управления при условии, что управляемая величина удовлетворяет одному из

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-02-06216) и Международного научного фонда (грант № Z 7000).