

ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ КАК СОСТАВНАЯ ЧАСТЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ ПО ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫМ И ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Сидорик В.В.

*Республиканский институт инновационных технологий Белорусского национального
технического университета, г. Минск, Республика Беларусь, vvs_val@mail.ru*

На примере реальной задачи об остывании чашки кофе рассматривается проблема активизации познавательной деятельности обучаемых на всех уровнях системы образования. Предлагается внедрение в учебный процесс реальных задач, реализуемых с использованием пакетов компьютерной математики.

Существует определенная проблема создания дополнительной мотивации обучаемых при изучении дисциплин, требующих математической подготовки (и не только базовой). Проблема реальная, так как обучаемые хотят решать реальные задачи, что на младших курсах даже технических вузов не всегда представляется возможным. Обучаемые на младших курсах не имеют соответствующей математической подготовки. Выход можно искать в применении прикладных программ, разрабатываемых на основе пакетов компьютерной математики, таких как Matlab и Mathcad. Рассмотрим практическую реализацию данной концепции на примере задачи об остывании чашки кофе.

Формулировка проблемы.

Посетитель зашел в кафе и заказал чашку кофе. Температура в помещении 18 С. Посетитель считает комфортной температуру кофе 50 С. Требуется определить время, необходимое для остывания свежеприготовленного кофе до комфортной для посетителя температуры.



Физическая модель.

Природа остывания кофе и перенос тепла от чашки с кофе окружающему пространству в общем случае включает в себя механизмы конвекции, излучения, испарения и теплопроводности. Каждый из этих механизмов имеет свою физическую природу и может быть представлен различными физическими, а значит и математическими моделями.

Явление теплопроводности обусловлено градиентом температур и может играть существенную роль, если чашка поставлена на поверхность из материала с большим коэффициентом теплопроводности (например, металл). Однако пренебречь механизмом теплопроводности можно, предполагая, что поверхность стола и окружающий воздух имеют значительно меньшее значение коэффициента теплопроводности.

Другой механизм остывания чашки за счет электромагнитного излучения не требует наличия в окружающем пространстве вещества. Излучаемый тепловой поток пропорционален четвертой степени температуры. При этом светлые (и блестящие) тела не только мало поглощают, но и мало излучают. Для кофе в светлой чашке механизм излучения менее эффективен, чем в темной.

Механизм испарения обусловлен явлениями на поверхности, площадь поверхности пропорциональна квадрату радиуса поверхности чашки. В тоже время объем чашки, определяющий запас внутренней энергии, а значит и температуру, пропорционален кубу линейного размера чашки. Исходя из этого механизм испарения, по-видимому, можно пренебречь.

При конвекции нагретые вблизи поверхности чашки молекулы воздуха уносятся на большие расстояния. Эффективность такого механизма зависит от внешних условий, например, работающего в комнате вентилятора, ускоряющего процесс конвекции.

Математическая модель.

Оптимальная температура приготовления кофе 90 С, а температура окружающей среды для бытовых помещений 18-24 С. Разность температур невелика, поэтому в качестве математической модели можно взять уравнение закона Ньютона, который гласит, что при малых разностях температур тело охлаждается со скоростью

$$\frac{dQ}{dt} = -r(T - T_s). \quad (1)$$

Здесь T – текущая температура чашки, T_s – температура окружающей среды, $\frac{dQ}{dt}$ – скорость потери тепловой энергии dQ чашкой за время dt .

Этот закон в какой-то степени учитывает различные механизмы потери энергии чашкой. Коэффициент остывания r зависит от площади поверхности чашки и кофе, тепловых свойств чашки и кофе, механизма тепловых потерь.

Температура кофе характеризует запас внутренней энергии чашки с кофе, поэтому уравнение закона Ньютона остывания может быть представлено в виде

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s). \quad (2)$$

Это уравнение является математической моделью задачи об остывании чашки с кофе.

Параметры модели.

Температура чашки с кофе в начальный момент времени, температура окружающей среды и коэффициент теплопередачи r .

Определение коэффициента теплопередачи и алгоритмизация математической модели.

Решение задачи предполагает решение уравнения Ньютона при заданных начальных условиях. В качестве начальных условий выступают температура чашки с кофе в начальный момент времени, температура окружающей среды и коэффициент теплопередачи k .

Кофе готовят при температуре 90 С и разливают в чашки. Свежеприготовленный кофе наливают в чашку. Температура чашки равна комнатной температуре, поэтому кофе несколько остывает.

Наиболее слабым звеном математической модели является величина коэффициента теплопередачи. Хозяин кафе для прогноза времени остывания проводил эксперименты с аналогичной керамической чашкой. Температура кофе регистрировалась с точностью 0.1 градуса с интервалом 1 мин. Температура окружающей среды 22.0 С Данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 — Данные о температуре и времени при остывании чашки кофе

Время, мин	T, С	Время, мин	T, С
0	83.0	8.0	64.7
1.0	77.7	9.0	63.4
2.0	75.1	10.0	62.1
3.0	73.0	11.0	61.0
4.0	71.1	12.0	59.9
5.0	69.4	13.0	58.7
6.0	67.8	14.0	57.8
7.0	66.4	15.0	56.6

Поскольку вид функции температуры нам неизвестен для вычисления значения коэффициента теплопередачи воспользуемся следующим алгоритмом. Варьируя значения коэффициента теплопередачи в интервале от 0.001 до 0.090 с шагом 0.001 на каждом шаге с использованием процедуры решения дифференциального уравнения (2) будем вычислять отклоне-

ния теоретической кривой от экспериментальных значений. Минимуму отклонения соответствует оптимальное значение коэффициента теплопередачи. Это значение и следует использовать для дальнейших вычислений. Процедура вычислений представлена в программном коде `coffe_main.m`. Правая часть дифференциального уравнения вычисляется в процедуре `coffe.m`.

```
% coffe.m
function dTdt = coffe(t, T)
    global T0 k
    dTdt = -k*(T-T0);
    % это конец процедуры coffe.m

% coffe_main.m
clc
t=[0:15];
T=[83 77.7 75.1 73 71.1 69.4 67.8 66.4 64.7 63.4 62.1 61 59.9 58.7 57.8 56.6];
plot(t,T,'o')
global Ts k
Ts = 22;
T0 = T(1);
kstart = 0.01;
kend = 0.07;
dk = 0.0005;

for k = kstart: dk: kend
    dt = t;
    [ti Ti] = ode45('coffe', dt, T0);
    di = sum(abs(T - Ti'));
    if k == k1
        dmin = di;
        kmin = k;
    elseif di < dmin
        dmin = di;
        kmin = k;
    end
end

k = kmin;
[ti Ti] = ode45('coffe', dt, T0);
text(11,77, strcat('k = ', num2str(kmin)))
hold on
grid on
plot(ti,Ti,'+')
plot(ti,Ti,'linewidth',2)
title('temperature & time')
xlabel('time, min')
ylabel('temperature, C')

% Ts=18;
% [ti Ti] = ode45('coffe', [0 20], T0);
% plot(ti, Ti, 'r', 'linewidth',2)
```

Результат выполнения программы представлен на графике. Показаны экспериментальные "o" и теоретические значения "+". На графике также напечатано оптимальное значение коэффициента теплопередачи.

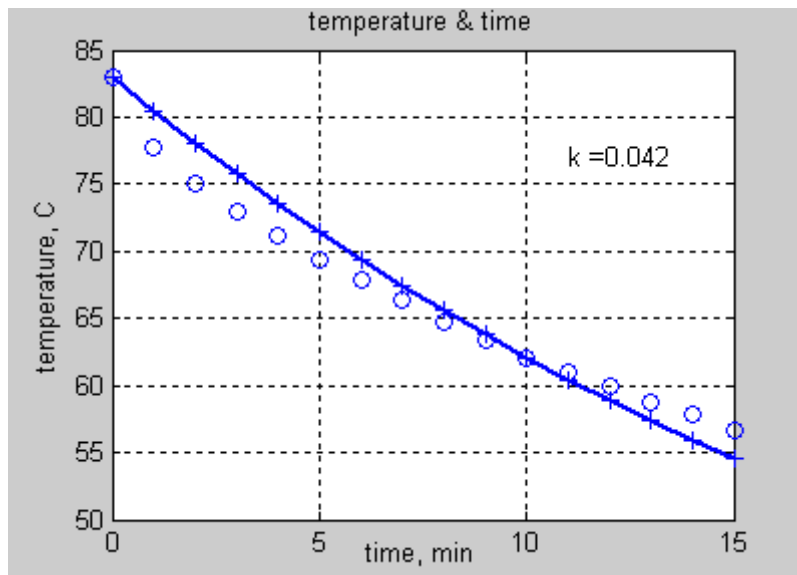


Рисунок 1 — Зависимость температуры кофе от времени в интервале до 15 С

Для ответа на поставленный вопрос изменим начальные условия ($T_0 = 18\text{ C}$) и увеличим время интегрирования до 20 минут. Результаты представлены на графике. Цвет кривой – красный. Для этого снимите комментарий с последних строк программного кода процедуры `coffe_main.m`.

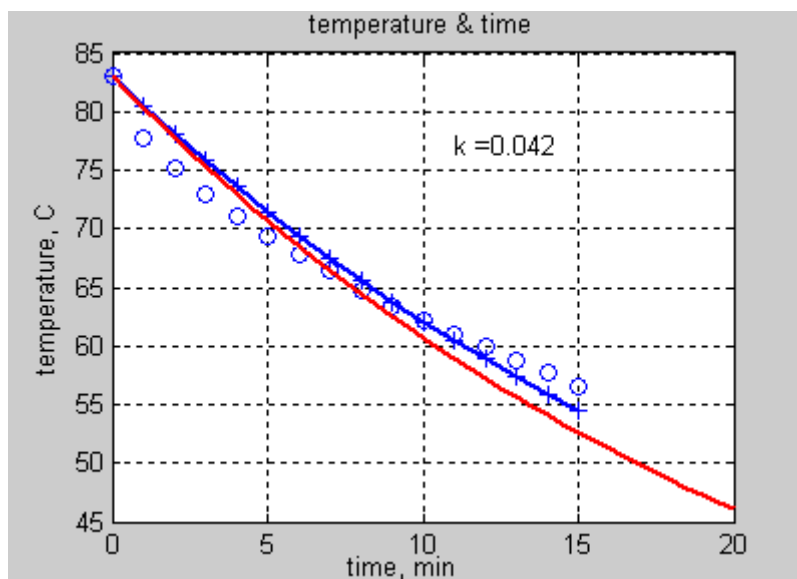


Рисунок 2 — Зависимость температуры кофе от времени в интервале до 20 С

По графику можно определить, что кофе остывает до температуры 60 С приблизительно за 10 мин. А до 50 С?

Программа исследований.

1. Другой посетитель в это же время заказал кофе со сливками. Исследуйте вид кривой остывания при условии, что добавление порции сливок уменьшает температуру кофе на 5 градусов.
2. Исследуйте и второй случай, когда сливки добавляют в кофе через 3 минуты после его приготовления. Для этого вам необходимо внести изменения в программу. Сопоставьте с первым случаем. Если вы торопитесь и пьете кофе со сливками, будете ли вы добавлять сливки сразу или обождете несколько минут?

3. Предположим, что вам налили кофе в аналогичную, но более толстую чашку. Температура кофе сразу же упала на 10 градусов. Постройте кривую остывания. Из какой чашки вы предпочтете пить кофе.
4. Предположим, что другой посетитель в жаркое летнее время зашел выпить чашечку кофе. Температура в помещении 30 С. Постройте и проведите анализ кривой остывания.
5. Найдите время, необходимое для того, чтобы разность температур между температурой кофе и комнатной составило $1/e \approx 0.37$ от начальной. Это время называется *временем остывания* или *временем релаксации*. Проанализируйте, зависит ли время релаксации от начальной температуры? От температуры окружающей среды?
6. Предположим, что вам заменили чашку на чашку с лучшими теплоизоляционными свойствами. Как в этом случае изменится коэффициент теплопередачи? Как это повлияет на динамику остывания кофе?
7. Для изучения точности метода воспользуйтесь точным решением уравнения $T = T_0 - (T - T_0)e^{-kt}$. Постройте график и сопоставьте точное и приближенное решения.
8. Интересно, а знаете ли при какой температуре вы предпочитаете пить кофе? Не удивляйтесь, если окажется, что это не та температура, которую предпочитает наш странный посетитель (Подсказка: комфортная температура кофе не должна превышать 75 С).

Список использованной литературы

1. Сидорик В.В., Джилавдари И.З. Физика в компьютерных моделях. Учеб.-метод. пособ. для студ. техн. вузов. — Мн.:НПО «ПИОН», 1999, — 248 с.
2. Хекхаузен, Х. Психология мотивации достижения / Х. Хекхаузен ; пер. с англ., ред., вступ. ст. Ю.Е. Зайцевой. — СПб. : Речь, 2001. — 240 с.
3. Стрелкова, И.Б. Мотивация достижения в системе формирования профессионализма преподавателей колледжей/вузов / И.Б. Стрелкова // Aplikované vědecké novinky – 2012 : materiály VIII mezinárodní vědecko-praktická konference, Praha, 27 červenců–05 srpna 2012 roku. – Díl 6. Pedagogika / šéfredaktor Z. Černák ; náměstek hlavního redaktor A. Pelicánová ; zodpovědný za vydání J. Štefko. – Praha : Publishing House «Education and Science», 2012. – S. 22–27.
4. Оценивание: образовательные возможности : сб. науч.-метод. ст. / редкол.: Т.И. Краснова (отв. ред.) [и др.] ; под общ. ред. М.А. Гусаковского. — Минск : БГУ, 2006. — 258 с. — (Современные технологии университетского образования / Центр проблем развития образования БГУ ; кн. 4).
5. Кодекс Республики Беларусь об образовании [Электронный ресурс] : от 13 янв. 2011 г., № 243-З : принят Палатой представителей 2 дек. 2010 г. ; одобрен Советом Респ. 22 дек. 2010 г. // Национальный правовой Интернет-портал Респ. Беларусь : Компьютерный банк данных проектов законов Респ. Беларусь. — Режим доступа : <http://www.pravo.by/webnpa/text.asp?RN=Hk1100243>. — Дата доступа : 11.04.2012.