УДК 517.977

ОБ УСПОКОЕНИИ РЕШЕНИЯ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

ON SOLUTION DUMPING OF THE COMPLETELY REGULAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

Метельский А.В.

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики №1 БНТУ, г. Минск, Белоруссия, ametelski@bntu.by

Хартовский В.Е.

кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления ГрГУ им. Я. Купалы, г. Гродно, Белоруссия, hartovskij@grsu.by

Аннотация. Для линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием разработаны методы синтеза регуляторов типа обратной связи по состоянию, обеспечивающие одновременно успокоение решения и конечный спектр замкнутой системы.

Summary. For linear autonomous completely regular differential-algebraic delay systems, we develop methods for synthesizing state feedback controllers that simultaneously provide solution damping and finite spectrum assignment in the closed-loop system.

Ключевые слова: линейные дифференциально-алгебраические системы, успокоение решения, регулятор с обратной связью.

Keywords: linear differential-algebraic systems, solution damping, feedback controller.

В статье приводятся основные результаты исследования [1]. Пусть задана линейная автономная вполне регулярная дифференциально-алгебраическая система с запаздыванием

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{A}_0\tilde{x}(t)\right) = \tilde{A}(\lambda)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(\lambda)u(t), \quad t > 0, \qquad (1')$$

где $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор решения исходной системы, $u \in \mathbb{R}^r$ — вектор кусочно-непрерывного управления, $\tilde{A}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $\tilde{B}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{i\times j}[\lambda]$ — множество полиномиальных матриц размера $i \times j$), λ — оператор сдвига ($\lambda f(t) = f(t-h)$, f, h=const>0 — постоянное запаздывание). Обозначим $\operatorname{rank}\tilde{A}_0 = n_1$, тогда степень полинома $\deg|p\tilde{A}_0 - \tilde{A}(0)| = n_1$. Выберем неособые матрицы H и H_1 такие, что $H_1 A_0 H$ =diag$\left[I_{n_1}, 0_{n_2\times n_2}\right]$, где $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ — единичная матрица, $0_{i\times j} \in \mathbb{R}^{i\times j}$ — нулевая матрица, $n_2 = n - n_1$. Пусть

$$H_1\tilde{A}(\lambda)H = \begin{bmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ \overline{A}_{21}(\lambda) & \overline{A}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = H_1\tilde{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} B_1(\lambda) \\ \overline{B}_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

$B_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times r}[\lambda]$, $\overline{B}_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times r}[\lambda]$. Положив $A_{21}(\lambda) = -(\overline{A}_{22}(0))^{-1}\overline{A}_{21}(\lambda)$, $A_{22}(\lambda) = -\lambda^{-1}(\overline{A}_{22}(0))^{-1}\ (\overline{A}_{22}(\lambda) - \overline{A}_{22}(0))$, $B_2(\lambda) = -(\overline{A}_{22}(0))^{-1}\overline{B}_2(\lambda)$ и выполнив в системе $(1')$ замену переменных $\tilde{x} = H\operatorname{col}[x, y]$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, получим новую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}(\lambda)x(t) + A_{12}(\lambda)y(t) + B_1(\lambda)u(t), \\ y(t) &= A_{21}(\lambda)x(t) + A_{22}(\lambda)y(t-h) + B_2(\lambda)u(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Задача. Требуется замкнуть систему (1) линейной обратной связью по состоянию $u(t) = u(\{x(\tau), y(\tau - h), \tau \le t\})$ так, чтобы независимо от начального состояния выполнялось тождество

$$x(t) \equiv 0_{n_1\times 1}, y(t) \equiv 0_{n_2\times 1}, \quad t > t_1, \tag{2}$$

где $t_1 > 0$ — некоторое фиксированный момент времени.

Для решения поставленной задачи будем использовать регулятор вида

$$u(t) = R_{01}(\lambda)X(t) + R_{02}(\lambda)Y(t) + \sum_{i=0}^{m_x}\int_0^h F_{0i}(s)\lambda^i X(t-s)ds,$$

$$\dot{x}_1(t) = R_{11}(\lambda)X(t) + R_{12}(\lambda)Y(t) + \sum_{i=0}^{m_x}\int_0^h F_{1i}(s)\lambda^i X(t-s)ds,$$

$$y_1(t) = R_{21}(\lambda)X(t) + R_{22}(\lambda)Y(t) + \sum_{i=0}^{m_x}\int_0^h F_{2i}(s)\lambda^i X(t-s)ds,$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n}_1}$, $y_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n}_2}$ — дополнительные переменные, $X = \mathrm{col}[x, x_1], Y = \mathrm{col}[y, y_1]$, $R_{01}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times(n_1+\bar{n}_1)}[\lambda]$, $R_{02}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times(n_2+\bar{n}_2)}[\lambda]$, $R_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times(n_1+\bar{n}_1)}[\lambda]$, $R_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times(n_2+\bar{n}_2)}[\lambda]$, $R_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times(n_1+\bar{n}_1)}[\lambda]$, $R_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times(n_2+\bar{n}_2)}[\lambda]$, $F_{j,i}(s) = \sum_{k=0}^{m_x} e^{\alpha_{k,j,i}s}(\cos(\beta_{k,j,i}s)F_{j,i,1,k}(s) + \sin(\beta_{k,j,i}s)F_{j,i,2,k}(s))$, $j = \overline{0,2}$, $i = \overline{0,m_x}$, ($\alpha_{k,j,i}, \beta_{k,j,i} \in \mathbb{R}$, $F_{j,i,1,k}(s)$, $F_{j,i,2,k}(s)$ – полиномиальные матрицы), $m_x \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Систему (1) назовем полностью 0-управляемой, если для любого начального состояния существует управление $u(t), t > 0$, такое, что имеют место тождества (2) при $u(t) \equiv 0_{r\times 1}$, $t > t_1$.

Определение 2. Систему (1) назовем 0-управляемой , если для любого начального состояния существует управление $u(t)$, $t > 0$, такое , что имеют место тождества (2).

Обозначим: $W(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (1), $B(\lambda) = \mathrm{col}[B_1(\lambda), B_2(\lambda)]$.

Теорема 1. *Для того, чтобы система (1) была полностью 0-управляемой необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия*

1. $\mathrm{rank}[W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \qquad \forall p \in \mathbb{C},$
2. $\mathrm{rank}[I_{n_2} - \lambda A_{22}(\lambda), B_2(\lambda)] = n_2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

Пусть $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m_3} B^{(i)}\lambda^i$, $B^{(i)} \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Рассмотрим последовательность векторов $q_k, k = m_3, m_3+1, \ldots$, которая является решением разностного уравнения $B^{(0)}q_k + \sum_{i=1}^{m_3} B^{(i)}q_{k-i} = 0, k = m_3, m_3+1, \ldots$ с начальным условием $q_i = T_{m_3-i}c, i = \overline{0, m_3-1}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_T}$ — некоторые матрицы, $c \in \mathbb{R}^{r_T}$ произвольный постоянный вектор. Обозначим $T = T_{m_3}$ и определим матрицу $S \in \mathbb{R}^{r_T\times r_T}$ как решение системы уравнений $B^{(0)}T_1S + \sum_{i=1}^{m_3} B^{(i)}T_i = 0_{n\times r_T}$, $T_kS = T_{k-1}$, $k = \overline{2, m_3}$. Введем матрицы $G^{(0)} = B^{(0)}T$, $G^{(i)} = G^{(i-1)}S + B^{(i)}T$, $i = \overline{1, m_3}$,

$G(\lambda)=\sum_{i=0}^{m_3} G^{(i)}\lambda^i$. Для заданной полиномиальной матрицы $B(\lambda)$ матрицу $G(\lambda)$, построенную описанным способом, назовем матрицей дополнительных входов. Пусть $G(\lambda)=\mathrm{col}[G_1(\lambda),G_2(\lambda)]$ ($G_1(\lambda)\in\mathbb{R}^{n_1\times r_T}[\lambda]$, $G_2(\lambda)\in\mathbb{R}^{n_2\times r_T}[\lambda]$).

Теорема 2. *Для того, чтобы система* (1) *была 0-управляемой необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия*

1. $\mathrm{rank}[W(p,e^{-ph}),B(e^{-ph}),G(e^{-ph})]=n \quad \forall p\in\mathbb{C}$,
2. $\mathrm{rank}[I_{n_2}-\lambda A_{22}(\lambda),B_2(\lambda),G_2(\lambda)]=n_2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$.

Обозначим Φ,Ψ — фундаментальные матрицы решений линейных алгебраических систем $\Phi\tilde{A}_0=0_{n_2\times n}$, $\tilde{A}_0\Psi=0_{n\times n_2}$, $\tilde{G}(\lambda)$ — матрица дополнительных входов для матрицы $\tilde{B}(\lambda)$. Вернемся к системе $(1')$.

Утверждение 1. *Система* $(1')$ *полностью 0-управляема если и только если одновременно выполнены два условия*

1. $\mathrm{rank}\left[p\tilde{A}_0-\tilde{A}(e^{-ph}),\,\tilde{B}(e^{-ph})\right]=n \quad \forall p\in\mathbb{C}$,
2. $\mathrm{rank}\left[\Phi\tilde{A}(\lambda)\Psi,\,\Phi\tilde{B}(\lambda)\right]=n_2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$.

Утверждение 2. *Система* $(1')$ *0-управляема если и только если одновременно выполнены два условия*

1. $\mathrm{rank}\left[p\tilde{A}_0-\tilde{A}(e^{-ph}),\,\tilde{B}(e^{-ph}),\,\tilde{G}(e^{-ph})\right]=n \quad \forall p\in\mathbb{C}$,
2. $\mathrm{rank}\left[\Phi\tilde{A}(\lambda)\Psi,\,\Phi\tilde{B}(\lambda),\,\Phi\tilde{G}(\lambda)\right]=n_2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$.

Список литературы

1. Метельский А.В. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием /А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 547-558.