УДК 517.977

ПОЛНОЕ УСПОКОЕНИЕ И ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

COMPLETE DAMPING AND SIMULTANEOUS STABILIZATION OF THE DIFFERENTIAL SYSTEM OF DELAYED TYPE

Метельский А.В.

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики №1 БНТУ, г. Минск, Белоруссия,

ametelski@bntu.by

Карпук В.В.

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры высшей математики №2 БНТУ, г. Минск, Белоруссия

Аннотация. Для спектрально управляемой дифференциальной системы запаздывающего типа строится обратная связь по состоянию, обеспечивающая полное успокоение исходной системы и асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Summary. For the spectrally controllable differential system of delayed type a state feedback that it ensures complete damping of the original system and asymptotic stability of the closed-loop system is designed.

Ключевые слова: дифференциальная система, запаздывание, полное успокоение, стабилизация, регулятор.

Keywords: differential system, delay, complete damping, stabilization, controller.

Дана дифференциальная система запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - ih) + bu(t),\ t > 0,\ x(t) = \eta(t),\ t \in [-mh, 0]. \qquad (1)$$

Здесь x – n-вектор-столбец решения системы (1) ($n \geq 2$); $0 < h$ – постоянное запаздывание; A_i – постоянные $n \times n$-матрицы ($i = \overline{0, m}$); $b = e_n = [0;\ldots;0;1]'$ – n-вектор; η – начальное кусочно-непрерывное состояние. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих обозначает операцию транспонирования. Обозначим $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m$ ($\lambda \in \mathbf{C}$ – множество комплексных чисел), $w(p, e^{-ph}) = \left| pE_n - A(e^{-ph}) \right|$ – характеристический квазиполином ($p \in \mathbf{C}$) системы (1). Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbf{C} | w(p, e^{-ph}) = 0\}$ характеристического уравнения называют спектром системы (1). Считаем, что система (1) спектрально управляема:

$$\operatorname{rank}\left[pE_n - A(e^{-ph}), b\right] = n \forall p \in \mathbf{C}. \qquad (2)$$

Изучается вопрос: нельзя ли одним регулятором (независимо от начального состояния η) обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы и полное успокоение исходной системы (1):

$$x(t) \equiv 0, u(t) \equiv 0 \ \ t \ge t_1, \qquad (3)$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени? Положительный ответ при $n = 2$ на этот вопрос обоснован в [1]. В данном докладе приводятся два вида динамических регуляторов, решающих поставленную задачу.

Рассмотрим динамический регулятор

$$\begin{aligned} &u(t) = -e_n' A(\lambda_D) x(t) + x_{n+1}(t), \\ &\dot{x}_{n+1}(t) = q'(\lambda_D)\tilde{x}(t) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \tilde{q}_{ki}'(\lambda_D)\tilde{x}(t-s)e^{p_k s}s^i / i!ds + a_1(\lambda_D)x_{n+2}(t), \\ &\dot{x}_{n+2}(t) = g'(\lambda_D)\tilde{x}(t) + a_2(\lambda_D)x_{n+2}, \ t > 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь λ_D : $\lambda_D^i\varphi(t) = \varphi(t - ih)$ – оператор сдвига; $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ – полиномы, $q'(\lambda), g'(\lambda)$, $\tilde{q}_{ki}'(\lambda)$ – векторные полиномы ($k = \overline{1, L}, i = \overline{1, L_1}$, L, L_1 – натуральные числа); множество $P^* = \{p_k \in \mathbf{C}, k = \overline{1, L}\}$ содержит инвариантные спектральные значения [1, 2], которые не убираются дифференциально-разностным регулятором; $\tilde{x}(t) = [x_1(t), \ldots x_{n+1}(t)]'$; $x_{n+1}(t), x_{n+2}(t)$ – вспомогательные переменные.

Лемма [1]. Для того чтобы регулятор (4) обеспечивал полное успокоение системы (1) и асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (4), достаточно выполнения двух условий:

1) $\left| pE_{n+2} - \tilde{A}(p, e^{-ph}) \right| = d(p)$ – асимптотически устойчивый полином;

2) $a_1\left(e^{-ph}\right)/d(p),\quad (p-a_2\left(e^{-ph}\right))/d(p)$ – целые функции.

Алгоритм нахождения множества P^*, выбора асимптотически устойчивого характеристического полинома $d(p)$ и полиномов $q'(\lambda), g'(\lambda)$, $\tilde{q}'_{ki}(\lambda)$, обеспечивающих условие 1) для произвольного $n \geq 2$, обоснован в [2].

Выбор полиномов $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ обеспечивает точечную вырожденность системы (1), (4) в направлениях, отвечающих фазовым переменным $x_1(t), \ldots x_n(t)$ и тем самым – полное успокоение исходной системы (1) (см. тождества (3)). Для выполнения тождеств (3), согласно критерию точечной вырожденности, достаточно [1, 2], чтобы элементы первых n строк матрицы $(pE_{n+2}-\tilde{A}\left(p,e^{-ph}\right))^{-1}$, обратной к характеристической матрице замкнутой системы (1), (4), были целыми функциями. Для этого достаточно, чтобы целыми были функции $A_{ij}\left(p,e^{-ph}\right)/d(p)$, где $A_{ij}(p,\lambda)$ – алгебраические дополнения к элементам первых n столбцов характеристической матрицы $pE_{n+2}-\tilde{A}(p,\lambda)$ замкнутой системы (1), (4). Каждое из алгебраических дополнений $A_{ij}(p,\lambda)$ можно вычислить, разлагая дополнительный минор по последнему столбцу. Поэтому для выполнения тождеств (3) достаточно [1], чтобы функции $a_1\left(e^{-ph}\right)/d(p),\quad (p-a_2\left(e^{-ph}\right))/d(p)$ были целыми.

Теорема [2]. Условие спектральной управляемости (2) необходимо и достаточно для построения регулятора (4), обеспечивающего полное успокоение системы (1) и асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (4).

Проверку условия (2) можно выполнить через вычисление базиса Гребнера для системы миноров $M(p,\lambda)=\left[m_1(p,\lambda),\ldots,m_n(p,\lambda)\right]$ порядка $n-1$, расположенных в первых $n-1$ строках матрицы $pE_n-A(\lambda)$ (в словарном порядке $\lambda > p$). Если базис Гребнера содержит ненулевую константу, тогда условие (2) заведомо выполнено, и все полиномы $\tilde{q}'_{ki}(\lambda)$ будут нулевыми. Таким образом, регулятор (4) будет содержать только сосредоточенные запаздывания.

Пусть базис Гребнера содержит полином $d_1(p)$, зависящий только от p. Множество его корней и есть набор чисел P^*, фигурирующий в описании регулятора (4). Если в таком случае базис Гребнера содержит полином $d_2(p,\lambda)$, старший член которого есть степень переменной λ, то проверяем равенство $M(p,e^{-ph})=0$ на множестве $p\in P^*$. Если при некотором $p_0\in P^*$ оно верно, то условие (2) не имеет места, и построение регулятора (4) невозможно. В противном случае условие (2) выполняется, и регулятор (4) существует.

Если базис Гребнера содержит полином $d_1(p)$, но не содержит описанный полином $d_2(p,\lambda)$, или все элементы базиса Гребнера зависят от λ, то условие (2) заведомо не выполняется, и регулятор (4) не существует.

Замкнутая система (1), (4), как видно, имеет порядок $n+2$, т. е. не намного больше порядка исходной системы, но распределенные запаздывания возможны по $n+1$ переменной: $x_1(t),\ldots x_{n+1}(t)$. Регулятор (4) за счет увеличения порядка замкнутой системы можно модифицировать так, чтобы распределенное запаздывание было только по одной вспомогательной переменной $x_{N+1}(t)$:

$$u(t)=-e_n'A(\lambda_D)x(t)+x_{n+1}(t),\ \dot{x}_{n+1}(t)=x_{n+2}(t),\ldots,\ \dot{x}_N(t)=v'(\lambda_D)\bar{x}(t)+x_{N+1}(t),$$

$$\dot{x}_{N+1}(t)=q_{N+1}(\lambda_D)x_{N+1}(t)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h\bar{q}_{ki}(\lambda_D)x_{N+1}(t-s)e^{p_k s}\frac{s^i}{i!}ds+a_1(\lambda_D)x_{N+2}(t),$$

$$\dot{x}_{N+2}(t)=g'(\lambda_D)\tilde{x}(t)+a_2(\lambda_D)x_{N+2}(t),\ t>0,$$

Здесь $N\geq n,L,L_1$ – натуральные числа; $a_1(\lambda),a_2(\lambda)$, $q_{N+1}(\lambda),\bar{q}_{ki}(\lambda)$ – полиномы; $v'(\lambda),g'(\lambda)$ – векторные полиномы; $\bar{x}(t)=[x_1(t),\ldots x_N(t)]'$; $\tilde{x}(t)=[x_1(t),\ldots x_{N+1}(t)]'$; $x_{n+1}(t),\ldots,x_{N+2}(t)$ – вспомогательные переменные.

Список литературы

1. Карпук, В. В. Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием / В. В.Карпук, А. В. Метельский // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. №~6. С.~19-28.

2. Метельский, А.В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором / А. В. Метельский // Дифференц. уравнения. 2013. Т.~49. №~11. С.~1436-1452.