Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по темам: «Ряды», «Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы. Элементы теории поля и операционного исчисления»

М и н с к 2 0 0 4

УДК 517.5
517.4
517.445
ББК 22.16

Настоящая работа содержит типовые расчеты по темам "Ряды", "Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы. Элементы теории поля и операционного исчисления". Типовые расчеты составлены в соответствии с программой 2002г. по курсу математики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Типовые расчеты содержат перечень вопросов теоретической подготовки, необходимых для выполнения работы. Следует предварительно изучить теоретические вопросы, а затем приступать к выполнению задания. Представлен список литературы и приводятся образцы решения одного из вариантов.

Составители:
Н. А. Микулик, Г. К. Воронович, И. Н. Катковская,
В. М. Климович, Г. Н. Рейзина, Н.И. Чепелев,
Т.И. Чепелева,А.Е.Руденок, А.В. Метельский

Рецензенты
И.И.Мелешко; В.И. Каскевич

РЯДЫ

Теоретические вопросы

1. Определение числового ряда. Сходимость и сумма ряда.
2. Основные свойства сходящихся рядов.
3. Необходимое условие сходимости ряда.
4. Теоремы сравнения рядов с положительными членами.
5. Признак Даламбера для сходимости ряда с положительными членами.
6. Радикальный признак Коши.
7. Интегральный признак Коши.
8. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости.
9. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
10. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса.
11. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
12. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Интервал сходимости.
13. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора.
14. Применение рядов в приближенных вычислениях.
15. Ряд Фурье. Теорема Дирихле. Разложение функций в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$.
16. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
17. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом.

Теоретические упражнения

1. Написать ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию, если сумма ряда равна a, первый член равен b. Для каких a и b это возможно?

2. Доказать, что если остатки ряда образуют геометрическую прогрессию, то члены ряда также образуют геометрическую прогрессию.

3. Доказать, что если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ $(a_n > 0,\, b_n > 0)$ также сходится.

4. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – расходящиеся числовые ряды. Может ли сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$? Приведите примеры.

5. Дан условно сходящийся ряд. Изменится ли сумма ряда, если его первые 1000 членов переставить, а порядок следования остальных членов оставить без изменения?

6. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | f_n(x) |$ также равномерно сходится на $[a,b]$.

7. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ – радиус сходимости R_2, то какой радиус сходимости R имеет ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$?

В задачах 1, 2 исследовать сходимость числового ряда.

В задаче 3 исследовать сходимость знакочередующегося ряда. В случае сходимости исследовать его на абсолютную и условную сходимость.

В задаче 4 найти область сходимости функционального ряда.

В задачах 5, 6 определить область сходимости степенных рядов.

В задаче 7 разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням x, используя разложения основных элементарных функций.

В задаче 8 найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$.

В задаче 9 вычислить с помощью ряда определенный интеграл с точностью до 0,001.

В задаче 10 найти с помощью ряда решение дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

В задаче 11 разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном промежутке.

В а р и а н т 1

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(n+1)}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n}(x+1)^n$;

7. $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$; 8. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;

9. $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; 10. $y'' + xy' + y = 0;$ 11. $y = 3x + \pi; [-\pi; \pi]$.

$$e(0) = 1, y'(0) = 2$$

В а р и а н т 2

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(\sqrt{2})^n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{n^2}$;

7. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$; 8. $f(x)=e^x,\ x_0=-2$;

9. $\int\limits_0^{0,1} 3x\cos 2x\,dx$; 10. $y'''+xy'+y=0$; 11. $y=\begin{cases} x, 0\le x\le 1\\ 1, 1<x\le 2.\end{cases}$

$y(0)=1, y'(0)=2,$

$y''(0)=1;$

Вариант 3

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3n+2}$; 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{x}{3^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n\sqrt{n}}$;

7. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; 8. $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$;

9. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{x}e^{-x}dx$; 10. $y''+xy'+y=0;$ 11. $y=2x^2+1\,[-1;1].$

$y(0)=1, y'(1)=1;$

Вариант 4

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$; 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{2^n}x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$;

7. $f(x)=x\,\mathrm{ch}x$; 8. $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=4$;

9. $\int\limits_0^{0,1}x\sin^2 x\,dx$; 10. $y'=xy+x^2+y^2$ 11. $y=\begin{cases} -x; -\pi\le x\le 0;\\ 0;\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

$y(0)=1;$

Вариант 5

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n2^{-nx}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n}(x-3)^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{n9^n}$;

7. $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$; 8. $f(x) = \cos^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

9. $\int\limits_0^{0,5} x\ln(1+x^2)xdx$; 10. $y' = x^2y^2 + y\sin x$

$$y(0) = \frac{1}{2};$$

11. $y = \begin{cases} x, -2 \le x \le 0; \\ 1,\ 0 < x \le 2. \end{cases}$

Вариант 6

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10n+1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$; 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$;

7. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; 8. $f(x) = e^{3x},\ x_0 = 1$;

9. $\int\limits_0^{0,2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; 10. $y' = e^{2x} + 2xy^2$; 11. $y = |x| - 2;\ [-1; 1]$.

$$y(0) = 1;$$

Вариант 7

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3^n(2n+1)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n+10}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

7. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$; 8. $f(x) = \operatorname{ctg} x, \;\; x_0 = \frac{\pi}{4}$;

9. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; 10. $y' = 2yx + ye^x$; $y(0) = 1$; 11. $y = \begin{cases} -1, -2 \le x \le 1; \\ x, -1 < x < 1; \\ 1, 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Вариант 8

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

7. $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$; 8. $f(x) = \operatorname{sh} x, \;\; x_0 = 1$;

9. $\int\limits_{0,2}^{0,5} \frac{\arcsin x}{x} dx$; 10. $y' = x + e^y$; $y(0) = 0$; 11. $y = \pi - 2x; [-\pi; \pi]$.

Вариант 9

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6n-4}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n \cdot \sin\frac{x^2}{5n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+5)^n}{n^3+1}$;

7. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; 8. $f(x)=\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9. $\int\limits_{0,1}^{0,5}\dfrac{\arcsin x}{x}dx$; 10. $y''+x^2y=0;$ 11. $y=2x^2-1; [0;1]$.

$y(0)=1,\ y'(0)=1;$

Вариант 10

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2n+5}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^{\ln x}}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^n$;

7. $f(x)=\ln(2+x)$; 8. $f(x)=\mathrm{tg}\,x$, $x_0=0$;

9. $\int\limits_{2}^{4}e^{\frac{1}{x}}dx$; 10. $y'=x^2-y^2$, 11. $y=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 2, & 1<x\le 2.\end{cases}$

$y(0)=-1;$

Вариант 11

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{1+n^2}\right)^{n^2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+1}{n!}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2x+1)^2 3^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{(n+1)}}$;

7. $f(x)=\cos(x+\alpha)$; 8. $f(x)=x\sqrt{x}$, $x_0=3$;

9. $\int\limits_{0,5}^{1}\dfrac{\mathrm{sh}x}{x}dx$; 10. $y''+y'+x^2y=0$, 11. $y=4-3x^2; [-\pi;\pi]$.

$y(0)=1,\ y'(0)=3;$

Вариант 12

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1+n^2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n!}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2x+1)^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+4)^n}{n3^n}$;

7. $f(x) = x\sin x^2$; 8. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 2$;

9. $\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x dx$; 10. $xy'' + y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; 11. $y = \begin{cases} -2; -\pi \le x < 0, \\ 2; 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 13

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

7. $f(x) = \frac{x^6}{1-x}$; 8. $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x_0 = 1$;

9. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^2}dx$; 10. $xy'' + xy + y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$; 11. $y = \begin{cases} 1, -2 \le x \le -1, \\ x^2, -1 < x < 1, \\ 1, 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Вариант 14

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)^2}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x+2)^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n+1)\left(\frac{x-2}{4}\right)^n$;

7. $f(x) = \cos^2 x$; 8. $f(x) = \frac{x}{3-x}$, $x_0 = 1$;

9. $\int\limits_{0,3}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$; 10. $xy'' + y' + xy = 0$, 11. $y = \begin{cases} x^2; \ 0 \le x \le 1; \\ 0, \ 1 < x \le 2. \end{cases}$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

Вариант 15.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{n^2+1}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n5^n}$;

7. $f(x) = xe^{-x^2}$; 8. $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = 2$;

9. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x} \cos x dx$; 10. $xy'' + xy' + y = 0$, 11. $y = 4x + 3; [-2;2]$.

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

Вариант 16

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)^2} x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$;

7. $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2}$; 8. $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

9. $\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$; 10. $y' = x^2 + 2y^2$,

$y(0)=1,\ y'(0)=1$;

11. $y = \begin{cases} 1,\ 0 \le x \le 1, \\ 2^x,\ 1 < x \le 2. \end{cases}$

Вариант 17

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n\left(n^2+1\right)}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta,\ |r|<1$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{n^2+1}$; 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot \ln^3 n}$;

7. $f(x) = x^2 + e^{2x}$; 8. $f(x) = \mathrm{tg}x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

9. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^4} dx$; 10. $yy'' + y' + y = 0$, 11. $y = 3^x; [-\pi; \pi]$.

$y(0)=1,\ y'(0)=1$;

Вариант 18

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+2}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{10^n}$;

7. $f(x) = (1+x)\cos x$; 8. $f(x) = \ln x^2,\ x_0 = 1$;

9. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x} e^{2x} dx$; 10. $xy'' + y' + y = 0$, 11. $y = \begin{cases} x; -1 \le x \le 0, \\ -x; 0 < x \le 1. \end{cases}$

$y(0)=1, y'(0)=1$;

Вариант 19

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+n^2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 3^n (x-3)^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+1)^n}$;

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $x_0 = 0$;

9. $\int\limits_{0,2}^{0,5} \frac{e^x}{x} dx$; 10. $xy'' + y \sin x = 0,$ 11. $y = 2 - 3x; [-1; 1].$

$y(0) = 1,\ y'(0) = 1;$

Вариант 20

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n}\right)^{2n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 13}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+3n}{n^2+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2^n} x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+1)^n}$;

7. $f(x) = \arcsin x$; 8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$, $x_0 = 2$;

9. $\int\limits_{0}^{0,2} x^{10} \sin x dx$; 10. $xy'' + y^2 = 0,$ 11. $y = \begin{cases} 1-x; & 0 \le x \le 1 \\ 0; & 1 < x \le 2. \end{cases}$

$y(0) = 1,\ y'(0) = 1;$

Вариант 21

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+4}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{(n-1)^n}(x-3)^n$;

7. $f(x)=\operatorname{arctg} x$; 8. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x_0=1$;

9. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \dfrac{e^x}{x^2}dx$; 10. $xy''+yy'+x^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$; 11. $y=3^{x-1}$; $[-2;2]$.

Вариант 22

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n^4-1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{3n(n+2)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{(1+x)^{2n}}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n 3^n}{(n+1)(n+2)}$;

7. $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$; 8. $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$, $x_0=1$;

9. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \dfrac{\cos x}{x}dx$; 10. $y''+xy=0$, $y(0)=1, y'(0)=2$; 11. $y=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 0<x\le 2.\end{cases}$

Вариант 23

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^3}{(3n)!}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+2n}{3n^2+4}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(a^2+x^2\right)^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+8)^n}{3n+2}$;

7. $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$; 8. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x_0=1$;

9. $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{dx}{1+x^2}$; 10. $y'=e^{\sin x}$, $y(0)=0$; 11. $y=2^{-x};[-2;2]$.

Вариант 24

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{5^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{2^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{3^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{2n!}x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n(n+1)}$;

7. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$; 8. $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$, $x_0=2$;

9. $\int\limits_0^{0,2}\sqrt{x}\cdot\cos x\,dx$; 10. $xy''-xy'+x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$; 11. $y=\begin{cases}2x-1; -1\le x\le 0,\\ 2x+1;\ 0<x\le 1.\end{cases}$

Вариант 25

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n4^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+2n}{2+3n}\right)^2$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}3^n}{n^3+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n+3}x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x-1)^n}{n+1}$;

7. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$; 8. $f(x)=xe^{-x}$, $x_0=1$;

9. $\int\limits_{0,2}^{0,5}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}dx$; 10. $y'=x^2+xy+y^2$, $y(0)=1$; 11. $y=1-|x|$; $[-1;1]$.

Вариант 26

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n+4}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{n+3}$;

7. $f(x) = x\sqrt[5]{1+x}$; 8. $f(x) = \sin 2x, \; x_0 = \frac{\pi}{4}$;

9. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x\left(1-x^2\right)}dx$; 10. $xy'' + y = 0$, 11 $y = e^{-x}; [-2;\, 2]$.

$y(1) = 2, \; y'(1) = 2$;

Вариант 27

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^{\frac{n}{2}}}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{5^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n 2^{n+1}}{2n-3}$;

7. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$; 8. $f(x) = \sqrt{1+x}, \; x_0 = 2$;

9. $\int\limits_{0,1}^{0,4} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; 10. $xy'' - xy + 1 = 0$, 11. $y = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 3-x, & 1 < x \le 3. \end{cases}$

$y(0) = 1, \; y'(0) = 1$;

Вариант 28

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)4^n}{n+1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{4^n}$;   5. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n$;   6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3+3}$;

7. $f(x)=(x-1)e^x$;   8. $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x_0=1$;

9. $\int_0^1\cos\sqrt{x}\,dx$;   10. $y'=2x+y+y^2$, $y(0)=1$;   11. $y=3x^2+x;[-3;3]$.

Вариант 29

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+1}$;   2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)!}$;   3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{8^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{3}\right)^n$;   5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;   6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n-1}+1}$;

7. $f(x)=x\cos 2x$;   8. $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $x_0=2$;

9. $\int_{0,5}^{0,6}\frac{\sin x}{x}dx$;   10. $y''-y\cos x=0$, $y(1)=2, y'(1)=2$;   11. $y=\begin{cases}0, -2\le x\le -1;\\ 1, -1<x<1;\\ 0,\ 1\le x\le 2.\end{cases}$

Вариант 30

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$;   2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n}$;   3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}\,n^2}$;   5. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(n+3)^n$;   6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$;

7. $f(x)=\cos x^2$;   8. $f(x)=2+\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9. $\int\limits_{0,1}^{0,4} \frac{\sin x}{x} dx$; 10. $y'' - y\cos x = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$ 11. $y = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & 2 < x \le 4. \end{cases}$

Образец выполнения варианта типового расчета по теме «Ряды»

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 1}{2n^2 + 5n + 3} \right)^{n/2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{nx}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 7) $y = x^2 e^{4x^2}$; 8) $y = 2^n, \quad x_0 = 1$;

9) $\int\limits_{0,1}^{0,4} e^{-x^2} dx$; 10) $y'' = xy';\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$ 11) $y = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi] \end{cases}$.

Решение

1). Исследуем на сходимость ряд с помощью признака Даламбера.

$$a_n = \frac{n+1}{n \cdot 3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)3^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2) \cdot n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1} (n+1)} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} < 1 -$$

ряд сходится.

Ответ: сходится.

2). Исследуем на сходимость ряд с помощью радикального признака Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+4n+1}{2n^2+5n+3}\right)^{\frac{n}{2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+1}{2n^2+5n+3}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}>1-$$

ряд расходится.

Ответ: расходится.

3). Это знакочередующийся ряд. Проверим, выполняются ли условия теоремы Лейбница.

а) $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>\cdots;\qquad a_n=\dfrac{n}{3n+1};\quad \dfrac{1}{4};\dfrac{2}{7};\dfrac{3}{10}\cdots$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1}=\dfrac{1}{3}\neq 0.$

Условия теоремы Лейбница не выполняются, следовательно, ряд расходится.

Ответ: расходится.

4). Найдем область сходимости ряда, используя признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}e^x=e^x\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2=e^x<1;$$

$$e^x<e^0,\quad x<0.$$

Для $x\in(-\infty,0)$ ряд сходится. Проверим ряд на сходимость в точке $x=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^0=\sum_{n=1}^{\infty}n^2.$$

Это знакоположительный ряд. Он расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Область сходимости ряда $x \in (-\infty, 0)$.

Ответ: $x \in (-\infty, 0)$.

5). Исследуем ряд на сходимость с использованием признака Даламбера.

$$u_n(x) = \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}; \qquad u_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}(x+1)^n}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)n}{n+1}\right| = \frac{1}{2}|x+1| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} =$$
$$= \frac{1}{2}|x+1| < 1;$$

$$|x+1| < 2; \qquad -2 < x+1 < 2; \qquad -3 < x < 1.$$

Для $x \in (-3; 1)$ ряд сходится. Проверим ряд на сходимость на концах интервала.

Пусть $x = -3$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Это знакочередующийся ряд, по признаку Лейбница сходится.

Пусть $x = 1$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, он расходится.

Ряд сходится при $x \in [-3; 1)$.

Ответ: $x \in [-3; 1)$.

6). Исследуем ряд на сходимость с помощью радикального признака Коши.

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=|x|<1.$$

При $x\in(-1,1)$ ряд сходится. Проверим ряд на сходимость на концах интервала.

Пусть $x=-1$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Это знакочередующийся ряд, по теореме Лейбница сходится.

Пусть x = 1, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Это обобщенный гармонический ряд $(p=2>1)$, он сходится. Область сходимости $x\in[-1,1]$.

Ответ: $x\in[-1,1]$.

7). Запишем разложение в ряд Тейлора функции $y=e^u$.

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}.$$

Запишем представление функции e^{4x^2} в виде ряда

$$e^{4x^2}=1+\frac{4x^2}{1!}+\frac{16x^4}{2!}+\cdots+\frac{(4x^2)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^{2n}}{n!}.$$

Умножим полученный ряд на x^2 и получим искомый ряд

$$x^2e^{4x^2}=x^2+\frac{4x^4}{1!}+\frac{16x^6}{2!}+\cdots+\frac{4^n x^{2n+2}}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^{2(n+1)}}{n!}.$$

$$\text{Ответ: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2(n+1)}}{n!}.$$

8). Ряд Тейлора для функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Найдем значения функции $y = 2^x$ и ее производных в точке $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = f(1) = 2;$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2; \qquad f'(1) = 2\ln 2;$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2; \qquad f''(1) = 2\ln^2 2;$$

...

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2; \qquad f^{(n)}(1) = 2\ln^n 2.$$

Подставим найденные значения в ряд:

$$2^x = 2 + \frac{2\ln 2}{1!}(x - 1) + \frac{2\ln^2 2}{2!}(x - 1)^2 + \cdots + \frac{2\ln^n 2}{n!}(x - 1)^n + \cdots$$

$$\text{Ответ: } 2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\ln^n 2}{n!}(x - 1)^n.$$

9). Запишем разложение подынтегральной функции в ряд

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!};$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

$$\int_{0,1}^{0,4} e^{-x^2}dx = \int_{0,1}^{0,4}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Bigg|_{0,1}^{0,4} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(0,4)^{2n+1}}{n!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(0,1)^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Так как полученные ряды являются знакочередующимися, то остаток по абсолютной величине не превосходит суммы абсолютных величин первых отбрасываемых членов обоих рядов.

$$\int_{0,1}^{0,4} e^{-x^2}\,dx \approx 0,4 - \frac{0,4^3}{3} + \frac{0,4^5}{2!\,5} - 0,1 + \frac{0,1^3}{3} = 0,3 - \frac{0,064}{3} + 0,001 - \frac{0,001}{3} =$$

$$= 0,301 - 0,021 = 0,280.$$

Ответ: $\int\limits_{0,1}^{0,4} e^{-x^2}\,dx \approx 0,280.$

10). Решение дифференциального уравнения ищем в виде ряда Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \cdots + \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

По условию задачи $x_0 = 0;$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 2.$ Найдем производные более высоких порядков и вычислим их при $x_0 = 0.$

$$\begin{aligned}
&y'' = xy'; && y''(0) = 0;\\
&y''' = y' + xy''; && y'''(0) = 2;\\
&y^{\mathrm{IV}} = 2y'' + xy'''; && y^{\mathrm{IV}}(0) = 0;\\
&y^{\mathrm{V}} = 3y''' + xy^{\mathrm{IV}}; && y^{\mathrm{V}}(0) = 6.
\end{aligned}$$

Подставим в ряд:

$$y(x)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{2}{3!}x^3+\dots+\frac{6}{5!}x^5+\dots$$

Ответ: $y(x)=1+2x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{20}+\dots$

11). По условию дана 2π – периодическая функция. Запишем для нее ряд Фурье:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx)\cdot$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx=\left|\begin{array}{c}x=u,\quad du=dx;\\ dv=\cos nx\,dx;\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x}{n}\sin nx\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\left.\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\right|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\;dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\;dx=\left|\begin{array}{c}x=u,\quad dx=du;\\ dv=\sin nx\;dx;\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x}{n}\cos nx\right|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\;dx\right)=-\frac{1}{n}(-1)^n+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в ряд:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \right)$.

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Перечень вопросов для самоподготовки

1. Интеграл по фигуре. Основные понятия и определения.
2. Геометрический и механический смысл интегралов по фигуре.
3. Основные свойства интегралов по фигуре.
4. Вычисление двойных интегралов в декартовых прямоугольных координатах.
5. Вычисление тройных интегралов в декартовых прямоугольных координатах.
6. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах.
7. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических и сферических координатах.
8. Криволинейные интегралы первого и второго рода, их основные свойства и физический смысл.
9. Поверхностные интегралы первого и второго рода, их основные свойства и физический смысл.
10. Зависимость между криволинейными интегралами первого и второго рода.
11. Зависимость между поверхностными интегралами первого и второго рода.

12. Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода.

13. Вычисление поверхностных интегралов первого и второго рода.

14. Формула Грина.

15. Применение формулы Грина к вычислению площадей.

16. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

17. Формула Остроградского.

18. Формула Стокса.

19. Векторное поле. Векторные линии.

20. Поток вектора через поверхность.

21. Дивергенция векторного поля.

22. Формула Остроградского в векторной форме.

23. Соленоидальное векторное поле и его свойства.

24. Линейный интеграл в векторном поле. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля.

25. Ротор и вихрь векторного поля и их физический смысл.

26. Формула Стокса в векторной форме.

27. Потенциальное векторное поле. Вычисление линейного интеграла в случае потенциального поля.

28. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.

29.Операционное исчисление. Основные определения. Свойства оригиналов.

30. Свойства изображений.

31. Дифференцирование изображения.

32. Интегрирование изображения.

33. Теорема подобия.

34. Теорема запаздывания (сдвига).

35. Теорема смещения (затухания).

36. Теорема опережения (упреждения).

37. Изображение периодических оригиналов.

38. Определение и свойства свертки функций.

39. Теорема о произведении изображений (теорема Бореля).

40. Дифференцирование оригиналов.

41. Интегрирование оригиналов.

42. Обратное преобразование Лапласа. Теорема обращения. Формулы обращения.

43. Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

44. Формулы Дюамеля и их применение при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

45. Таблица основных операционных соотношений.

Задания

Вариант 1

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = a\sqrt{3}\sin\varphi$; $r = a\cos\varphi$.

2. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a$; $x = 0$; $y = 0$, $z = 0$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L y^2 dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками $A(0,1)$ и $B(1,e)$.

4. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_c y^2 dx + (x+y)^2 dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(a,0); B(a,a); C(0,a)$.

5. Пользуясь формулой Остроградского, вычислить $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями

$$x = 0; y = 0; z = 0; x + 2y + z = 1.$$

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' - 2y' + y = e^t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} \dot{x} - x - 2y = t; \\ \dot{y} - 2x - y = t, \end{cases}$ где $x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

Вариант 2

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$; $y = e^{2x}$; $x = 1$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2az = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L x^2 dl$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Выяснить, будет ли интеграл

$$\int\limits_{AB} \left(2xy - 5y^3\right)dx + \left(x^2 - 15xy^2 + 6y\right)dy$$

зависеть от пути интегрирования и вычислить его по линии AB, соединяющей точки $A(0{,}0)$, $B(2{,}2)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S zdxdy + xdxdz + ydydz$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x - y + z = 1$ и координатными плоскостями.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(3x^2y^2z + 3x^2\right)\vec{i} + 2x^3yz\vec{j} + \left(x^3y^3 + 3z^2\right)\vec{k}\,.$$

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $\dot{y} + y = \sin t, \quad y(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - 2x \\ z' = 2x - y, \end{cases}$,

где $x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0.$

Вариант 3

1. Изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде двойного интеграла $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{1/3(4-x)} dy$. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Найти массу дуги кривой $y = \ln x \, (\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{2})$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

4. Вычислить $\int\limits_L ydx - (y + x^2)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью $0x$, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

5. Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_{S} xzdxdy + xzdydz + yzdxdz$, где S – внешняя сторона поверхности, образуемой плоскостями $x=0; y=\ 0; z=0;\ x+y+2z=1$.

6. Найти дивергенцию градиента функции

$$u = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y^2z^2 .$$

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y' + y = t, \quad y(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x'' + 2y = 0; \\ y'' - 2x = 0, \end{cases}$,

где $x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ \ y(0) = y'(0) = 1.$

Вариант 4

1. Найти массу половины круга R с центром в начале координат, лежащей в области $y \geq 0$, если плотность равна квадрату полярного радиуса.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2;\ y = \dfrac{x^2}{2}; x = 0,\ z = 0$.

3. Вычислить $\int\limits_{L} (3x - 5y + z + 2)dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(4,1,6)$ и $B(5,3,8)$.

4. Поле образовано силой $\vec{F} = y\vec{i} + a\vec{j}$. Определить работу при перемещении массы m по контуру, образованному осями

координат и эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$, лежащим в первой четверти.

5. Найти площадь поверхности части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

6. Найти $\operatorname{div}[\vec{u}, \vec{v}]$, где $\vec{u} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $\vec{v} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y' + y = \cos t, \quad y(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x' - x + 2y = 0, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t, \end{cases}$

где $x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 5

1. Изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде двойного интеграла $\int_0^1 dy \int_0^y dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} dx$. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + 4y^2 + z = 1; z = 0.$$

3. Вычислить массу дуги кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точки.

4. Доказать, что $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathrm{tg}\, y dx + x \sec^2 y dy$ не зависит от пути интегрирования. Вычислить его, если $A\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Найти массу полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ координатными плоскостями в первом октанте.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y' + y = t,\ y(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x'' - 2y = 0, \\ y'' - 2x = 0, \end{cases}$

где $x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\quad y(0) = y'(0) = 0.$

Вариант 6

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $ay = x^2 - 2ax;\ y = x$.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = b$, если плотность в каждой точке пропорциональна ординате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L xyzdl$,

где L – дуга кривой $x = \frac{1}{2}t^2;\ y = t;\ z = \frac{8}{3}\sqrt{t^3}$ $(0 \le t \le 1)$.

4. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при перемещении массы m из начала координат в точку $A(1,1)$ по параболе $y = x^2$.

5. С помощью формулы Стокса показать, что $\oint\limits_c yzdz + xzdy + xydz$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить, вычислив интеграл по контуру треугольника с вершинами $O(0,0,0); A(1,1,0); B(1,1,1)$.

6. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y' - y = \sin t, \quad y(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x' - x + 2y = 0, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t, \end{cases}$

где $x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\quad y(0) = -\frac{1}{2},\ y'(0) = 0.$

В а р и а н т 7

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$ и $y^2 = 4(1 - x)$ (вне параболы).

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 3z$, если плотность в каждой точке равна аппликате точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по отрезку прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$ от точки $A(0,-2)$ до точки $B(4,0)$.

4. Вычислить $\int\limits_L xydx$ по дуге синусоиды $y = \sin x$ от точки $x = \pi$ до $x = 0$.

5. Вычислить площадь части поверхности $x + 6y + 2z = 12$, лежащей в первом октанте.

6. Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' - y' = 10e^{2t}$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases}$

где $x(0) = y(0) = 1$.

Вариант 8

1. Найти массу фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $x + y = 2$, если плотность ее в каждой точке равна ординате этой точки.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2$; $y = x$; $y = x\sqrt{3}$ и расположенного в первом октанте.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L – кривая,

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t), \\ y &= a(\sin t - t\cos t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу

$$dz = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy.$$

5. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ x = 4;\ y = 4;\ z = 4$.

Вычислить непосредственно и с помощью формулы Остроградского.

6. Найти $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}\vec{u}})$, где $u = \sin(x + y + z)$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' - y' = t, \quad y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases}$

где $x(0) = 3, \quad y(0) = 15$.

Вариант 9

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1/2(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2=0; \quad z=h$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{\cos^2 x dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$,

где L – дуга кривой $y=\sin x \quad (0 \le x \le \pi)$.

4. Доказать, что выражение $3x^2e^y dx+(x^3e^y+1)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции. Найти эту функцию.

5. Вычислить $\iint\limits_S (x^2+z^2)dydz$, где S – внешняя сторона поверхности $x=\sqrt{9-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0; z=2$.

6. Найти $\mathrm{rot}\left[\bar{r}, \bar{a}\right]$, где $\vec{r}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}; \;\; \vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''+y'=1, \quad y(0)=y'(0)=0$.

8 $\begin{cases} x''+y'+x=e^t, \\ x'+y''=1, \end{cases}$

где $x(0)=1, x'(0)=0, \quad y(0)=-1, y'(0)=2$

В а р и а н т 10

1. Найти массу фигуры, ограниченной параболой $y=1-x^2$ и осью Ox, если плотность $\rho(x,y)=x^2y^2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2x; \quad z=x^2+y^2; \quad z=0.$$

3. Вычислить $\int\limits_L x\,dl$ по параболе $y=x^2$ от точки $(1,1)$ до точки $(2,4)$.

4. Вычислить $\oint\limits_C 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy$, применяя формулу Грина, где C – контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, пробегаемый против часовой стрелки.

5. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$, где S – поверхность конуса $z^2=x^2+y^2$, ограниченного плоскостью $z=h; \quad z=0$.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}+z^2\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''+y=3, \quad y(0)=y'(0)=0$.

8. $\begin{cases} x'=-2x-2y-4z, \\ y'=-2x+y-2z, \\ z'=5x+2y+7z, \end{cases}$,

где $x(0)=1, \quad y(0)=2, \quad z(0)=-1.$

В а р и а н т 11

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = a(1-\cos\varphi)$; $r = a\cos\varphi$.

2. Определить массу сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2+z^2=4a^2$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0, -2)$; $B(4, 0)$.

4. Показать, что $\oint\limits_c ydx+(x+y)dy$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверьте, вычислив интеграл по контуру фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$; $y=4$.

5. Вычислить массу поверхности $z=x$, ограниченной плоскостями $x+y=1$; $y=0$; $x=0$, если поверхностная плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}=y^2\vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x=4\cos t$; $y=\sin t$ и отрезка оси Ox.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''-4y=-2\cos 2t,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=4$.

8. $\begin{cases} x'+3x-4y=9e^{2t}, \\ 2x'+y'-3y=3e^{2t}, \end{cases}$

где $x(0) = 2, \quad y(0) = 0$.

Вариант 12

1. Вычислить $\iint\limits_D (x^2 + 2xy)dxdy$, где область D ограничена прямыми $y = x; \quad y = 2x; \quad x + y = 6$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

3. Вычислить массу дуги кривой

$$x = \ln(1 + t^2); \quad y = 2\operatorname{arctg} t - t \text{ от } t = 0 \text{ до } t = 1,$$

если плотность равна $\dfrac{y}{e^x}$.

4. Поле образовано силой $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$. Вычислить работу по перемещению единицы массы по окружности $x = a\cos t; \quad y = a\sin t$.

5. Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0; z = 1$, если поверхностная плотность пропорциональна $x^2 + y^2$.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F} = x^2 y^2 \vec{i} + y^3 z\vec{j} + xz^3 \vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' - 9y = 2 - t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$.

8. $\begin{cases} x'' + y' + y = e^t - t \\ x' - x + 2y'' - y = -e^{-t} \end{cases}$

где $x(0)=1,\ x'(0)=2,\ y(0)=y'(0)=0.$

В а р и а н т 13

1. Двойным интегрированием найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2;\quad z=0;\quad z=y$.

2. Вычислить $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz$, где V – область, ограниченная цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $x+z=\frac{\pi}{2};\ y=0;\ z=0.$

3. Найти массу дуги $y=1-\ln x$, если плотность в каждой ее точке обратно пропорциональна абсциссе этой точки: $1\le x\le\sqrt{3}$.

4. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C -x^2ydx+xy^2dy$, где C – окружность $x^2+y^2=a^2$ (в положительном направлении).

5. Найти площадь поверхности $z=2-\dfrac{x^2+y^2}{2}$, расположенной над плоскостью xOy.

6. Найти поток вектора $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через часть плоскости $x+y+z=a$, расположенной в первом октанте.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''+y=\sin 2x,\quad y(0)=y'(0)=0$.

8. $\begin{cases} x''-y'=1, \\ y''-x'=0 \end{cases}$

где $x(0)=1, \quad x'(0)=0, \; y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

Вариант 14

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4+x; \quad x+3y=0$.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2=2ax; \quad x^2+y^2=ax; \quad z=0; \quad y=0$.

3. Найти массу дуги винтовой линии $x=4a\cos t, \quad y=4a\sin t, \quad z=3at$, если плотность ее в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки; $0\le t\le 2\pi$.

4. Вычислить $\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{x}{(x+y)^2}dx+\frac{2x+y}{(x+y)^2}dy$.

5. Используя формулу Остроградского, вычислить

$$\iint\limits_S (x+y)dydz+(y-x)dxdz+zdxdy$$

через поверхность шара $x^2+y^2+z^2=1$.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F}=3x^2y^2\vec{i}+2y^3z\vec{j}-z^2x^2\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'''+y''=\cos t, \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

8. $\begin{cases} x''+y'+x=e^t, \\ x'+y''=1, \end{cases}$

где $x(0)=1, \; x'(0)=0, \; y(0)=-1, \; y'(0)=2.$

В а р и а н т 15

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = a^2$; $y = x$; $y = 2a$ $(a > 0)$.

2. Определить массу полушара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $z = 0$, если плотность его в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \sin^3 x dl$, где L – дуга кривой $y = \ln \sin x$ от $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Вычислить $\oint\limits_C (e^{2x} - y^2)dx + (1 - 2xy)dy$, где C – треугольник, сторонами которого являются прямые $y = 2; x = 0; y = x$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5. Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

6. Найти $\operatorname{div}\left[\vec{U}, \vec{V}\right]$, где $\vec{U} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}$; $\vec{V} = 3y\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $2y' + 3y = t^2$, $y(0) = -1$.

8. $\begin{cases} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0, \end{cases}$

где $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$

Вариант 16

1. Вычислить $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$, где область D – кольцо между окружностями радиусов e и 1 с центром в начале координат.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x+2y+z-6=0;\ x=0;\ y=0;\ z=0,$ если плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \sin^2 x\cos^3 x dl$,

где L – дуга кривой $y=\ln\cos x$ $(0\le x\le \frac{\pi}{4})$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz=\sin(x+y)(dx+dy)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy$, где S – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0;\ y=b.$

6. Найти циркуляцию поля $\vec{F}=y\vec{i}$ по окружности $x=b\cos t;\ y=b+b\sin t$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'+ay=b,\quad y(0)=0$.

8. $\begin{cases} x''+y'=\operatorname{sh}t-\sin t-t, \\ y''+x'=\operatorname{ch}t-\cos t, \end{cases}$

где $x(0)=0,\ x'(0)=2,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$

Вариант 17

1. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 = ax$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2;\ 3x + 2y = 12;\ z = 0;\ y = 0.$$

3. Вычислить массу одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t),$ если плотность в каждой точке кривой равна ординате точки.

4. Вычислить $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdx$ от точки $A(0,\ 0)$ до точки B(1, 2) по кривой $y = 2\sqrt{x}$.

5. Вычислить с помощью формулы Остроградского $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, где S – внешняя поверхность тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + 2az = a^2; x = 0; y = 0; z = 0.$

6. Найти $\operatorname{rot}[\vec{r}, \vec{a}]$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};\quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' - y' - 6y = 2,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x'' - x' + y = \cos t, \\ x' - y'' - y' = 2e^t + \sin t, \end{cases}$

где $x(0) = 2,\ x'(0) = 1,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Вариант 18

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x;\ x - y = 1;\ x = 3.$

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 4a^2 - 3ax;\quad y^2 = ax;\quad z = \pm h.$

3. Найти массу дуги полуокружности $x = a\cos t;\quad y = a\sin t,$ если плотность ее в каждой точке равна $x^2 y.$

4. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении массы m вдоль дуги $y = x^3$ от точки O (0, 0) до точки C (1, 1).

5. Вычислить $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона части сферы, расположенной в первом октанте.

6. Доказать, что поле $\vec{F} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ является потенциальным.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $2x' + 3x = t^2,\quad x(0) = -1.$

8. $\begin{cases} x'' + y'' = 0, \\ x' + y = 1 + e^t, \end{cases}$

где $x(0) = x'(0) = 0,\quad y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1.$

Вариант 19

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} dy$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=x^2+y^2$.

3. Найти массу винтовой линии

$$x=a\cos t;\quad y=a\sin t;\quad z=bt\quad (0\le t\le 2\pi),$$

если плотность в каждой ее точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

4. Вычислить $\int\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки A (2, 3) и B (3, 5).

5. Вычислить площадь поверхности той части плоскости $x+2y+z=4$, которая расположена в первом октанте.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F}=y^3z^2\vec{i}+4xz^2\vec{j}-xy^2\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''+y=\sin t,\qquad y(0)=0,\ y'(0)=0.$

8. $\begin{cases} x''-x'+9x-y''-y'-3y=0, \\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0, \end{cases}$

где $y(0)=y'(0)=0,\quad x(0)=x'(0)=1.$

Вариант 20

1. С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $y = 2$.

2. Вычислить объем той части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

3. Найти массу дуги кривой $x = t; y = \frac{1}{2}t^2$ $(0 \le t \le 1)$, если плотность равна $\sqrt{2y}$.

4. Вычислить $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, где L – отрезок, соединяющий точки A (1, 1, 1) и B (2, 3, 4).

5. Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

6. Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через плоскость $x + y + z = a$, расположенную в первом октанте.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' + y = te^t$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x' - 2y + 5x = e^t, \\ y' - x + 6y = e^{-2t}, \end{cases}$

где $x(0) = 1, \quad y(0) = -1$.

В а р и а н т 21

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dx \int\limits_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2=0;\quad x^2+y^2+z^2=a^2$ (внутри конуса).

3. Найти массу дуги параболы $y=\dfrac{x^2}{2}$, лежащей между точками $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ и $(2,2)$, если плотность равна $\dfrac{y}{x}$.

4. Вычислить $\int\limits_{AB} \cos y\,dx - 2x\sin 2y$, если $A\left(1,\dfrac{\pi}{6}\right);\quad B\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. С помощью формулы Остроградского вычислить $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона куба $0\le x\le a;\quad 0\le y\le a;\quad 0\le z\le a$.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, если $\vec{a}=x^3z\vec{i}+y^3x\vec{j}+z^3x\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''+y=e^t;\quad y(0)=y'(0)=0.$

8. $\begin{cases} 4x'-y'+3x=\sin t, \\ x'+y=\cos t, \end{cases}$

где $x(0)=2,\quad y(0)=-1.$

Вариант 22

1. Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где D – круг радиуса r с центром в начале координат.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+4y^2+z=1;\quad z=0$.

3. Вычислить массу дуги эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, лежащей в первой четверти, если плотность $\rho(x,y)=xy$.

4. Вычислить $\int\limits_L \dfrac{x\,dx}{y}+\dfrac{dy}{y+a}$ по отрезку циклоиды $x=a(t-\sin t);\quad y=a(1-\cos t)$ от точки $t_1=\dfrac{\pi}{6}$ до точки $t_2=\dfrac{\pi}{3}$.

5. Вычислить $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$ по верхней стороне части плоскости $x+y+z=a$, лежащей в первом октанте.

6. Доказать, что поле $\vec{F}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ является потенциальным.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''-2y'+3y=1;\quad y(0)=y'(0)=0.$

8. $\begin{cases} x'=y+z,\\ y'=z+x,\\ z'=x+y, \end{cases}$

где $x(0)=3,\quad y(0)=-1,\quad z(0)=2.$

Вариант 23

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x+z=a$; $x=0$; $y=0$; $y=a$; $z=0$, если плотность его в каждой точке равна x^2+y^2.

3. Вычислить $\int\limits_L x\,dl$, где L – отрезок прямой от точки $(0,0)$ до точки $(1,2)$.

4. Вычислить работу силы $\vec{F}=y\vec{i}+(y-x)\vec{j}$ при перемещении единицы массы по дуге параболы $y=a-\dfrac{x^2}{a}$ из точки $A(-a,0)$ к точке $B(0,a)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2=\dfrac{R^2}{3}z^2$; $0\le x\le\sqrt{3}$.

6. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a}=x^3\vec{i}-y^3\vec{i}$ вдоль первой четверти окружности $x=3\cos t$; $y=3\sin t$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''+y=t^2$; $y(0)=y'(0)=0$.

8. $\begin{cases} x'=8y, \\ y'=-2z, \\ z'=2x+8y-2z, \end{cases}$

где $x(0)=2$, $y(0)=0$, $z(0)=-1$.

Вариант 24

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x; \quad x^2 + y^2 = 2x; \quad y = 0$.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 2a; \quad x + z = a; \quad y^2 = ax; \quad y = 0 \quad (y > 0)$, если плотность в каждой его точке равна ординате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L y\,dl$, где L – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t); \quad y = 3(1 - \cos t)$.

4. Вычислить $\oint\limits_c x\,dy + y\,dx$, где C – треугольник со сторонами $x = 0; \quad y = 0; \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5. Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2 + y + z^2 - 4\right) ds$, где S – часть поверхности $2y = 9 - x^2 - z^2$, отсеченная плоскостью $y = 0 \quad (y > 0)$.

6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ координатными плоскостями в первом октанте.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' + y = \sin t; \quad y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases}$

где $x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Вариант 25

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2; \quad y = x^2$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}; \quad x^2 + z^2 = a^2; \quad z = 0$, если плотность в каждой его точке равна $x^2 + y^2$.

3. Вычислить $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t; \quad y = a\sin t; \quad z = bt \ (0 \le t \le 2\pi)$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz = e^{xy}\left((1 + xy)dx + x^2 dy\right)$.

5. Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$, где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y^2\vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x = a\cos t; \quad y = b\sin t$ и отрезка оси Ox.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' - y = 8te^t; \quad y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x'' - 8x' + \sqrt{6}y' = 0 \\ -\sqrt{6}x' + y'' + 2y = 0 \end{cases}$

где $x(0) = 1, \quad x(0) = y'(0) = y(0) = 0.$

В а р и а н т 26

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{0} dx$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $x + y = 4$ $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

3. Вычислить $\int\limits_{L} \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

4. Поле образовано силой $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (2xy - 8)\vec{j}$. Найти работу поля при перемещении материальной точки массы m по дуге окружности от точки $(a,\ 0)$ до точки $(0,\ a)$.

5. Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$; $z = 1$, если поверхностная плотность пропорциональна $x^2 + y^2$.

6. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = y\vec{i}$ по контуру окружности $x = 2\cos t$; $y = 2 + 2\sin t$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' - 2y - 3y = e^{3t}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} y'' + x' + y = e^{t}, \\ y' + x'' = 1, \end{cases}$

где $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$.

Вариант 27

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2(1 + \cos\varphi)$; $\quad r = 2\cos\varphi$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$; $\quad y + z = 2$; $\quad z = 0$.

3. Найти массу дуги кривой $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ от точки $O(0,0)$ до точки $B\left(4, \dfrac{16}{3}\right)$, если плотность пропорциональна длине дуги.

4. Вычислить $\displaystyle\int_L \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $x = a\cos t$; $\quad y = a\sin t$ (в положительном направлении).

5. С помощью формулы Остроградского вычислить $\displaystyle\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy$, где S – внешняя сторона конуса $x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{h^2}z^2$; $\quad 0 \le z \le h$.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$ если $\vec{F} = y^2 z\vec{i} + z^2 x\vec{j} + x^2 y\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

8. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases}$

где $x(0) = y(0) = 1$.

Вариант 28

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $ax = y^2 - 2ay$; $x + y = 0$.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$, если плотность его в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L xy\,dl$ по периметру прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x = 4$; $y = 2$.

4. Вычислить $\int\limits_L (x - y)dx + dy$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (в положительном направлении).

5. Найти площадь части поверхности $2x + y + z = 4$, которая распложена в первом октанте.

6. Найти дивергенцию градиента функции $U = \ln(x + 2y + 3z)$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; $y''(0) = 0$.

8. $\begin{cases} x' - x + 2y = 0, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t, \end{cases}$

где $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$.

Вариант 29

1. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}; x^2 + y^2 = 10$, если плотность каждой ее точки равна абсциссе этой точки.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2 + y^2, \quad z = h$.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}\,dl$, где L – дуга спирали Архимеда $r = a\varphi \quad (a > 0)$ между точками $O\,(0,0); \quad A\,(a^2, a)$.

4. Вычислить с помощью формулы Грина $\oint\limits_c \frac{y}{x}dx + 2\ln x\,dy$, где C – треугольник, сторонами которого являются прямые $y = 4 - 2x; \quad x = 1; \quad y = 0$.

5. Вычислить $\iint\limits_S z^2\,ds$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащей в первом октанте.

6. Найти криволинейный интеграл вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} - y^3\vec{i}$ вдоль дуги окружности $x = R\cos t; \quad y = R\sin t$, лежащей в первой четверти.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y'' + y' - 2y = e^t; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$.

8. $\begin{cases} 3y' + 2y + x' = 1, \\ y' + 4x' + 3x = 0, \end{cases}$

где $x(0) = y(0) = 0$.

В а р и а н т 30

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16 - 8x; \quad y^2 = 24x + 48$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $2-z=x^2+y^2; \quad z=x^2+y^2$.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2+y^2=ax.$

4. С помощью формулы Грина вычислить

$$\oint\limits_c \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx+\frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dy,$$

где C – замкнутый контур, образованный дугами двух окружностей $x^2+y^2=1; \quad x^2+y^2=4\,(y>0)$ и отрезками прямых $y=x$ и $y=\sqrt{3}\,x\,(y>0)$, заключенных между окружностями.

5. Найти массу полусферы $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке равна z^2.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$ если $\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\vec{i}+2xyz\,\vec{j}+\vec{k}$.

Применяя операционное исчисление, найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений:

7. $y''-9y'=0; \quad y(0)=y'(0)=0$.

8. $\begin{cases} x''+y=1, \\ y''+x=0, \end{cases}$

где $x(0)=x'(0)=y'(0)=y(0)=0.$

Пример решения варианта.

1. Найти массу плоской фигуры, ограниченной кривыми $x+y=2; \quad x=0; \quad y=0$, плотность которой в любой точке пропорциональна квадрату абсциссы этой точки.

Если пластинка занимает область D и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma(x,y)$, то ее масса M выражается двойным интегралом

$$M = \iint\limits_D \gamma(x, y) dx\, dy .$$

В нашем случае $\gamma(x, y) = x^2$, т.е.

$$M = \iint\limits_D x^2\, dx\, dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} x^2 dy = \int\limits_0^2 \left[x^2 y \Big|_0^{2-x} \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2 (2 - x - 0) dx = \int\limits_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] = \frac{4}{3} .$$

Ответ: $M = \frac{4}{3}$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Объем представляет собой шар радиуса 1. Согласно теории $V = \iiint\limits_T dx\, dy\, dz$, где T – внутренний объем сферы. Переходя к сферическим координатам $x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\varphi$ и учитывая якобиан перехода $I = \rho^2 \sin\theta$ и симметрию объема, имеем $V = 8 \iiint\limits_T \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$, где T – первый октант.

$$V = 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta\, d\varphi = 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \left[-\cos\theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \right] = 8\, \frac{\pi}{2}\, \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3} .$$

Ответ: $V = \frac{4\pi}{3}$.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{\sqrt{x}}dl$, где AB – дуга полукубической параболы $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ от $A(3,\ 2\sqrt{3})$ до $B(8,\ \frac{32\sqrt{2}}{3})$.

Если кривая AB задается как $y = f(x)$, то $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$, $|y| = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $y = \pm\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, учитывая, что $y > 0$, берем $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, тогда $y' = \frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$.

$$dl = \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}dx = \sqrt{1 + x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{\sqrt{x}}dl = \int\limits_3^8 \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}(\sqrt{1+x})dx = \frac{2}{3}\int\limits_3^8 x\sqrt{1+x}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{1+x} = t \\ 1 + x = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_2^3 (t^2 - 1)t2tdt = \frac{2}{3}2\int\limits_2^3 (t^4 - t^2)dt = \frac{4}{3}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_2^3 = \frac{2152}{45} = 47{,}82.$$

4. Вычислить с помощью формулы Грина $\oint\limits_C \frac{y}{x^2}dx + 2y^2 \ln x\, dy$, где C – треугольник, сторонами которого являются прямые $y = 4 - x;\quad x = 1,\quad y = 0.$

Формула Грина имеет вид

$$\oint x\,dx + y\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial Y}\right)dx\,dy\ .$$

В нашем случае:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y^2\ln x\right)=\frac{2y^2}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\oint_C\frac{y}{x^2}dx+2y^2\ln x dy=\iint_D\left(\frac{2y^2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dxdy=\int_1^4 dx\int_0^{4-x}\left(\frac{2y^2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dy=\int_1^4 dx\left[\frac{2y^3}{3x}-\frac{y}{x^2}\right]_0^{4-x}=$$

$$=\int_1^4\left(\frac{2}{3x}(4-x)^3-\frac{1}{x^2}(4-x)\right)dx=\frac{2}{3}\int_1^4\frac{\left(4-x^3\right)}{x}dx-\int_1^4\frac{4-x}{x^2}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_1^4\frac{64-48x+12x^2-x^3}{x}dx-4\int_1^4 x^{-2}dx+\int_1^4\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}\left[64\ln x-48x+\frac{12x^2}{2}-\frac{x^3}{1}\right]\Bigg|_1^4-$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4+\ln x\Big|_1^4=129{,}78.$$

5. Вычислить $\int\limits_S(x^2+y^2)ds$, где S – часть поверхности $4-z=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0\quad z=4$.

Имеем:

$$z=4-x^2-y^2,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,$$

$$ds=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

Тогда искомый интеграл преобразуется в двойной:

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Областью интегрирования D является круг $x^2+y^2\le 2$, поэтому при переходе к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$ имеем:

$$I=\iint\limits_D \rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho^2 d\rho^2 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho^2 d\rho^2=\frac{1}{2}2\pi\frac{1}{8}\frac{50\sqrt{5}+2}{15}=$$
$$=\frac{\pi(50\sqrt{5}+2)}{8\cdot 15}=\frac{\pi(25\sqrt{5}+1)}{60}.$$

Отдельно вычислим

$$\int\limits_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho^2 d\rho^2=\left|\rho^2=t\right|=\int\limits_0^1\sqrt{1+4t}\,tdt=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+4t}=z\\ 4t+1=z^2\\ 4t=z^2-1\\ t=\dfrac{z^2-1}{4}\\ dt=\dfrac{2zdz}{4}=\dfrac{z}{2}dz\end{array}\right|=\int\limits_1^{\sqrt{5}}\frac{z(z^2-1)}{4}\frac{z}{2}dz=\frac{1}{8}\int\limits_1^{\sqrt{5}}(z^4-z^2)dz=$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}=\frac{1}{8}\Big(\frac{25\sqrt{5}}{5}-\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\Big)=\frac{1}{8}\Big(5\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big)=\frac{1}{8}\Big(\frac{2}{3}\cdot 5\sqrt{5}+\frac{2}{15}\Big)=\frac{1}{8}\left(\frac{50\sqrt{5}+2}{15}\right).$$

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, $F=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z\vec{k}$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \vec{i}\left|\frac{\partial z^3}{\partial y} - \frac{\partial y^3}{\partial t}\right| - \vec{j}\left|\frac{\partial y^3}{\partial x} - \frac{\partial x^3}{\partial t}\right| + \vec{k}\left|\frac{\partial y^3}{\partial x} - \frac{\partial x^3}{\partial y}\right| = 0.$$

Решить дифференциальное уравнение операционным методом:

7. $y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1.$

Переходя к изображениям $\overline{y}(t) \to y(p); \quad y'(t) \to p\overline{y}(p) - y(0)$, имеем $p\overline{y}(p) - 1 - 2\overline{y}(p) = 0 \quad \overline{y}(p)(p-2) = 1 \quad \overline{y}(p) = \dfrac{1}{p-2}.$

Пользуясь таблицей изображений элементарных функций, находим оригинал $\overline{y}(p) \to e^{2t}$.

Ответ: $x = e^{2t}$.

8. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

Переходим к изображениям

$$\begin{aligned} x(t) &\to \overline{x}(p); \quad x'(t) \to p\overline{x}(p) - x(0), \\ y(t) &\to \overline{y}(p); \quad y'(t) \to p\overline{y}(p) - y(0). \end{aligned}$$

В нашем случае $\begin{cases} p\overline{x}(p) - 0 = \overline{x}(p) + 2\overline{y}(p), \\ p\overline{y}(p) - 5 = 2\overline{x}(p) + \overline{y}(p) + 1. \end{cases}$

Решая систему относительно $\overline{x}(p)$ и $\overline{y}(p)$, имеем

$$\overline{x}(p) = \frac{10p + 2}{p(p+1)(p-3)} \quad \overline{y}(p) = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)};$$

Найдем $\overline{x}(p)$, представив его в виде

$$\frac{10p + 2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3} =$$

$$= \frac{A(p+1)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p+1)}{p(p+1)(p-3)}$$

и методом неопределенных коэффициентов, найдем *A, B, C*:

$$10p + 2 = A(p^2 - 2p - 3) + B(p^2 - 3p) + C(p^2 + p).$$

$$\begin{array}{l|l} p^2 & A + B + C = 0, \\ p & -2A - 3B + C = 10, \\ p^0 & -3A = 2. \end{array}$$

Решая данную систему, получим $A = -\frac{2}{3}, B = -2, C = \frac{8}{3}.$

Следовательно,

$$\bar{x}(p) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} - 2\frac{1}{p+1} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{p-3} \Rightarrow x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

Аналогично находим $y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$.

Ответ: $x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$, $y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$.

Л и т е р а т у р а

1. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. В 2 т.Т. 2. – М.: Наука, 1985.

2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 4. Ч.2,3 / Под ред. А.П.Рябушко. – Мн.: Выш. школа, 1990.

3. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике: Учебное пособие. В 2 ч.Ч. 2 – Мн.: Выш. школа, 1993.

4. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: Справочное пособие к решению задач. – 2-е изд.– Мн., 2000.

5. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление: Справочное пособие к решению задач. – Мн.: Тетра система, 2002.

Учебное издание

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ
И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по темам: «Ряды», «Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы. Элементы теории поля и операционного исчисления»

Составители: МИКУЛИК Николай Александрович
ВОРОНОВИЧ Галина Константиновна
КАТКОВСКАЯ Ирина Николаевна и др.

Компьютерная верстка А.А. Бусько

Подписано в печать 16.11.2004.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л.3,7. Уч.-изд. л.29. Тираж 200. Заказ 28.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
Лицензия № 02330/0056957 от 01.04.2004.
220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.