Математические структуры и моделирование
2017. № 4(44). С. 53–59

УДК УДК 510.2 + 101.1
DOI: 10.25513/2222-8772.2017.4.53-59

ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ОБОСНОВАНИЕ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Н.В. Михайлова
к.ф.н., доцент, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Уже при становлении математического анализа проявилось противоречие между его способностью получать конкретные математические результаты и специфическими трудностями его обоснования. Статья посвящена проблемно-ориентированному обоснованию математического анализа.

Ключевые слова: обоснование современного математического анализа, проблемно-ориентированный подход, аспекты философии математики.

Введение

Обоснование математики относится к числу важнейших философских проблем, решаемых в виде гносеологической процедуры философской рефлексии оснований математики и системного анализа принципов математической теории. Обоснование математики состоит из двух взаимосвязанных уровней – математического и философского. Если сущность первого выявляется через применение направления обоснования к конкретной теории, что составляет чисто математическую работу, то сущность второго характеризуется тем, что каждая программа обоснования нуждается еще и в философском анализе ее соответствия исходной философско-методологической задаче. Обоснование математики методологически строго впервые было сформулировано Давидом Гильбертом как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий, по сути провозгласив законность любой такой теории, даже не взирая на возможность ее содержательной интерпретации. Такая установка Гильберта по-прежнему актуальна в философии современной математики, так как математики следят за непротиворечивостью. Есть даже некоторая «усталость» от старых обосновательных проблем, хотя в философии науки за непротиворечивостью никто «не гонится». Часть методологических трудностей обоснования математического анализа имеет не только технический, а концептуально прагматический характер, что делает уместной необходимость рассмотреть более широкий философско-методологический подход.

Вначале предстоит выяснить, что понимается под словом «обоснование». Оно часто употребляется в философско-научном лексиконе. В литературе по логике и методологии науки используются различные способы и методы обоснования, например, доказательство, подтверждение, объяснение, интерпретация, практическая реализация. Если акцентировать внимание только на доказательстве, то понятие «обоснования» оказывается производным от понятия «доказательства», что не очень способствует выявлению самостоятельного осмысления проблемы обоснования математики. Кроме того, понятие «формального доказательства» по существу представляет собой историческую условность, для этого достаточно реконструировать историю обоснования математического анализа, в которой принципиально не достижим отказ от неформальной интуиции, поскольку нельзя формально доказать непротиворечивость самой математики в целом. С точки зрения подтверждения, укрепляющего веру в обосновываемое знание, под обоснованием математики в довольно широком философском контексте иногда понимается попытка найти такую содержательную теорию, из которой можно вывести всю математику при предварительном методологическом условии непротиворечивости используемой теории. Наконец, если говорить о практической реализации, то следует отметить укоренившуюся в математике практику неявного собирательного употребления словосочетания «обоснование математики», которое предполагает обоснование математических теорий всеми имеющимися в математике методологическими средствами.

1. Проблема обоснования математического анализа

Чтобы философия математики не оказалась чисто философским занятием, можно сузить вопрос об обосновании математики следующим образом: какая именно часть современной математики нуждается в обосновании? Можно заключить, что речь идёт о современном математическом анализе. Но почему в проблеме обоснования такое внимание уделяется обоснованию математического анализа? Как авторитетно считает философ математики В.Я. Перминов: «В 30-х годах прошлого века П. Бернайс сформулировал некоторый критерий успешной или состоявшейся программы обоснования математики, который сводится к тому, что любая такая программа должна быть способной обосновать математический анализ. Смысл критерия ясен. Математический анализ – центральная дисциплина современной математики, являющаяся идейным истоком большинства существующих математических теорий и основой большей части приложений математики» [1, с. 20]. Заметим, что ни она из известных на сегодня программ обоснования современной математики не удовлетворяет критерию успешности Бернайса. Трудность построения концепции обоснования математического анализа связана с тем, что никакой опыт и изощренное экспериментирование не соответствуют с абсолютной точностью природе математических идеализаций. В общефилософском плане обоснование математического анализа необходимо ещё и для того, чтобы найти средства, гарантирующие надёжность сверхсложных современных математических рассуждений и доказательств.

В теоретической и практической математической деятельности приходится анализировать различные функциональные зависимости, поэтому математический анализ, изучающий такого рода зависимости, представляет сейчас наиболее важный раздел современной математики. В истории математики по сути отмечается: «Слабой стороной математики XVIII в. было отсутствие обоснования её важнейших частей. Был развит аппарат анализа бесконечно малых без достаточной работы над его строгим логическим обоснованием» [2, с. 370]. Несмотря на использование различных способов обоснования анализа, они не являлись удовлетворительными объяснениями, пока не появились методы, основанные на понятии предельного перехода, не содержащего логических пробелов. Кроме того, с помощью понятия предела получили объяснение такие важнейшие понятия математического анализа как «производная», «интеграл», «непрерывность функции», «сумма ряда» и другие. Заметим, что уже при становлении теорий математического анализа стало проявляться внутренне присущее ему специфическое противоречие между способностью получать конкретные практически важные результаты и философскими трудностями объяснения или обоснования его новых понятий и применяемых методов. Отметим также, что математический анализ практически реально опирается на теорию действительных чисел, изучение которых привело математику к рассмотрению бесконечных множеств.

Известно, что после того, как немецкий математик Карл Вейерштрасс переформулировал все определения математического анализа на языке $\varepsilon - \delta$, появились математические объекты, не подвластные интуитивному восприятию, например, функции, непрерывные на всём интервале, но тем не менее нигде не дифференцируемые, или непрерывные функции, не являющиеся монотонными ни на каком интервале их области определения, которые изначально представлялись как парадоксальные, «потому что они абсолютно оторваны от геометрической интуиции. Они обладают лишь формальным численным смыслом, избегая любого представления, доступного интуитивному схватыванию» [3, с. 12]. Большое влияние на математику оказала разработанная Вейерштрассом система логического обоснования математического анализа, основанная на построенной им теории действительных чисел. Например, функциональное определение дельта-функции – это, по существу, продолжение традиции обоснования математического анализа, восходящей к систематическому использованию понятия «предела» в работах О. Коши и К. Вейерштрасса. Но хотя с точки зрения обоснования математического анализа Вейерштрасс, по существу, заложил строгие логические основания для исчисления бесконечно малых, направление исследований обоснования математического анализа всё же не было закончено, так как не было философско-методологически выяснено значение бесконечного для математики.

Философы математики нередко игнорируют рассуждения профессиональных математиков о проблеме обоснования, относящиеся к практическому решению конкретных задач, считая их недостаточно важными, или неотрефлексированными, хотя ими проведен анализ специфики математической истины, выявлена взаимосвязь между доказуемостью и достоверностью, а также проанализировано практическое использование компьютера в математических доказательствах. Целесообразно «математику называть проблемно-ориентированной, а соответствующую ей философию – концептуальным прагматизмом» [5, с. 67]. С точки зрения математического знания проблемно-ориентированное обоснование математики включает в себя несколько аспектов: во-первых, доведение математических теорий до принятого современного уровня строгости; во-вторых, полноценная аргументация существования новых математических объектов; в-третьих, учёт саморазвития математических теорий при решении конкретных задач и избавления их от возможных противоречий. Заметим, что проблемная ситуация обычно создаётся путём формулирования теоретических утверждений в виде задач, для решения которых необходим концептуальный прагматизм при анализе и трансформации имеющихся знаний. В истории становления математического анализа надёжными представлялись такие математические теории, которые соответствовали различным уровням теоретической строгости, направленные на практическое решение математических задач в силу необходимости математики.

Рассмотрим следующую задачу, доступную пониманию тех, кто знаком с понятием «функции». Сколько решений имеет уравнение вида $y^2 - 1 = 0$? Как правило обычно выделяют два очевидных решения $y = 1$ и $y = -1$. Но все ли это решения указанного уравнения, и могут ли у него существовать другие решения? Содержательный ответ на, казалось бы, неразрешимый вопрос далеко не очевиден, как может показаться на первый взгляд, потому что проблемно-ориентированный ответ на этот вопрос утвердительный, что можно считать довольно неожиданным, а для кого-нибудь вообще неверным. Но в математике, с учётом концептуального прагматизма, не принято торопиться с выводами. Пусть $y = f(x)$, где функция $f(x) = -1$ для любого отрицательного значения переменной x, и $f(x) = 1$ для любого положительного значения переменной x и для $x = 0$. Возводя y в квадрат, получим, что $y^2 = (f(x))^2 = 1$ для любого значения переменной x, а это означает, что функция $y = f(x)$ является решением уравнения $y^2 - 1 = 0$. А сколько ещё решений подобного рода этого уравнения существует? Да сколько угодно – множество решений бесконечно. Как замечают по этому поводу математики Е.В. Шикин и Г.Е. Шикина: «История математики вообще полна примерами того, как встреча с неразрешимой задачей (в данном случае – с неразрешимым уравнением) приводила к расширению класса объектов, из которого (старого) выбирались претенденты на решение и в котором (новом) нужное решение задачи (уравнения) содержалось» [5, с. 112]. То есть чтобы ответить на поставленный выше, по существу, проблемно-ориентированный вопрос – сколько решений имеет данное уравнение вида $y^2 - 1 = 0$, вначале надо было специально уточнить – в каком именно классе математических объектов ищется его решение.

Другой не менее важный методологический аспект интерпретации проблемно-ориентированных задач математического анализа состоит в том, что, вообще говоря, современный математический анализ можно различать в широком и узком смысле. Например, как определяют их историки математики С.С. Петрова и С.С. Демидов: «Анализ в узком смысле – это дифференциальное и интегральное исчисление. Анализ в широком смысле – это вся совокупность математических дисциплин, представляющих непосредственное развитие идей и методов дифференциального и интегрального исчисления» [6, с. 7]. Математический анализ в широком смысле – это хорошо развитые сейчас области современного математического анализа, например, такие как вещественный, комплексный и функциональный анализ, обоснование которых непосредственно связано с проблемой бесконечного. Прогресс в обосновании математического анализа зависит сегодня уже не столько от изобретения принципиально новых методов логического анализа, сколько от углубления исследований по методологии математики. Укажем на известную ограниченность стандартной теории распределений применительно к нелинейным задачам, что послужило причиной применения философии концептуального прагматизма к обоснованию введения новых обобщённых функций, для которых можно достаточно корректно определить их произведение.

Задача обоснования умножения обобщённых функций основана на интуитивном введении вместо распределений новых математических объектов, которые, обладая свойствами распределений, допускают ещё и формально корректную операцию умножения, при которой распределения естественно вкладываются в классы новых объектов. Для конструктивно введённых операций умножения используются классы «новых обобщённых функций», построенные французским математиком Жаном-Франсуа Коломбо. Произведение функции, разрывной в точке, как обобщённой функции, и дельта-функции уже не принадлежит классическому пространству обобщённых функций, что приводит к целому ряду неудобств при исследовании задач дифференциальных уравнений с новыми обобщёнными функциями, содержащими произведение обобщённой и разрывной функций, но наиболее существенным оказывается то, что решением дифференциального уравнения в философско-методологической интерпретации является не разрывная функция, а обобщённая функция Коломбо. Так, философ науки Л.А. Микешина утверждает, что «общенаучные методологические принципы тесно смыкаются и взаимодействуют с философскими и не всегда возможно четко их разграничить и квалифицировать» [7, с. 275]. Многочисленные примеры из функционального анализа показывают, что целостность направлений обоснования, реализующая концептуальный прагматизм математического анализа, проясняет сущность проблемно-ориентированного обоснования.

2. Заключение

В заключении отметим, что обзор проблемы обоснования математики позволяет выявить слабость методологических и философских предпосылок предыдущих программ обоснования математики – логицизма, формализма и интуиционизма. Расхождение между интуиционизмом, или одним из его направлений – конструктивизмом, и платонизмом, или реализмом, в оценке онтологического статуса объектов математики сосредоточено на том, что платонизм признаёт существование объектов независимо от мышления человека, а конструктивизм требует предъявления этих абстрактных объектов независимо от онтологических предпосылок. В математическом анализе устоявшиеся понятия «непрерывной функции» и «дифференцируемой функции» имеют общность, которая распространяется за интуитивные представления о них. Однако с помощью канторова множества можно, например, построить даже такую непрерывную монотонную функцию, производная которой почти всюду равна нулю, а источником столь интуитивно непонятного примера является канторово множество. Поэтому без строго формальной математической процедуры интуитивно довольно трудно понять, почему функция Кантора почти нигде не растёт, хотя она ощутимо растёт на множестве нулевой меры, в связи с чем её образно называют ещё и «канторовой лестницей». При этом устойчивость проблемно-ориентированного обоснования математического анализа обеспечивается ещё и тем, что если есть реальное взаимодействие противоположностей, то они не достигают антагонизма, поскольку элементы проблемного синтеза не исключают друг друга, а характеризуют целостность в рамках новой концепции обоснования современной математики.

Проблемно-ориентированный подход обоснования математики, даже на примере абстрактных объектов математического анализа, фиксирует также, каков должен быть содержательный уровень математических теорий и как концепция обоснования математики характеризуется системной целостностью. Системность обосновательных процедур означает, что они представляют связное, неразрывное целое, в котором целостность концепции обоснования математического анализа вытекает из философского единства и качественного многообразия современной математики и из того, что обе эти важные характеристики являются проявлением её самоорганизации. В современном математическом анализе широко используется синтез разных подходов к пониманию новых проблемно-ориентированных задач. Конкретный математический пример проблемно-ориентированного синтеза очень разных направлений и разделов математики, таких как теория чисел, математический анализ и дифференциальные уравнения, демонстрирует алгебра обобщённых функций Коломбо, в которой практически вводится произведение любых двух элементов из классического пространства обобщённых функций, хотя в общем случае это произведение является уже обобщённой функцией Коломбо и не принадлежит классическому пространству распределений.

Литература

1. Перминов В.Я. Проблема обоснования математики у А.Н. Колмогорова // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль : ЯГПУ, 2004. С. 9–24.
2. Дорофеева А.В. Проблема обоснования математики переменных величин // Высшая математика. Гуманитарные специальности. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Дрофа, 2003. С. 370–374.
3. Фрейдельмейер Ж.-П. Что история говорит нам о преподавании анализа // Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики. Калуга : КГПУ, 2002. Вып. 4. С. 45–62.
4. Проблемно-ориентированный подход к науке: Философия математики как концептуальный прагматизм / Отв. ред. В.В. Целищев. Новосибирск : Наука, 2001. 154 с.
5. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. (Гуманитариям о математике). М. : Едиториал УРСС, 2001. 272 с.
6. Петрова С.С., Демидов С.С. Развитие математического анализа // Очерки по истории математики / Под ред. Б.В. Гнеденко. М. : Издательство МГУ, 1997. С. 7–93.

7. Микешина Л.А. Методологические формы знания и деятельности как ценности науки // Эпистемология ценностей. М. : РОССПЭН, 2007. С. 272–284.

PROBLEM-ORIENTED JUSTIFICATION OF THE MODERN MATHEMATICAL ANALYSIS

N.V. Michailova
Ph.D. (Philosophy), Assosiate Professor, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

Abstract. Formation of the mathematical analysis revealed a contradiction between its ability to receive concrete mathematical results and specific difficulties of its justification. Article considers problem-oriented justification of the mathematical analysis.

Keywords: justification of the modern mathematical analysis, problem-oriented approach, philosophy of mathematics aspects.

Дата поступления в редакцию: 17.08.2017