Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебное электронное издание

М и н с к 2011

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
В 93

С о с т а в и т е л и:
А. Н. Андриянчик, Н. А. Микулик,
Л. А. Раевская, Н. И. Чепелев, Т. И. Чепелева,
Е. А. Федосик, В. И. Юринок, Т. С. Яцкевич

Р е ц е н з е н т ы
А. Д. Корзников, Н. С. Коваленко

В 93 Сборник заданий по математике для студентов первого курса инженерно-технических специальностей втузов / сост.: А.Н. Андриянчик [и др.]. – Минск: БНТУ, 2011. – – 156 с.

В сборнике заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов приведены задачи и упражнения по основным разделам высшей математики в соответствии с действующей программой. В качестве основных рассматриваются 18 практических занятий для каждого из четырех семестров. К задачам, предназначенным для самостоятельной работы, предлагаются ответы, что поможет студенту контролировать правильность решаемых примеров.

Приведены варианты типовых расчетов, являющихся обязательным элементом учебных планов соответствующих специальностей БНТУ.

Издание является дополнением к существующим задачникам, будет полезным как для студентов дневной, так и заочной формы обучения и послужит лучшей организации их самостоятельной работы.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
E-mail: tchepeleva@gmail.com
http://www.bntu.by/fitr-vm1.html
Регистрационный № ЭИ БНТУ/ФИТР48-6.2011

СОДЕРЖАНИЕ

I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕНОЙ

Занятие 1

Декартова и полярная системы координат. Построение графиков

Аудиторная работа

1.1. Построить графики функций:

а) $y = 2^{\log_2 \cos x}$.

б) $y = \dfrac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$.

в) $y = \begin{cases} 2^{x-1}, 0 < x \le 2, \\ -x^2 - 2x, -3 < x \le 0. \end{cases}$

г) $y = 2x - |x-2| + 1$.

д) $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$.

е) $y = \sin|x| - 1$.

ж) $y = \log_{1/2} x^2 + 1$.

з) $y = \dfrac{1}{|x|+1}$.

1.2. Построить графики функций, заданных параметрически:

а) $x = -1 + 2t,\ y = 2 - t$.

б) $x = t,\ y = t^2 - 4$.

в) $x = 2\cos t,\ y = \sin t$.

г) $x = 1 - t^2,\ y = t - t^3$.

д) $x = at^2,\ y = bt^3$.

е) $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$.

ж) $x = -1 + 2\cos t,\ y = 3 + 2\sin t$.

з) $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t)$.

1.3. Записать уравнения кривых в полярных координатах:

а) $y = x$.

б) $y = 1$.

в) $x^2 + y^2 = 4$.

г) $x^2 + y^2 = 2y$.

д) $x + y - 1 = 0$.

е) $x^2 - y^2 = a^2$.

1.4. Построить графики функций:

а) $r=1$. **б)** $r=2\varphi$. **в)** $r\cos\varphi=2$.

г) $r=e^{\varphi}$. **д)** $r=4\cos\varphi$. **е)** $r=3\sin 2\varphi$.

ж) $r=2(1+\cos\varphi)$. **з)** $r=\dfrac{6}{3+2\cos\varphi}$. **и)** $r=\dfrac{2}{1+\sin\varphi}$.

к) $r=2\cos 3\varphi$. **л)** $r^2=36\sin 2\varphi$.

Домашнее задание

1.5. Построить следующие кривые:

а) $y=|x^2-x-2|$. **б)** $y=x+|x+3|$. **в)** $x=t^2+1,\ y=t$.

г) $x=t^3,\ y=t^2$. **д)** $r=2\sin\varphi$. **е)** $r=3(1-\sin\varphi)$.

ж) $r=4\cos 2\varphi$. **з)** $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$.

Ответы

1.3. а) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. **1.3. б)** $r=\dfrac{1}{\sin\varphi}$. **1.3. в)** $r=2$.

1.3. г) $r=2\sin\varphi$. **1.3. д)** $r=\dfrac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}$. **1.3. е)** $\rho^2=\dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$.

Занятие 2

Действия над матрицами. Вычисление определителей

Аудиторная работа

2.1. Найти $2A+3B-C$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&1&-3\\-4&3&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-3&4\\1&-5&6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&4&5\\1&-3&2\\8&-6&7\end{pmatrix}.$$

2.2. Найти матрицу X, если

$$2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+\frac{1}{3}X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix}.$$

2.3. Даны матрицы A и B. Найти AB и BA, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

2.4. Вычислить

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

2.5. Является ли матрица $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ корнем многочлена $f(x)=x^2-3x+5$?

2.6. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix}x & x+1\\ -4 & x+1\end{vmatrix}=0.$$

2.7. Вычислить определители по правилу Саррюса и разлагая по элементам 1-й строки:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

2.8. Вычислить определители, разлагая по элементам ряда:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$. **б)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2.9. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$. **б)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$.

2.10. Вычислить определители, предварительно упростив их:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$. **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}$. **г)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

д) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.   е) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Домашнее задание

2.11. Найти $(A+3B)^2$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.12. Найти те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.13. Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A, если $f(x)=2x^2-2x+7$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.14. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2.15. Найти $\det(AB)$ и проверить, что $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.16. Вычислить определители, разлагая их по элементам ряда:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. **б)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

2.17. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

О т в е т ы

2.1. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -9 \\ 9 & -4 & 4 \\ -13 & -3 & 21 \end{pmatrix}$. **2.2.** $\begin{pmatrix} 9 & -39 \\ -6 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3.а) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}$.

2.3. б) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3. в) $AB=\begin{pmatrix}15 & -6 & 9\\ 20 & -8 & 12\\ 10 & -4 & 6\end{pmatrix}$, $BA=(13)$. **2.4.** $\begin{pmatrix}-1\\ -8\\ -1\end{pmatrix}$,

2.6. $x=-1$; $x=-4$. **2.7. а)** 0. **б)** 0.

2.8. а) 0. **б) 16** **2.9. а)** 20.

б) 27. **2.10. а)** 38. **б)** 168.

в) -192. **г)** 75. **д)** -12. **е)** 300.

2.11. $\begin{pmatrix}96 & 12 & 2\\ -18 & 54 & -8\\ 51 & 105 & 111\end{pmatrix}$.

2.12. $BA=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix}4 & 5 & 5 & 0\\ 2 & 6 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

2.13. $\begin{pmatrix}7 & 0\\ -4 & 11\end{pmatrix}$. **2.14.** $x_1=-1, x_2=2$. **2.15.** 40. **2.16. а)** 0.

2.16. б) 48 **2.17. а)** 54. **б)** 160.

З а н я т и е 3

Обратная матрица.
Решение невырожденных систем матричным методом

Аудиторная работа

3.1. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

3.1. а) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$. **б)** $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -5\\ 6 & 1 & 2\end{pmatrix}$. **в)** $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

3.1. г) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **3.1. д)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2. Решить матричные уравнения:

3.2. а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2. в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$.

3.3. Решить системы матричным методом:

3.3. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ **3.3. б)** $\begin{cases} -2x + 2y - z + 7 = 0, \\ x - 3y + z - 6 = 0, \\ 3x + y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$

3.3. в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$ **3.3. г)** $\begin{cases} 2x - y + 5z = 4, \\ 3x - y + 5z = 0, \\ 5x + 2y + 13z = 2. \end{cases}$

Домашнее задание

3.4. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

3.4. а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **3.4. б)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3.5. Решить матричные уравнения:

3.5. а) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

3.5. б) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3.6. Проверить, являются ли системы невырожденными, и если являются, то решить их матричным методом.

3.6.а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

3.6. б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

Ответы

3.1. а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3.1. б) Не существует.

3.1. в) $-\frac{1}{38}\begin{pmatrix} -10 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & -10 \\ -8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$.

3.1. г) $-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -7 & -14 & 35 \\ -7 & 21 & -21 \\ -7 & -7 & 14 \end{pmatrix}$.

3.1. д) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2. а) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{15} & 1 \\ \frac{1}{15} & 0 \end{pmatrix}$.

3.2. б) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$.

3.2. г) $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 3 \\ -\frac{2}{13} & -1 \\ \frac{30}{13} & 4 \end{pmatrix}$.

3.3. а) $x_1 = x_2 = x_3 = 1.$

3.3. а) $x = 2, \ \ y = -1, z = 1.$

3.3. а) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1.$

3.3. а) $x = -4, y = -2, z = 2.$

3.4. а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$

3.4.а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$

3.5. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

3.5. б) $-\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -14 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$

3.6. а) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$.

3.6. б) $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}.$

З а н я т и е 4

Формулы Крамера. Ранг матрицы

Аудиторная работа

4.1. Решить системы, используя формулы Крамера:

4.1. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

4.1. б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

4.1. в) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - z = 9, \\ x - 4y + 3z = -5. \end{cases}$

4.1. г) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 14 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 10 = 0. \end{cases}$

4.2. При каких значениях λ ранг матрицы равен двум:

4.2. а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$

4.2. б) $\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

4.3. Проверить справедливость неравенств $r_{AB} \le r_A$, $r_{AB} \le r_B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Найти ранги матриц с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор.

4.4. а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$. **4.4. б)** $\begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4. в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **4.4. г)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4. д) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание

4.5. Решить системы по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

4.6. Проверить справедливость неравенства $r_{A+B} \le r_A + r_B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.7. Найти ранги матриц и указать какой-нибудь базисный минор.

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 10 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

О т в е т ы

4.1. а) $x_1 = 2,\ x_2 = 3.$ **б)** $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0.$

в) $x = 2,\ y = 1,\ z = -1.$ **г)** $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1.$

4.2. а) $\lambda = 3.$ **б)** $\lambda = 0,\ \lambda = 2.$

4.4. а) $r = 3,\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}.$ **б)** $r = 2,\ \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.$

в) $r = 3,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$ **г)** $r = 3,\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$

4.4. д) $r = 2$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4.5. а) $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$.

4.5. б) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

4.7. а) 2.

4.7.б) 3.

4.7. в) 3.

З а н я т и е 5

Решение произвольных и однородных систем

Аудиторная работа

5.1. Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их.

5.1. а) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

5.1. б) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

5.1. в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

5.1. г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$

5.1. д) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

5.1. е) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

5.1. ж) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + \quad\quad + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

5.1. з) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + \quad 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

5.2. Решить однородную систему и найти фундаментальную систему решений.

5.2. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.2. б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.2. в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

5.2. г) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$

5.2. д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 \quad = 0. \end{cases}$

5.2. е) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Домашнее задание

5.3. Исследовать системы уравнений и в случае совместности решить их.

5.3. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$ **5.3. б)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$

5.3. в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 = 1. \end{cases}$ **5.3. г)** $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

5.4. Решить системы:

5.4. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **5.4. б)** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Ответы

5.1. а) Система несовместна.

5.1. б) $\left\{\left(\dfrac{C_1 - 9C_2 - 2}{11},\ \dfrac{10 - 5C_1 + C_2}{11},\ C_1, C_2\right) \middle| \forall C_1, C_2 \in R\right\}.$

5.1. в) $\left\{\left(\dfrac{9 - C_1 - 14C_2 - C_3}{7},\ \dfrac{4C_1 - 7C_2 - 3C_3 - 1}{7},\ C_1,\ C_2,\ C_3\right)\right.$
$\left| \ \forall C_1,\ C_2,\ C_3 \in R\right\}.$

5.1. г) $\left\{\left(\dfrac{-3 - 5C_1 + 13C_2 - 5C_3}{5},\ \dfrac{4 + C_2}{5},\ C_1,\ C_2,\ C_3\right) \middle| \forall C_1, C_2, C_3 \in R\right\}.$

5.1. д) $x_1 = 5, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2.$

5.1. е) $\left\{\left(C, C+1, C+2, C+3\right) \middle| \forall C \in R\right\}$.

5.1. ж) Система несовместна.

5.1. з) $\left\{\left(C_1, C_2, \dfrac{3-5C_1+25C_2}{9}, \dfrac{10C_2-2C_1}{3}\right) \middle| \forall C_1, C_2 \in R\right\}$.

5.2. а) $\left\{\left(\dfrac{3}{5}C_1, \dfrac{C_1}{5}, C_1\right) \middle| \forall C_1 \in R\right\}; \quad (3, 1, 5)$.

5.2. б) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

5.2. в) $\left\{\left(\dfrac{-7C_1-8C_2}{7}, C_1, \dfrac{5C_2}{7}, C_2\right) \middle| \forall C_1 C_2 \in R\right\}; \ (-1, 1, 0, 0); \quad \left(-\dfrac{8}{7}, 0, \dfrac{5}{7}, 1\right)$.

5.2. г) $\left\{\left(\dfrac{-19C_1+38C_2}{3}, \dfrac{7C_1-14C_2}{2}, C_1, \ C_2\right) \middle| \forall C_1 C_2 \in R\right\}$,
$\left(-\dfrac{19}{3}, \dfrac{7}{2}, 1, 0\right), \quad \left(\dfrac{38}{3}, -7, 0, 1\right)$.

5.2. д) $\left\{\left(C_1, C_2, \dfrac{3C_1+6C_2}{4}, \dfrac{5C_1+10C_2}{4}\right) \middle| \forall C_1, C_2 \in R\right\}$.

5.2. е) $\left\{\left(\dfrac{8C_1+9C_2}{26}, -\dfrac{6C_1+23C_2}{26}, \dfrac{22C_1-11C_2}{26}, C_1, C_2\right) \middle| \forall C_1 C_2 \in R\right\}$,
$\left(\dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}, \dfrac{11}{13} 1, 0\right), \quad \left(\dfrac{9}{26}, -\dfrac{23}{26}, -\dfrac{11}{26}, 0, 1\right)$.

5.3. а) Несовместна.

5.3. б) $\left\{\left(\dfrac{5-7c}{5}, \dfrac{8c}{5}, c\right) \middle| \ \forall c \in R\right\}$.

5.3. в) $x_1 = -1, x_2 = 1$.

5.3. г) $\left\{\left(c_1, c_2, \dfrac{3-5c_1+25c_2}{9}, \dfrac{10c_2-2c_1}{3}\right) \middle| \forall c_1, c_2 \in R\right\}$.

5.4. а) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$.

5.4. б) $\{(0{,}2c_1 + c_2, c_1, c_2) \mid \forall c_1, c_2 \in R\}$.

З а н я т и е 6

Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов

Аудиторная работа

6.1. Определить, для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняются следующие условия:

1) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$,

2) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$,

3) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$,

4) $|\vec{a}+\vec{b}| = 0$,

5) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

6.2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

1) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; 2) $2\vec{a}$; 3) $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

6.3. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}(2;-1;3)$ и $\vec{b}(-6;3;-9)$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

6.4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}(6; -2; -3)$.

6.5. Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$.

6.6. Даны точки $A(-1; 2; 1), B(2; 1; -3), C(3; 0; 5)$. Подобрать точку D так, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

6.7. Найти ($\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{m} - \vec{n}$), если $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$; $(\vec{a}, \wedge \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

6.8. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

6.9. Вычислить внутренние углы треугольника ABC, если $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$. Убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

6.10. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ на ось вектора $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Домашнее задание

6.11. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(3; -5; 8)$ и $\vec{b}(-1; 1; -4)$, и косинус угла между его диагоналями.

6.12. Даны три вектора $\vec{a}(-2; 1; 1), \vec{b}(1; 5; 0)$ и $\vec{c}(4; 4; -2)$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

6.13. При каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

6.14. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

6.15. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$, при условии что $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

О т в е т ы

6.2. 1) $\left(1; -\dfrac{1}{2}; 0\right)$. **2)** $(6; -4; 12)$. **3)** $(0; -1; 12)$.

6.3. Векторы противоположно направленные, вектор $\vec{b}$ длиннее вектора $\vec{a}$ в 3 раза.

6.4. $\cos\alpha = \dfrac{6}{7}$; $\cos\beta = -\dfrac{2}{7}$; $\cos\beta = -\dfrac{3}{7}$.

6.5. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 6$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 14$. **6.6.** $D(0; 1; 9)$. **6.7.**–42.

6.9. $\cos\angle A = -\dfrac{12}{49}$; $\cos\angle B = \dfrac{\sqrt{122}}{14}$; $\cos\angle C = \dfrac{\sqrt{122}}{14}$. **6.10.** $-\dfrac{2}{3}$.

6.11. $|\vec{a}+\vec{b}| = 6$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 14$, $\cos\varphi = \dfrac{20}{21}$.

6.12. $np_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b}) = -11$. **6.13**. $\alpha = -6$.

6.14. $\alpha = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **6.15**. $\vec{b} = \left(1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

З а н я т и е 7

Векторное и смешанное произведения векторов

Аудиторная работа

7.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $|[\vec{a}, \vec{b}]|$; 2) $|[\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}]|$; 3) $|[(3\vec{a}+\vec{b}), (\vec{a}-\vec{b})]|$.

7.2. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[\vec{a}, \vec{b}]$; 2) $[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}]$; 3) $[2\vec{a}-\vec{b}, 2\vec{a}+\vec{b}]$.

7.3. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$. Вычислить площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

7.4. Найти вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (2;-3;1)$ и $\vec{b} = (1;-2;3)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{c}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

7.5. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-1;3), \vec{c} = (1;9;-11)$.

7.6. Доказать, что четыре точки $A(1;\ 2;\ -1), B(0;\ 1;\ 5), C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

7.7. Даны вершины тетраэдра: $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины D.

Домашнее задание

7.8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (0;-1;1)$ и $\vec{b} = (1;1;1)$.

7.9. Лежат ли точки $A(5;5;4), B(3;8;4), C(3;5;10), D(5;8;2)$ в одной плоскости?

7.10. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a} = (3;4;0)$, $\vec{b} = (0;-4;1)$, $\vec{c}(0;2;5)$.

7.11. Найти длину высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7.12. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = (2;-2;1)$ и $\vec{b} = (2;3;6)$.

О т в е т ы

7.1. 1) 12. **2)** 24. **3)** 48. **7.2. 1)** (5,17).

2) (10, 2, 14). **3)** (20, 4, 28). **7.3.** $\{25;5\}$. **7.4.** $i = (7,5,1)$.

7.5. Компланарны. **7.7.** $\{154/3, 11\}$. **7.8.** $\sqrt{6}$. **7.9.** Не лежат.

7.10. Левая. **7.11.** $\dfrac{16}{3\sqrt{14}}$. **7.12.** $\sin\varphi = \dfrac{5\sqrt{17}}{21}$.

З а н я т и е 8

Прямая на плоскости

Аудиторная работа

8.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;2)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_1(2;-7)$, $M_2(3;2)$.

8.2. Написать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$ параллельно: а) вектору $\vec{S}(1;5)$; б) оси Oy.

8.3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;8)$ и образующей с осью абсцисс угол, равный $\dfrac{3\pi}{4}$.

8.4. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;2)$, $B(2;-2)$, $C(6;1)$. Найти:

1) уравнение стороны AB;
2) уравнение высоты CH;
3) уравнение медианы AM;
4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
5) расстояние от точки C до прямой AB.

8.5. Найти расстояние между прямыми $12x-5y-26=0$ и $12x-5y+13=0$.

8.6. Найти проекцию точки $A(2;6)$ на прямую $3x+4y-5=0$.

Домашнее задание

8.7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

8.8. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1;-3)$, $B(3;5)$, $C(5;2)$, $D(3;-5)$.

8.9. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

8.10. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45°; б) 90°; в) 0°.

8.11. Найти точку B, симметричную точке $A(8;12)$ относительно прямой $x-2y+6=0$.

8.12. Найти один из углов между прямыми:

а) $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7=0$;

б) $\begin{cases} x=4 \\ y=t+7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=\sqrt{3}t+2 \end{cases}$.

О т в е т ы

8.1. $x+9y-17=0$. **8.2. а)** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{5}$, $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+5t \end{cases}$.

б) $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+2}{1}$, $x=3$. **8.3.** $x+9-7=0.$

8.4. $1)\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}$ $2)\dfrac{x-6}{-4}=\dfrac{y-1}{-1}$, $3)\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}$,

$4)\,4x+y-25=0.$ $5)\dfrac{19}{\sqrt{17}}$. **8.5.** 3. **8.6.** $(-1,2)$.

8.7. $x=3$. **8.8.** $O(3;1/3)$.

8.9. $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$.

8.10. а) $x-y+5=0$; б) $x+2=0$; в) $y-3=0$.

8.11. $B(12;4)$. **8.12.** а) $\arccos\dfrac{7}{\sqrt{130}}$; б) $\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$.

З а н я т и е 9

Прямая и плоскость в пространстве

Аудиторная работа

9.1. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_1(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

9.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;3;4), M_2(3;0;2)$ и $M_3(2;5;7)$.

9.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;\,0;\,-2)$ перпендикулярно к плоскостям $x-2y+z+5=0$ и $2x-y+3z-1=0$.

9.4. Найти расстояние между плоскостями $2x-3y+6z-21=0$ и $4x-6y+12z+35=0$.

9.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-3;2)$ перпендикулярно к плоскости $x-3y+2z-5=0$.

9.6. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-2y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x-y+2z+1=0. \end{cases}$$

9.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\,0;\,-3)$ параллельно прямым

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}.$$

9.8. Найти проекцию точки $A(3;-1;4)$ на плоскость $2x+y-z+5=0$.

9.9. Найти проекцию точки $A(2;\,3;\,1)$ на прямую $\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$ и расстояние от этой точки до данной прямой.

Домашнее задание

9.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;3)$, параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-2)$, $M_2(3;4;5)$, $M_3(-1;2;0)$.

9.11. Найти расстояние от точки $M(2;1;1)$ до плоскости $x+y-z+1=0$.

9.12. Определить, при каком значении параметра α плоскость $\alpha x+(2\alpha-1)y+z-5=0$:

а) параллельна плоскости $2x+3y+z-4=0$;

б) перпендикулярна плоскости $3x+y-z=0$.

9.13. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(-3;1;-9)$ относительно плоскости $4x-3y-z-7=0$.

9.14. Вычислить угол между прямой $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y+z-1=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x+3y-z+1=0$.

9.15. Пересекаются ли прямые $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ и $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{5}$?

9.16. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

9.17. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3;6;-7), B(-5;1;-4), C(0;2;3)$, проведенной из вершины C.

Ответы

9.1. $x-y-3z+2=0.$

9.2. $5x+8y-7z-1=0.$

9.3. $5x+y-3z-11=0.$

9.4. 5,5.

9.5. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-2}{2}.$

9.6. $\dfrac{\pi}{3}.$

9.7. $x+2y-5z-17=0.$

9.8. $(1;-2;5).$

9.9. $(-5;\,2;\,4)$.

9.10. $x+3y-2z+1=0$.

9.11. $\sqrt{3}$.

9.12. а) $\alpha=2$; б) $\alpha=0{,}4$.

9.13. $Q(1;-2;-10)$.

9.14. $\sin\varphi=-\dfrac{5}{7};\varphi\approx-45^\circ 36'$.

9.15. Нет.

9.16. $Q(4;-1;-3)$.

9.17. $x=2t$, $y=-3t+2$, $z=17t+3$.

З а н я т и е 1 0

Кривые 2-го порядка на плоскости. Поверхности 2-го порядка

Аудиторная работа

10.1. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 8, малая полуось равна 3;

б) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен 4/5.

10.2. Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $x^2+4y^2=4$.

10.3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 30, а расстояние между вершинами равно 24;

б) действительная полуось равна 2 и гипербола проходит через точку $M(4;4\sqrt{3})$.

10.4. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы - в вершинах эллипса $6x^2+5y^2=30$.

10.5. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола имеет фокус $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$;

б) парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M(4;-2)$.

10.6. Составить канонические уравнения парабол, фокусы которых совпадают с фокусами гиперболы $x^2 - y^2 = 8$.

10.7. Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить ее в системе координат *Oxy*:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;

б) $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0$;

в) $y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$;

г) $2x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 25 = 0$.

10.8. Определить вид поверхности и построить ее:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;

б) $x = y^2 + 2z^2$;

в) $2x^2 - y^2 + z^2 = 4$;

г) $2x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$;

д) $z^2 = 4x$;

е) $x^2 + z^2 = 5$.

Домашнее задание

10.9. Найти уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $x \pm 2y = 0$, а расстояние между вершинами, лежащими на оси Ox, равно 4.

10.10. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; -1\right)$ и $M_2\left(-1; \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$, и найти его эксцентриситет.

10.11. Найти длину общей хорды параболы $y=2x^2$ и окружности $x^2+y^2=5$.

10.12. Написать уравнение параболы, проходящей через точки $(0;\,0)$ и $(-2;\,4)$, если параболы симметрична: а) относительна оси Ox; б) относительно оси Oy.

10.13. Какая фигура соответствует каждому из данных уравнений? Сделать чертеж, если это возможно.

а) $4x^2+25y^2+4x-10y-8=0$;

б) $x^2-y^2+2x-2y=0$;

в) $x^2-6x+2y+11=0$.

10.14. Определить вид поверхности и построить ее:

а) $x^2+y^2+z^2=2z$;

б) $x^2+3z^2-8x+18z+34=0$;

в) $5x^2+y^2+10x-6y-10z+14=0$;

г) $xy=1$.

Ответы

10.1. а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; **б)** $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{100}=1$.

10.2. $F_1\left(0,-\sqrt{3}\right)$, $F_2\left(0,\sqrt{3}\right)$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10.3. а) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{81}=1$; **б)** $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{4}=1$.

10.4. $\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{x^2}{5}=1$. **10.5. а)** $x^2=8y$; **б)** $y^2=x$.

10.6. $y^2 = \pm 16x.$ **10.7. а)** окружность $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12.$

б) гипербола $\dfrac{(y+1)^2}{3} - \dfrac{(x-2)^2}{4} = 1;$

в) парабола $(y-2)^2 = 3(x-2);$

г) пустое множество.

10.8. а) сфера; **б)** эллиптический параболоид;

в) олнополостный гиперболоид; **г)** коническая поверхность;

д) параболический цилиндр; **е)** круговой цилиндр; **10.9.** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1.$

10.10. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1;$ $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}.$ **10.11**. 2.

10.12. а) $y^2 = -8x;$ **б)** $y = x^2.$

10.13. а) $\dfrac{(x+0{,}5)^2}{2{,}5} + \dfrac{(y-0{,}2)^2}{0{,}4} = 1;$ **б)** $x + y + 2 = 0; x - y = 0;$

в) $(x-3)^2 = -2(y+1).$ **10.14. а)** $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1;$

б) $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(z+3)^2}{3} = 1;$ **в)** $z = \dfrac{(x+1)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{10}.$

З а н я т и е 11

Функция. Предел последовательности и предел функции

Аудиторная работа

11.1. Найти области определения функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}.$ **б)** $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x}.$

в) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$. **г)** $y=2^{x^2-2}$.

11.2. Проверить функции на четность или нечетность:

а) $f(x)=x^4+5x^2$. **б)** $f(x)=x^2+x$.

в) $f(x)=\dfrac{x}{2^x-1}$. **г)** $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

11.3. Построить графики функций:

а) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **б)** $y=|3x+4-x^2|$.

в) $y=-2\sin(2x+2)$. **г)** $y=x\sin x$.

11.4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$. **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$. **г)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-4x-5}$.

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}$. **е)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)$. **з)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+4}{3-2x-5x^3}$.

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$. **к)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

л) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. **м)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

н) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$.

11.5. Используя замечательные пределы, найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

е) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$.

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{3/x}$.

и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7x+3}{9x+3}\right)^{1/x}$.

к) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6-x}{7-x}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}$.

л) $\lim\limits_{x\to \infty}((2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)))$.

м) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$.

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$.

Домашнее задание

11.6. Найти пределы указанных функций:

а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$.

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$.

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$.

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$.

е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x\sin 2x}$.

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

м) $\lim\limits_{x\to\infty}((x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x)))$.

О т в е т ы

11.1. а) $(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$;

б) $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$;

в) $x\in[-5;-\pi)\cup(0;\pi)$;

г) $(-\infty;+\infty)$.

11.2. а) Четная;

б) Ни четная, ни нечетная;

в) Ни четная, ни нечетная;

г) Нечетная.

11.4. а) $\dfrac{5}{3}$;

б) 0;

в) $\dfrac{7}{9}$;

г) $\dfrac{11}{6}$;;

д) $\dfrac{1}{3}$;;

е) $-\dfrac{1}{2}$;

ж) $\pm\dfrac{5}{2}$;

з) 0;

и) 4;

к) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

л) $\dfrac{2}{3}$;

м) 0;

н) 3;

о) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

11.5. а) $\dfrac{1}{3}$;

б) $\dfrac{3}{2}$;

в) 6;

г) 4;

д) $\dfrac{1}{2}$;

е) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

ж) e^2;

з) e^3; **и)** $e^{-2/3}$; **к)** e^{-1};

л) e^2; **м)** e; **н)** $\dfrac{1}{\ln 3}$;

л) $2\ln a$. **11.6. а)** 3; **б)** 0;

в) –1; **г)** 40; **д)** 2;

е) $-\dfrac{1}{2}$; **ж)** e^{-6}; **з)** $4/3$;

и) –8; **к)** e^{-4}; **л)** $e^{-1/2}$; **м)** 1.

З а н я т и е 1 2

Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций. Точки разрыва

Аудиторная работа

12.1. Вычислить пределы, используя теорему об отношении двух бесконечно малых функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$. **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{2\,\mathrm{tg}\,3x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$. **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$.

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$. **е)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\mathrm{tg}(x+5)}{x^2-25}$.

12.2. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$. **б)** $f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.

в) $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

г) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

д) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$.

е) $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$.

ж) $f(x)=\begin{cases}2^x, & -\infty<x\le 1,\\ x^2+1, & x>1.\end{cases}$

з) $f(x)=\begin{cases}\arcsin x, & -\infty<x\le 1,\\ x^2-3, & 1<x<2,\\ x-1, & x\ge 2.\end{cases}$

и) $f(x)=\dfrac{5^{\frac{1}{x-2}}-1}{5^{\frac{1}{x-2}}+1}$.

к) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$.

Домашнее задание

12.3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sin 2x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 7x}-1}{x^2+3x}$.

в) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$.

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{tg}(x^2-3x+2)}$.

12.4. Исследовать на непрерывность функции; установить характер точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x^2+2x}$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

в) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2,\\ x-2, & 2<x\le 4,\\ -2\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$ Построить график функции.

г) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$.

О т в е т ы

12.1. а) 3; **б)** $-\frac{1}{6}$; **в)** –1; **г)** $\frac{1}{2}$; **д)** 3; **е)** $-\frac{1}{10}$. **12.2. а)** $x=1$ – точка разрыва 2-го рода; **б)** $x=2$ – точка устранимого разрыва, $f(2)=1$; **в)** $x=\pm 2$ – точки разрыва 2-го рода; **г)** $x=1$ – точка устранимого разрыва; **д)** $x=3$ – точка разрыва 1-го рода; **е)** $x=-1$ – точка разрыва 1-го рода; **ж)** Функция непрерывна при $x \in R$; **з)** $x=0$ – точка разрыва 1-го рода. **12.3. а)** 7/2; **б)** 7/3; **в)** –2; **г)** 4. **12.4. а)** $x=0$ – точка устранимого разрыва, $f(0)=\frac{1}{2}$; $x=-2$ – точка разрыва 2-го рода; **б)** $x=0$ – точка разрыва 1-го рода; **в)** $x=4$ – точка разрыва 1-го рода; **г)** $x=0$ – точка устранимого разрыва, $f(0)=2$.

З а н я т и е 13

Дифференцирование функций.
Логарифмическая производная

Аудиторная работа

13.1. Исходя из определения, найти производные функций:

а) $y(x)=7x^2$. **б)** $y(x)=\sqrt{x}$. **в)** $y(x)=5(\operatorname{tg} x - x)$.

13.2. Найти производные функций:

а) $y=5x^4-3\sqrt[7]{x^3}+7/x^5+4$. **б)** $y=x^3\sin x$.

в) $y=(x^4+1)/(x^4-1)$. **г)** $y=(x^5+3x-1)^4$.

д) $y=\sqrt[3]{((x^3+1)/(x^3-1))^2}$. **е)** $y=\ln(2x^3+3x^2)$.

ж) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. **з)** $y=(x^2-2x+2)e^{-x^2}$.

и) $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$. **к)** $y=-\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-2\ln\sin\dfrac{x}{2}$.

л) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

м) $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$.

н) $y = \cos^2\left(\sin\dfrac{x}{3}\right) + \sin\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)$.

о) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

п) $y = \ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

р) $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

с) $y = \cos^3 2x + \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

т) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

13.3. Используя предварительное логарифмирование, найти производные функций:

а) $y = (x+1)^2 (x-1)^3 \sqrt[5]{(x+2)^4} \sqrt[3]{(5x+3)^2}$.

б) $y = \dfrac{(x-3)^2 (2x-1)}{(x+1)^3}$.

в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

г) $y = x^3 \sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

д) $y = x^{\sin x}$.

е) $y = x^{x^2}$.

ж) $y = (\sin x)^{\arcsin x}$.

з) $y = (\ln x)^{1/x}$.

и) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^4}$.

к) $y = (1+x^3)^{\operatorname{arctg} 7x}$.

13.4. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $f(x) = x^2 + 4$ в точке $M(1;5)$.

Домашнее задание

13.5. Найти производные функций:

а) $y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$.

б) $y = x^3 \ln^2(\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x)$.

в) $y=\sqrt{\dfrac{\cos^2 x+1}{\sin 2x+1}}$.

г) $y=(\sin^3 x+e^{x^2})^3+\lg^2(x^4-\sin^2 x)$.

д) $y=\sqrt{x}\cdot 3^{x^2}-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x^3}}$.

е) $y=(x^3+1)^{\operatorname{tg} 2x}$.

ж) $y=\dfrac{(x+1)^3\cdot\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2\cdot x^{4/3}}}$.

з) $y=(\arccos x)^2\cdot\ln(\arccos x)$.

13.6. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=e^{1-x^2}$ в точке $x_0=-1$.

О т в е т ы

13.4. $y=2x+3;\ x+2y-11=0.$ **13.6.** $2x-y+3=0,\ x+2y-1=0$.

З а н я т и е 14

Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциал функции

Аудиторная работа

14.1. Найти производные функций, заданных параметрически:

а) $x=t^2+2,\ y=\frac{1}{3}t^3-1$.

б) $x=\dfrac{1}{t+1},\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$.

в) $x=a(\varphi-\sin\varphi),\ y=a(1-\cos\varphi)$.

г) $x=\ln t,\ y=t^2-1$.

д) $x=\arccos\sqrt{t},\ y=\sqrt{t-t^2}$.

е) $x=\operatorname{arctg} t,\ y=\ln(1+t^2)$.

ж) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

з) $x=\operatorname{tg} t,\ y=\sin 2t+2\cos 2t$.

14.2. Найти y'_x в указанных точках:

а) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t;\ t=\dfrac{\pi}{6}$.

б) $x=\dfrac{3at}{1+t^2},\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2};\ t=2$.

14.3. Найти производные функций, заданных неявно:

а) $e^x + 2x^2y^2 - e^y = 0$.

б) $2y\ln y = x$.

в) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

г) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

д) $\operatorname{arctg} y = y - x^2$.

е) $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$.

ж) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

з) $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$.

14.4. Найти y'_x в точке $x = 1$, если $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$, $y(1) = 1$.

14.5. Найти y'_x в точке $(0,1)$, если $e^y + xy = e$.

14.6. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x\operatorname{tg}^3 x$.

б) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} + (\arcsin x)^2$.

в) $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$.

г) $y^5 + y - x^2 = 1$.

14.7. Найти приближенное значение функции $y(x) = e^{x^2 - x}$ при $x = 1,2$.

14.8. Вычислить приближенно:

а) $\arcsin 0{,}05$.

б) $\ln 1{,}2$.

в) $\sqrt[4]{17}$.

г) $\operatorname{tg} 44^\circ 56'$.

Домашнее задание

14.9. Найти y'_x:

а) $x = \dfrac{t+1}{t}, y = \dfrac{t-1}{t}$.

б) $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t$.

14.10. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \dfrac{1 + \ln t}{t^2}$, $y = \dfrac{3 + 2\ln t}{t}$, удовлетворяет соотношению $yy' = 2x(y')^2 + 1$.

14.11. Найти производные от функций, заданных неявно:

а) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **б)** $\sin(xy) + \cos(xy) = \mathrm{tg}(x + y)$.

14.12. Убедиться в том, что функция y, определенная уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет соотношению $y^2 + (xy - 1) \cdot y' = 0$.

14.13. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 3$. **б)** $e^y = x + y$.

14.14. Вычислить приближенно:

а) $\sin 29^\circ$. **б)** $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2 - 3}{(2{,}037)^2 + 5}}$.

Ответы

14.1. а) $\dfrac{t}{2}$. **б)** $-\dfrac{2t}{t+1}$.

в) $\dfrac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \mathrm{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. **г)** $2t^2$.

д) $2t - 1$. **е)** $2t$.

ж) $-\mathrm{tg}t$. **з)** $2(\cos 2t - 2\sin 2t)\cos^2 t$.

14.2. а) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)^2$. **б)** $-\dfrac{4}{3}$.

14.3. а) $\dfrac{e^x + 4xy^2}{e^y - 4x^2 y}$. **б)** $\dfrac{1}{2(\ln y + 1)}$.

в) $\dfrac{\left(\sqrt{1 - x^2} - 1\right)\sqrt{1 - y^2}}{\left(\sqrt{1 - y^2} - 1\right)\sqrt{1 - x^2}}$. **г)** $\dfrac{2^x - 2^{x+y}}{2^{x+y} - 2^y}$.

д) $\frac{2x\left(1+y^2\right)}{y^2}$. **е)** $-\frac{y}{x}$.

ж) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **з)** $\frac{e^y \sin x + e^x \sin y}{e^y \cos x - e^x \cos y}$.

14.4. $\frac{4}{3}$. **14.5.** $-e^{-1}$.

14.6. а) $\mathrm{tg}^2 x\left(\mathrm{tg}x + \frac{3x}{\cos^2 x}\right)dx$. **б)** $\left(\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{arctg}x}}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

в) $\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$. **г)** $\frac{2xdx}{5y^4+1}$.

14.7. 1,2 **.** **14.8. а)** 0,05**.**

б) 0,2. **в)** 2,02.

14.9.а) –1. б) $\frac{1-\mathrm{tg}\,t}{1+\mathrm{tg}\,t}$.

14.11. а) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. **б)** $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$.

14.13. а) $\arcsin x dx$. **б)** $\frac{dx}{e^y-1}$.

14.14. а) 0,485. **б)** 0,355.

Занятие 15

Производные и дифференциалы высших порядков

Аудиторная работа

15.1. Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

а) $y=\cos^2 3x$. **б)** $y=\mathrm{arctg}\,x^2$.

в) $y = \log_2 \sqrt[3]{1 - x^2}$. **г)** $y = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$.

15.2. Показать, что функция $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ при любых постоянных c_1 и c_2 удовлетворяет уравнению $y'' - 5y' + 6y = 0$.

15.3. Найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

а) $y = 1 + xe^y$. **б)** $x^3 + y^3 = 3xy$.

в) $\operatorname{arctg} y = y - x$. **г)** $y = x + \ln y$.

15.4. Найти производные 2-го порядка от функций, заданных параметрически:

а) $x = t^2 + 2, y = \frac{1}{3}t^3 - 1$. **б)** $x = \arcsin t, y = \sqrt{1-t^2}$.

в) $x = a\cos^2 t, y = a\sin^2 t$. **г)** $x = \ln t, y = t^2 - 1$.

15.5. Найти дифференциалы 1, 2 и 3-го порядков функции $y = (2x-3)^3$.

15.6. Найти дифференциалы 2-го порядка функций:

а) $y = e^{-x^2}$. **б)** $xy + y^2 = 1$.

15.7. Найти дифференциал 3-го порядка функции $y = \frac{\ln x}{x}$.

15.8. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$ с точностью до двух знаков после запятой.

Домашнее задание

15.9. Найти производные второго порядка следующих функций:

а) $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$. **б)** $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

15.10. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y = e^{-x}$.

15.11. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если:

а) $e^{x+y} = xy$. б) $x = \dfrac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t$.

15.12. Вычислить значение производной второго порядка функции y, заданной уравнением $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$, в точке $M(1;1)$.

15.13. Доказать, что функция $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 13y' - 12y = 0$. Записать для этой функции d^3y.

15.14. Вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 12}$ при $x = 1{,}3$ с точностью до двух знаков после запятой.

Ответы

15.9. а) $-\dfrac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **б)** $-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

15.10. $(-1)^n e^{-x}$. **15.11. а)** $-\dfrac{y((x-1)^2 + (y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$.

15.11. б) $-\operatorname{ctg}^3 t$. **15.12.** –1.

15.13. $\left(64e^{4x} - 2e^{-x}\right)dx^3$. **15.14.** 1,93.

З а н я т и е 1 6

Правило Лопиталя–Бернулли. Формула Тейлора

Аудиторная работа

16.1. Применяя правило Лопиталя–Бернулли, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^2 + 2\cos x - 2}$.

в) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$. **е)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+10^x)^{1/x}$. **з)** $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

и) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}\,x)^{2x-\pi}$. **к)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

16.2. Разложить многочлен $f(x)=x^4-2x^2+13x+9$ по степеням двучлена $x+2$.

16.3. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x)=10^x$ в точке $x_0=0$.

16.4. Вывести приближенную формулу $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$ и оценить ее точность при $|x|<0{,}05$.

16.5. Вычислить с точностью до 10^{-4} $\cos 10^\circ$.

16.6. Найти пределы, используя разложение по формуле Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x^3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$.

Домашнее задание

16.7. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталя-Бернулли:

16.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$. **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **г)** $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$.

16.8. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x_0=1$.

16.9. Вычислить приближенно $\sin 1^\circ$ с точностью до $\Delta=10^{-4}$.

16.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2\sin x}$, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

О т в е т ы

16.7. а) 1. **б)** 1/6. **в)** 0. **г)** 0. **д)** e^{-6}.

16.8. $1-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}\dfrac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}}$,

$0<\theta<1$.

16.9. 0,0175. **16.10.** $-\dfrac{1}{6}$.

З а н я т и е 17

Монотонность функций. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции

Аудиторная работа

17.1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

а) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{11}{2}x^2-6x+\dfrac{9}{4}$. **б)** $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

в) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$.

г) $y=x-2\sin x$.

д) $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$.

е) $y=x^2e^{-x}$

17.2. Найти экстремумы функций, пользуясь производной 2-го порядка:

а) $y=\sqrt{1-x}+x$.

б) $y=x^2(a-x)^2$.

в) $y=x^{1/x}$.

г) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

17.3. Определить наибольшее и наименьшее значения данных функций в указанных интервалах:

а) $y=x^4-2x^2+5;[-2,2]$.

б) $y=x+2\sqrt{x};\ [0,4]$.

в) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$; $[0,\,1]$.

г) $\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x};\ [0,1]$.

д) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; $[-2,\,1]$.

17.4. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3, причем стороны основания относились бы как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

17.5. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом *R*.

Домашнее задание

17.6. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума следующих функций:

а) $y=x\sqrt{1-x^2}$.

б) $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$.

17.7. Найти экстремум функции $y=x+\dfrac{a^2}{x}\ (a>0)$, используя вторую производную.

17.8. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах (или во всей области определения):

а) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$; $[0, 1]$. **б)** $y = xe^{-x^2/2}$.

17.9. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения будет наибольшей?

Ответы

17.6. а) На $(-1;-1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2};1)$ – убывает; на $(-1/\sqrt{2};\, 1/\sqrt{2})$ – возрастает; $y_{\min} = y(-1/\sqrt{2}) = -1/2$; $y_{\max} = y(1/\sqrt{2}) = 1/2$.

17.6. б) Возрастает на всей области определения.

17.7. $y_{\max} = y(-a) = -2a; y_{\min} = y(a) = 2a$.

17.8. а) 1 и 3/5. **17.8. б)** $1/\sqrt{e}$ и $-1/\sqrt{e}$. **17.9.** $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

Занятие 18

Выпуклость и вогнутость графиков функций. Асимптоты. Построение графиков функций

Аудиторная работа

18.1. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций:

а) $y = \ln(x^2 + 1)$. **б)** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

в) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. **г)** $y = xe^{-x}$.

18.2. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$. **б)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

в) $y = x + \sin x$. **г)** $y = (x-2)e^{-1/x}$.

18.3. Провести полное исследование и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$. **б)** $y = x^2 e^{-x}$.

в) $y = x\sqrt{1 - x^2}$. **г)** $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.

д) $y = x^2 \ln x$.

Домашнее задание

18.4. Найти точки перегиба графиков функций:

а) $y = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$. **б)** $y = x \operatorname{arctg} x$.

18.5. Найти асимптоты графика функции $y = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

18.6. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$. **б)** $y = xe^{1/x}$.

Ответы

18.4. а) $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{8}{9}\right)$. **б)** Точек перегиба нет.

18.5. $x = -\dfrac{1}{e}; y = x + \dfrac{1}{e}$.

Типовой расчет № 1

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Задача 1

Исследовать систему уравнений и в случае совместности решить ее.

1.1. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

1.2. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

1.3. а) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.4. а) $\begin{cases} 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.5. а) $\begin{cases} 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

1.6. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.7. а) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.8. а) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.9. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$

1.10. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

1.11. а) $\begin{cases} 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

1.12. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

1.13. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.14. а) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

1.15. а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

1.16. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

1.17. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

1.18. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

1.19. а) $\begin{cases} 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

1.20. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

1.21. а) $\begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.22. а) $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$

1.23. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_3 - 5x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.24. а) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

1.25. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Задача 2

2.1. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b})$, где $\vec{a} = 3\vec{m}_1 - 2\vec{m}_2;$ $\vec{b} = \vec{m}_1 + 4\vec{m}_2;$ $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ – единичные векторы, угол между которыми равен $\dfrac{\pi}{4}$.

2.2. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ на направление вектора $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2.3. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

2.4. Вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{k}$, образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $|\vec{c}| = 3\sqrt{29}$.

2.5. Найти $\left(2\vec{a} - 3\vec{b},\ \vec{a} - \vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a}, \wedge \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

2.6. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|$, если $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p};$ $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{p},$ $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ – ортогональный базис и $|\vec{m}| = 2,$ $|\vec{n}| = 3,$ $|\vec{p}| = 4$.

2.7.Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1,$ $\left(\vec{m} \wedge \vec{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

2.8. Найти вектор $\left|\vec{b}\right|$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

2.9. Найти $\left(2\vec{a} - 5\vec{b},\ \vec{a} + 3\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 2,$ $|\vec{b}| = 3,$ $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

2.10. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$ $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

2.11. Найти вектор $\vec{d}$, удовлетворяющий условиям $\left(\vec{d}, \vec{a}\right) = 5,$ $\left(\vec{d}, \vec{b}\right) = 2,$ $\left(\vec{d}, \vec{c}\right) = 3$, если $\vec{a}\left(-1, 2, 0\right),$ $\vec{b}\left(-1, 0, 5\right),$ $\vec{c}\left(1, 0, 0\right)$.

2.12. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на направление вектора $\vec{c}$.

2.13. Вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$, образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{b}$, если $\left|\vec{b}\right| = 50$.

2.14. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 3$ $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

2.15. Найти $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$, если $|\vec{a}| = 8$, $\left|\vec{b}\right| = 15$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 96$.

2.16. Какой угол образуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ ортогональны, $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$?

2.17. Вычислить $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{c}, \vec{a}\right)$, если $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}| = 1$.

2.18. Даны точки $A(-5, 7, -6)$ и $B(7, -9, 9)$. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ на направление вектора $\overrightarrow{AB}$.

2.19. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{i}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{j}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $|\vec{a}| = 6$.

2.20. Найти вектор $\vec{x}$, ортогональный вектору $\vec{a}(12, -3, 4)$, имеющий с ним одинаковую длину и лежащий в плоскости Oyz.

2.21. Найти угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\left(\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

2.22. Найти проекцию вектора $\vec{a}\,(4, -3, 4)$ на направление вектора $\vec{b}(2, 2, 1)$.

2.23. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ ортогональны?

2.24. Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, ортогональный другому сомножителю.

2.25. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + \beta\vec{j} - \vec{k}$ коллинеарны?

Задача 3

3.1. Найти $\left[2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{b}\right]$, где $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

3.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 5$; $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}\wedge\vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

3.3. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 3$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

3.4. Найти $\left[2\vec{a} - \vec{b},\ 2\vec{a} + \vec{b}\right]$, где $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j}$.

3.5. Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что он ортогонален векторам $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\left(\vec{x},\ 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) = 51$.

3.6. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он ортогонален векторам $\vec{a}(2,\ 3,\ -1)$, $\vec{b}(1,\ -1,\ 3)$ и $|\vec{x}| = 1$.

3.7. Найти единичный вектор $\vec{d}$, компланарный векторам $\vec{a}(2,\ -1,\ 3)$ и $\vec{b}(4,\ 2,\ 0)$ и ортогональный вектору $\vec{c}(1,\ 1,\ 1)$.

3.8. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}\wedge\vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

3.9. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

3.10. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.11. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $|\vec{x}| = 26$.

3.12. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(1,-1)$, $B(2,-3)$, $C(1,4)$.

3.13. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(0, 0, 0)$, $B(3, 4, -1)$, $C(2, 3, 5)$, $D(6, 0, -3)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины A.

3.14. Проверить, лежат ли точки $A(2, -1, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(-1, 2, 3)$, $D(0, 2, -1)$ в одной плоскости.

3.15. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}$.

3.16. Дана треугольная пирамида с вершинами $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$. Найти длину высоты пирамиды, проведенной на грань BCD.

3.17. Найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

3.18. Найти $\left[3\vec{a} - \vec{b},\, \vec{a}\right]$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

3.19. Найти $(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c})$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку и взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4.$

3.20. Показать, что точки $A(3, 1, -1)$, $B(5, 7, -2)$, $C(1, 5, 0)$ и $D(9, 4, -4)$ лежат в одной плоскости.

3.21. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

3.22. Найти единичный вектор, ортогональный векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

3.23. Вершинами треугольной пирамиды являются точки $A(-5, 4, 8)$, $B(2, 3, 1)$, $C(4, 1, -2)$ и $D(6, 3, 7)$. Найти длину высоты, проведенной на грань BCD.

3.24. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

3.25. Проверить, лежат ли точки $A(-1, 2, 3)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 3, 1)$ и $D(-2, 1, 0)$ в одной плоскости.

З а д а ч а 4

4.1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $2x-6y+13=0$.

4.2. Найти угол между прямой $2x+3y-1=0$ и прямой, проходящей через точки $M_1(-1;\,2)$, $M_2(0;\,3)$.

4.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\,4)$ параллельно прямой $2x+3y-4=0$.

4.4. Дан треугольник с вершинами в точках $A(-1,\,2)$, $B(0,\,1)$ и $C(1,\,4)$. Написать уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно противоположной стороне.

4.5. При каком значении параметра α прямые $(3\alpha+2)x+$ $+(1-4\alpha)y+8=0$ и $(5\alpha-2)x+(\alpha+4)y-7=0$ взаимно перпендикулярны?

4.6. Даны вершины треугольника $A(3,\,5)$, $B(-3,\,3)$ и $C(5,\,-8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины C.

4.7. При каких значениях α прямые $ax-2y-1=0$ и $6x-4y-3=0$:

а) параллельны; б) имеют одну общую точку?

4.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;\,3)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_1(0,\,-2)$, $M_2(3,\,5)$.

4.9. Дан треугольник с вершинами в точках $M_1(2,\,5)$, $M_2(-1,\,3)$ и $M_3(0,\,0)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины M_3.

4.10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-1,\,2)$ перпендикулярно прямой, соединяющей точки $M_2(2,\,3)$ и $M_3(0,\,-1)$.

4.11. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудаленную от двух данных точек $A(1,\,1)$ и $B(3,\,0)$.

4.12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\,1)$ параллельно прямой $4x+y-5=0$.

4.13. Найти расстояние между прямыми $3x-4y+25=0$ и $6x-8y-50=0$.

4.14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ 2,\ 3)$ параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1;\ 2,\ 4)$, $B(3;\ 5,\ 8)$.

4.15. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{aligned}\right\}$$

4.16. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 3)$ и точку пересечения прямых $2x-y-1=0,\ \ 3x+y-4=0$.

4.17. Найти значения параметров *a* и *d,* при которых прямая

$$\left.\begin{aligned} x&= 3+4t \\ y&= 1+4t \\ z&= -3+t \end{aligned}\right\}$$

принадлежит плоскости $ax+2y-4z+d=0$.

4.18. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1,\ 5)$, $B(-4,\ 3)$, $C(2,\ 9)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины A.

4.19. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-5y+2=0,\ 5x-2y+4=0$ и точку $A(1,\ 3)$.

4.20. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1,\ 1)$, $B(-2,\ 3)$, $C(4,\ 7)$. Написать уравнение медианы, проведенной из вершины А.

4.21. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,\ -1)$ параллельно прямой, соединяющей точки $M_1(2,-3)$ и $M_2(5,\ 1)$.

4.22. Даны уравнения сторон треугольника $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0,\ x-4y+11=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противоположной стороне.

4.23. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2, 3)$ ортогонально вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_2(4, 5)$.

4.24. Выяснить, принадлежат ли точки $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$ и $C(1,\ 2)$ одной прямой.

4.25. Даны точки $A(-1,\ 2,\ 3)$, $B(3,\ 1,\ 2)$ и $C(1,\ 3,\ 1)$. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC.

З а д а ч а 5

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Требуется найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнение прямой A_1A_4; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

5.1. $A_1(3,3,9)$, $A_2(6,9,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.
5.2. $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,9,9)$, $A_4(6,4,8)$.
5.3. $A_1(2,4,3)$, $A_2(7,6,3)$, $A_3(4,9,3)$, $A_4(3,6,7)$.
5.4. $A_1(9,5,5)$, $A_2(-3,7,1)$, $A_3(5,7,8)$, $A_4(6,9,2)$.
5.5. $A_1(0,7,1)$, $A_2(4,1,5)$, $A_3(4,6,3)$, $A_4(3,9,8)$.
5.6. $A_1(5,5,4)$, $A_2(3,8,4)$, $A_3(3,5,10)$, $A_4(5,8,2)$.
5.7. $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6)$, $A_3(4,2,0)$, $A_4(1,2,6)$.
5.8. $A_1(7,5,3)$, $A_2(9,4,4)$, $A_3(4,5,7)$, $A_4(7,9,6)$.
5.9. $A_1(6,6,2)$, $A_2(5,4,7)$, $A_3(2,4,7)$, $A_4(7,3,0)$.
5.10. $A_1(1,-3,1)$, $A_2(-3,2,-3)$, $A_3(-3,-3,3)$, $A_4(-2,0,-4)$.
5.11. $A_1(1,-1,6)$, $A_2(4,5,-2)$, $A_3(-1,3,0)$, $A_4(6,1,5)$.
5.12. $A_1(1,1,1)$, $A_2(3,4,0)$, $A_3(-1,5,6)$, $A_4(4,0,5)$.
5.13. $A_1(0,0,0)$, $A_2(5,2,0)$, $A_3(2,5,0)$, $A_4(1,2,4)$.
5.14. $A_1(7,1,2)$, $A_2(-5,3,-2)$, $A_3(3,3,5)$, $A_4(4,5,-1)$.
5.15. $A_1(-2,3,-2)$, $A_2(2,-3,2)$, $A_3(2,2,0)$, $A_4(1,5,5)$.
5.16. $A_1(3,1,1)$, $A_2(1,4,1)$, $A_3(1,1,7)$, $A_4(3,4,-1)$.
5.17. $A_1(4,-3,-2)$, $A_2(2,2,3)$, $A_3(2,-2,-3)$, $A_4(-1,-2,3)$.
5.18. $A_1(5,1,0)$, $A_2(7,0,1)$, $A_3(2,1,4)$, $A_4(5,5,3)$.
5.19. $A_1(4,2,-1)$, $A_2(3,0,4)$, $A_3(0,0,4)$, $A_4(5,-1,-3)$.
5.20. $A_1(0,0,2)$, $A_2(3,0,5)$, $A_3(1,1,0)$, $A_4(4,1,2)$.
5.21. $A_1(3,0,5)$, $A_2(0,0,2)$, $A_3(4,1,2)$, $A_4(1,1,0)$.
5.22. $A_1(1,1,0)$, $A_2(4,1,2)$, $A_3(0,0,2)$, $A_4(3,0,5)$.
5.23. $A_1(4,1,2)$, $A_2(1,1,0)$, $A_3(3,0,5)$, $A_4(0,0,2)$.

5.24. $A_1(0,0,0)$, $A_2(3,-2,1)$, $A_3(1,4,0)$, $A_4(5,2,3)$.

5.25. $A_1(3,1,0)$, $A_2(0,7,2)$, $A_3(-1,0,-5)$, $A_4(4,1,5)$.

Задача 6

Построить на плоскости кривую, приведя ее уравнение к каноническому виду.

6.1. $x^2+8x+2y+20=0$.

6.2. $3x^2-4y^2+18x+15=0$.

6.3. $x^2+2y^2-2x+8y+7=0$.

6.4. $x^2+8x+y+15=0$.

6.5. $x^2+y^2+4x-10y+20=0$.

6.6. $5x^2+9y-30x+18y+9=0$.

6.7. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

6.8. $9x^2-16y^2-5x-64y-127=0$.

6.9. $2x^2+8x-y+12=0$.

6.10. $x^2+4y^2-6y+3=0$.

6.11. $9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$.

6.12. $x^2-5x-y+7=0$.

6.13. $x^2-4y^2+6x+16y-11=0$.

6.14. $4x^2+8x-y+7=0$.

6.15. $9x^2+4y^2-18x=0$.

6.16. $x+2y^2-8y+3=0$.

6.17. $x^2+4y^2-6x+8y=3$.

6.18. $x-5y^2+10y-6=0$.

6.19. $x^2-4y^2+8x-24y=24$.

6.20. $x^2+6x+5=2y$.

6.21. $9x^2+10y^2+40y-50=0$.

6.22. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

6.23. $x-2y^2+12y-14=0$.

6.24. $y^2+2y+4x-11=0$.

6.25. $x^2+2y^2+2x=0$.

Задача 7

Построить поверхность, приведя ее уравнение к каноническому виду.

7.1. а) $z=1-x^2-y^2$; б) $z=4-x^2$.

7.2. а) $x^2+2x+2y^2+4z^2=0$; б) $y^2+5y+z=4$.

7.3. а) $x^2+y^2+4z^2+6x=0$; б) $x^2+z^2=2z$.

7.4. а) $2y^2+z^2=1-x$; б) $xy=4$.

7.5. а) $9x^2+4y^2-8y-z^2=32$; б) $x^2-y^2-6x=0$.

7.6. а) $x^2-2y^2+z^2+2z=0$; б) $z^2+4z-6y-20=0$.

7.7. а) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$; б) $y^2=4x+1$.

7.8. а) $z=2+x^2+y^2$; б) $z=1-x^2$.

7.9. а) $36x^2+16y^2-9z^2+18z=9$; б) $z^2-2z-8x-7=0$.

7.10. а) $x^2-y^2-z^2=0$; б) $y^2=4x-2$.

7.11. а) $x^2+y^2+z^2=2z$; б) $y=x^2$.

7.12. а) $x^2+3y^2-z^2+2z=2$; б) $x=1-z^2$.

7.13. а) $2x^2-4y^2+z^2=2z$; б) $x^2+5z=2x$.

7.14. а) $z=4-x^2-y^2$; б) $x^2+y^2=2y$.

7.15. а) $2y^2+x^2-4x-4z^2+4=0$; б) $z=(x-1)^2$.

7.16. а) $y^2-2y-z^2-x^2=0$; б) $x=y^2$.

7.17. а) $x^2+y^2-2y=2z-1$; б) $z^2+y^2=2z$.

7.18. а) $x^2+y^2=2z+6$; б) $x^2+z^2-6z=0$.

7.19. а) $9x^2+4y^2+8y-36z^2=32$; б) $2x^2+5y=10$.

7.20. а) $x^2+y^2+z^2=2z$; б) $z^2=7x$.

7.21. а) $5x^2+15y^2-4z^2+8z-24=0$; б) $4x^2-y^2=8$.

7.22. а) $4z^2=x^2+2y^2+2x+3$; б) $xy=4$.

7.23. а) $x^2-4y^2+z^2-8y=4$; б) $x^2+y^2-3=0$.

7.24. а) $x^2+y^2+2z=0$; б) $x^2-y^2+4=0$.

7.25. а) $x^2-2x+y^2+z^2=0$; б) $x=2-y^2$.

Типовой расчет № 2

Предел функции. Производная и ее применение к исследованию функций и построению графиков

Задача 1

Найти пределы функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}$.   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+1}{3x^3+3x^2-2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^{x+2}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2}$.   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-2x^3+1}{5x^3+4x+3}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.   г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+x-4}{3x^2+5x+2}$.   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+4x-12}{3x^6-4x^2+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$.   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{x+2}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$.   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2-6}{2x^4-x-12}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\,\mathrm{tg}\,x}$.   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$.   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-8x+1}{7x^5+4x^2+5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2-x-2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x-5}{5x^2-x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\frac{x}{2}-1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x+1)^2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{2x}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{4x^6+6x^3-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg} 2x}{\sin 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x^2-3}{4x^6+6x^3-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-4x^5}{8-6x-x^5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\frac{x}{3}}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

1.11. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^3-x-6}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^4+3}{2x^6+3x^2-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$.

1.12. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{20+x-x^2}{3x^2-11x-20}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^3+x-5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x\,\mathrm{tg}\,4x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$.

1.13. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5-5x^2-1}{24x^4-4x+7}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x\,\mathrm{ctg}3x$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

1.14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+5x^5-x^3+5}{3x^4-4x^3+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x\sin 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

1.15. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-5x^2}{1+4x+2x^2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\big(\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\big)$.

1.16. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-2x+1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x-3x^2}{1-3x+6x^3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\big(\ln(x-2)-\ln(x-1)\big)$.

1.17. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^2+x-2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}2x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\ln(x+a)-\ln x)$.

1.18. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-5}{2x^2-x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$.

1.19. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-4x-5}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x-\sin 2x}{x\sin^2 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)(\ln(2x+4)-\ln(2x+1))$.

1.20. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-x+2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+3)-\ln(2x-4))$.

1.21. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+3x^2}{2x^3-100x+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-1}{1-\cos 4x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

1.22. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^2+5}{3x^2+x+3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

1.23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

1.24. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\arcsin x-\operatorname{arctg}2x}{x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2-x}}$.

1.25. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+2x-12}{x^2-3x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^3+8}{100-x^3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 3x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+5)-\ln x)$.

Задача 2

Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии «б» дополнительно построить график функции.

2.1. а) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$. б) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{при } -\infty<x\le 1;\\ \dfrac{2}{x} & \text{при } 1<x<4;\\ x-3 & \text{при } x\ge 4.\end{cases}$

2.2. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. б) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } -\infty<x\le 0;\\ \sin x & \text{при } 1<x<\dfrac{\pi}{6};\\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x\ge\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$

2.3. а) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$. б) $f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ x-1 & \text{при} \quad 1<x\le 3; \\ x^2-3 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$

2.4. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$. б) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{2\pi}{x} & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{4}<x<\pi; \\ \sin x+2 & \text{при} \quad x\ge \pi. \end{cases}$

2.5. а) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$. б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -\infty<x\le 1; \\ 3^x & \text{при} \quad 0<x\le 2; \\ 6-x & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

2.6. а) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$. б) $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ x^2+2 & \text{при} \quad 1<x\le 2; \\ \dfrac{2}{x}+4 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

2.7. а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-x^3}$. б) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{при} \quad -\infty<x\le 1; \\ \dfrac{2}{x} & \text{при} \quad 1<x\le 4; \\ x-2 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$

2.8. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$. б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -\infty<x\le 3; \\ 3x-7 & \text{при} \quad 3<x\le 4; \\ 3+\sqrt{x} & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$

2.9. а) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$. б) $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad x \le 0; \\ 1-x & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ x^2-5 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$

2.10. а) $f(x)=\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$. б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{4}{\pi}x & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

2.11. а) $f(x)=\dfrac{2}{4-x^2}$. б) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{при} \quad x \le 0; \\ x & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ \sin x & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$

2.12. а) $f(x)=e^{\frac{1}{4x-2}}$. б) $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при} \quad x \le 1; \\ x & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ x-2 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

2.13. а) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$. б) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{при} \quad x \le 0; \\ 1+x & \text{при} \quad 0 < x < 1; \\ x & \text{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$

2.14. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+4}$. б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \ x \le 0; \\ 1 & \text{при} \ 0 < x < 1; \\ 2-x & \text{при} \ x \ge 1. \end{cases}$

2.15. а) $f(x)=2^{-\frac{1}{x+3}}$. б) $f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad x \le 0; \\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ x^2+1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

2.16. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x}$. б) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ 1 & \text{при} \quad 0<x\le 1;\\ x & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$

2.17. а) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-9}$. б) $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{при} \quad x\le 0;\\ x^2 & \text{при} \quad 0<x<1;\\ x-1 & \text{при} \quad x\ge 1.\end{cases}$

2.18. а) $f(x)=4^{\frac{1}{4-x}}$. б) $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при} \quad -\infty<x\le 0;\\ 1 & \text{при} \quad 0<x\le 1;\\ 1-x & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$

2.19. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$. б) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ -2 & \text{при} \quad 0<x\le 1;\\ x-2 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$

2.20. а) $f(x)=\dfrac{\sin(2-x)}{2-x}$. б) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x\le 1;\\ x & \text{при} \quad 1<x\le 2;\\ 1-x^2 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

2.21. а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot(x^2-9)}{x^2-3x}$. б) $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{при} \quad -\infty<x\le 2;\\ x-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4;\\ \sqrt{x}+1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$

2.22. а) $f(x)=5^{\frac{1}{x-2}}$. б) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{при} \quad -\infty<x\le 0;\\ -x^2+9 & \text{при} \quad 0<x\le 3;\\ x-3 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$

2.23. а) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{2x^2-x^3}$. б) $f(x)=\begin{cases}x & \text{при} \quad -\infty<x\le 0;\\ -\sqrt{x} & \text{при} \quad 0<x\le 4;\\ (x-4)^2 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$

2.24. а) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$. б) $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{при} \quad -\infty < x \le 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

2.25. а) $f(x)=3^{\frac{1}{1-x}}$. б) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при} \quad -\infty < x \le 0; \\ 1-x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ \ln x & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

Задача 3

Найти производные функций.

3.1. а) $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$; б) $y=x^{\arcsin x}$;

в) $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$.

3.2. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}$; б) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$;

в) $x^y-y^x=0$.

3.3. а) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; б) $y=x^x$;

в) $e^x+e^y-2^{xy}-3=0$.

3.4. а) $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$; б) $y=x^{\ln x}$;

в) $\sin\left(y-x^2\right)-\ln\left(y-x^2\right)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$.

3.5. а) $y = \arcsin\dfrac{2x^3}{1+x^6}$; б) $y = x^{\sin x}$;

в) $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0.$

3.6. а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

в) $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$

3.7. а) $y = \arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; б) $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$;

в) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

3.8. а) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$; б) $y = x^2 e^{x^2} \sin 2x$;

в) $x^4 + y^4 = x^2 y^2.$

3.9. а) $y = e^x - \sin e^x \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cos e^x$; б) $y = x^2 e^{x^2} \ln x$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

3.10. а) $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$; б) $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$;

в) $2y \ln y = x.$

3.11. а) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \cos x + \dfrac{1}{3}\cos^2 x$; б) $y = (\ln x)^x$;

в) $e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$

3.12. а) $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{(x-2^2\cdot\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;

в) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

3.13. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$; б) $y=\dfrac{(x+1)^3\cdot\sqrt[4]{4-2x}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;

в) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

3.14. а) $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$; б) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

в) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

3.15. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3x-x^2}{1-3x^2}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$;

в) $2x+2^y=2^{x+y}$.

3.16. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{e^{2\sin x}}{4}$; б) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

в) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

3.17. а) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2}-\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

в) $x^2+y^2=r^2$.

3.18. а) $y=\sqrt{2x+1}\,(\ln(2x+1)-2)$; б) $y=2x^{\sqrt{x}}$;

в) $\operatorname{arctg}^{\frac{y}{x}}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3.19. а) $y=\dfrac{1+\ln\cos x}{\cos x}$;   б) $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$;

в) $y^3-3y+3ax=0$.

3.20. а) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$;   б) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$;

в) $\cos(xy)=x$.

3.21. а) $y=\arccos\sqrt{1-e^x}$;   б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$;

в) $y^2\cos x=a^2\sin 3x$;

3.22. а) $y=\log_2\left(\sin^2 x\right)$;   б) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $y^2-3y+2x^3=0$.

3.23. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$;   б) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$;

в) $e^y+xy=1$.

3.24. а) $y=\ln\left(2x^3+3x^2\right)$;   б) $y=(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$;

в) $x\sin y+y\sin x=0$.

3.25. а) $y=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$;   б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\cos\sqrt{x}}$;

в) $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$.

З а д а ч а 4

Найти производные второго порядка от функций:

4.1. $y = \cos^2 x$.

4.2. $y = \operatorname{arctg} x^3$.

4.3. $y = \log_2 \sqrt[3]{1 - x^4}$.

4.4. $y = e^{-x^2}$.

4.5. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4.6. $y = -\dfrac{22x}{x + 5}$.

4.7. $y = \dfrac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 3)$.

4.8. $y = \dfrac{1}{3} x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{1 - x^2} + x \arcsin x \cdot$

4.9. $y = -\dfrac{1}{9} x \cdot \sin 3x - \dfrac{2}{27} \cos 3x$.

4.10. $y = \sin^2 x$.

4.11. $y = \operatorname{tg} x$.

4.12. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

4.13. $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)^3$.

4.14. $y = x \cdot e^{x^2}$.

4.15. $y = \dfrac{1}{1 + x^3}$.

4.16. $y = \left(1 + x^2\right) \operatorname{arctg} x$.

4.17. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

4.18. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

4.19. $y = e^{\sqrt{x}}$.

4.20. $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$.

4.21. $y = \arcsin(a \cdot \sin x)$.

4.22. $y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$.

4.23. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4.24. $y = \ln\left(x^2 + \sqrt{1 + x^4}\right) \cdot$

4.25. $y = x \ln x$.

4.26. $y = \dfrac{11}{x - 3}$.

З а д а ч а 5

Найти производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически:

5.1. $x = t^2 + 2;\ \ y = \frac{1}{3}t^3 - 1$.

5.2. $x = \arcsin t;\ \ y = \sqrt{1 - t^2}$.

5.3. $x = at^2;\ \ y = bt^3$.

5.4. $x = \cos t;\ \ y = \sin t$.

5.5. $x = a(t - \sin t);\ \ y = a(1 - \cos t)$.

5.6. $x = a\cos^2 t;\ \ y = a\sin^2 t$.

5.7. $x = \ln t;\ \ y = t^2 - 1$.

5.8. $x = \arcsin t;\ y = \ln\left(1 - t^2\right)$.

5.9. $x = at \cdot \cos t;\ \ y = at \cdot \sin t$.

5.10. $x = \arccos\sqrt{t};\ \ y = \sqrt{t - t^2}$.

5.11. $x = \frac{1}{\cos t};\ \ y = \mathrm{tg}\, t$.

5.12. $x = \mathrm{arctg}\, t;\ \ y = \ln\left(1 + t^2\right)$.

5.13. $x = a\cos^3 t;\ \ y = a\sin^3 t$.

5.14. $x = R\sin t + \sin Rt;\ \ y = R\cos t + \cos Rt$.

5.15. $x = t^2 + 2t;\ \ y = \ln(t + 1)$.

5.16. $x = 1 + e^{\alpha t};\ \ y = \alpha t + e^{-\alpha t}$.

5.17. $x = \cos t + t\sin t;\ \ y = \sin t - t\cos t$.

5.18. $x = 2\cos t;\ \ y = \sin t$.

5.19. $x = t^2;\ \ y = t + t^3$.

5.20. $x = e^{2t};\ \ y = e^{3t}$.

5.21. $x = 2\cos^2 t;\ \ y = 2\sin^2 t$.

5.22. $x = 1 + e^t;\ \ y = t + e^{-t}$.

5.23. $x = 2\sin t + \sin 2t;\ \ y = 2\cos t + \cos 2t$.

5.24. $x = e^t \cos t;\ \ y = e^t \sin t$.

5.25. $x = e^{2t} + 4;\ \ y = e^{3t} - 5$.

Задача 6

Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

6.1. а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{x+2}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

6.2. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\beta x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

6.3. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

6.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1+x)}$.

6.5. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

6.6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x$.

6.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$.

6.8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}$.

6.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\sin\dfrac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

6.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(1+x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

6.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^3}}$.

6.12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)x$.

6.13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

6.14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-1}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{1000}}{2x^{100}+1}$.

6.15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{5x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{1+x}}$.

6.16. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

6.17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3^x}$.

6.18. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}\sin\frac{1}{x}}$.

6.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^{10}}}$.

6.20. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

6.21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9}{3^x}$.

6.22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{a}{x}$.

6.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}+x-1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg}x}$.

6.24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

6.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

З а д а ч а 7

Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке x_0.

7.1. xe^{2x}, $x_0=-1$. **7.2.** $\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x_0=0$.

7.3. e^x, $x_0 = -1$.

7.4. 4^x, $x_0 = 0$.

7.5. $\sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

7.6. $x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, $x_0 = 1$.

7.7. $\frac{1}{x+8}$, $x_0 = 0$.

7.8. $x \cos x$, $x_0 = 0$.

7.9. $\frac{x}{x-1}$, $x_0 = 2$.

7.10. $e^{\sin x}$, $x_0 = 0$.

7.11. $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $x_0 = 0$.

7.12. $\ln(1 + \sin x)$, $x_0 = 0$.

7.13. $\ln(5 - 4x)$, $x_0 = 0$.

7.14. 3^x, $x_0 = 0$.

7.15. $\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

7.16. e^{5x-1}, $x_0 = 0$.

7.17. $\frac{1}{x+2}$, $x_0 = -3$.

7.18. $\arcsin x$, $x_0 = 0$.

7.19. $x^3 \ln x$, $x_0 = 1$.

7.20. $\ln x$, $x_0 = 1$.

7.21. $x^5 - 5x^3 + x$, $x_0 = 2$.

7.22. $\ln(x + 5)$, $x_0 = 0$.

7.23. $\sin \frac{x}{3}$, $x_0 = 0$.

7.24. xe^x, $x_0 = 0$.

7.25. $\frac{1}{3-2x}$, $x_0 = 0$.

Задача 8

Исследовать функцию и построить ее график.

8.1. $y = \frac{1-x^2}{x^2}$.

8.2. $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

8.3. $y = \frac{4x^2+1}{x}$.

8.4. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

8.5. $y = \dfrac{x^3}{2(1 + x)^2}$.

8.6. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$.

8.7. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$.

8.8. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

8.9. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

8.10. $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$.

8.11. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

8.12. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.

8.13. $y = \dfrac{2 + x^3}{x^2}$.

8.14. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$.

8.15. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

8.16. $y = \dfrac{4x^3}{1 - x^3}$.

8.17. $y = \dfrac{x^2}{1 - x}$.

8.18. $y = \dfrac{x^4}{1 - x^2}$.

8.19. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

8.20. $y = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$.

8.21. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

8.22. $y = \dfrac{4x^3}{x^3 - 1}$.

8.23. $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$.

8.24. $y = x^2 e^{-x}$.

8.25. $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

З а н я т и е 1

Комплексные числа и действия над ними. Простейшие приемы интегрирования

Аудиторная работа

1.1. Выполнить действия:

а) $(2+3i)(4-i)+5+4i;$ **б)** $(2+5i)^2+(3-i)^2+\dfrac{3+4i}{2-3i}.$

в) $\dfrac{1-3i}{1+2i}+4i-1.$ **г)** $\dfrac{(8-i)^2}{3+5i}+3i-4.$

2.1. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме записи:

а) $1+i.$ **б)** $-i.$ **в)** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$ **г)** $5-4i.$

3.1. Выполнить действия:

а) $(1-i)^5.$ **б)** $(2+2i)^4.$ **в)** $(-i)^{10}.$

г) $\sqrt[3]{3+3i}.$ **д)** $\sqrt{i}.$ **е)** $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}.$

4.1. Пользуясь таблицей интегралов, свойствами неопределенного интеграла и основными правилами интегрирования, найти неопределенные интегралы:

а) $\int(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)dx.$ **б)** $\int\dfrac{(1+4\sqrt[3]{x})^2}{x}dx.$

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

г) $\int \frac{1+3x^2}{x^2(1+2x^2)} dx.$

д) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

е) $\int \frac{4x^2+2x-3}{x^2} dx$.

ж) $\int \sin 3x \cos x \, dx$.

з) $\int (2x+3)^5 \, dx$.

и) $\int \cos 4x \cos 8x \, dx$.

к) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx$.

5.1. Найти неопределенные интегралы поднесением под знак дифференциала:

а) $\int \cos x \, 2^{\sin x} \, dx$.

б) $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)^4}$.

в) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$.

г) $\int \frac{4x+4}{x^2+2x} dx$.

д) $\int \frac{\sqrt{tgx}dx}{\cos^2 x}$.

е) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

ж) $\int xe^{-x^2} \, dx$.

з) $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x} dx$.

и) $\int \frac{dx}{x \ln 4x}$.

к) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$.

6.1. Найти неопределенные интегралы и сделать проверку дифференцированием:

а) $\int \cos^2(3x+\pi/6) \, dx$.

б) $\int \frac{3^x \, dx}{1+9^x}$.

в) $\int x^2 \cos(3x^3+1) \, dx$.

г) $\int x(5+x)^4 \, dx$.

д) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

е) $\int \frac{e^x \, dx}{1+e^{2x}}$.

Домашнее задание

7.1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int e^{4x-3}\,dx$.

б) $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$.

в) $\int (x^2-4)(x+2)\,dx$.

г) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin^2 2x}$.

д) $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$.

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln 2x}}$.

ж) $\int \frac{dx}{x^2-4x+20}$.

з) $\int \frac{4x-5}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$.

и) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}$.

к) $\int \cos^2 3x\,dx$.

Ответы

4. а) $\frac{x^2}{2}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-2x+C.$

б) $\ln|x|+24\sqrt[3]{x}+24\sqrt[3]{x^2}+C.$

в) $\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+C.$

г) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}x\sqrt{2}-\frac{1}{x}+C.$

д) $x-\sin x+C.$

е) $4x+2\ln|x|+\frac{3}{x}+C.$

ж) $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

з) $\frac{(2x+3)^6}{12}+C.$

и) $\frac{1}{24}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x+C.$

к) $-\mathrm{ctg}x-\frac{1}{2}x+C.$

5. а) $2^{\sin x}+C.$

б) $-\frac{1}{6(1+2\ln x)^3}+C.$

в) $\ln\left|x^2+3x+2\right|+C.$

г) $2\ln\left|x^2+2x\right|+C.$

д) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+C.$

е) $\ln\left|\mathrm{arctg}x\right|+C.$

ж) $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

з) $-\dfrac{1}{6\cos^3 2x}+\dfrac{1}{2\cos 2x}+C.$

и) $\ln\left|\ln 4x\right|+C.$

к) $\dfrac{5}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+12\mathrm{arctg}(x-2)+C.$

6. а) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}\sin 6x+C.$

б) $\dfrac{\mathrm{arctg}3^x}{\ln 3}+C.$

в) $\dfrac{1}{9}\sin\left(3x^3+1\right)+C.$

г) $\dfrac{(x+5)^6}{6}-(x+5)^5+C.$

д) $\dfrac{1}{2}\arcsin x^2+C.$

е) $\mathrm{arctge}^x+C.$

7. а) $\dfrac{1}{4}e^{4x-3}+C\,.$

б) $\dfrac{1}{3}(x^2-4)^{3/2}+C\,.$

в) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3}-2x^2-8x+C\,.$

г) $\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\sin 2x+C\,.$

д) $-\dfrac{1}{3}e^{-x^3}+C\,.$

ж) $2\sqrt{\ln 2x+}C\,.$

з) $\dfrac{1}{4}\mathrm{arctg}\dfrac{x+2}{4}+C\,.$

и) $-4\sqrt{3+2x-x^2}-\arcsin\dfrac{x-1}{2}+C\,.$

к) $3\sqrt{x^2-4x+8}-5\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right|+C\,.$

л) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\cos 6x}{12}+C\,.$

З а н я т и е 2

Интегрирование с помощью замены переменой в неопределенном интеграле

Аудиторная работа

2.1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int x(3x+4)^5\ dx$.

б) $\int x\sqrt{2x+3}\,dx$.

в) $\int \frac{\ln x\sqrt{2+\ln^2 x}\ dx}{x}$.

г) $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx.$

д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

е) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

ж) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

з) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

к) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

л) $\int \frac{2^{1/x}}{x^2}dx$.

м) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

н) $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx}{2-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}$.

о) $\int \frac{dx}{3^x+1}$.

п) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

р) $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx$.

с) $\int \frac{\sin x+x\cos x}{x^2\sin^2 x}dx$.

т) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

у) $\int 4^{x\ln x}(1+\ln x)\,dx$.

ф) $\int \frac{2x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2.2. Найти неопределенные интегралы и сделать проверку дифференцированием:

а) $\int \frac{\cos x - x\sin x}{x\cos x}dx.$ **б)** $\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$

в) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2}dx.$ **г)** $\int \frac{2x(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x^2}{x^2(1+x^2)\operatorname{arctg} x}dx.$

Домашнее задание

2.3. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{4\sin 2x\,dx}{4+\sin^2 x}.$ **б)** $\int \frac{\ln x + 1}{1 + x\ln x}dx.$

в) $\int \frac{dx}{1+\mathrm{e}^x}.$ **г)** $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$

д) $\int \frac{x(2\ln x + 1)}{4 + x^2 \ln x}dx.$ **е)** $\int \frac{2^{1/x^2}\,dx}{x^3}.$

ж) $\int x(4x+5)^3\,dx.$ **з)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}.$

О т в е т ы

2.1. а) $\frac{(3x+4)^7}{63} - \frac{2(3x+4)^6}{27} + C.$ **б)** $\frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{20} - \sqrt{(2x+3)^3} + C.$

в) $\frac{1}{3}\left(1+\ln^2 x\right)^{\frac{3}{2}} + C.$ **г)** $\ln\left|4+\sin^2 x\right| + C.$

д) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C.$ **е)** $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C.$

ж) $-\sqrt{1+2\cos x} + C.$ **з)** $\frac{1}{a^2}\ln\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2a^2}\ln x^2 + C.$

и) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.$ **к)** $2e\sqrt{x}+C.$

л) $-\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2}+C.$ **м)** $\sin(\ln x)+C.$

н) $-\sqrt{2}\ln\left|2-\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right|+C.$ **о)** $x-\dfrac{1}{\ln 3}\ln\left(1+3^x\right)+C.$

п) $2\left(\dfrac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\sqrt{x+1}\right)+C.$ **р)** $\ln|x\ln x|+C.$ **с)** $-\dfrac{1}{x\sin x}+C.$

т) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C.$ **у)** $4^{x\ln x}\ln 4+C.$

ф) $-2\sqrt{1-x^2}+\arccos^2 x+C.$ **2.2.** **а)** $\ln|x\cos x|+C.$

б) $2\arcsin\dfrac{x}{2}+\sin 2\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)+C.$ **в)** $\dfrac{2\sqrt{\mathrm{arctg}3x}}{3}+C.$

г) $2\ln x+\ln|\mathrm{arctg}x|+C.$

2.3. а) $\ln\left|4+\sin^2 x\right|+C.$ **б)** $\ln|1+x\ln x|+C.$

в) $\ln\dfrac{e^x-1}{e^x}+C.$ **г)** $2(\frac{1}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x+2\sqrt{x})-4\ln(\sqrt{x}+1)+C.$

д) $\dfrac{1}{2}\ln\left|4+x^2\ln x\right|+C.$ **е)** $-\dfrac{1}{2}2^{1/x^2}\ln 2+C.$

ж) $\dfrac{1}{16}(\dfrac{(4x+5)^5}{5}-\dfrac{5(4x+5)^4}{4})+C.$ **з)** $\dfrac{1}{2}\arcsin(2\ln x)+C.$

З а н я т и е 3

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Аудиторная работа

3.1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int (2x+3)\mathrm{e}^{4x}\,dx.$ **б)** $\int \sqrt{x}\ln 4x\,dx.$

в) $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx.$ **г)** $\int (x^2+1)\cos(3x+1)\,dx.$

д) $\int e^{-x}\cos 2x\,dx.$ **е)** $\int \ln^2 x\,dx.$

ж) $\int \sin(\ln x)\,dx.$ **з)** $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$

и) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}.$ **к)** $\int x^2 3^x\,dx.$

л) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}.$ **м)** $\int (3x+1)\cos^2 4x\,dx.$

о) $\int x^2\ln(1+x)\,dx.$ **п)** $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,.$

Домашнее задание

3.2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int (x^2+2x)\cos 2x\,dx\,.$ **б)** $\int e^{2x}\sin x\,dx\,.$

в) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx\,.$ **г)** $\int \arccos x\,dx\,.$

д) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx\,.$ **е)** $\int x\sin x\cos x\,dx\,.$

Ответы

3.1. а) $\frac{2x+3}{4}e^{4x}-\frac{1}{8}e^{4x}+C.$ **б)** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln 4x-\frac{2}{3}\right)+C.$

в) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C.$

г) $\frac{x^2+1}{3}\sin(3x+1)+\frac{1}{9}x\cos(3x+1)-\frac{2}{27}\sin(3x+1)+C.$

д) $\frac{e^{-x}}{2}(2\sin 2x-\cos x)+C.$ **е)** $x\left(\ln^2 x-\ln x+1\right)+C;$

ж) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C;$ **з)** $-\frac{1}{4x^4}\left(\ln x+\frac{1}{4}\right)+C.$

и) $2\arcsin x\sqrt{1+x}+4\sqrt{1-x}+C.$

к) $\frac{x^2 3^x}{\ln 3}-\frac{2x3^2}{\ln^2 3}+\frac{3^x}{\ln^3 3}+C.$

л) $-2\arcsin\sqrt{x}\sqrt{1-x}+4\sqrt{x}+C.$

м) $\frac{3}{4}x^2+\frac{x}{2}+\frac{3x+1}{6}\sin 8x+\frac{3}{144}\cos 8x+C.$

н) $\frac{x^3}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\ln|x+1|+C.$

о) $x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$

3.2. а) $\frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

б) $\frac{2}{3}e^{2x}\sin x-\frac{1}{3}e^{2x}\cos x+C.$ **в)** $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

г) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **д)** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

е) $\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x+C$.

З а н я т и е 4

Интегрирование рациональных функций

Аудиторная работа

4.1. Записать разложение рациональной дроби на простейшие:

а) $\frac{3x-2}{x^3-2x^2}$. **б)** $\frac{4x+5}{(x^2+1)^2(x-3)^2}$.

в) $\frac{x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x-2)^2}$.

4.2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx.$ **б)** $\int\frac{2x^2+3}{x^4-5x^2+6}dx$.

в) $\int\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$. **г)** $\int\frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$.

д) $\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$. **е)** $\int\frac{x^3+3}{x^3-8}dx$.

ж) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+4)}$. **з)** $\int\frac{x^4+3x+1}{x^4-1}dx$.

и) $\int\frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}dx$. **к)** $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$.

Домашнее задание

4.3. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{6x^4 - 21x^2 + 3x + 24}{(x^2 + x - 2)(x+1)} dx$. **б)** $\int \frac{dx}{x^3 + x^2}$.

в) $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx$. **г)** $\int \frac{9x - 9}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx$.

д) $\int \frac{5x\,dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$. **е)** $\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 21x^2 - 26}{(x+3)(x^2 - 5x + 4)} dx$.

О т в е т ы

4.2. а) $\frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C.$

б) $\frac{9}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}\right| + \frac{7}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}\right| + C.$

в) $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x-2| + \ln|x+2| + C.$

г) $\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2 + 2x + 2\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C.$

д) $\frac{1}{2}\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C.$

е) $x + \frac{11}{8}\ln|x-2| - \frac{11}{16}\ln\left|x^2 + 2x + 4\right| - \frac{11}{8\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$

ж) $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2 + 1\right| + \frac{1}{24}\ln\left|x^2 + 4\right| + C.$

з) $x + \frac{5}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln\left|x^2 + 1\right| - \operatorname{arctg}x + C.$

и) $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C.$

к) $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\dfrac{9}{x-1}+C.$

4.3. а) $3x^2-12x+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+10\ln|x+2|+C$.

б) $\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|-\dfrac{1}{x}+C$.

в) $2\ln|x+2|-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

г) $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|-\ln|x+1|+2\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{3}+C$.

д) $\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C$.

е) $x^2+x+4\ln|x-1|+\ln|x+3|-2\ln|x-4|+C$.

З а н я т и е 5

Интегрирование тригонометрических выражений и простейших иррациональных функций

Аудиторная работа

5.1. Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$.

б) $\int \cos 8x \cos 3x\, dx$.

в) $\int \sin^4 2x\, dx$.

г) $\int \cos^5 3x\, dx$.

д) $\int \sin^3 2x \cos^5 2x\, dx$.

е) $\int \sin^3 3x \cos^3 3x\, dx$.

ж) $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx$.

з) $\int \operatorname{tg}^3 2x\, dx$.

и) $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

к) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^4 x}$.

л) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

м) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

н) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 12\cos^2 x}$.

о) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

5.2. Найти неопределенные интегралы от иррациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{3+x}}$.

б) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

в) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.

г) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

д) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

ж) $\int \sqrt{x(1-x^2)}\,dx$.

з) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

и) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

к) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$.

Домашнее задание

5.3. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \sin^3 x\cos^8 x\,dx$.

б) $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx$.

в) $\int \cos^5 x\sin x\,dx$.

г) $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x\,dx$.

д) $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$.

е) $\int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x\cos x}$.

ж) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}dx$.

з) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}dx$.

и) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

к) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Ответы

5.1. а) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

б) $\frac{1}{22}\sin 11x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$.

в) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$.

г) $\frac{1}{3}\left(\sin 3x-\frac{2}{3}\sin^3 3x+\frac{1}{5}3x\right)+C$.

д) $-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^6 2x}{6}-\frac{\cos^8 2x}{8}\right)+C$.

е) $-\frac{1}{48}\left(\cos 6x-\frac{\cos^3 6x}{3}\right)+C$.

ж) $-\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{1}{64}\cos 4x+C$.

з) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$.

и) $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg} x+x+C$.

к) $-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$.

л) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C$.

м) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+1|-\frac{1}{4}\ln|\operatorname{tg}^2 x+1|+\frac{1}{2}x+C$.

н) $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+6}{\operatorname{tg} x-6}\right|+C$.

о) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

5.2. а) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3+x}{2}}+C$.

б) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+C.$

в) $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[6]{x}}{2}+C.$

г) $10\left(-\dfrac{1}{4t^4}+\dfrac{1}{3t^3}-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{1}{t}+\ln|t|-\ln|t+1|\right)+C$, где $t=\sqrt[10]{x}$.

д) $\dfrac{3}{8}t^{16}-\dfrac{6}{5}t^{10}+\dfrac{6}{7}t^7+\dfrac{3}{2}t^4+C,\quad t=\sqrt[6]{1+x}$.

е) $\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|+C$, где $t=\sqrt[6]{2x+1}$.

ж) Не берущийся.

з) $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{2t^3}{3}+t\right)+C$, где $t=\sqrt{\dfrac{1-x^4}{x^4}}$.

и) $12\left(\dfrac{t^7}{7}-\dfrac{t^4}{4}\right)+C$, где $t=\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}$.

к) $6t+2\ln|t-1|-\ln|t^2+t+1|-4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{3}+C$, где $t=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$.

5.3. а) $\dfrac{1}{11}\cos^{11}x-\dfrac{1}{9}\cos^9 x+C$.

б) $\dfrac{1}{16}x-\dfrac{1}{192}\sin 12x-\dfrac{1}{144}\sin^3 6x+C$.

в) $-\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$.

г) $\dfrac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^8 2x}-\dfrac{5}{36}\sqrt[5]{\sin^{18} 2x}+C$.

д) $-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}{\operatorname{tg}x/2+3}\right|+C$. **е)** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x-1}{2\operatorname{tg}x}\right|+C$.

ж) $2\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C$.

з) $3\sqrt[3]{x+1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$.

и) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

к) $\frac{3}{2}x^{2/3}+6x^{1/6}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

Занятие 6

Вычисление определенных интегралов

Аудиторная работа

6.1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$. **б)** $\int_0^3 \frac{x^2dx}{4+x^3}$.

в) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{1/x^2}\,dx$. **г)** $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

д) $\int_1^e \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$. **е)** $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$.

ж) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$. **з)** $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

и) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

к) $\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+2}dy$.

л) $\int\limits_0^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

м) $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

н) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

о) $\int\limits_0^\pi (2x+1)\cos x\,dx$.

п) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$.

р) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\,dx$.

с) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$.

т) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

у) $\int\limits_2^3 \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$.

ф) $\int\limits_0^1 \frac{t^5+1}{16-t^4}dt$.

Домашнее задание

6.2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

б) $\int\limits_1^e x\ln^2 x\,dx$.

в) $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

г) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

д) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

е) $\int\limits_1^e \ln^3 x\,dx$.

ж) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

з) $\int\limits_{-2}^2 \frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}dx$.

и) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

к) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

О т в е т ы

6.1. а) $\frac{45}{4}$. **б)** $\frac{1}{3}\ln\frac{31}{4}$. **в)** $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$.

г) $\frac{\pi}{4}$. **д)** $\sin 1$. **е)** $2-\ln 5$.

ж) 0. **з)** π. **2.** **6.2. а)** $\frac{\pi}{2}-1$.

б) $\frac{1}{4}(e^2-1)$. **в)** $\frac{32}{3}$. **г)** 2.

д) $\frac{1}{5}\ln 112$. **е)** $6-2e$. **ж)** $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$.

з) 0. **и)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **к)** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

З а н я т и е 7

Приложения определенных интегралов

Аудиторная работа

7.1. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\ln x, \quad x=e; \quad x=e^3; \quad y=0.$

б) $y=x^2+2x, \quad y=x+2.$

в) $y^2=2px; \quad y^2=\frac{4}{p}(x-p)^3,\ p>0.$

г) $x^2+y^2=a^2; \quad x^2+y^2-2ay=a^2,\ y=a.$

д) $x^2-y^2=a^2; \quad y^2=\frac{3}{2}ax;.$

е) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$.

ж) $x = 2(t - \sin t)$; $y = 2(1 - \cos t)$, осью Ox.

з) $r = a(1 + \sin\varphi)$.

и) $r = \sqrt{3}\sin\varphi$; $r = 1 - \cos\varphi$ (ввн кардиоиды).

к) $r = a\cos 3\varphi$.

7.2. Найти длину дуги кривой:

а) $y^2 = 4x$, $2 \le x \le 3$.

б) $y = \ln x$; $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

в) $y = \ln\cos x$; $0 \le x \le \pi/4$.

г) $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

д) $x = R\cos t$; $y = R\sin t$.

е) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

ж) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

з) $r = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

7.3. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми, около указанной оси:

а) $y^2 = 4x$, $x = 1$, Ox.

б) $y = x\,\mathrm{e}^x$, $x = 1, y = 0$; Ox.

в) $y = x^2$, $y^2 = x$; Oy.

г) $y = 2x - x^2$; $y = 0$, Oy.

д) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, Ox.

Домашнее задание

7.4. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = 0, \quad x \in \left[0, \ \frac{\pi}{2}\right]$.

б) $y = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x}, \quad y = 0$.

в) $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3$.

г) $x = t^2 - 1; \quad y = t^3 - t$.

д) $r = a\cos 5\varphi$.

е) $r = a\sin 2\varphi$.

Найти длину дуги кривой:

ж) $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \le x \le 1/2$.

з) $x = R(\cos t + t\sin t), \quad y = R(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le \pi$.

и) $\rho = 1/\varphi; \quad 3/4 \le \varphi \le 4/3$.

Найти объем тела вращения:

к) $x^2 - y^2 = a^2; \quad x = a + h \quad (h > 0), \quad Ox$.

л) $y = \arcsin x, \quad 0 \le x \le 1, \quad Ox$.

м) $x = a\cos t, \quad y = a\sin 2t, \quad Ox$.

О т в е т ы

7.4. а) $2 - \sqrt{2}$. **б)** 4. **в)** $\frac{72\sqrt{3}}{5}$. **г)** 8/15.

д) $\frac{\pi a^2}{4}$. **е)** $\frac{\pi a^2}{4}$. **ж)** $\ln 3 - \frac{1}{2}$. **з)** $\frac{\pi^2 R}{2}$.

и) $\ln\frac{3}{2} + \frac{5}{12}$. **к)** $\frac{\pi h^2}{3}(3a + h)$. **л)** $\pi(\frac{\pi^2}{4} - 2)$. **м)** $\frac{8}{15}\pi a^3$.

З а н я т и е 8

Несобственные интегралы

Аудиторная работа

8.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

б) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

в) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$.

д) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$.

е) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$.

ж) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

з) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

и) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{2x+1}{\sin^2 x}\,dx$.

к) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

л) $\int\limits_{0}^{2/\pi} \frac{\cos 1/x}{x^2}\,dx$.

м) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

8.2. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2+4x+3}$.

б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

в) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sin^2 x}$.

г) $\int\limits_{0}^{3} \frac{\cos 1/x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

д) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$.

е) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Домашнее задание

8.3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

б) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

в) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} dx.$

г) $\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

д) $\int_{0}^{1} x \ln x\,dx$.

е) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

ж) $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

Ответы

8.1. а) 0. **б)** Расходится. **в)** $\frac{1}{2}$.

г) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **д)** Расходится. **е)** Расходится.

ж) Расходится. **з)** $\frac{\pi}{2}$. **и)** Расходится.

к) $2\sqrt{\ln 2}$. **л)** Расходится. **м)** $\frac{16}{3}$.

8.2. а) Сходится. **б)** Расходится. **в)** Расходится.

г) Сходится. **д)** Расходится. **е)** Сходится.

8.3. а) Расходится. **б)** $\frac{3\pi^2}{32}$. **в)** $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

г) $\frac{8}{3}$. **д)** $-\frac{1}{4}$. **е)** Расходится. **ж)** $-\frac{1}{e}$.

З а н я т и е 9

Частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных. Производные и дифференциалы высших порядков

Аудиторная работа

9.1. Найти частные производные от заданных функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x+y}$. **б)** $z = \sqrt{x/y + 2xy + x}$.

в) $z = (x-1)^{\cos y}$. **г)** $z = (x+2y)\cos^2\dfrac{x}{y^2}$.

д) $u = \dfrac{xy}{z}\ln(x^2+y^2+z^2)$. **е)** $u = (x-2y+3z)^2 e^{\frac{xy^2}{z^2}}$.

9.2. Найти полный дифференциал:

а) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$. **б)** $z = \arcsin(x^2 y)$.

в) $z = \sqrt{\dfrac{y-x^2}{x-y^2}}$. **г)** $z = x^{y^2}$.

д) $u = \ln\left(\dfrac{x+y}{z}+1\right)$. **е)** $u = (xy)^z$.

9.3. Найти частные производные второго порядка:

а) $z = \ln(x^2+y^2)$. **б)** $z = \dfrac{1}{xy}$.

в) $z = e^{xy}$. **г)** $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

д) $z = \dfrac{\cos xy}{y}$. **е)** $z = \dfrac{1}{2x-3y}$.

9.4. Найти полные дифференциалы второго порядка:

а) $z = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 3$. **б)** $z = \dfrac{x}{y}$.

в) $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$. **г)** $z = e^{x \sin y}$.

д) $z = \ln(x^2 - y^2)$. **е)** $z = \dfrac{1}{(x - y)^2}$.

Домашнее задание

9.5. а) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$. Найти dz.

б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

в) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$. Найти dz.

г) $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + z^2}$ Найти du.

д) $z = y^{\ln x}$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

е) $z = \sin(xy)$. Найти $d^2 z$.

О т в е т ы

9.2. д) $du = \dfrac{z}{x + y + z}\left(\dfrac{1}{z}dx + \dfrac{1}{z}dy - \dfrac{x + y}{z^2}dz\right)$.

е) $du = (xy)^{z-1}\left(zydx + zxdy + xy\ln(xy)dz\right)$.

9.3. а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$.

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2}{x^3 y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x^2 y^2}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{y^3 x}$.

в) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(1 + xy)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$.

г) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot \dfrac{3x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{8xy}{\left(x^2 + y^2\right)^4}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \dfrac{3y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$.

д) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \cos xy$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -x \cos xy$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \frac{xy \cos xy - \sin xy}{y^2} + \frac{xy \sin xy + 2 \cos xy}{y^3}.$$

е) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{8}{(2x - 3y)^2}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-12}{(2x - 3y)^2}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{18}{(2x - 3y)^2}$.

9.4. а) $d^2 z = 4dx^2 - 4dxdy + 6dy^2)$.

б) $d^2 z = -\dfrac{1}{y^2} dxdy + \dfrac{2x}{y^3} dy^2$.

в) $d^2 z = \dfrac{4xy\left(x^2 - 3y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^3} dx^2 + 2 \cdot \dfrac{6x^2 y^2 - x^4 - 4y^4}{\left(x^2 + y^2\right)^3} dxdy + \dfrac{4xy\left(y^2 - 3x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^3} dy^2$.

г) $d^2 z = \sin^2 y e^{x \sin y} dx^2 + e^{x \sin y} \cos y(1 + x \sin y) dxdy +$
$+ x e^{x \sin y}\left(x \cos^{2y} - \sin y\right) dy^2$.

д) $d^2 z = -2 \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2} dx^2 + \dfrac{4xy}{\left(x^2 - y^2\right)^2} dxdy - 2 \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2} dy^2$;

е) $d^2 z = \dfrac{6}{(x - y)^4}\left(-dx^2 + dxdy + dy^2\right)$.

9.5. а) $dz = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}((x^4+3x^2y^2+2xy^3)dx+(y^4+3x^2y^2-2x^3y)dy).$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}. \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$.

в) $dz = \frac{2(dx - \frac{x}{y}dy)}{y\sin\frac{2x}{y}}$.

г) $du = \frac{xdx+2ydy+zdz}{\sqrt{x^2+2y^2+z^2}}$.

д) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y(\ln y - 1)}{x^2}e^{\ln x \ln y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy}e^{\ln x \ln y},$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x(\ln x - 1)}{y^2}e^{\ln x \ln y};$

е) $d^2z = -y^2 \sin xydx^2 + 2(\cos xy - xy\sin xy)dxdy - x^2 \sin xydy^2$.

Занятие 10

Производные сложных функций нескольких переменных. Производная функции, заданной неявно

Аудиторная работа

10.1. Найти указанные производные:

а) $z = \arcsin\frac{x}{y},\ x = u^2+v^2,\ y = uv; \quad \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = e^{x-2y},\ x = \sin 2t,\ y = \cos t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$

в) $z=\sqrt{2x^2-xy+y^2}$, $x=2t^2$, $y=3t^3$; $\dfrac{dz}{dt}$ – ?

г) $z=tx^2-y^2x+1$, $x=\operatorname{arctg} t$, $y=\ln(1+t^2)$; $\dfrac{dz}{dt}$ – ?

д) $z=x^2\ln y$, $x=\sqrt{t^2+1}$, $y=\arcsin t$; $\dfrac{dz}{dt}$ – ?

е) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; $x=t^3$, $y=t^2$, $z=e^t$; $\dfrac{du}{dt}$ – ?

ж) $z=x^{\cos y}$; $x=\dfrac{u}{v}$; $y=uv$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ – ?

10.2. Найти частные производные от неявно заданных функций:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – ?

б) $\dfrac{xy}{z}+zxy+\dfrac{z}{y^2}=1$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – ?

в) $z+e^{xyz}=x\cos z$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – ?

г) $\ln(x+xyz+y)=e^{z^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – ?

д) $z\operatorname{arctg} xy+\dfrac{z^2}{1+x^2y^2}=1$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – ?

е) $y\sin(x+2z)+z\cos(x+2y)=e^z$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – ?

ж) $z^{xy}+\cos z=0$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – ?

Домашнее задание

10.3. Найти указанные производные:

а) $z = u^2 v^2$, $u = x - y$; $v = x + y$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sin 2t$, $y = \ln t$; $\quad \dfrac{dz}{dt} - ?$

в) $z = x \sin y + y \cos x$; $x = t^2$, $y = t^3$; $\quad \dfrac{dz}{dt} - ?$

г) $x^2 y + y^2 z + z^2 x = 1$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

д) $ze^{xy} + zxy^2 = a^2$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

е) $xy \ln z + xz \ln y + yz \ln x = 1$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

О т в е т ы

10.1. а) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \left(2u - \dfrac{x}{y} v\right)$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left(2v - \dfrac{x}{y} u\right)$.

б) $\dfrac{dz}{dt} = e^{x-2y} (2\cos 2t + 2\sin t)$.

в) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 - xy + y^2}} \cdot \left(4(2x - y)t + 9(2y - x)t^2\right)$.

г) $\dfrac{dz}{dt} = x^2 + \dfrac{(2tx - y^2)}{1 + t^2} - \dfrac{4xyt}{1 + t^2}$.

д) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2xt \ln y}{\sqrt{t^2 + 1}} + \dfrac{x^2}{y\sqrt{1 - t^2}}$.

е) $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}\left(3xt^2+2ty+ze^t\right).$

ж) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\cos y\cdot x^{\cos y-1}\cdot\dfrac{1}{v}-x^{\cos y}\ln x\cdot\sin(yv);$

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{-u\cos y\cdot x^{\cos y-1}}{v^2}-\sin\ln x^{\cos y}u.$

10.2. а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{c^2x}{a^2z};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{c^2y}{b^2z}.$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z\left(xy^3+xy^3z^2-2z^2\right)}{y\left(-xy^3+xy^3z^2+z^3\right)}.$

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yze^{xyz}-\cos z}{1+xye^{xyz}+x\sin z};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xze^{xyz}}{1+xye^{xyz}+x\sin z}.$

г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1+yz}{xy-2z(x+xyz+y)e^{z^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1+xz}{xy-2z(x+xyz+y)e^{z^2}}.$

д) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{zy(1+x^2y^2)-2xy^2z^2}{(2z+(1+x^2y^2)\cdot\operatorname{arctg}xy)(1+x^2y^2)};$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{zx(1+x^2y^2)-2x^2yz^2}{(2z+(1+x^2y^2)\cdot\operatorname{arctg}xy)(1+x^2y^2)}.$

е) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y\cos(x+2z)-z\sin(x+2y)}{2\cos(x+2z)+\cos(x+2y)-e^z};$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\sin(x+2z)-2z\sin(x+2y)}{2\cos(x+2z)+\cos(x+2y)-e^z}.$

ж) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z^{xy}y\ln z}{xyz^{xy-1}-\sin z};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^{xy}x\ln z}{xyz^{xy-1}-\sin z}.$

10.3. а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2uv^2 + 2vu^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2uv^2 + 2vu^2$.

б) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(2x\cos 2t + y/t)$.

в) $\dfrac{dz}{dt} = (\sin y - y\sin x)2t + 3(x\cos y + \cos x)t^2$.

г) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2 + 2yz}{y^2 + 2zx}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2xy + z^2}{y^2 + 2zx}$.

д) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yze^{xy} + zy^2}{e^{xy} + xy^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xze^{xy} + 2xyz}{e^{xy} + xy^2}$.

е) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y\ln z + z\ln y + yz/x}{x\ln y + y\ln x + xy/z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x\ln z + z\ln x + xz/y}{x\ln y + y\ln x + xy/z}$.

Занятие 11

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент

Аудиторная работа

11.1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$, $\quad M(0; 1; \dfrac{\pi}{4})$.

б) $2x^2 + 3y^2 + 2xz^2 - zx = 15$, $\quad M(1; 2; 1)$.

в) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $\quad M(3; 4; -7)$.

г) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $\quad M(1; 2; -1)$.

11.2. Найти производную функции $z = x^3 + 3x^2y + xy^2 + 3$ в точке $M(1; 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(4; 5)$.

11.3. Найти производную функции $z = xy\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M(3; 4)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 60°.

11.4. Найти производную $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $M(1/2; \sqrt{3}/2)$, принадлежащей окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$, по направлению этой окружности.

11.5. Доказать, что производная функции $z = \dfrac{y^2}{x}$ в любой точке эллипса $2x^2 + y^2 = 1$ по направлению нормали к эллипсу равна нулю.

11.6. Найти градиент функции в указанной точке:

а) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}, \quad M(2; 1)$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 5, \quad M(1; 0; 2)$.

11.7. Каково направление наибольшего изменения функции $u = x\sin z - y\cos z$ в начале координат?

11.8. Даны две функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ и $z = x^2 + y^2 - 3xy$. Найти угол между градиентами этих функций в точке $M(1; 1)$.

Домашнее задание

11.9. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

а) $z = 4 + x^2 + 2y^2, \quad M(1; 0; 5)$.

б) $z = x\ln y + y\ln x, \quad M(e; e; 2e)$.

в) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, \quad M(1; 1; 1)$.

11.10. Дана функция $z = \arcsin\dfrac{x}{x + y}$. Найти угол между градиентами этой функции в точках $M_1(1; 1)$ и $M_2(3; 4)$.

11.11. Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ равен 2.

11.12. Найти производную функции $z = \ln(x + y)$ в точке $(1; 2)$, принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению этой параболы.

Ответы

11.1. а) $x - y - 2z = -1 - \frac{\pi}{2}$; $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{-2}$.

б) $5x + 12y + 3z - 32 = 0$; $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-1}{3}$.

в) $17x + 11y + 5z = 60$; $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$.

г) $x + 11y + 5z - 18 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$.

11.2. $13\sqrt{3}$. **11.3.** $13{,}6 + 12{,}3\sqrt{3}$. **11.4.** $\frac{1}{2}$.

11.6. а) $\frac{1}{3}\left(2\vec{i} + \vec{j}\right)$. **б)** $-\frac{1}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$.

11.7. Отрицательная полуось y. **11.8.** π.

11.9. а) $z - 2x - 3 = 0$; $\begin{cases} 2z + x - 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

б) $z - 2x - 2y + 2e = 0$; $\frac{x-e}{2} = \frac{y-e}{2} = \frac{z-2e}{-1}$.

в) $x + 2y + 3z - 6 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

11.10. $\cos\alpha \approx 0{,}99; \alpha \approx 8^\circ$.

11.11. точки на окружности $x^2 + y^2 = 2/3$. **11.12.** $\sqrt{2}/3$.

Занятие 12

Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области. Условный экстремум

Аудиторная работа

12.1. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

б) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

в) $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$.

г) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

12.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области, ограниченной линиями:

а) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5;\ x = 0;\ y = 0;\ x + y = 3$.

б) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;\ x = 0;\ y = 0;\ x = 1;\ y = 2$.

в) $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2);\ x^2 + y^2 = 4$.

г) $z = x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 = 4$.

12.3. Исследовать функции на экстремум при заданном условии:

а) $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

б) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

в) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $x + y = 2$.

г) $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Домашнее задание

12.4. Исследовать на экстремум

а) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

б) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

12.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области:

а) $z = x^2 y(4 - x - y), \quad x = 0, \; y = 0, \; x + y = 6;$

б) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad x = 0, \; y = 0, \; x = 1, \; y = 2.$

12.6. Исследовать функцию на условный экстремум

а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

б) $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

Ответы

12.1. а) $z_{\min} = z(0; 0) = 0$; **б)** $z_{\min} = z(0; 3) = -9$.

12.5. а) $z_{\text{наим}} = z(4; 2) = -64$, $z_{\text{наиб}} = z(2; 1) = 4$;

б) $z_{\text{наим}} = z(1; 0) = -3$, $z_{\text{наиб}} = z(1; 2) = 17$.

12.6. а) $z_{\min} = z(-3/2; -3/2) = -19/4$;

б) $z_{\min} = z(1; 0) = 0$, $z_{\max} = z(1/3; 1/3) = 1/27$.

Занятие 13

Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Аудиторная работа

13.1. Решить уравнения:

а) $(1 - x)dy - ydx = 0$. **б)** $xyy' = 1 - x^2$.

в) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$. г) $y' = e^{x+y}$.

д) $xdy - ydx = 0, y(1) = 1$. е) $y' = y\cos x, y(0) = 1$.

ж) $y'\sin x = y\ln y, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$. з) $y' = (x^2 - x)(1 + y^2)$.

и) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$. к) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

л) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0,\ y(1) = 0$.

м) $xy' = x + \dfrac{1}{2}y,\ y(1) = 0$.

н) $(y - x)dx - (y + x)dy = 0$.

о) $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

п) $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2},\ y(1) = -1$.

Домашнее задание

13.2. Решить уравнения:

а) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$. б) $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$.

в) $y' = \cos(x + y)$. г) $(xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0, y(1) = 1$.

д) $y'\operatorname{tg} x = y, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. е) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

ж) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0,\quad y(1) = 1$. з) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}},\quad y(1) = 0$.

О т в е т ы

13.1. а) $y=\dfrac{c}{1-x}$. **б)** $x^2+y^2=2\ln cx$.

в) $1+y^2=c\left(1-x^2\right)$. **г)** $e^x+e^{-y}+c=0$.

д) $y=x$. **е)** $y=e^{\sin x}$.

ж) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ **з)** $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+c\right)$.

и) $y=\dfrac{x\left(2+cx^3\right)}{1-cx^3}$. **к)** $x^2+y^2=cy$.

л) $y=\sqrt{x^2+y^2}$. **м)** $4x=(2x-y)^2$.

н) $\ln c\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **13.2. а)** $\operatorname{arctg} y-\arcsin x=C$.

б) $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. **в)** $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}-x=C$.

г) $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=1$. **д)** $y=\sin x$.

е) $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$. **ж)** $\ln|y|+2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2$.

з) $y=x\ln(1+\ln x)$.

З а н я т и е 14

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах

Аудиторная работа

14.1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'+2xy=xe^{-x^2}$. **б)** $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$.

в) $y' + y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

г) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$.

д) $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$.

е) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

ж) $y' = y\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{y^3}{\sin x}$.

з) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

и) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

к) $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

л) $y' - y = xy^2$, $y(0) = 1$.

м) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

н) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$.

о) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$.

п) $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$.

р) $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$.

с) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$; $y(0) = 0$.

Домашнее задание

14.2. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

б) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$.

в) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \dfrac{1}{2}e^2$.

г) $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.

д) $y' + y = \dfrac{1}{2}e^x\sqrt{y}$; $y(0) = \dfrac{9}{4}$.

е) $y' - \dfrac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}}y^2$.

ж) $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$.

з) $e^{-y}dx - (xe^{-y} + 2y)dy = 0, y(5) = 0$.

Ответы

14.1. а) $y=e^{-x^2}\left(c+\frac{x^2}{2}\right).$

б) $y=x\ln x+\frac{c}{x}.$

в) $y=\sin x.$

г) $y=cx^2e^{1/x}+\frac{1}{x^2}.$

д) $y=-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+e^{2x}.$

е) $y=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}.$

ж) $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+c}}.$

з) $y^2=e^{-2x^2}\left(c+\frac{1}{2}x^2\right)^2.$

и) $y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+c\right)^2.$

к) $\frac{1}{y^2}=x^2+\frac{1}{2}+ce^{2x^2}.$

л) $y=\frac{1}{1-x}.$

м) $x^2+xy+y^2=c.$

н) $xe^y-y^2=c.$

о) $y\ln x+\frac{1}{4y^4}=c.$

п) $x^2\cos y+y^2=c.$

р) $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-x=c.$

с) $\frac{1}{3}x^3+xy^2+xy+e^y=1.$

14.2.а) $(1+x^2)(x+C)=y.$

б) $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{C}{x^2}.$

в) $y=\frac{1}{2}x^2\ln x.$

г) $y^{-4}=(e^x+C)x^3.$

д) $y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x+1\right)^2.$

е) $y=e^{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{2x}}\sqrt{x}-\frac{1}{8}e^{2\sqrt{x}}+C\right).$

ж) $ye^x+\frac{1}{2}y^2=C.$

з) $xe^{-y}+y^2=5.$

З а н я т и е 15

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Аудиторная работа

15.1. Решить дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

а) $y'' = \ln x + x$. **б)** $y''' = x\sqrt{x}$.

в) $y'' = \operatorname{arctg} x$. **г)** $xy'' + y' = 0$.

д) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$. **е)** $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

ж) $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$. **з)** $yy'' = (y')^2$.

и) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Домашнее задание

15.2. Проинтегрировать уравнения:

а) $y''' = xe^{-x}$. **б)** $y''' = \sqrt{x-2}$.

в) $xy'' + \operatorname{ctg} y' = 0$. **г)** $xy'' + y' = -x + 2$.

д) $y^3 y'' = 1$. **е)** $yy'' = y'(y' + 1)$.

О т в е т ы

15.1. а) $y = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$

б) $y = \dfrac{8}{315} x^4 \sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

в) $y=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}x+C_1x+C_2.$

г) $y=C_1\ln|x|+C_2.$

д) $9C_1^{\,2}\left(y+C_2\right)^2=4\left(C_1x+1\right)^3.$

е) $y=\left(C_1x-C_1^{\,2}\right)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2.$

ж) $C_1x+C_2+C\operatorname{tg}y=0.$

з) $y=C_2e^{C_1x},\quad y=C.$

е) $y=\frac{1}{\cos^2 x}.$

к) $y=-(x+3)e^{-x}+C_1x^2+C_2x+C_3.$

л) $y=\frac{8}{125}(x-2)^{7/2}+C_1x^2+C_2x+C_3.$

м) $y=x\arccos C_1x+\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2}+C_2.$

н) $y=2x-\frac{x^2}{4}+C_1\ln x+C_2.$

о) $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2.$

п) $C_1y-1=C_2e^{C_1x},\ y=C_1-x.$

Занятие 16

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа

Аудиторная работа

16.1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y''+4y'-5y=0.$

б) $y''+4y'=0.$

в) $4y''-4y'+y=0.$

г) $y''-6y'+9y=0.$

д) $y^{(V)} + 3y^{(IV)} + 3y''' + y'' = 0$.

е) $y^{(V)} - y''' = 0$.

ж) $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.

з) $y^{IV} + 2y^{II} + y = 0$.

и) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y'(0) = y(0) = 1$.

к) $y'' - 2y' + 2y = 0, \; y(0) = 1, \; y(0) = 1$.

16.2. Решить дифференциальные уравнения методом Лагранжа:

а) $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

б) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

в) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

г) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

д) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Домашнее задание

16.3. Решить уравнения:

а) $y'' + 3y' - 4y = 0$.

б) $y'' - 2y' + y = 0$.

в) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

г) $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$.

д) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

е) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Ответы

16.1. а) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$.

б) $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$.

в) $y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

г) $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

д) $y = C_1 + C_2 x + e^{-x}\left(C_3 + C_4 x + C_5 x^2\right)$.

е) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{-x}$.

ж) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

з) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$.

и) $y = e^{-3x}(1 + 4x)$.

к) $y = e^x \sin x$.

16.2. а) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\left(x - \ln\left(e^x + 1\right)e^x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}\ln\left(e^x + 1\right)\right)$.

б) $y = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4}\ln|\cos 2x| + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

в) $y = \left(C_1 + \ln|\sin x|\right)\sin x + (C_2 - x)\cos x$.

г) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right)$.

д) $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin\frac{x}{2}\right)$.

16.3. а) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$;

б) $y = e^x (C_1 + C_2 x)$.

в) $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

г) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$.

д) $y = (C_1 - \ln|\sin x|)\cos 2x + (C_2 - x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x)\sin 2x$.

е) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x e^{-x}\ln|x|$.

Занятие 17

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида

Аудиторная работа

17.1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'' + 4y = 2x^2 + 3x + 1$.

б) $y'' + 2y' + y = 8e^{-x}$.

в) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 3)e^{2x}$.

г) $y'' + 3y' - 4y = 5\sin x$.

д) $y'' + 6y' + 10y = x^2 + 4e^{x}$.

е) $y'' + y = 2 + \cos 2x$.

ж) $y'' + 3y' = 1 + \sin 3x + 4e^{2x}$.

з) $y'' - 4y = 2\sin x + \cos 2x$.

и) $y'' - 4y' = 3x + 1, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$

к) $y'' + 9y' = 3\cos 3x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$.

Домашнее задание

17.2. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'' + y' = 2x - 1$.

б) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$.

в) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \quad y(0) = -2, \; y'(0) = 0$.

г) $y'' + 16y = 32e^{4x}, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 0$.

д) $y'' - 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -8$.

Ответы

17.1. а) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x.$

б) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 4x^2 e^{-x}.$

в) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + (2x+3)e^{2x}.$

г) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} - \frac{15}{34}\sin x.$

д) $y = C_1 e^{-3x}\cos x + C_2 e^{-3x}\sin x + \frac{(221 - 510x + 425x^2 + 1000e^{x})}{4250}.$

е) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{6}\left(9\cos^2 x + \cos x \cos 3x + 15\sin^2 x + \sin x \sin 3x\right).$

ж) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{1}{18}(\cos 3x + \sin 3x).$

з) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{40}(5\cos 2x + 16\sin 2x).$

и) $y = \frac{1}{64}\left(25 + 39e^{4x} - 28x - 24x^2\right).$

к) $y = -\frac{1}{90}e^{-9x}\left(7 - 10e^{9x} + 3e^{9x}\cos 3x - 9e^{9x}\sin 3x\right).$

17.2. а) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x$.

б) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}$.

в) $y = -2e^{-x} - 4xe^{-x} + 3\sin 2x$.

г) $y = \cos 4x - \sin 4x + e^{4x}$.

д) $y = 3e^{-2x} - 2e^{2x} + 2xe^{2x}$.

З а н я т и е 18

Решение систем дифференциальных уравнений. Метод исключения

Аудиторная работа

18.1. Решить системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y(x+2y-1)}{t(x-1)}. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x' = y & x(0) = 0, \\ y' = -x + 1 & y(0) = 1{,}5. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, \\ y' = -x + 2\sin t. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **з)** $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{y}, \\ y' = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Домашнее задание

18.2. Решить системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} y' = \dfrac{z-1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y-x} \end{cases}.$ **б)** $\begin{cases} x' = \dfrac{y^2}{x} \\ y' = \dfrac{x^2}{y} \end{cases}.$

в) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 4x + 7y & y(0) = 0 \end{cases}.$ **г)** $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}.$

Ответы

18.1. а) $x=\dfrac{C_1t+C_2-1}{C_1t+C_2}, \quad y=\dfrac{C_1t}{(C_1t+C_2)^2}.$

б) $x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\dfrac{1}{5}e^{-2t}+\dfrac{7}{40}e^{t},$

$y=\dfrac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\dfrac{3}{10}e^{-2t}+\dfrac{1}{40}e^{t}.$

в) $y=C_1x, \quad z=\pm\sqrt{C_2-x^2\left(1+C_1^{\,2}\right)}.$

г) $x=1-\cos t+1{,}5\sin t, \quad y=\sin t+1{,}5\cos t.$

д) $x=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}, \quad y=C_1\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}t}-C_2\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-\sqrt{2}t}.$

е) $x=\left(C_1+C_2t\right)e^{t}+\dfrac{1}{2}\cos t, \quad y=\left(C_2(1-t)-C_1\right)e^{t}-2\cos t-\dfrac{1}{2}\sin t.$

ж) $x=C_1e^{t}+C_2e^{5t}, \quad y=-C_1e^{t}+15C_2e^{5t}.$

з) $C_1x^2=2t+C_2, \quad y^2=C_1\left(2t+C_2\right).$

18.2. а) $y=x+\dfrac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}, z=C_2e^{C_1x}.$

б) $x^2=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}, y^2=C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}.$

в) $x=e^{5t}(\cos 2t-\sin 2t), y=2e^{5t}\sin 2t.$

г) $x=(2C_1t+2C_2+1)e^{-t}, y=(C_1t+C_2)e^{-t}.$

Типовой расчет № 3

Неопределенный и определенный интегралы

В заданиях:

№ 1–6 – найти неопределенные интегралы;

№ 7 – вычислить определенный интеграл;

№ 8 – вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

Вариант 1

1. $\int \frac{x dx}{2x+1}$.
2. $\int (2x-1)\sin^2 x dx$.
3. $\int \frac{x dx}{2+\sqrt{x+4}}$.
4. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x\, dx$.
5. $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3-8} dx$.
6. $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$.
7. $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}}$.
8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x dx}{4+x^2}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = 2a\cos\varphi$.

10. Найти длину полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

Вариант 2

1. $\int x^2 e^{x^3} dx$.
2. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$.
3. $\int \frac{\sin^2 x + x\sin 2x}{x\sin^2 x} dx$.
4. $\int \sin^4 \frac{3}{2} x dx$.
5. $\int \frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)} dx$.
6. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} dx$.
7. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$.
8. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$.

9. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

10. Найти длину кардиоиды $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$.

Вариант 3

1. $\int \frac{\sin x dx}{4 + \cos^2 x}$.

2. $\int e^x \cos 2x dx$.

3. $\int \sin^2 x \cos x dx$.

4. $\int \frac{dx}{\cos x + 3\sin x}$.

5. $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 + 4x^2}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + 1}$.

7. $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$.

8. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

Вариант 4

1. $\int \frac{x^2 dx}{9 - x^3}$.

2. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

3. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

4. $\int \frac{2\sqrt{\ln x} dx}{x}$.

5. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

6. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x} + 4}$.

7. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

8. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y = 7$.

10. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Вариант 5

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-\mathrm{ctg}x}}$. 2. $\int \ln 4x dx$. 3. $\int \frac{dx}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1+\cos x}dx$. 5. $\int \frac{x^4 dx}{x^3+1}$. 6. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}+2}dx$.

7. $\int\limits_1^e \frac{\ln x + 4x^2}{x}dx$. 8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

9. Найти длину дуги кривой $y = e^x - 1$ от точки $(0; 0)$ до точки $(1;\ e-1)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, вокруг оси Oy.

Вариант 6

1. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^4 x}$. 2. $\int x\arccos 2x dx$.

3. $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x+3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx$. 4. $\int x\sin(1-3x^2)dx$.

5. $\int \frac{x^5+2x-1}{x^4-1}dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{4+\sqrt{2x+1}}$.

7. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin^2 x dx$. 8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 + \cos t$, $0 \le t \le \pi$.

10. Найти объем тела полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy = 1$, $x = 3$, $y = 3$.

Вариант 7

1. $\int \frac{1 + \mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x} dx$. 2. $\int \frac{2x - 1}{\cos^2 x} dx$. 3. $\int x^2 \sqrt{1 - 3x^3}\, dx$.

4. $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$. 5. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}} dx$.

7. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1 + x^2} dx$. 8. $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 2\cos 3\varphi$.

10. Вычислить длину кривой $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Вариант 8

1. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^4}}$. 2. $\int \ln(1 + x^2) dx$.

3. $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 4. $\int \frac{dx}{5 + 2\sin x + 3\cos x}$.

5. $\int \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1}(\sqrt[3]{x + 1} + 1)} dx$.

7. $\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$. 8. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

9. Вычислить длину кривой $y = \ln x$ от точки $(1; 0)$ до точки $(e; 1)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x = \cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Вариант 9

1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^5\, dx}{\sqrt{x}}$. 2. $\int (2x-1)e^{4x} dx$. 3. $\int \frac{x^6 dx}{10+x^7}$.

4. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$. 5. $\int \frac{4-3x}{x^3+8x^2} dx$. 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$.

7. $\int_4^9 \frac{y+1}{\sqrt{y}-1} dx$. 8. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 2a\sin\varphi$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x,\ x = 4$.

Вариант 10

1. $\int x^2 \sin x^3 dx$. 2. $\int x^2 \sin 3x dx$. 3. $\int (x^2+1)e^{x^3+3x} dx$.

4. $\int \frac{\sqrt{\sin x}\, dx}{\sqrt{\cos^5 x}}$. 5. $\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+3x} dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx$.

7. $\int_0^{\ln 4} \frac{dx}{e^x+1}$. 8. $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

9. Найти длину кривой $\rho = 4\sin\varphi$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$.

Вариант 11

1. $\int (1+\operatorname{ctg}^3 x)\frac{dx}{\sin^2 x}$; 2. $\int (x^2+1)\ln x dx$; 3. $\int \sqrt{9-x^2}\, dx$;

4. $\int \frac{dx}{2\cos x + 3}$; 5. $\int \frac{x^2+4}{x^3+x}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{2x-1}\,dx}{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[6]{2x-1}}$;

7. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x 2^{\sin x} dx$; 8. $\int\limits_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2 = 16x - 4y$, $x = 4 + y$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y^2 = a^2$, $x = 2a$.

Вариант 12

1. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. 2. $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$. 3. $\int x^3 e^{4x^4} dx$.

4. $\int \mathrm{tg}^4 3x dx$. 5. $\int \frac{2x+9}{x^4-x^2-12}dx$. 6. $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

7. $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}dx$. 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^4}$.

9. Найти длину кривой $y = \ln\cos x$ от точки $(0; 0)$ до точки $(\frac{\pi}{4}; \ln\frac{\sqrt{2}}{2})$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной одним витком $\rho = 2\varphi$.

Вариант 13

1. $\int \mathrm{tg} 3x dx$. 2. $\int (4x-1)\cos^2 2x dx$. 3. $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

4. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$. 5. $\int \frac{3x+4}{x^3+5x^2-6x}dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}$.

7. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$. 8. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{(x-1)^2}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = x+5$, $y^2 = 4-x$.

10. Найти длину кривой $x = \mathrm{e}^t\cos t$, $y = \mathrm{e}^t\sin t$ $(0 \le t \le 1)$.

Вариант 14

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$. 2. $\int \ln^2 2x\,dx$. 3. $\int e^x \cos e^x\,dx$.

4. $\int \mathrm{ctg}^3 3x\,dx$. 5. $\int \frac{3x+8}{x^3-x}dx$. 6. $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}dx$.

7. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\sin 2\varphi$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9-x$, $x = 0$.

Вариант 15

1. $\int \cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx$. 2. $\int \frac{xdx}{\sin^2 2x}$. 3. $\int x4^{x^2}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$. 5. $\int \frac{2x-1}{x^4+5x^2+6}dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

7. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x\cos^2 x\,dx$. 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^3}dx$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$.

10. Найти длину кривой $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

Вариант 16

1. $\int \dfrac{\sqrt{1-2\ln x}}{x}dx$.
2. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$.
3. $\int \dfrac{2x+3}{x^2+x+2}dx$.
4. $\int \sin^4 2x\cos^4 2x\,dx$.
5. $\int \dfrac{3x^2+4x-1}{x^4+x^2}dx$.
6. $\int \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$.
7. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2\,x dx$.
8. $\int\limits_{+1}^{4} \dfrac{x\,dx}{x^2-1}$.

9. Найти длину кривой $y^2 = (x-1)^3$ от точки $(1;0)$ до точки $(6;\sqrt{125})$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - x$, $y = 0$.

Вариант 17

1. $\int 2^x\sqrt{1+2^x}\,dx$;
2. $\int \dfrac{3x+5}{\cos^2 3x}dx$;
3. $\int \dfrac{4x-3}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx$;
4. $\int \dfrac{\sin 2x\,dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$;
5. $\int \dfrac{x^4+x^2+1}{x^4-8x^2-9}dx$;
6. $\int \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$;
7. $\int\limits_{0}^{\pi/6} \sin^3 2x dx$;
8. $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{x^2\,dx}{x^3-1}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

10. Вычислить длину кривой $x = 5\cos^2 t, y = 5\sin^2 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

Вариант 18

1. $\int \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} dx$. 2. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. 3. $\int \sin 2x \cos^2 x dx$.

4. $\int \operatorname{tg}^5 2x dx$. 5. $\int \frac{x^2 + 4x - 3}{x^4 + 4x^2} dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} dx$.

7. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 5\cos x}$. 8. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 2x$, $y = x$, $x = 3$.

Вариант 19

1. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$. 2. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$. 3. $\int \frac{x^2 dx}{2x^2 + 1}$.

4. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}$. 5. $\int \frac{x^4 + 2x - 1}{8 - x^3} dx$. 6. $\int \frac{x + 2}{1 + \sqrt{x + 1}} dx$.

7. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^5 x dx$. 8. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} x\, dx$.

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$.

10. Найти длину кривой $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

Вариант 20

1. $\int 3^{\operatorname{tg} 3x} \dfrac{dx}{\cos^2 3x}$. 2. $\int x^2 e^{3x} dx$. 3. $\int \dfrac{4x+1}{x+2} dx$.

4. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x}$. 5. $\int \dfrac{x^3 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$.

6. $\int \dfrac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx$. 7. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\sin 2x}{4+\cos^2 x} dx$. 8. $\int\limits_{0}^{\pi/4} 4^{\operatorname{ctg} x} \dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 3\cos\varphi$.

10. Найти длину кривой $y = e^{-x}$ от точки $(0;1)$ до точки $(5; e^{-5})$.

Вариант 21

1. $\int \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx$. 2. $\int \arccos 2x dx$. 3. $\int 2^x \operatorname{tg} 2^x dx$.

4. $\int \dfrac{2 - \sin x + 3\cos x}{1+\cos x} dx$. 5. $\int \dfrac{4x^2+38}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$.

6. $\int \dfrac{\sqrt{x}\, dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}$. 7. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \dfrac{x\, dx}{\cos^2 3x}$. 8. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln\ln x \ln x}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\cos 3\varphi$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0\,(x > 0)$.

Вариант 22

1. $\int \dfrac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx$. 2. $\int (2x+3) 2^x dx$. 3. $\int \dfrac{4x-1}{x^2+2x+2} dx$.

4. $\int \operatorname{ctg}^6 3x\,dx$.

5. $\int \frac{6x\,dx}{x^3-1}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$.

7. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/9} \operatorname{ctg} 3x\,dx$.

8. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4\cos t$, $y = 9\sin t$.

10. Найти длину кривой $\rho = 4(1-\sin\varphi)$.

Вариант 23

1. $\int \sin 2x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$.

2. $\int \log_2(3x-1)\,dx$.

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{13-6x+x^2}}dx$.

4. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$.

5. $\int \frac{3x-1}{x^4+13x^2+36}dx$.

6. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

7. $\int\limits_{\pi/16}^{\pi/12} \cos^2 4x\,dx$.

8. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$.

9. Найти длину кривой $y = \ln\sin x$ $\left(\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $y = x$, $x = 1$.

Вариант 24

1. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}dx$.

2. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

3. $\int \frac{3x-4}{x^2+6x+13}dx$.

4. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+8\sin x\cos x}$.

5. $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{2+\sqrt[4]{x}}$.

7. $\int\limits_{1}^{e/2} \ln 2x\,dx$.   8. $\int\limits_{0}^{+\infty} x\,e^{-x}dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 9$, $y = x$, $x = 5$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 4$.

Вариант 25

1. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$.   2. $\int (x^2 - 2x + 1)e^{3x}dx$.   3. $\int \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$.

4. $\int \operatorname{ctg}^5 4x\,dx$.   5. $\int \frac{x^3+2x+3}{x^4-16}dx$.   6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4x+\sqrt[3]{x^2}}$.

7. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}\,dx$.   8. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4 - 3x^2$.

10. Найти длину кривой $\rho = 5(1+\cos\varphi)$.

Типовой расчет № 4

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уровней

В заданиях:

№ 1–8, 10, 11 найти общее решение дифференциальных уравнений. Если даны начальные условия, то решить задачу Коши;

№ 9 решить методом Лагранжа;

№ 12 – решить систему дифференциальных уравнений.

Вариант 1

1. $y'\sin x = y\ln y$.

2. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

3. $(x^2+1)y' + 4xy = 3$.

4. $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$.

5. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$.

6. $2yy'' = 3(y')^2 + 4y^2$.

7. $y'' = \frac{y'}{x}(1 + \ln\frac{y'}{x})$, $\begin{cases} y(1) = 1/2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$.

8. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

9. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.

10. $y'' - 2y' = (2x+3)\mathrm{e}^{2x}$.

11. $y'' + 2y' + 2y = 1 + 4\sin x$.

12. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Вариант 2

1. $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$.

2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

3. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

4. $2xy' + 2y = xy^2$.

5. $(2x + e^{x/y})\,dx + (1 - \frac{x}{y})e^{x/y}dy = 0$.

6. $e^y(y'' + (y')^2) = 2$.

7. $e^x(y''e^x) = 1$, $\begin{cases} y(0) \ = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

8. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$.

9. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

10. $y'' + y' = x^2 + 1$.

11. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x} + 9\cos x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$.

Вариант 3

1. $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$.

2. $y\,dy = (2y - x)\,dx$.

3. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$.

4. $2y' + 2xy = x\,e^{-x^2}\,y^2$.

5. $y'y^2 + yy'' = (y')^2$.

6. $(10xy - 8y + 1)\,dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$.

7. $y'' = \dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x}$, $\begin{cases} y(1) = e, \\ y'(1) = e. \end{cases}$

8. $y''' + 2y'' - 3y' = 0$.

9. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

10. $4y'' + 4y' + y = 3\cos 2x$.

11. $y'' + 4y' + 5y = 2x + 3 + xe^x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$.

Вариант 4

1. $3e^x(\sin y)\,dx + (1 + e^x)\cos y\,dy = 0$.

2. $\dfrac{dx}{xy - x^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$.

3. $y' = 2x(x^2 + y)$.

4. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

5. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$.

6. $y\,y'' = (y')e^3$.

7. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x\cos x$, $\begin{cases} y(\pi) = \pi + 1 \\ y'(\pi) = 2\pi \end{cases}$.

8. $y^{IV} - y'' = 0$.

9. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}$.

10. $y'' + 9y = 4\cos 3x$.

11. $y'' - 4y' = 2x + 1 + 4e^{2x}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - 36t \\ \dot{y} = y - 2x - 2e^t \end{cases}$.

Вариант 5

1. $3^{y^2-x^2}=\dfrac{yy'}{x}$.

2. $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$.

3. $y'\operatorname{ctg}x-y=2\cos^2 x\operatorname{ctg}x$.

4. $xy'+y=y^2\ln x$.

5. $\mathrm{e}^y\,dx+(x\mathrm{e}^y-2y)\,dy=0$.

6. $y''y+(y')^2=y'$.

7. $x(y''-x)=y'$, $y(1)=y'(1)=1$.

8. $y^{IV}-y'''=0$.

9. $y''+y=\operatorname{tg}x$.

10. $y''+6y'+13y=3e^{2x}\sin x$.

11. $y''-2y'+y=2e^x+x-1$.

12. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y+5t,\\ \dot{y}=3x+2y+8e^t.\end{cases}$

Вариант 6

1. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.

2. $4xy\,dy=(x^2-y^2)\,dx$.

3. $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0$.

4. $y'-9x^2y=(x^5+x^2)y^{2/3}$.

5. $\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$.

6. $y''=y'+x$.

7. $y''y^3=1$, $y(0{,}5)=y'(0{,}5)=1$.

8. $y^{IV}+8y''-9y=0$.

9. $y''-y=\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$.

10. $y''-4y=5e^{2x}$.

11. $y''-4y'=2x-3+\cos 3x$.

12. $\begin{cases}\dot{x}=4x-3y+\sin t\\ \dot{y}=2x-y+2\cos t\end{cases}$.

Вариант 7

1. $(1+e^{3y})\,x\,dx = e^{3y}dy$.

2. $xy' = y + y\ln\dfrac{y}{x}$.

3. $(x^2-1)y' - xy = x^3 - x$.

4. $xy' + y = xy^2$.

5. $x\,dx + y\,dy = 0$.

6. $y'' + y'(y-1) = (y')^2$.

7. $xy'' = y'$, $y(1) = y'(1) = 2$.

8. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 0$.

9. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$.

10. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

11. $y'' - 6y' + 13y = 4\sin 2x - \cos x$.

12. $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$.

Вариант 8

1. $(x+2xy)\;dx + (1+x^2)\,dy = 0$.

2. $y\,dx = (2\sqrt{xy} - x)\,dy$.

3. $y' + 2y = e^{3x}$.

4. $xy' - y = y^2$.

5. $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x}{y^2}dy = 0$.

6. $2yy'' + y^2 = (y')^2$.

7. $x(y''+1) + y' = 2$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = \dfrac{5}{2}$.

8. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

9. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x+1}$.

10. $y'' + 10y' + 26y = (3x-1)e^x$.

11. $y'' + 4y' = 1 + 4\cos^4 x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = y - \cos t, \\ \dot{y} = -x + \sin t. \end{cases}$

Вариант 9

1. $(1+y^2)\,dx-(2y+\sqrt{1+y^2})(1+x)^{3/2}\,dy=0$.

2. $y^2-3xy+3x^2y'=0$.

3. $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$.

4. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

5. $yy''=y'(y'+1)$.

6. $(e^x+y+\sin y)\,dx+(e^y+x+\cos y\cdot x)\,dy=0$.

7. $y''=-\dfrac{x}{y'}$, $y(2)=0$, $y'(2)=1$.

8. $y^{IV}+y''=0$.

9. $y''+4y=\operatorname{ctg}2x$.

10. $y''+y'=3\cos x$.

11. $4y''-4y'+y=x^2+4e^{2x}$.

12. $\begin{cases} y'=-5y+2t+40e^t, \\ x'=y-6t+9e^{-t}. \end{cases}$

Вариант 10

1. $(2xy^2+x)\,dx+(3y-x^2y)\,dy=0$.

2. $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$.

3. $y'+\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$.

4. $y'-\dfrac{xy}{x^2-1}=x\sqrt{y}$.

5. $xy''-y''+\dfrac{1}{x}=0$.

6. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)\,dy=0$.

7. $y''=2yy'$, $y(0)=y'(0)=1$.

8. $y'''-8y=0$.

9. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

10. $y''+4y'+29y+26e^{-x}$.

11. $y'' + 4y' = 2x + 5 + xe^{3x}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$.

Вариант 11

1. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,dy + y\,dx = 0$.

2. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.

3. $xy' + y = e^x$.

4. $y' - y + y^2 \cos x = 0$.

5. $2xy\,dy + (x^2 + y^2 + 2x)\,dx = 0$.

6. $y'' + \dfrac{(y')^2}{1 - y} = 0$.

7. $y'' - 2\,\mathrm{ctg}\,xy' = \sin^3 x$, $y(\pi / 4) = 0$, $y'(\pi / 4) = 1$.

8. $4y^{IV} + 4y''' + y'' = 0$.

9. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

10. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x$.

11. $y'' - 2y' + 2y = 3x + (4x - 1)e^{2x}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x + t. \end{cases}$.

Вариант 12

1. $(x^2 + 2x)\,y' = y + 4$.

2. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$.

3. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$.

4. $y' = y\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{y^3}{\sin x}$.

5. $2yy' = y''$.

6. $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2 y - y^2)\,dy = 0$.

7. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

8. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

9. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

10. $y'' + y' = xe^{-x}$.

11. $y'' + 3y' + 10y = \sin 3x - \cos x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 18t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$.

Вариант 13

1. $y^2 + y'x^2 = 0$.

2. $xy' = y \cos \ln \dfrac{y}{x}$.

3. $y' + y = \cos x$.

4. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{y}$.

5. $2(y')^2 = y''(y-1)$.

6. $(x^2 + y^2 + y)\,dx + (2xy + x + e^y)\,dy = 0$.

7. $y''x + y' = \ln x,\; y(1) = 1,\; y'(1) = 2$.

8. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

9. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

10. $y'' + 6y' + 9y = 2x^2 - 1$.

11. $y'' + 4y' + 5y = 4xe^{2x} + \cos x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + e^{3t}. \end{cases}$

Вариант 14

1. $2e^y(1 + x^2)\,dy - x(e^y + 1)\,dx = 0$.

2. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x$.

4. $y' + 2y = y^2 e^x$.

5. $(y + x \ln y)\,dx + (\dfrac{x^2}{2y} + x + 1)\,dy = 0$.

6. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

7. $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

8. $y^{IV} + 4y''' - 5y'' = 0$.

9. $y'' + y = \mathrm{tg}^2\, x$.

10. $4y'' + 9y = 5\cos 3x$.

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

12. $y'' + 8y' + 17y = 2x^2 + 3x + 1 + 3e^{2x}$.

Вариант 15

1. $x \ln x y' = y$.

2. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

3. $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} = 1 + x$.

4. $xy' - 4y - 2x^2\sqrt{y} = 0$.

5. $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$.

6. $(3x^2 y + \sin x)\, dx + (x^3 - \cos y)\, dy = 0$.

7. $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \dfrac{1}{3}$.

8. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

9. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 1}$.

10. $y'' + 4y' + 5y = 4e^x \cos 3x$.

11. $y'' - 4y' + 4y = 5\mathrm{e}^{2x} + 3\cos 4x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

Вариант 16

1. $(4 + x^2)\, dy - \sqrt{1 - 16y^2}\, dx = 0$.

2. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$.

3. $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$.

4. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

5. $x^2 \sin y\, dx + (1 + \frac{x^3}{3} \cos y)\, dy = 0$.

6. $y'' + 4y' = 2x^2$.

7. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

8. $y^{IV} + y'' = 0$.

9. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

10. $y'' + 9y = 3\cos 3x$.

11. $y'' - y' = 4x + 3 + 4e^{2x}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}$.

Вариант 17

1. $yy' = e^{2x-y}$.

2. $(x^2 + xy)\, y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

3. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$.

4. $xy' + y = \sqrt{x}$.

5. $e^x dy + (ye^x - 2x)\, dx = 0$.

6. $x^2 y'' = (y')^2$.

7. $y'' = \frac{1}{y^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

9. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

10. $y'' + 2y' + 5y = 3xe^{2x}$.

11. $y'' + 4y' + 4y = 3x + 1 + 5\cos 3x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

Вариант 18

1. $xy' + y = y^2$.

2. $4y' = \frac{y^2 + 4x^2}{x^2}$.

3. $y' - \frac{y}{x} = x \cos 2x$.

4. $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}} y^2$.

5. $(\ln y - x)\,dx + (\frac{x}{y} - y)\,dy = 0$.

6. $y''(2y+3) = 2(y')^2$.

7. $x^3 y'' + x^2 y' = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$.

8. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$.

9. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

10. $y'' - 16y = 3xe^{4x}$.

11. $y'' + 5y' = 4x + 3 + \cos 2x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - x + \cos 3t \end{cases}$.

Вариант 19

1. $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$.

2. $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$.

3. $xy' + y = e^x$.

4. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{y}$.

5. $xy'' + y' = \ln x$.

6. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$.

7. $y'' + y(y')^3 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

8. $y^{IV} + 18y'' + 81y = 0$.

9. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10. $y'' + 5y' - 6y = (2x+3)e^x$.

11. $y'' - 4y' = (3x+1)^2 + 5xe^x$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t - 1 \\ \dot{y} = x + 2t \end{cases}$.

Вариант 20

1. $\sin x \sin y\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$.

2. $y^2 + x^2 y' = xy'y$.

3. $x^2 y' + 2xy - 1 = 0$.

4. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$.

5. $\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx-\dfrac{2y}{x}dy=0$.

6. $y''=2(y'-1)\operatorname{ctg}x$.

7. $y^{IV}+2y'''=0$.

8. $y'y^2+yy''=(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

9. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

10. $y''-y'-2y=x\cos x-\sin x$.

11. $y''+9y=x^2+5-9e^{4x}$.

12. $\begin{cases}\dot{x}=3x-4y-e^{-2t},\\ \dot{y}=x-2y-3e^{-2t}.\end{cases}$

Вариант 21

1. $(y-2)\,dx+x^2dy=0$.

2. $y'=\dfrac{3x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

3. $xy'-y=x^2e^x$.

4. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

5. $(5x+xy^2)\,dx+(4y+x^2y)\,dy=0$;

6. $3y'y''=2y$.

7. $x(y''+y')=y'$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$.

8. $y^V-2y^{IV}+y'''=0$.

9. $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

10. $y''+2y'-3y=(x+3)e^x$.

11. $y''+4y=1+6\cos 3x$.

12. $\begin{cases}\dot{x}=y-5\cos t,\\ \dot{y}=2x+y.\end{cases}$

Вариант 22

1. $\sqrt{3+y^2}\,dx-ydy=x^2ydy$.

2. $ydy=(2y-x)\,dx$.

2. $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x$.

4. $2y'-\dfrac{xy}{x^2-1}=\dfrac{x}{y}$.

5. $x(y''-x)=y'$. 6. $(3x\sin y+1)\,dx+(\frac{3}{2}x^2\cos y+1)\,dy=0$.

7. $y^{IV}-5y'''=0$. 8. $3y'y''=y+(y')^3+1,\ y(0)=-2,\ y'(0)=0$.

9. $y''+9y=3\,\mathrm{tg}\,3x$. 10. $y''+4y'=(x+1)^2$.

11. $y''-3y'+4y=\cos 3x+12e^{2x}$. 12. $\begin{cases}\dot{x}=y+2e^t,\\ \dot{y}=x+t^2.\end{cases}$

Вариант 23

1. $(1+x)\,y'=xy$. 2. $x^2y'=y(x+y)$.

3. $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$. 4. $\frac{x}{y^2}=y'+y$.

5. $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$. 6. $(x+1)\,y''+x(y')^2=y'$.

7. $y^{IV}+13y''+36y=0$. 8. $y'(1+(y')^2)=3y''$; $y(2)=1,\ y'(2)=2$.

9. $y''+6y'+9y=4e^x(\cos x-\sin x)$. 10. $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^3}$.

11. $y''+4y'=x^2+2x-3+5e^{3x}$. 12. $\begin{cases}y'=\dfrac{y}{x},\\ z'=y+z.\end{cases}$

Вариант 24

1. $y'-2\sqrt{y}\ln x=0$.

2. $(4x^2+3xy+y^2)\,dx+(4y^2+3xy+x^2)\,dy=0$.

3. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$.

4. $y' - 3y = x\sqrt[3]{y}$.

5. $\left(1+\dfrac{2x}{y^3}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$.

6. $y''(1+\ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x$.

7. $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 1$.

8. $y^{IV} + 4y''' + 5y'' = 0$.

9. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$.

10. $2y'' + 9y' = 4\sin 3x + \cos 3x$.

11. $y'' + 6y' + 9y = 4x + 3 - 5e^{-3x}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t, \\ \dot{y} = -4x - 3y + 2t. \end{cases}$

Вариант 25

1. $(4x + xy^2)\,dx + (3y - x^2y)\,dy = 0$.

2. $y = \left(y' - e^{\frac{y}{x}}\right)x$.

3. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$.

4. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$.

5. $(3x^2y - \dfrac{4}{x^2})\,dx + (\cos y + x^3)\,dy = 0$.

6. $y\,(y'' + 1) = (y')^2$.

7. $y''x\ln x = 2y'$, $y(e) = 1$, $y'(e) = 2$.

8. $y^{IV} - 15y'' - 16y = 0$.

9. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{4+x^2}$.

10. $4y'' - 4y' + y = 4x^2 + 5x$.

11. $y'' - 8y' + 20y = 4\sin 2x + xe^{2x}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = -y + e^{3t}, \\ \dot{y} = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука 1980. 336 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Задачник. М.: Наука 1982. 192 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980. 176 с.
4. Воеводин В. В. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1975. 176 с.
5. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н. Ш. Кремера. М: ЮНИТИ, 2002. 471 с.
6. Высшая математика. Общий курс / Под общей ред. С. А. Самаля. – Мн.: Вышэйшая школа, 2000. 351 с.
7. Высшая математика. Общий курс / Под ред. А. И. Яблонского. Мн.: Высшая школа, 1993.
8. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985. 480 с.
9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1971. 232 с.
10. Коваленко Н.С., Чепелева Т.И. Высшая математика. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Мн.: Юнипресс, 2006. 208с.
11. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Высшая школа, 1976. 720с.
12. Мантуров О. В., Матвеев Н. М. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. М.: Высшая школа, 1986.
13. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Мн.: Высшая школа, 1972. 424 с.
14. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М.: Наука. 1975. 480 с.
15. Сухая Т. А, Бубнов В. Ф. Задачи по высшей математике. I. Мн.: Высшая школа, 1993. 446 с.
16. Элементы линейной алгебры / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман. Мн.: Высшая школа, 1977. 256 с.