Белорусский национальный технический университет

Факультет технологий управления и гуманитаризации

Кафедра ЮНЕСКО «Энергосбережение и
возобновляемые источники энергии»

ЭЛЕКТРОННЫЙ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Численные методы и обработка данных

для специальности
1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент»

Составители: Краков Михаил Самуилович, профессор, д.ф.-м.н.,
Погирницкая Светлана Георгиевна

Минск ◊ БНТУ ◊ 2022

Перечень материалов

1. Теоретический раздел: конспект лекций.
2. Практический раздел: задания для проведения лабораторных занятий.
3. Раздел контроля знаний: задания к экзамену.
4. Вспомогательный раздел: учебная программа, список рекомендуемой литературы.

Пояснительная записка

Целью ЭУМК «Численные методы и обработка данных» является предоставление студентам систематизированных материалов по основам алгоритмизации прикладных задач, вычислительным методам и способам обработки данных с использованием электронных таблиц.

Электронный учебно-методический комплекс предназначен для изучения дисциплины «Численные методы и обработка данных» студентами специальности 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент».

Особенности структурирования и подачи учебного материала

Учебные материалы структурированы по разделам. В теоретическом разделе описаны приемы работы с табличным процессором MS Excel, представлены способы обработки данных в таблицах, рассмотрены основные численные методы решения уравнений и оптимизации. В практический раздел включены материалы для проведения лабораторных занятий. Раздел контроля знаний содержит образец практических заданий к экзамену. Вспомогательный раздел содержит учебную программу по дисциплине «Численные методы и обработка данных» и список рекомендуемой литературы.

Материалы учебно-методического комплекса представлены в формате PDF. Предусматривается навигация по разделам, обеспечивающая возможность быстрого поиска требуемой информации.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК

Открытие ЭУМК производится посредством запуска файла Chislen_metody_i_obrabotka.pdf.

Запуск программы может быть осуществлен непосредственно с компакт-диска, без предварительной инсталляции.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Раздел I. ОСНОВЫ РАБОТЫ С ПРИКЛАДНЫМ ПАКЕТОМ EXCEL

Тема 1.1. Назначение и основные функции электронных таблиц

Современные компьютерные средства для эффективного выполнения инженерных и научных расчетов

Каждый студент, инженер, исследователь, менеджер в своей деятельности сталкивается с необходимостью решать задачи, связанные с вычислениями и обработкой данных. Для решения основных математических задач разработаны численные методы. После создания в 40-х годах прошлого столетия первого программируемого компьютера именно компьютеры стали основным инструментом по работе с данными. В качестве среды для реализации численных методов и обработки данных выбираем электронные таблицы – табличный процессор MS Excel. С одной стороны электронные таблицы от других программ отличает простота и наглядность, с другой стороны, они обладают мощным аппаратом встроенных функций и надстроек, возможностью программирования.

Рис. 1.1. Выбор вычислительной среды

Техника безопасности и организация охраны труда при работе на персональном компьютере

Источник опасности – электрический ток с переменным напряжением 220 В. Запрещается работать на ПК при вскрытом корпусе.

Неблагоприятные факторы:

– напряжение зрительного аппарата;

– долгое пребывание в статичной позе.

Правильная организация рабочего места пользователя поможет сохранить здоровье и высокую работоспособность.

Поза работающего за компьютером должна быть удобной и ненапряженной. Самым оптимальным является положение тела, при котором спина и шея прямая, ноги стоят на полу при прямом угле сгиба в коленях и бедрах, руки согнуты в локтях приблизительно на прямой угол.

Верхняя часть монитора должна располагаться на уровне глаз или немного ниже. Рекомендуется устанавливать дисплей на расстоянии порядка полуметра от глаз. На экране не должно быть бликов от освещения, которые резко повышают утомляемость. Излишняя яркость и контрастность приводят к повышенной утомляемости глаз.

Компьютер необходимо оградить от толчков и вибраций, не следует двигать системный блок при включенном питании. Нельзя закрывать доступ к вентиляционным отверстиям системного блока и монитора. Не следует ставить компьютер вблизи сильных источников тепла.

Нельзя прикасаться к экрану монитора пальцами и другими предметами.

Перед выключением ПК необходимо завершить выполнение всех программ и подготовить его к выключению с помощью команды **Пуск > Завершение работы**.

Назначение и возможности электронных таблиц

Программа Microsoft Excel – среда для вычислений и обработки данных. MS Excel используют для решения инженерных и экономических задач.

Термин *электронная таблица* применяется для обозначения программы, предназначенной для хранения и обработки данных, представленных в табличном виде. Обработка данных включает в себя:

- проведение различных вычислений с использованием мощного аппарата функций и формул;
- наглядное представление данных в виде графиков и диаграмм.
- решение уравнений (алгебраических, нелинейных, дифференциальных);
- исследование влияния различных факторов на данные;
- решение задач оптимизации;
- создание и анализ небольших баз данных;
- статистический анализ данных;

Excel позволяет реализовать алгоритмы с линейной структурой, с повторением операций, циклами и разветвлениями.

Пользовательский интерфейс MS Excel

Табличный процессор MS Excel создает для работы так называемую книгу, которая содержит несколько листов, что позволяет удобно организовывать данные. Стандартный интерфейс программы Excel представлен на рис. 1.2.

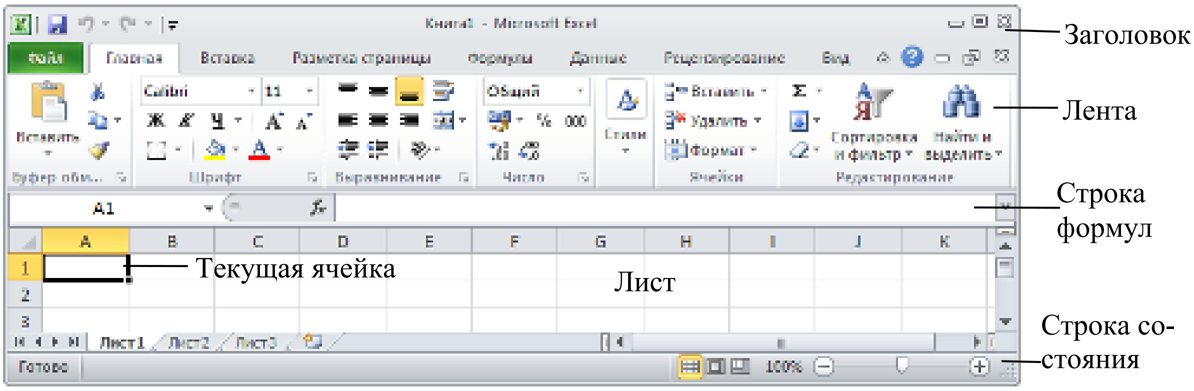


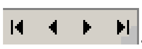
Рис. 1.2. Интерфейс Excel 2010

Строка заголовка содержит название файла, кнопки управления окном и панель быстрого доступа.

Лента предоставляет доступ к командам Excel и состоит из вкладок, связанных с определенными целями или объектами. Каждая вкладка, в свою очередь, состоит из нескольких групп взаимосвязанных элементов управления.

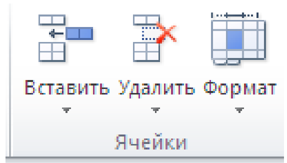
Строка формул отображает действительное содержимое активной ячейки), используется для ввода и редактирования значений и формул. Поле имени расположено в левой части строки формул и отображает имя активной ячейки.

Строка состояния представляет информацию о режимах работы, содержит встроенный калькулятор.

Рабочая область содержит открытую книгу. Внизу расположены ярлычки листов с названиями, кнопка для вставки нового листа и кнопки прокрутки ярлычков .

Рабочий лист разбит на ячейки. Каждая ячейка представляет собой как бы отдельный вычислительный узел, а все ячейки могут обмениваться между собой данными. **Ячейки** образуется на пересечении столбцов и строк. Адрес ячейки состоит из обозначений столбца и строки. **Столбец** обозначается буквами английского алфавита, отображаемыми в верхней строке листа. Для столбцов в качестве имен используются буквы от A до Z**,** для последующих столбцов - пары букв, начиная от AA, AB, AC и кончая AZ, затем берутся пары BA, BB и т.д. Каждая **строка** имеет номер, отображаемый на левой стороне листа. Текущая ячейка (на которой стоит курсор) обведена рамкой, а ее адрес и содержимое высвечиваются в строке формул. Возможен также тип нумерации ячеек C1R1, когда строки и столбцы обозначаются цифрами.

Для вставки/удаления ячеек, строк, столбцов, листов используют команды **Вставить** и **Удалить**, расположенные на панели «Ячейки» вкладки **Главная,** или контекстное меню.



Ввод и вывод данных

Данные вводятся в ячейки листа. Excel различает следующие типы данных: числа, текст, дата, время.

При вводе чисел можно использовать символы

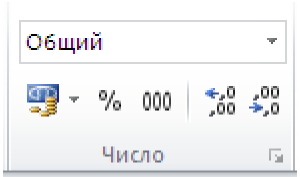
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - + / , E e

В качестве разделителя в десятичных дробях используется запятая (тип десятичного разделителя зависит от региона, установленного в Windows). Ввод простых дробей начинается с ввода целой части или нуля, далее пробел и дробь, например «0 1/3». При записи чисел в экспоненциальном формате буква E или e означает «10 в степени». Например, 1E2 означает число 10^2=100. Число в ячейке может содержать до 15 значащих цифр. Максимально возможное число равно 9,99999999999999E307, минимальное: -9,99999999999999E307. Минимальное абсолютное значение составляет 1E-307. Если ширина ячейки недостаточна для того, чтобы вместить число, то вместо него отображаются символы '#'.

При вводе даты число, месяц и год следует набирать через точку, наклонную черту или дефис. Например, набор «9/5/22» приведет к появлению в ячейке «09.05.2022». При вводе времени часы от минут отделяются символом «:».

В Excel даты и время дня рассматриваются как числа. В числовом формате даты в Excel представляют собой количество дней от даты **01.01.1900**, а время вычисляется как дробная часть суток. Числовая информация, введенная в ячейку, выравнивается по ***правому*** краю.

По умолчанию числа выводятся в формате «Общий».



Формат вывода данных в ячейках можно задавать с помощью кнопок на панели «Число» вкладки **Главная** или окна диалога «Формат ячеек» (рис. 1.3), вызываемого щелчком по угловой стрелке этой панели.

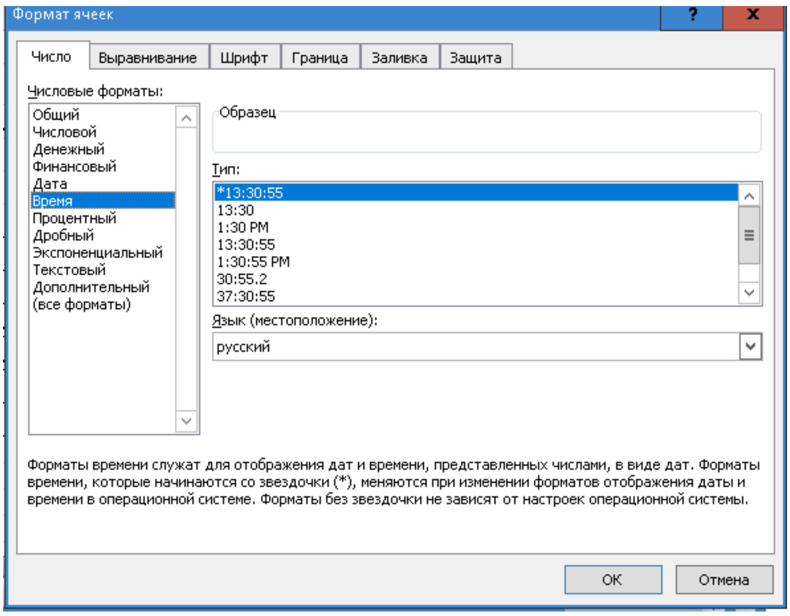


Рис. 1.3. Диалоговое окно «Формат ячеек»

Текст представляет собой последовательность букв или сочетание букв и цифр. Любая последовательность введенных в ячейку символов, которая *не может* быть интерпретирована Excel как число, формула, дата, время, логическое значение или значение ошибки, интерпретируется как текст. Введенный текст выравнивается в ячейке по ***левому*** краю.

Данные в формате текста вводятся автоматически при наборе текста или после символа «’» (апостроф) при вводе чисел. Текст в ячейке может содержать до 255 символов (включая пробелы). Если размер текста превышает ширину ячейки, его можно расположить в ячейке в несколько строк. Для этого на вкладке **Главная** в группе «Выравнивание» следует выбрать команду «Перенос текста».

Ввод формулы начинается со знака «=».

В Excel разработан механизм ввода последовательностей – рядов данных. Под *рядами данных* подразумеваются данные, отличающиеся друг от друга на фиксированный шаг. При этом данные не обязательно должны быть числовыми (например, дни недели). Для создания ряда данных необходимо выполнить следующие действия

- ввести в ячейку первый член ряда;
- подвести указатель мыши к маркеру заполнения (маленькому черному квадратику в правом нижнем углу выделенной ячейки, в этот момент белый крестик указателя мыши переходит в черный) и нажать левую клавишу мыши. Далее, удерживая нажатой кнопку мыши, протянуть нужную часть строки или столбца. После того, как кнопка будет отпущена, выделенная область заполнится данными.

Можно построить ряд и другим способом, если указать шаг построения. Для этого нужно ввести вручную второй член будущего ряда, выделить обе ячейки и провести описанную выше процедуру построения ряда.

Последовательность данных может быть построена с помощью окна диалога «Прогрессия» (вкладка **Главная**>группа «Редактирование» > кнопка «Заполнить» >команда «Прогрессия») (рис. 1.4).

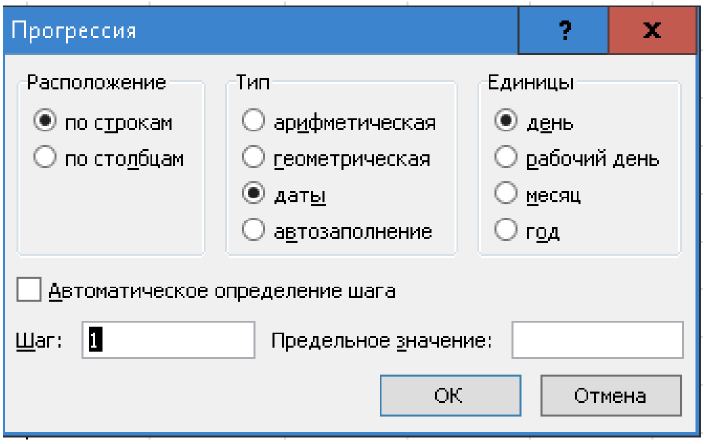


Рис. 1.4. Диалоговое окно «Прогрессия»

Проверка данных при вводе

Например, может потребоваться ограничить ввод данных предопределенными элементами списка, запретить ввод дат, находящихся за пределами определенного промежутка времени или разрешить ввод только положительных целых чисел.

Чтобы задать проверку данных при вводе, используется команда «Проверка данных», которая находится на вкладке **Данные** в группе «Работа с данными». Откроется окно диалога, в котором следует задать тип вводимых данных и диапазон (рис.1.5).

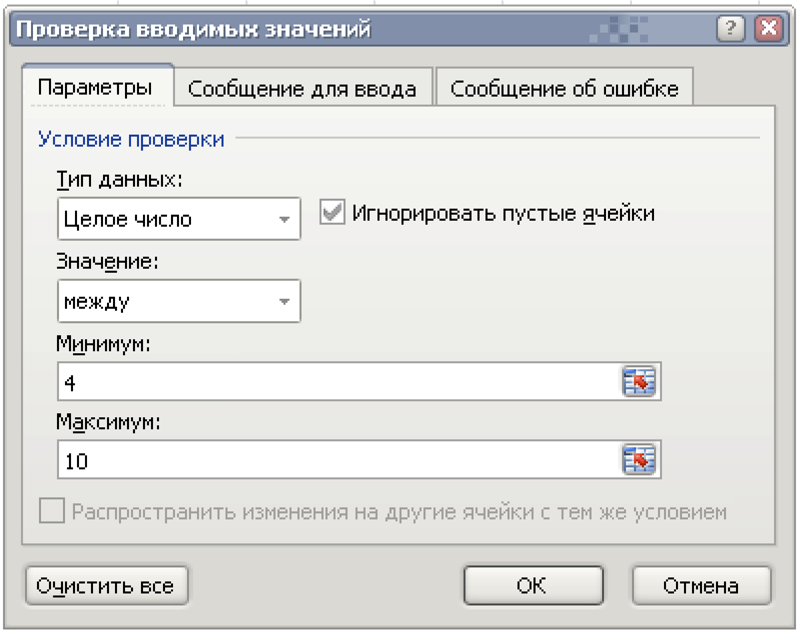


Рис. 1.5. Проверка вводимых значений

Форматирование ячеек электронной таблицы

Для того чтобы подчеркнуть содержание таблиц, их текстовое оформление должно быть разнообразным и соответствовать структуре таблиц.

Использование текста различной ориентации и начертания, оформление границ различными рамками рассмотрим на примере создания таблицы, содержащей числовой материал и различные заголовки. Предположим, что нам нужно оформить результаты продаж различных видов книг. Исходный материал после ввода текста и чисел в ячейки и результат форматирования этого материала представлены на рис. 1.6.

Ясно видно, что конечная таблица значительно выигрывает с точки зрения наглядности представления данных. Разберем поэтапно процесс перехода от начального вида таблицы к конечному.

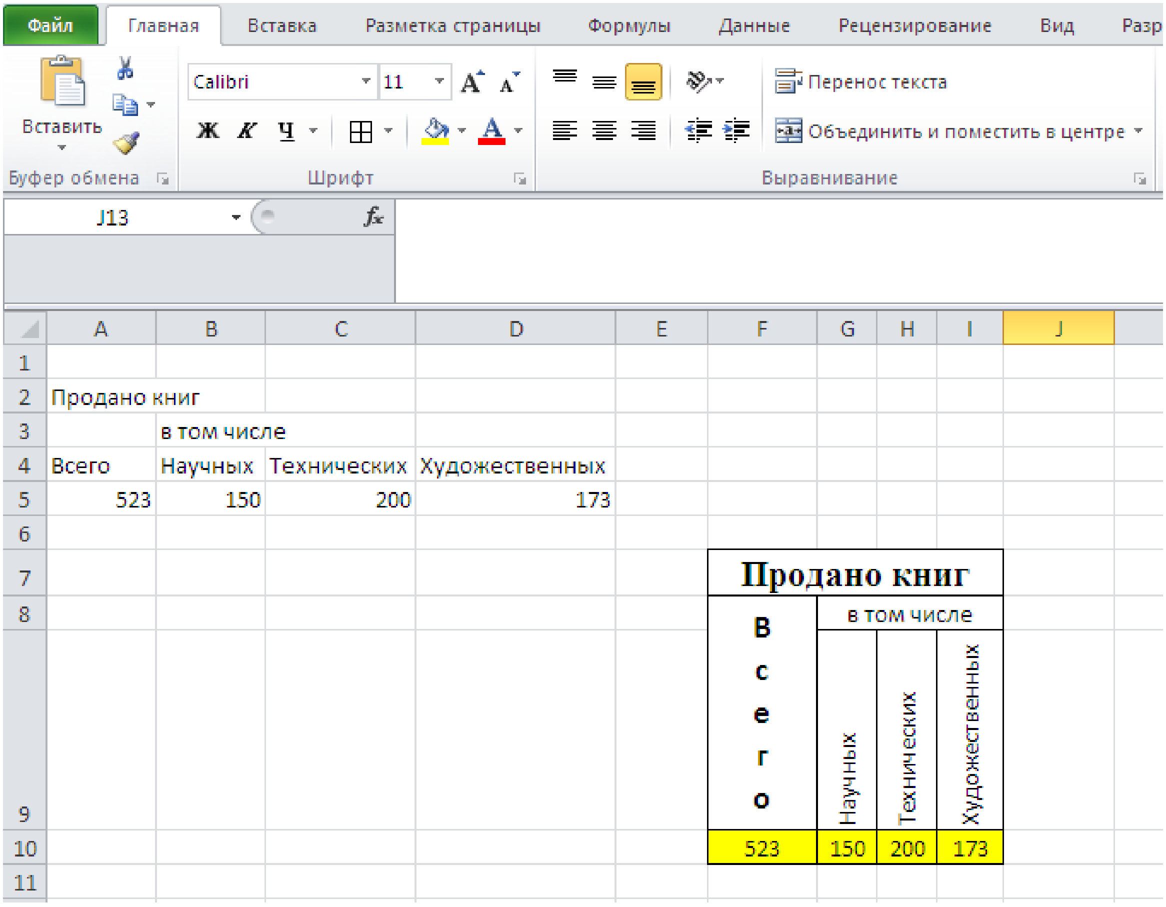


Рис. 1.6. Оформление таблицы

Ввод текста таблицы

Исходя из структуры будущей таблицы, необходимо выбрать ячейки для расположения заголовков таблицы и ввести в них текст и числовой материал. В результате получаем то, что на рисунке расположено в ячейках A2:D5.

Форматирование

Для размещения главного заголовка таблицы по центру необходимо выделить ячейки A2:D2 и воспользоваться кнопкой «Объединить и поместить в центре» на панели «Выравнивание». Та же операция в приведенном примере была проделана с ячейками A3:A4 и ячейками B3:D3. Можно выбрать ориентацию расположения текста в выделенных ячейках. Выравнивание по горизонтали и по вертикали позволяет выбрать вариант расположения текста относительно границ ячейки, а команда «Перенос текста» разрешает размещать в ячейке несколько строк текста, автоматически увеличивая высоту ячейки по мере появления новых строк текста в ней. Кнопки на панели «Шрифт» вкладки **Главная** позволяют выбрать шрифт, размер и начертание, а также границы и цвет заливки (рис. 1.6).

Все описанные выше команды также находятся в окне диалога «Формат ячеек» (рис. 1.7).

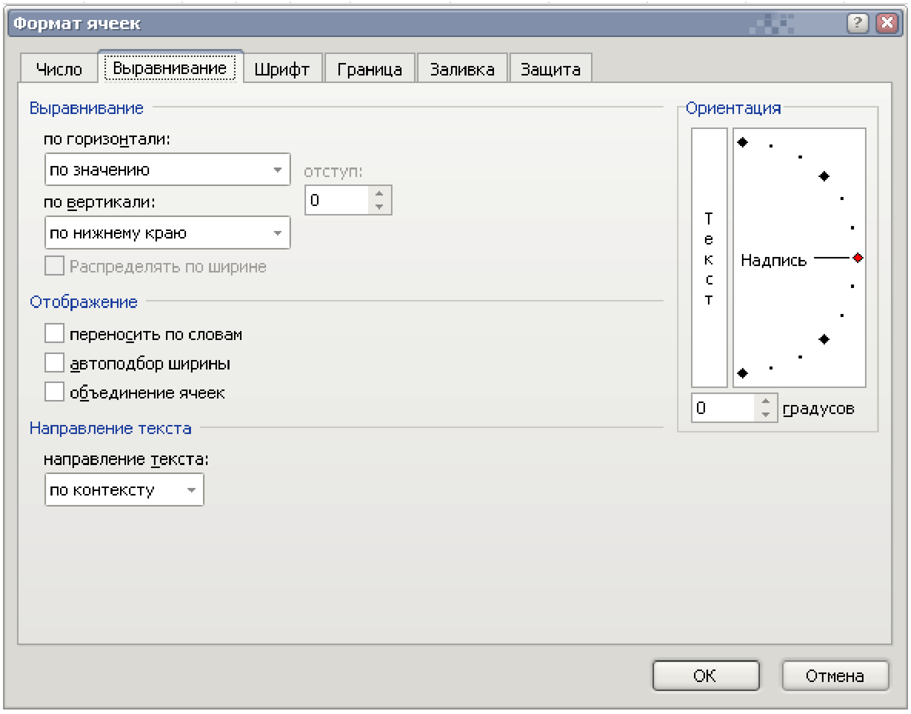


Рис. 1.7. Окно диалога «Формат ячеек»

Условное форматирование

Чтобы подчеркнуть особое значение той или иной величины, выводимой в ячейке, ячейку можно отформатировать специальным образом. Но так как значение величины может быть разным, то и форматирование необходимо делать учетом значения описываемой величины. Для этого необходимо выполнить команду: **Главная>Стили>Условное форматирование**, затем выбрать правила форматирования (рис. 1.8).

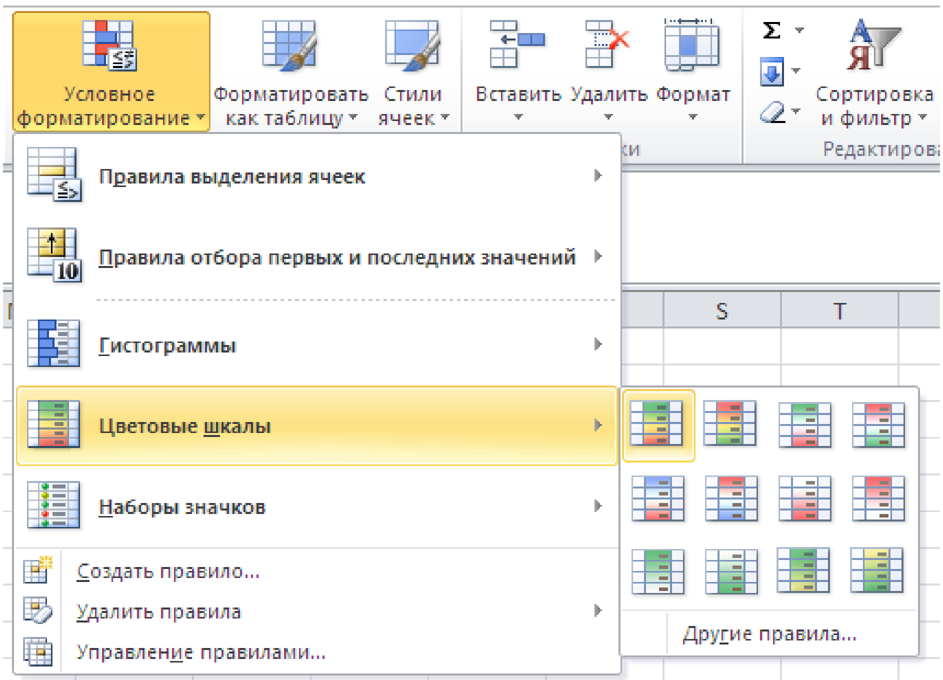


Рис. 1.8. Условное форматирование ячеек

Тема 1.2. Функции и формулы

Ввод формул

Формулой в Excel называется последовательность символов, начинающаяся со знака равенства «=». В эту последовательность символов могут входить *постоянные значения, ссылки на ячейки, имена, функции и операторы*. Результатом работы формулы является новое значение, которое выводится в ячейке как результат вычисления формулы по имеющимся данным. Если значения в ячейках, на которые есть ссылки в формулах, меняются, то результат изменится автоматически.

В формулах можно использовать операции сложения «+», вычитания «–», умножения «*», деления «/», возведения в степень «^». Можно также использовать знак процента «%», скобки «( )». При записи диапазона ячеек используется символ двоеточие «:».

В Excel существует *порядок старшинства* операторов в формулах:

1) сначала выполняется возведение в степень,

2) затем умножение и деление,

3) затем сложение и вычитание.

Для изменения порядка вычисления используют скобки.

В качестве примера приведем формулы, вычисляющие корни квадратного трехчлена: $ax^2+bx+c = 0$ (рис.1.9). В ячейках **A1**, **B1** и **C1** находятся значения коэффициентов *a*, *b* и *c* соответственно. Формулы введены в ячейки **A2** и **A3** и имеют следующий вид:

=(-B1+КОРЕНЬ(B1*B1-4*A1*C1))/2/A1
=(-B1-КОРЕНЬ(B1*B1-4*A1*C1))/2/A1

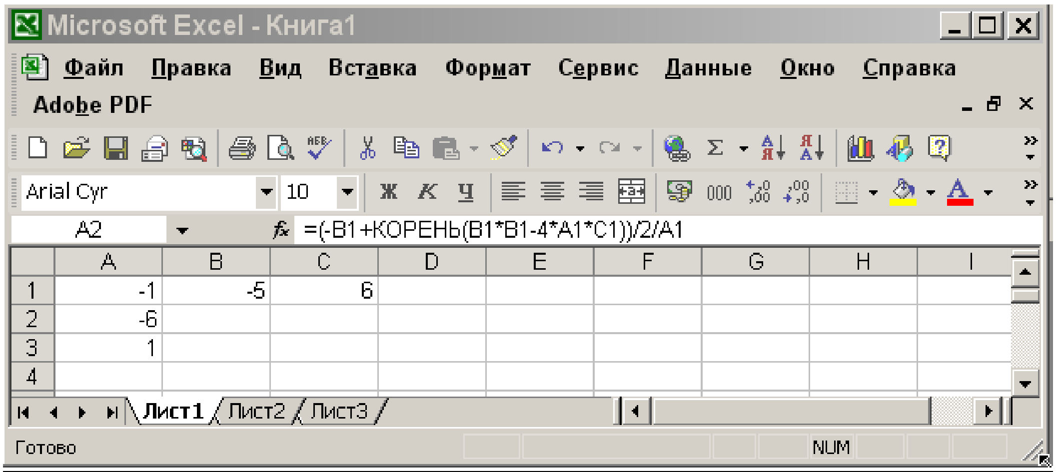


Рис. 1.9. Пример формулы

Если вы ввели значения коэффициентов *a* = 1, *b* = -5 и *c* = 6 (это означает, что в ячейках **A1**, **B1** и **C1** записаны числа 1, 5 и -6), то в ячейках **A2** и **A3**, где записаны формулы, вы получите числа 2 и -3. Если вы измените число в ячейке **A1** на -1, то в ячейках с формулами вы получите числа -6 и 1.

Для внесения изменений в формулу необходимо нажать мышью на строке формул или нажать клавишу F2. Затем внести изменения и нажать кнопку ввода в строке формул ✔ или клавишу Enter. Чтобы отказаться от изменений следует нажать кнопку ✕ или клавишу Esc. Если необходимо внести изменения в формулу непосредственно в ячейке, в которой она записана, то следует дважды щелкнуть мышью по ячейке с этой формулой.

Адресация ячеек

Ссылка однозначно определяет ячейку или группу ячеек рабочего листа. Ссылки указывают, в каких ячейках находятся значения, которые нужно использовать в качестве аргументов формулы. С помощью ссылок можно использовать в формуле данные, находящиеся в различных местах рабочего листа. Можно также ссылаться на ячейки, находящиеся на других листах рабочей книги, в другой рабочей книге, или даже на данные другого приложения.

Ссылки на ячейки используют заголовки соответствующих столбцов и строк рабочего листа. Для ввода ссылки достаточно щелкнуть нужную ячейку.

При перемещении формулы в новое место таблицы ссылки в формуле не изменяются, при копировании смещаются. Чтобы при копировании формулы адрес ячейки не изменялся, в формуле используют абсолютный адрес ячейки. Надо задать перед номером столбца или строки символ $, например, A$1, $A1, $A$1. Технически это легко сделать, поместив курсор в строку формул, выделив всю формулу или ее часть, которая должна содержать абсолютные ссылки, и нажать клавишу F4.

Если в ссылке используются символы $, то она называется абсолютной, если символов $ в ссылке нет – относительной. Могут быть смешанные ссылки.

Имя — это легко запоминающийся идентификатор, который можно использовать для ссылки на ячейку, группу ячеек, значение или формулу. Для того чтобы присвоить ячейке имя, необходимо выполнить следующие действия:

- поместить курсор в ячейку или выделить диапазон;
- в левом окне строки формул ввести имя ячейки и нажать Enter. Первым символом имени должна быть буква, знак подчеркивания (_) или обратная косая черта (\). Остальные символы имени могут быть буквами, цифрами, точками и знаками подчеркивания, пробелы в имени не допускаются.

Для работы с именами ячеек предназначена панель «Определенные имена» вкладки **Формулы**. С ее помощью можно присваивать и применять имена. Например, можно создать имена из заголовков таблицы.

Ссылка на присвоенное имя является абсолютной.

Функции

Функции в Excel используются для выполнения стандартных вычислений в рабочих книгах. Значения, которые используются для вычисления функций, называются *аргументами*. Значения, возвращаемые функциями в качестве ответа, называются *результатами*. Аргументы функции записываются в круглых скобках сразу за названием функции и отделяются друг от друга символом точка с запятой « ; ».

В качестве аргументов можно использовать числа, текст, логические значения, массивы или ссылки. Аргументы могут быть как константами, так и функциями. Функции, являющиеся аргументом другой функции, называются вложенными.

Задаваемые входные параметры должны иметь допустимые для данного аргумента значения. Некоторые функции могут иметь необязательные аргументы, которые могут отсутствовать при вычислении значения функции. У функции могут отсутствовать аргументы. Примеры: ПИ(), СЕГОДНЯ().

Категории функций

Все функции MS Excel сгруппированы в категории в соответствии с их функциональностью. Основные категории функций:

- Математические и тригонометрические
- Логические
- Статистические
- Текстовые
- Финансовые
- Функции даты и времени
- Ссылки и массивы
- Функции для работы с базами данных
- Инженерные
- Функции проверки свойств и значений
- Определенные пользователем функции.

Способы вставки функций:

1) непосредственно набрать имя функции с аргументами в строке формул или ячейке, при этом Excel выдает подсказку (рис. 1.10 а);

2) нажать кнопку fx «Вставить функцию» в строке формул. Появится окно диалога «Мастер функций». На первом шаге выбрать категорию и функцию, на втором шаге ввести аргументы функции, при этом можно получить справку о функции с примерами (рис. 1.10 б);

3) на вкладке **Формулы** (рис. 1.10 в) в Библиотеке функций выбрать категорию, затем имя функции, в окне диалога ввести аргументы.

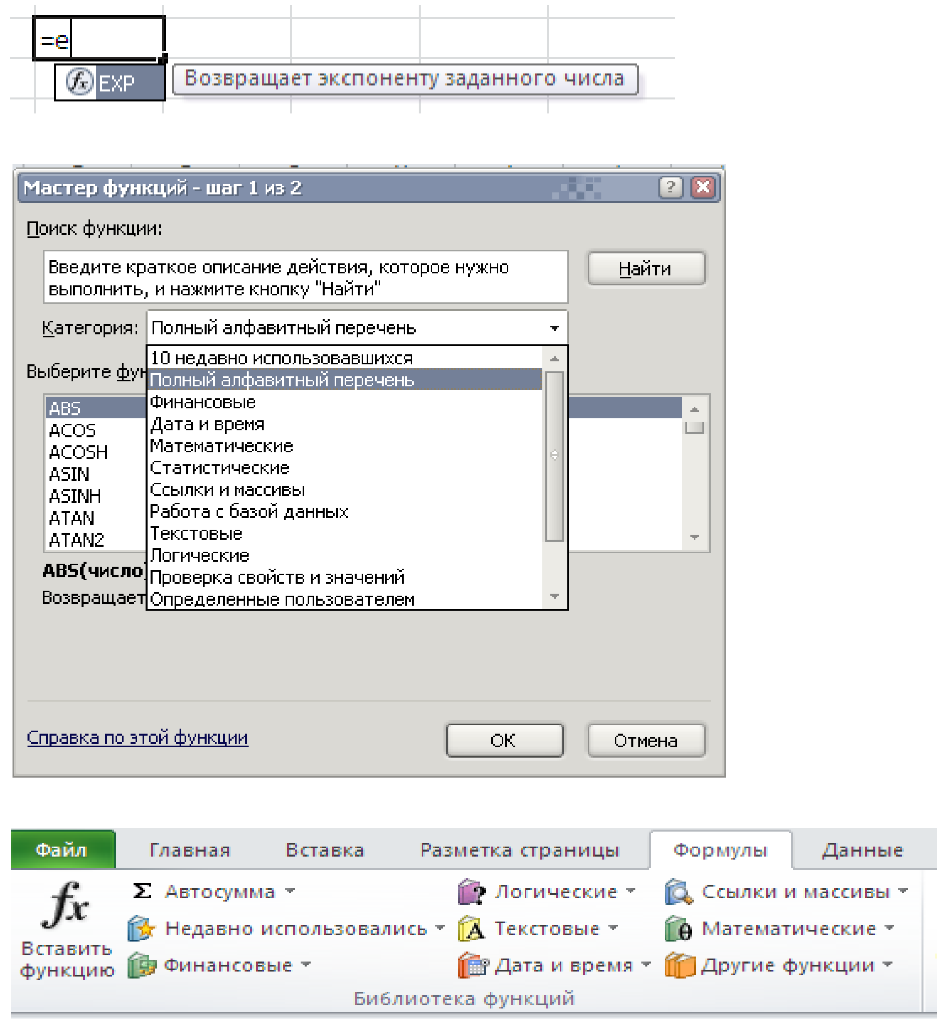


Рис. 1.10. Способы вставки функций
а – непосредственный ввод, б – с помощью мастера функций, в – с помощью вкладки Формулы

Ошибки в формулах

Excel выводит в ячейку значение ошибки, когда формула для этой ячейки не может быть правильно вычислена.

Основные ошибки представлены в табл. 1.1:

Таблица 1.1

Коды ошибок и их возможные причины

Код ошибки	Возможные причины
#ДЕЛ/0!	В формуле делается попытка деления на ноль
#Н/Д	Нет доступного значения
#ИМЯ?	Excel не смог распознать имя, использованное в формуле
#ЧИСЛО!	Возникли проблемы с числом: (корень из отрицательного числа)
#ССЫЛКА!	Формула неправильно ссылается на ячейку (удалена ячейка со ссылкой)
#ЗНАЧ!	Аргумент или операнд имеют недопустимый тип (текст вместо числа или логической константы)

Математические функции

Примеры вычислений с использованием математических формул и выражений приведены в 1.2. Значение переменной x введено в ячейку A1.

Таблица 1.2

Математическое выражение	Формула в MS Excel
$\|x\|$	=ABS(A1)
e^x	=EXP(A1)
$\sqrt{x}$	=КОРЕНЬ(A1)
$\cos(x + \pi)$	=COS(A1+ПИ())
$\sin^2 x$	=SIN(A1)^2
$\frac{1+\ln x}{2x}$	=(1+LN(A1))/(2*A1)
округлить числовое значение до двух знаков после запятой	=ОКРУГЛ(A1; 2)

В тригонометрических функциях используется угол в радианах. Если аргумент задан в градусах, следует умножить его на ПИ()/180 или преобразовать в радианы с помощью функции РАДИАНЫ.

Логические функции

Если необходимо выполнить те или иные действия в зависимости от выполнения каких-либо условий, то используются логические функции. В Excel могут использоваться следующие логические функции: ЕСЛИ, И, ИЛИ, ИСТИНА, ЛОЖЬ, НЕ. Результатом работы логических функций И, ИЛИ, ИСТИНА, ЛОЖЬ, НЕ является логическое значение ИСТИНА или ЛОЖЬ, а результатом работы логической функции ЕСЛИ может быть число, текст или ссылка на выполнение каких-либо действий.

Функция **ЕСЛИ(арг_лог**, **если_истина**, **если_ложь**) возвращает результат **если_истина**, если логический аргумент **арг_лог** при вычислении приобретает значение ИСТИНА, и **если_ложь**, если **арг_лог** при вычислении приобретает значение ЛОЖЬ. При конструировании более сложных проверок в качестве значений аргументов **если_истина** и **если_ложь** могут быть вложенными до семи функций ЕСЛИ.

Пример.

=ЕСЛИ(A1>=0;КОРЕНЬ(A1);"нет решения")

Если число в ячейке A1 больше или равно нулю, то вычисляется квадратный корень, в противном случае выдается текст «нет решения».

Функция **И** возвращает значение ИСТИНА, если все аргументы имеют значение ИСТИНА.

Примеры.

Формула “=И(SIN(ПИ())=0;COS(ПИ())=-1)” дает в результате ЛОЖЬ, так как из-за ошибок округления SIN(ПИ())=1,2251E-16, а формула “=И(SIN(0)=0;COS(ПИ())=-1)” дает в результате ИСТИНА.

Если в ячейке A1 содержится значения ИСТИНА, в ячейке A2 — ЛОЖЬ, а в ячейке A3 — ИСТИНА, то результатом работы формулы “=И(A1:A3)” будет ЛОЖЬ, а если и в ячейке A2 будет ИСТИНА, то результатом работы формулы “=И(A1:A3)” будет ИСТИНА.

Если ячейка A4 содержит число между 1 и 100, то: И(1<A4; A4<100) равняется ИСТИНА.

Предположим, что вам нужно вывести на экран содержимое ячейки A4, если она содержит число строго между 1 и 100 и сообщение “Значение вне интервала” — в противном случае. Тогда, если ячейка A4 содержит число 104, то формула “=ЕСЛИ(И(1<A4;A4<100);A4;”Значение вне интервала”)” возвращает выражение “Значение вне интервала”, а если ячейка A4 содержит число 50, то формула возвращает число 50.

Формула **“=И(C10;C8>1,35)”** возвращает значение **ИСТИНА** при всех числах, удовлетворяющих условию **C8>1,35** независимо от числа, которое находится в ячейке C10 (положительное, отрицательное), кроме **0**, т.к. функция **И** воспринимает число 0 в ячейке **C10** как **ЛОЖЬ**. Если же в ячейке **C10** находится значение **ЛОЖЬ** (или число 0), то тогда формула **”=И(C10;C8>1,35)”** возвращает значение **ЛОЖЬ**. Если условие **C8>1,35** не выполняется, то также возвращается **ЛОЖЬ**.

Формула **“=И(C10>0;C8>1,35)”** возвращает значение **ИСТИНА** при всех числах, находящихся в ячейках **C8** и **C10**, которые удовлетворяют условиям **C8>1,35** и **C10>0**.

Функция **ИЛИ** возвращает значение ИСТИНА, если хотя бы один аргумент имеет значение ИСТИНА.

Примеры.

Результатом выполнения формулы **“=ИЛИ(SIN(ПИ())=0;COS(ПИ()/2)=0)”** является значение **ЛОЖЬ**, поскольку из-за ошибок округления **SIN(ПИ())=1,2251E-16** и **COS(ПИ()/2)=6.1257E-17**, а формула **“=ИЛИ(SIN(ПИ())=0;COS(0)=1)”** возвращает в результате **ИСТИНА**, так как **COS(0)=1**.

Если в ячейке **A1** содержится значения **ИСТИНА**, в ячейке **A2** — **ЛОЖЬ**, а в ячейке **A3** — **ИСТИНА**, то результатом работы формулы **“=ИЛИ(A1:A3)”** будет **ИСТИНА**. Если в ячейках **A1**, **A2** и **A3** будет **ЛОЖЬ**, то формула **“=ИЛИ(A1:A3)”** выдаст **ЛОЖЬ**.

Результатом работы логических функций **ИСТИНА()** и **ЛОЖЬ()** являются логические значения ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Функция **НЕ(арг)** изменяет на противоположное логическое значение своего аргумента. Если **арг** имеет значение ЛОЖЬ, то функция НЕ возвращает значение ИСТИНА, а если **арг** имеет значение ИСТИНА, то функция НЕ возвращает значение ЛОЖЬ.

Примеры.

Формула “=НЕ(D7)” возвращает ИСТИНА, только в том случае, когда в ячейке D7 находится 0. На положительные и отрицательные числа формула “=НЕ(D7)” возвращает ЛОЖЬ. Формула “=НЕ(D8>1,5)” возвращает ИСТИНА, когда в ячейке D8 находится число меньшее или равное 1.5 и возвращает ЛОЖЬ, когда в ячейке D7 находится число, превышающее 1,5.

Пример. Таблица с условиями

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Фамилия студента	Лабораторные работы					Средний балл	Отметка о сдаче
2		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5		
3	Иванов	10	8	7	8		8,25	**не зачтено**
4	Петров	6	7	5	6	4	5,60	6
5	Сидоров	5	8	9	6	4	6,40	6
6	Ковалев		9	7	8		8,00	**не зачтено**
7	Климович	4	5	5	5	8	5,40	5

Для вычисления среднего балла необходимо знать не только сумму баллов, но и число выполненных работ. Если сумма баллов в любом случае может быть найдена как **"=СУММ(B3:F3)"**, то для вычисления количества выполненных работ нужно использовать функцию **"=СЧЕТ(B3:F3)"**, которая считает число непустых ячеек в заданном интервале. Тогда средний балл определится как **"=СУММ(B3:F3)/СЧЕТ(B3:F3)".**

В ведомость о сдаче необходимо вносить целые оценки. Для округления среднего балла до целых можно использовать функцию **"=ОКРУГЛ(G3;0)"**, в которой второй аргумент означает число знаков после запятой, до которых проводится округление. Если необходимо округление до десятков или сотен (тысяч и т.д.), то этот аргумент имеет отрицательное значение. Так, если он равен -3, то производится округление до тысяч.

В том случае, когда студент выполнил не все лабораторные работы, он не может получить оценку. Это означает, что прежде, чем на основании среднего балла выставлять оценку, необходимо убедиться, что не невыполненных работ. Это можно сделать с помощью функции **СЧИТАТЬПУСТОТЫ(B3:F3)**, которая возвращает количество пустых ячеек в указанном диапазоне. Следует обратить внимание, что хотя в вычислениях пустая ячейка воспринимается как 0, обратное утверждение неверно: если в ячейке введено число 0, то она считается непустой. Тогда окончательно выражение в ячейке Н3, в которой выводится заключение о результатах работы, необходимо записать:

"=ЕСЛИ(СЧИТАТЬПУСТОТЫ(B3:F3)=0;ОКРУГЛ(G3;0);"не зачтено")". В этом случае, если все работы выполнены (пустых ячеек нет), будет вычислен средний балл, в противном случае будет выведено сообщение "не зачтено".

Применено условное форматирование: **Главная|Стили|Условное форматирование|Правила выделения ячеек|Больше**. Так как в пакете Excel любое текстовое значение больше, чем любое численное, а средний балл не может быть больше, чем 10, то необходимо установить условие "значение больше 10" и выбрать способ форматирования ячейки в правом окне.

Статистические функции

СРЗНАЧ — возвращает среднее арифметическое своих аргументов.

Синтаксис: СРЗНАЧ(число1; число2; ...)

МИН и **МАКС** — возвращают соответственно наименьшее и наибольшее значение из набора значений.

Синтаксис: МИН(число1; число2; ...); МАКС(число1; число2; ...)

СЧЁТ — подсчитывает количество чисел в списке аргументов.

Синтаксис: СЧЁТ(значение1; значение2; ...)

СЧЁТЗ — подсчитывает количество непустых значений в списке аргументов.

Синтаксис: СЧЁТЗ(значение1; значение2; ...)

СЧЁТЕСЛИ — подсчитывает количество ячеек внутри интервала, удовлетворяющих заданному критерию.

Синтаксис: СЧЁТЕСЛИ(интервал; критерий)

СЧЁТЕСЛИМН – подсчитывает количество ячеек, удовлетворяющих заданному набору условий.

Синтаксис:СЧЁТЕСЛИМН(диапазон_условия1, условие1, [диапазон_условия2, условие2]…)

СЧИТАТЬПУСТОТЫ — подсчитывает количество пустых ячеек в заданном интервале.

Текстовые функции

СЦЕПИТЬ — объединяет несколько текстовых элементов в один.

Синтаксис: СЦЕПИТЬ(текст1, [текст2], ...)

Для объединения текстовых элементов вместо функции **СЦЕПИТЬ** можно также использовать оператор **&** (амперсанд). Например, формула =A1 & B1 возвращает то же значение, что и формула =СЦЕПИТЬ(A1, B1).

ПРОПИСН— преобразует буквы текста в прописные.

Синтаксис: ПРОПИСН(текст)

СТРОЧН — преобразует буквы текста в строчные.

Синтаксис: СТРОЧН(текст)

ЛЕВСИМВ — возвращает левые знаки текстового значения.

Синтаксис: ЛЕВСИМВ(текст, [число_знаков]) (по умолчанию один знак)

ТЕКСТ — преобразует численное значение в текст и позволяет задать формат отображения с помощью специальных строк форматирования. Эта функция полезна, если числа требуется отобразить в более удобном формате или если требуется объединить числа с текстом или символами.

Синтаксис: ТЕКСТ(значение, формат)

Примеры: =ТЕКСТ(A1,"0,00 р.")

=ТЕКСТ(A1,"0,00 р.") & " в час"

НАЙТИ, ПОИСК — находят вхождение одной текстовой строки в другую (соответственно с учетом регистра, без учета) и возвращают начальную позицию искомой строки относительно первого знака второй строки.

Дата и время

СЕГОДНЯ — возвращает текущую дату в числовом формате.

Синтаксис: СЕГОДНЯ()

ГОД — возвращает год, соответствующий заданной дате. Год определяется как целое число в диапазоне от 1900 до 9999.

Синтаксис: ГОД(дата_в_числовом_формате)

Пример: вычисление возраста **=ГОД(СЕГОДНЯ())-1963**

Операции с массивами

MS Excel предоставляет различные средства для работы с массивами (диапазонами ячеек). Операции с массивами обеспечивают функции категорий **Математические**, **Ссылки и массивы**, **Статистические**. Массивы ячеек могут быть аргументами или результатами функций.

Создание формул массива

Для создания формулы массива выполните следующие действия:

1. Выделите диапазон ячеек, который будет содержать результаты вычислений.
2. Наберите формулу, выделяя в качестве аргументов диапазоны ячеек.
3. Одновременно нажмите клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. Табличная формула автоматически заключается в фигурные скобки **{ }**.

Содержимое отдельной ячейки в формуле массива изменить нельзя.

Формулу массива можно переместить или удалить только целиком.

В формулу массива с несколькими ячейками нельзя вставить пустые строки или удалить строки из нее.

Функции для работы с массивами

В Excel работа с матрицами и массивами представлена следующими функциями (табл. 1.3):

Таблица 1.3

Некоторые функции для работы с матрицами и массивами

Функция	**Назначение**
МУМНОЖ	Умножение матриц
МОБР	Нахождение обратной матрицы
ТРАНСП	Транспонирование матрицы
МОПРЕД	Вычисление определителя
ИНДЕКС	Извлечение из матрицы элемента по номеру строки и столбца
ЧСТРОК и ЧИСЛСТОЛБ	Определение числа строк и столбцов
СУММПРОИЗВ	Перемножает соответствующие элементы заданных массивов и возвращает сумму произведений

Транспонирование матриц и таблиц

Операция транспонирования меняет местами строки и столбцы матрицы. Число строк и столбцов может быть произвольным. Ограничений на вид информации в матрице нет. Это означает, что в ячейках могут быть числа, текст, даты, формулы. Транспонирование матриц и таблиц осуществляется с помощью функции ТРАНСП из категории «Ссылки и массивы». Функция ТРАНСП переносит только информацию в ячейках, а формат ячеек не переносит.

Для транспонирования матрицы необходимо выполнить следующие действия:

- Выделите место, где будет находиться транспонированная матрица. Теперь число ее строк будет равно числу столбцов исходной матрицы, а число столбцов — числу строк исходной матрицы.
- Нажмите кнопку Мастер функций. Появляется окно диалога “Мастер функций шаг 1 из 2”. Или выберите вкладку **Формулы**.
- Выберите функцию ТРАНСП из категории **Ссылки и массивы**.
- Нажмите кнопку ОК или клавишу Enter. Появится окно диалога “Аргументы функции”.
- Выделите курсором мыши матрицу, которую собираетесь транспонировать или введите в поле ввода координаты исходной матрицы (например, A1:B4).
- Нажмите одновременно три клавиши Ctrl+Shift+Enter. В выделенной области D1:G2 появится транспонированная матрица (рис. 1.11).

Функция ТРАНСП переносит только информацию в ячейках, а формат ячеек не переносит. Это видно из сравнения столбца B1:B4 и строки D2:G2 в транспонированной матрице: элементы исходной строки изображены полужирным курсивом, а в транспонированной матрице они изображены обычным шрифтом. Особенно ясно это видно на втором примере, показанном на том же рисунке. Исходная таблица с датами, занимающая ячейки I1:I4 в транспонированном виде занимает ячейки J5:M5, причем формат **Дата** не был перенесен на эти ячейки и они заполнены числами, соответствующими этим датам (показывающими число дней от 01.01.1900 до данной даты).

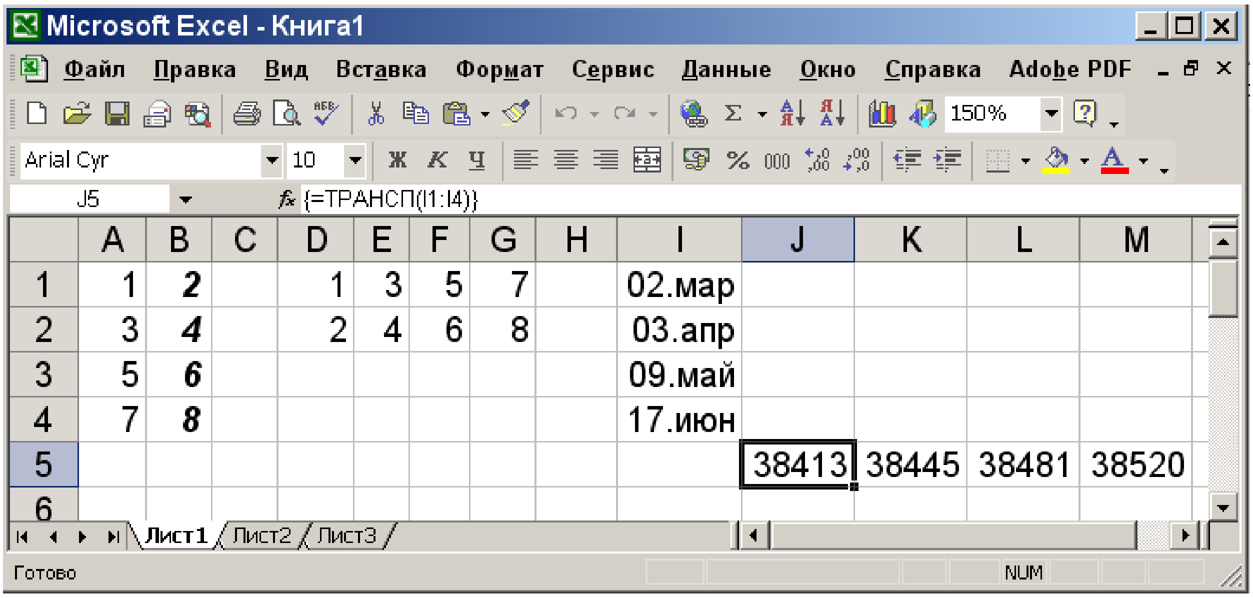


Рис.1.11. Умножение матриц

Транспонировать массив данных можно с помощью специальной вставки.

Скопировать диапазон ячеек. Затем на вкладке **Главная** выбрать команду Вставить>Специальная вставка. Поставить флажок «транспонировать» (рис.1.12).

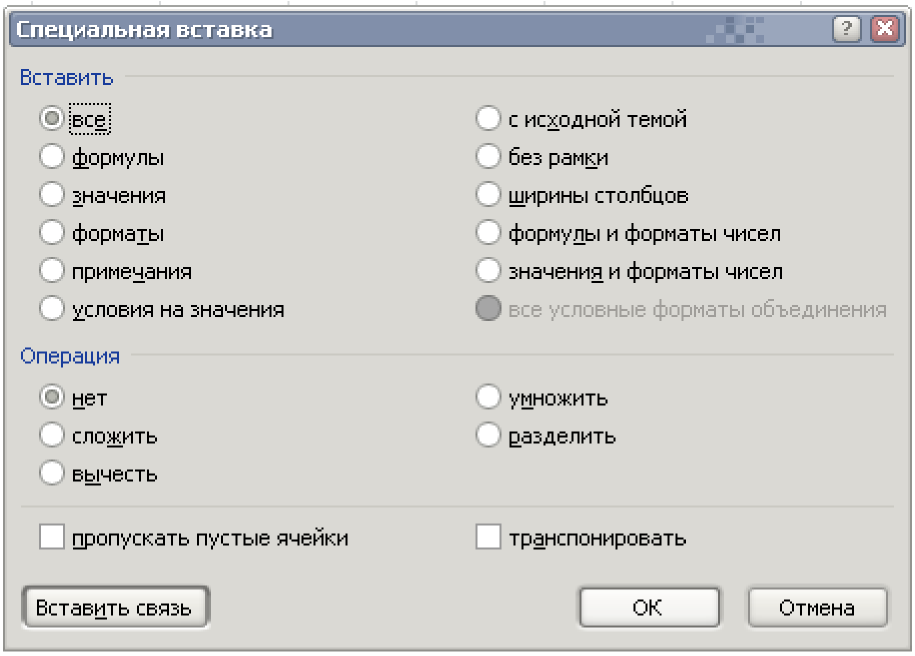


Рис.1.12. Специальная вставка

Раздел II. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

С точки зрения «чистого» математика, решить задачу означает доказать существование ее решения и указать процесс, приводящий к решению. Для прикладного математика-вычислителя более важным часто оказывается время получения решения, т.е. скорость сходимости процесса. Для практика-инженера важно удобно получить практический результат.

Точные методы позволяют в принципе найти решение задачи после конечного числа операций, каждая из которых выполняется точно, например, решение системы линейных алгебраических методом Крамера. Однако при реализации точных методов могут возникать проблемы: 1) требуется большое количество операций; 2) при большом объеме вычислений накапливается погрешность округлений; 3) трудностью является также то, что каждый вид функции, например, при вычислении производных и интегралов, требует своего правила.

Под *численными методами* подразумеваются методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и некоторым логическим действиям над числами, т.е. к тем действиям, которые выполняет компьютер. Решения, полученные численными методами, являются *приближенными*, т.е. содержат некоторую погрешность. В основе этих методов обычно лежит замена функции более простой, например, линейной или полиномиальной, которую можно легко интегрировать и дифференцировать. Для представления функции часто используют разложение ее в ряд Тейлора с отбрасыванием части членов.

Метод решения задачи называется *прямым,* если он позволяет получить решение после выполнения конечного числа элементарных операций. Это может быть, например, вычисление интеграла, решение системы уравнений, вычисление значений функции и т. д.

Суть *итерационных методов* состоит в построении последовательных приближений к решению задачи. Отдельный шаг итерационного процесса называется *итерацией.* Основным преимуществом итерационных методов является однотипность выполняемых на каждом шаге операций, что облегчает составление программ.

При решении задач приходится иметь дело с точными и приближенными числами. *Точные* числа дают истинное значение величины числа, *приближенное* – близкое с истинному. Под приближенным числом понимают число, незначительно отличающееся от точного числа и заменяющее его в вычислениях. При постановке задачи обычно указывают требуемую точность, т.е. максимально допустимую погрешность.

Источники погрешностей:

1) несоответствие математической задачи (модели) реальному явлению;

Погрешность связана с приближенным описанием реального объекта.

2) погрешность исходных данных (входных параметров);

Исходные данные, как правило, содержат погрешности, так как они либо неточно измерены, либо являются результатом решения некоторых вспомогательных задач. Например, масса тела, производительность оборудования, предполагаемая цена товара и др. Во многих физических и технических задачах погрешность измерений составляет 1 – 10%.

3) погрешность метода решения;

Применяемые для решения задачи методы, как правило, являются приближенными. Например, заменяют интеграл суммой, функцию – многочленом, производную – разностью и т. д. Погрешность метода необходимо определять для конкретного метода. Обычно ее можно оценить и проконтролировать. Следует выбирать погрешность метода так, чтобы она была не более, чем на порядок меньше неустранимой погрешности (пп.1,2). Большая погрешность снижает точность решения, а меньшая требует значительного увеличения объема вычислений.

4) погрешность вычислений (погрешность округлений).

Погрешность округления возникает из-за того, что вычисления производятся с конечным числом значащих цифр. Кроме того, есть числа с бесконечным количеством знаков, например π, e.

Пусть A точное число, а a – его приближенное значение.

Разность между точным числом A и его приближенным значением a называют *погрешностью*. Как правило, величину $A–a$ и даже ее знак определить невозможно, поскольку неизвестно точное число A. Поэтому вместо самой погрешности используется ее верхняя граница.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется величина Δa, удовлетворяющая неравенству

$$\Delta a \geq |A - a|$$

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$$

Записывают $A = a \pm \Delta a$.

Когда говорят с точностью 0,01, то абсолютная погрешность равна 0,01.

Относительной погрешностью приближенного числа a называется величина δa, удовлетворяющая неравенству

$$\delta a \geq \left|\frac{A - a}{a}\right|, a \neq 0$$

$$\delta a = \left|\frac{\Delta a}{a}\right|, a \neq 0$$

Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой, отличной от нуля цифры.

Нули в конце числа – всегда значащие цифры, в противном случае их не пишут.

Число 0,001604 имеет 4 значащих цифры, 30,500 имеет 5. Если мы хотим показать, что у числа 400 000 последние три нуля не являются значащими, следует данное число записать как $4{,}00 \cdot 10^5$ или $0{,}400 \cdot 10^6$.

Значащую цифру приближенного числа называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы (или половины единицы, в этом случае иногда применяется термин верная в узком смысле) разряда, в котором стоит эта цифра.

Тема 2.1. Матричное исчисление

Операции с матрицами

Группа данных, подобная таблице, может считаться матрицей. В инженерной практике наибольшее значение имеют матрицы с числовыми данными.

К данным, образующим матрицу, можно обращаться двояким образом: указать диапазон ячеек или, присвоив этому диапазону имя, и обращаться по имени.

Умножение матрицы на число

Продемонстрируем это на примере, умножив алгебраическую матрицу на число (рис. 2.1):

G3 fx {=A3:C4*E3}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Матрица A			Число k			Матрица A*k	
3	3	5	7		5		15	25	35
4	4	11	-2				20	55	-10

Рис.2.1. Умножение матрицы на число

Для совершения этого действия необходимо предварительно выделить диапазон ячеек, который будет занимать результирующая матрица, затем записать формулу умножения исходного диапазона ячеек на ячейку, в которой задано число, а затем распространить результат на весь конечный диапазон, использовав сочетание клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Это сочетание клавиш применяется всегда, когда нужно распространить результат на диапазон ячеек.

В этом примере в формуле использовался диапазон ячеек, в котором расположена исходная матрица. Если диапазону присвоить имя **A**, а ячейке, в которой расположено число присвоить имя **k**, то формула для умножения будет выглядеть иначе (рис. 2.2):

G3 fx {=A*k}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Матрица A			Число k			Матрица A*k	
3	3	5	7		5		15	25	35
4	4	11	-2				20	55	-10

Рис.2.2. Умножение матрицы на число с использованием имен

Сложение матриц

Используя имена диапазонов, легко осуществлять сложение матриц **AA** и **BB** (рис. 2.3):

Рис.2.3. Сложение матриц

Применение функций к матрицам

Если в качестве аргумента функции используется матрица, то функция действует на каждый элемент матрицы, что во многих случаях может существенно ускорить вычисления. Подействуем функцией sin на матрицу, занимающую диапазон ячеек A3:C4 и имеющую имя A. Результирующая матрица есть набор sin(a_{ij}) (рис. 2.4):

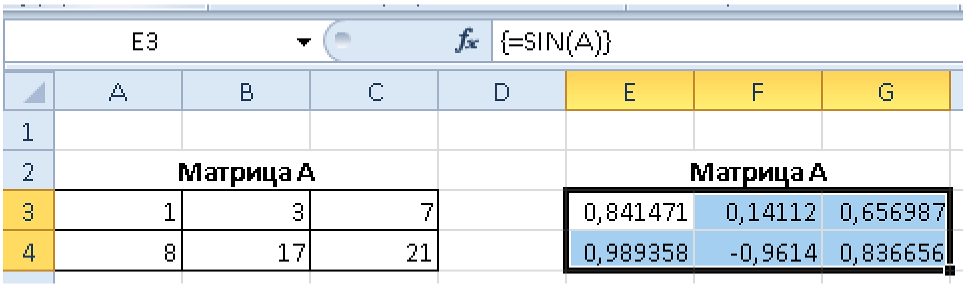


Рис.2.4. Вычисление функции от матрицы

Умножение матриц

В Excel умножение матриц по правилам матричной алгебры осуществляется при помощи функции МУМНОЖ. Умножить матрицы можно либо с помощью мастера функций, либо непосредственным вводом в ячейку формулы (к примеру, =МУМНОЖ(A3:C5;E3:G5)), выделением области, где должна находится матрица результата **и одновременным нажатием трех клавиш Ctrl, Shift и Enter** после того, как указатель мыши перемещен в строку формул.

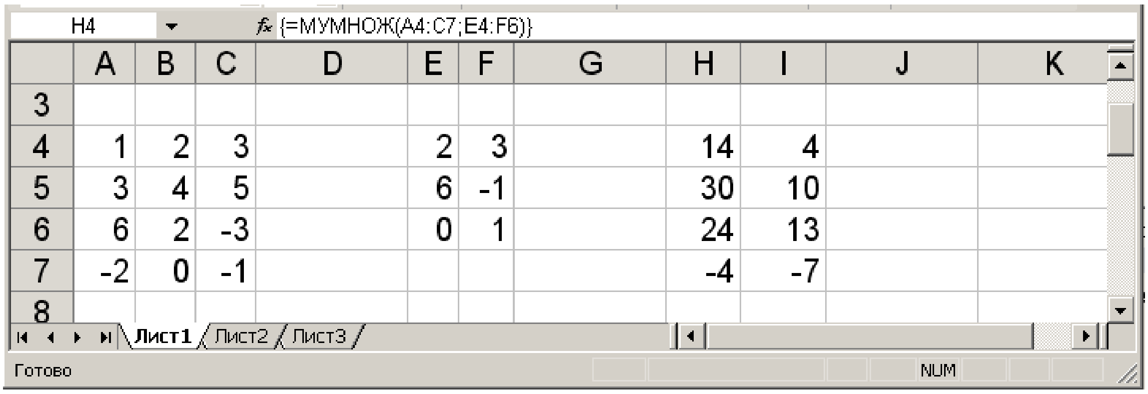
Рассмотрим пример работы этой функции.

Возьмем матрицу, состоящую из 4 строк и 3 столбцов, расположенную в ячейках A4:C7 и умножим ее на матрицу, состоящую из 3 столбцов и 2 строк, расположенную в ячейках E4:F6 (рис. 2.5). Результирующая матрица должна иметь 4 строки и 2 столбца и будет расположена в ячейках H4:I7 (т.к. в результирующей матрице число строк равно числу строк в первой, а число столбцов – числу столбцов во второй матрице). Для умножения двух матриц необходимо выполнить приведенные ниже действия:

- Выделить место в таблице, где будет находиться результирующая матрица (в нашем случае это ячейки H4:I7), и на вкладке **Формулы** выбрать категорию **Математические** или нажать кнопку **Вставить функцию** f_x в строке формул и выбрать категорию «Математические».

- В появившемся списке функций этой категории с помощью полосы прокрутки найти функцию МУМНОЖ и нажать на кнопку **ОК** или на клавишу **Enter**.
- В появившемся окне диалога «Аргументы функции» ввести в две строки номера ячеек, где находятся матрицы, которые нужно перемножить. В первую строку ввести номера ячеек A4:C7, во вторую строку — номера ячеек E4:F6. Переход на следующую строку осуществляется нажатием клавиши Tab или нажатием левой кнопки мыши, когда указатель мыши находится на второй строке.
- После того как области с матрицами указаны, осталось распространить ее на всю выделенную область. **Для этого необходимо нажать одновременно три клавиши Ctrl+Shift+Enter.**

В выделенной области появится результат произведения двух матриц. Результат перемножения двух матриц представлен на рис. 2.5. в ячейках H4:I7.


H4 {=МУМНОЖ(A4:C7;E4:F6)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
3											
4	1	2	3		2	3		14	4		
5	3	4	5		6	-1		30	10		
6	6	2	-3		0	1		24	13		
7	-2	0	-1					-4	-7		
8											

Лист1 Лист2 Лист3
Готово NUM

Рис.2.5. Умножение матриц

Отметим, что умножить матрицы можно было и непосредственным вводом в ячейку формулы =МУМНОЖ(A4:C7;E4:F6), выделением области, где должна находится матрица результата **и одновременным нажатием трех клавиш Ctrl+Shift+Enter** после того, как указатель мыши перемещен в строку формул.

Обратная матрица

Для получения обратной матрицы необходимо выполнить операции:

- На вкладке **Формулы** выбрать функцию МОБР из категории **Математические** и нажать кнопку **ОК** или клавишу Enter.
- В окне диалога «Аргументы функции» ввести диапазон ячеек, где находится исходная матрица и нажать **одновременно три клавиши Ctrl, Shift** и **Enter**. В выделенной области появится обратная матрица.

Для получения этого же результата можно после выделения области, где будет находиться обратная матрица, ввести в строку формул выражение =МОБР(исходный_диапазон) и, не выходя из нее, нажать одновременно три клавиши **Ctrl+Shift+Enter**.

Для проверки правильности полученного результата следует умножить исходную матрицу на обратную матрицу с помощью функции МУМНОЖ. Должна получиться единичная матрица.

Решение систем линейных уравнений

Систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \ldots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \ldots + a_{2n} = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = b_n \end{cases}$$

можно записать кратко в матричном виде: $Ax=B$, где A – матрица коэффициентов при неизвестных, x – матрица-столбец неизвестных, B – матрица-столбец свободных членов.

Для решения небольших по размерности систем линейных уравнений можно использовать точные методы: Крамера, Гаусса, обратной матрицы. Решение больших систем находят с помощью итерационных методов.

Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

Решение системы уравнений $Ax=B$ может быть найдено путем умножения ее слева на обратную матрицу коэффициентов:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}B \Rightarrow x = A^{-1}B.$$

Таким образом, для нахождения решения достаточно найти обратную матрицу коэффициентов при неизвестных и умножить ее на столбец свободных членов.

Рассмотрим реализацию этого метода в Excel на примере решения системы линейных уравнений

$8x_1 + 9x_2 – 5x_3 = 11$
$-5x_1 + 14x_2 + 2x_3 = 29$
$3x_1 – x_2 + 7x_3 = 22$

Решение представлено на рис. 2.6. Матрица коэффициентов расположена в ячейках B1:D3. С помощью функции МОБР вычислена и помещена в ячейки G1:I3 обратная матрица. Столбец свободных членов находится в ячейках L1:L3. Решение найдено с помощью функции МУМНОЖ путем умножения матриц G1:I3 и L1:L3. Результат помещен в ячейках O1:O3.

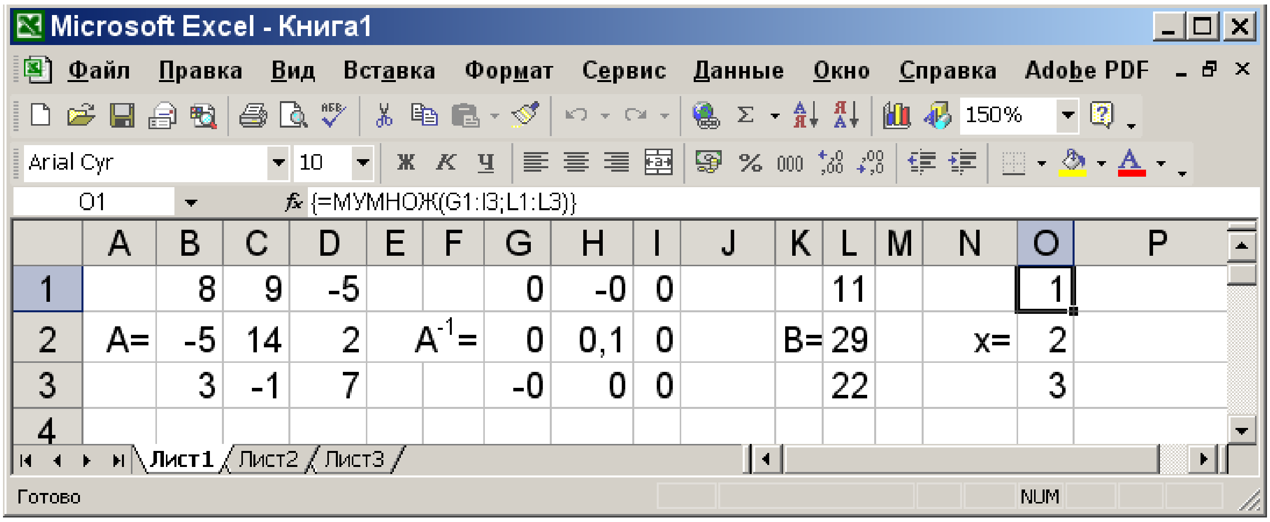


Рис. 2.6. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

Решение системы линейных уравнений методом Крамера

По методу Крамера решение системы линейных уравнений можно найти, вычислив ряд определителей: главный Δ и дополнительные Δ_i:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \dots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Решение системы уравнений находится как $x_i = \Delta_i / \Delta$.

Рассмотрим реализацию этого метода в Excel на примере решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 8x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= 11 \\ -5x_1 + 14x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &= 22 \end{aligned}$$

Определители матриц вычисляются с помощью функции МОПРЕД, аргументами которых являются соответствующие массивы, составленные из коэффициентов системы уравнений.

Теперь достаточно разделить найденные значения дополнительных определителей на значение главного определителя, чтобы найти решение системы уравнений. Результат представлен в ячейках F7, J7, N7 на рис. 2.7.

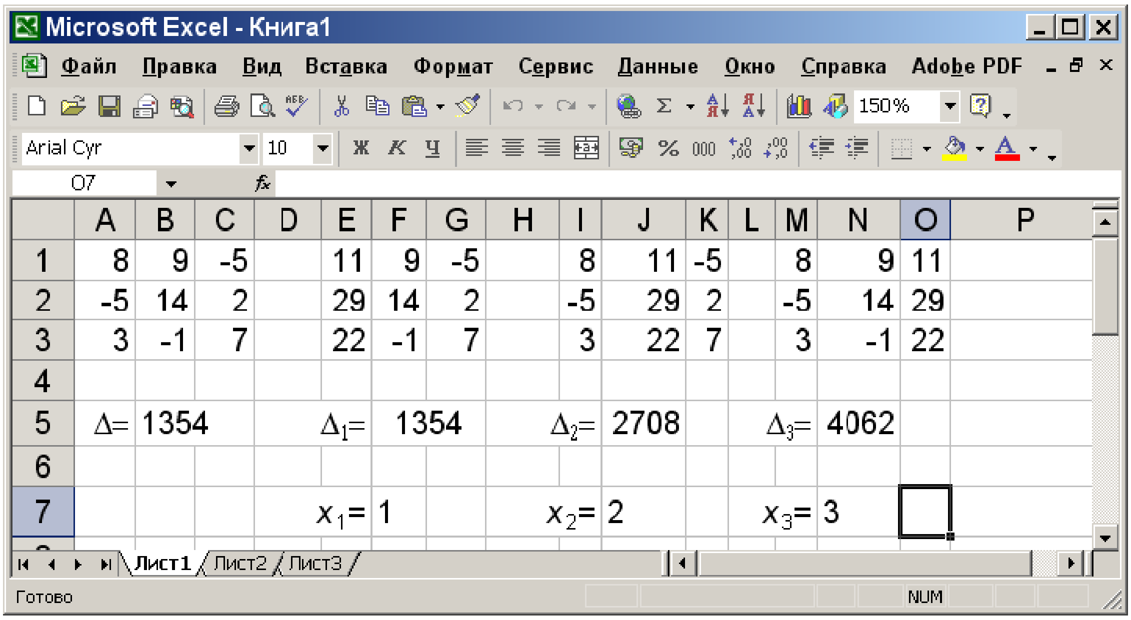


Рис.2.7. Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Тема 2.2. Дифференциальное исчисление. Решение нелинейных алгебраических уравнений

Вычисление производных

Вычисление первой производной. Во многих случаях вычисление производных аналитически затруднительно или вовсе невозможно (если функция задана таблично). Тогда производная вычисляется приближенно или, как говорят, численно. В основе численного вычисления производных лежит разложение функции $f(x)$ в ряд и ограничение этого ряда несколькими членами. Если отрезок оси x, на котором задана функция, разбить на множество равноотстоящих точек $\{x_i\}$, то для каждой точки x_i можно записать разложение в ряд (здесь используются обозначения $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$, f_i, $= f(x_i)$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$):

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + O(h^4) \qquad (2.1)$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \frac{h^3}{6} f_i''' + O(h^4) \qquad (2.2)$$

Можно ограничиться первыми двумя членами этих рядов. Тогда получаем две формулы

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + O(h^2)$$
$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + O(h^2)$$

из которых можем вычислить величину первой производной (правой и левой)

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

Величина $O(h)$ называется ошибкой, а h в скобках означает, что это ошибка порядка h и линейно связана с шагом h, т.е. при уменьшении шага h в два раза ошибка тоже уменьшается в два раза, при уменьшении в пять раз – тоже в пять и т.д.

Если мы вычтем из первого уравнения второе, то получим

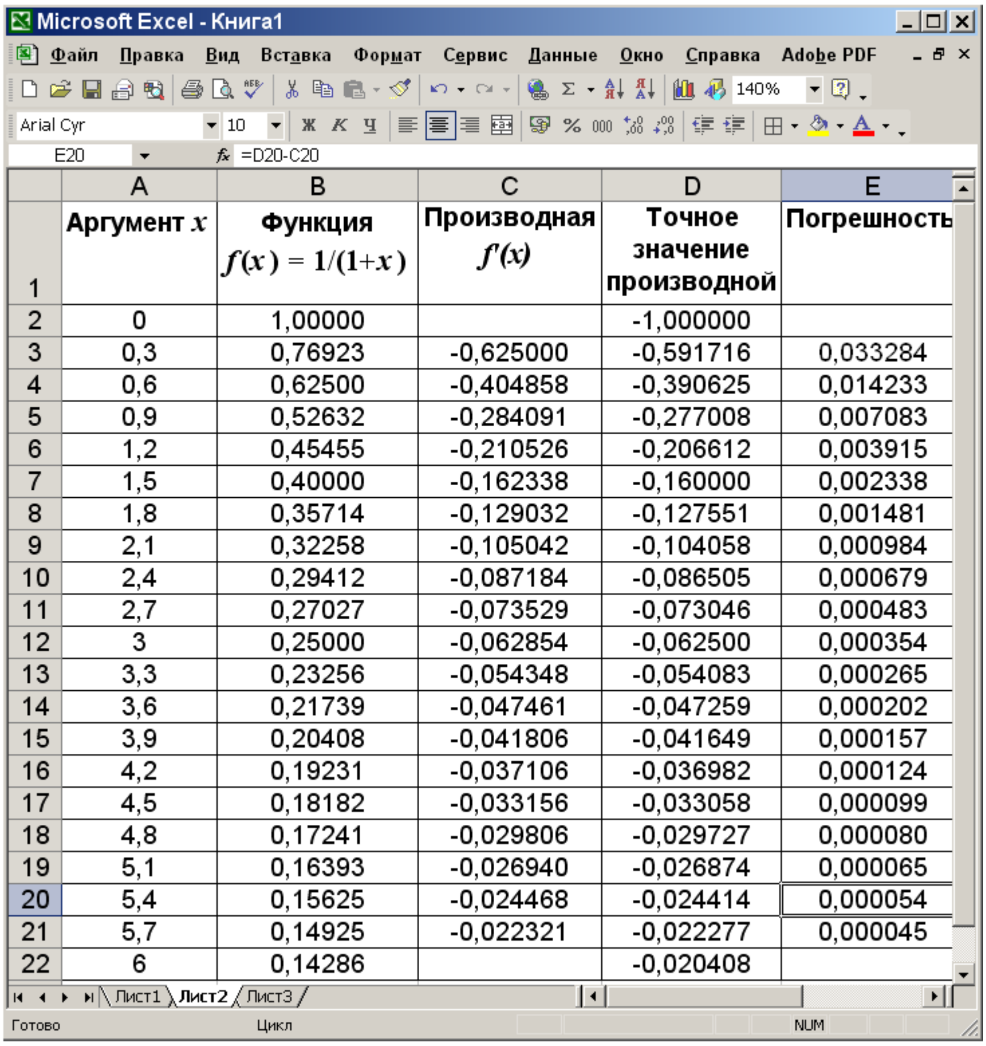
$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + O(h^3)$$

откуда получаем

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad (2.3)$$

Эта формула называется формулой *центральных разностей*, поскольку вычисляет значение производной в центральной точке, используя значения функции в соседних точках, и позволяет вычислить значение производных с высокой степенью точности. Здесь ошибка порядка h^2, т.е. при уменьшении шага вдвое уменьшается в четыре раза, а при уменьшении шага в 10 раз ошибка уменьшается в 100 раз, что позволяет получать более точные результаты на сравнительно большом шаге.

На рис. 2.8 приведен пример вычисления производной функции $f(x) = 1/(1 + x)$.



	A	B	C	D	E
1	Аргумент x	Функция $f(x) = 1/(1+x)$	Производная $f'(x)$	Точное значение производной	Погрешность
2	0	1,00000		-1,000000	
3	0,3	0,76923	-0,625000	-0,591716	0,033284
4	0,6	0,62500	-0,404858	-0,390625	0,014233
5	0,9	0,52632	-0,284091	-0,277008	0,007083
6	1,2	0,45455	-0,210526	-0,206612	0,003915
7	1,5	0,40000	-0,162338	-0,160000	0,002338
8	1,8	0,35714	-0,129032	-0,127551	0,001481
9	2,1	0,32258	-0,105042	-0,104058	0,000984
10	2,4	0,29412	-0,087184	-0,086505	0,000679
11	2,7	0,27027	-0,073529	-0,073046	0,000483
12	3	0,25000	-0,062854	-0,062500	0,000354
13	3,3	0,23256	-0,054348	-0,054083	0,000265
14	3,6	0,21739	-0,047461	-0,047259	0,000202
15	3,9	0,20408	-0,041806	-0,041649	0,000157
16	4,2	0,19231	-0,037106	-0,036982	0,000124
17	4,5	0,18182	-0,033156	-0,033058	0,000099
18	4,8	0,17241	-0,029806	-0,029727	0,000080
19	5,1	0,16393	-0,026940	-0,026874	0,000065
20	5,4	0,15625	-0,024468	-0,024414	0,000054
21	5,7	0,14925	-0,022321	-0,022277	0,000045
22	6	0,14286		-0,020408	

Рис.2.8. Вычисление производных по формуле центральных разностей

Из приведенной таблицы видно, что погрешность численного метода весьма невелика даже при достаточно грубом выбранном нами шаге и падает с ростом x. Последнее обстоятельство вызвано тем, что погрешность, как следует из приведенных выше формул, пропорциональна третьей производной, а она для данной функции падает с ростом x.

Вычисление второй производной. Если мы не вычтем, а сложим два приведенных выше разложения функции в ряды (2.1) и (2.2), то получим

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + O(h^4),$$

откуда получаем приближенное выражение для вычисления второй производной справедливое со вторым порядком $O(h^2)$ точности.

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} \qquad (2.4)$$

Нахождение корней нелинейных уравнений

Корнем уравнения $f(x)=0$ называется такое значение аргумента x, при котором уравнение обращается в тождество. Геометрически корень уравнения представляет собой абсциссу точки пересечения или касания графика функции $y=f(x)$ и оси Ox.

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнений разбивается на два этапа:

I. отделение корней;

II. уточнение корней до заданной степени точности.

Отделить корни – это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней можно выполнить одним из методов:

- *графическим*, построив график функции $y=f(x)$, определить, в каких промежутках находятся точки пересечения его с осью Ox;

- *аналитическим*, исследуя свойства функции (если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на этом отрезке имеется единственный корень).

Метод деления пополам

Суть метода состоит в следующем. Прежде всего, каким либо способом (например, графически) определяется отрезок $[a, b]$, на котором находится искомый корень, и корень является единственным на этом отрезке. Непременным условием работоспособности метода является то, что функция на границах этого отрезка имеет разные знаки. Для нахождения корня отрезок $[a, b]$ делится пополам $x_0=(a+b)/2$. Затем выбирается та половина отрезка, на концах которого знаки функции разные, и процесс деления повторяется до тех пор, пока не будет найдено решение с приемлемой точностью (рис. 2.9).

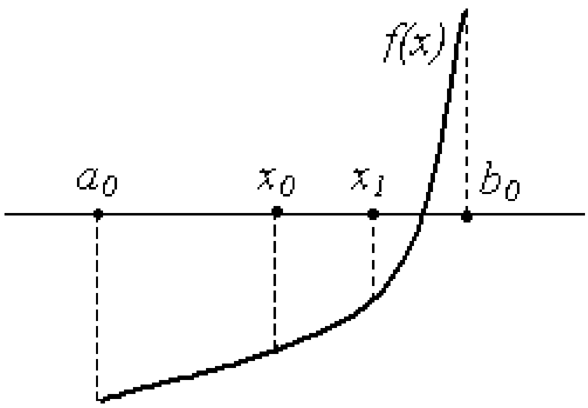


Рис. 2.9. Иллюстрация метода деления пополам

Рассмотрим реализацию метода на примере поиска корня уравнения $e^x - x - 2 = 0$. Из графика (рис. 2.10) видно, что один из искомых корней лежит в интервале [-2;-1].

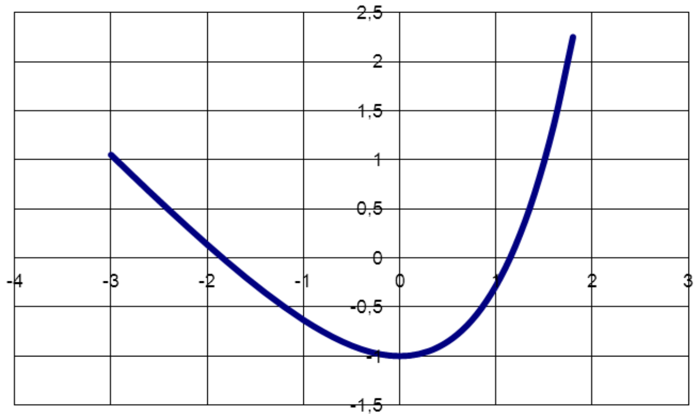
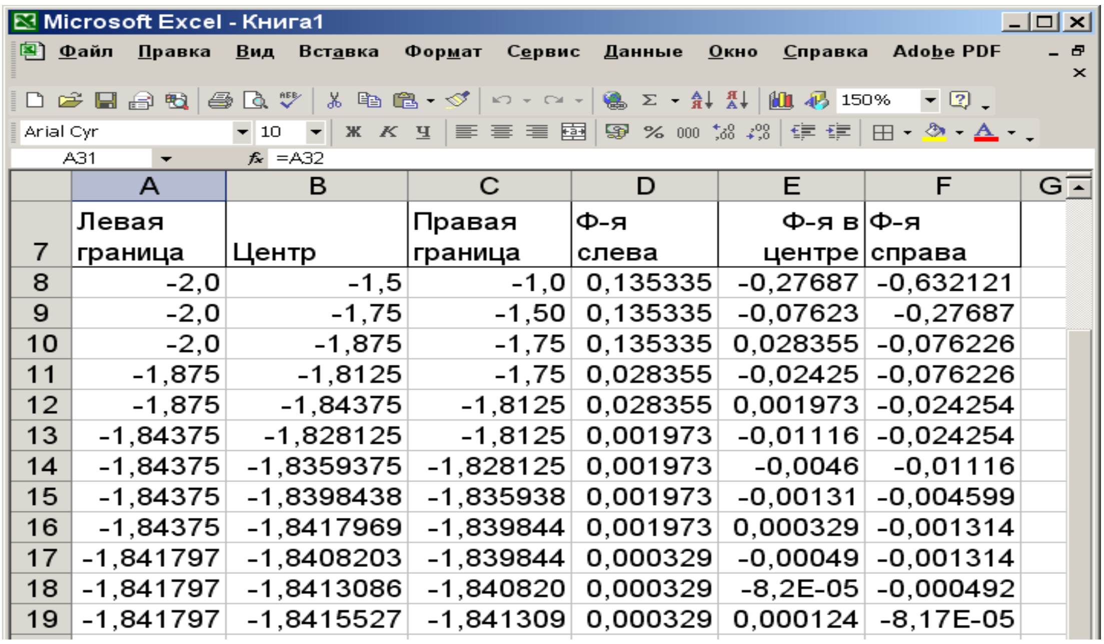


Рис.2.10. График функции

Составим таблицу для решения задачи и заполним ее первую строку (рис. 2.11). В ячейку A8 поместим значение аргумента на левом краю интервала x = -2, а в ячейку C8 – значение на правом краю x = -1. В ячейке B8 поместим среднее значение, которое вычислим по формуле =(A8+C8)/2. Значение функции на левой границе вычислим в ячейке D8 по формуле =exp(A2)-A2-2, а скопировав эту формулу и вставив ее в ячейки E8 и F8, получим в этих ячейках значения функции в центре и на правой границе интервала.



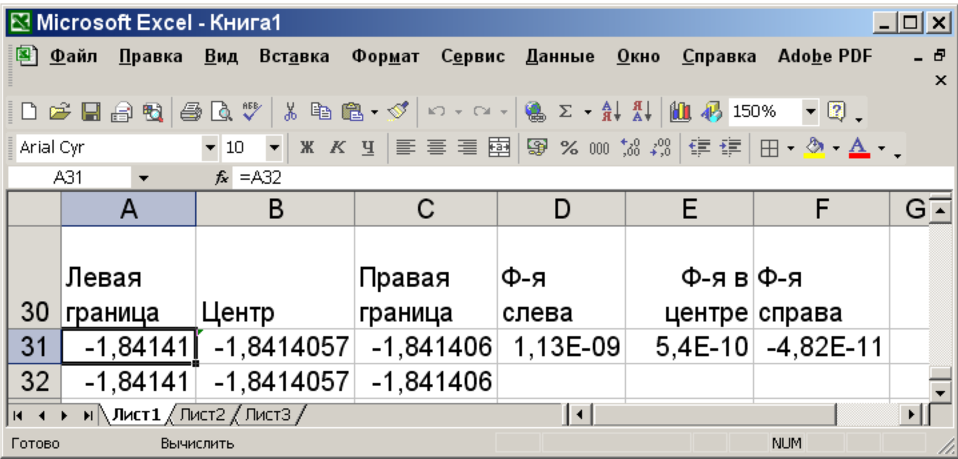
	A	B	C	D	E	F
7	Левая граница	Центр	Правая граница	Ф-я слева	Ф-я в центре	Ф-я справа
8	-2,0	-1,5	-1,0	0,135335	-0,27687	-0,632121
9	-2,0	-1,75	-1,50	0,135335	-0,07623	-0,27687
10	-2,0	-1,875	-1,75	0,135335	0,028355	-0,076226
11	-1,875	-1,8125	-1,75	0,028355	-0,02425	-0,076226
12	-1,875	-1,84375	-1,8125	0,028355	0,001973	-0,024254
13	-1,84375	-1,828125	-1,8125	0,001973	-0,01116	-0,024254
14	-1,84375	-1,8359375	-1,828125	0,001973	-0,0046	-0,01116
15	-1,84375	-1,8398438	-1,835938	0,001973	-0,00131	-0,004599
16	-1,84375	-1,8417969	-1,839844	0,001973	0,000329	-0,001314
17	-1,841797	-1,8408203	-1,839844	0,000329	-0,00049	-0,001314
18	-1,841797	-1,8413086	-1,840820	0,000329	-8,2E-05	-0,000492
19	-1,841797	-1,8415527	-1,841309	0,000329	0,000124	-8,17E-05

Рис.2.11. Решение уравнения методом деления пополам

В ячейке A9 мы должны поместит координату новой левой границы интервала. Это или старая левая граница, или центр интервала, полученный делением его пополам. Выбор зависит от того, на какой половине интервала находится искомый корень. Если на левой – то левая граница остается, а если на правой половине – то центр интервала должен стать левой границей нового, половинного интервала. Как же определить, где находится корень? **Корень на**

той половине интервала, на которой функция имеет разные знаки на концах. Тогда в ячейке A9 должна быть записана формула **=ЕСЛИ(ЗНАК(D8)=ЗНАК(E8);B8;A8)**. Соответственно, в ячейке C9 должна быть записана формула **=ЕСЛИ(ЗНАК(E8)=ЗНАК(F8);B8;C8)**, т.е. **при равенстве знаков функций на концах правой половины интервала в качестве правой границы теперь должен использоваться центр интервала, а при их неравенстве – остается прежняя правая граница.** Как видно из рис. 2.11, правая граница сместилась в строке 9 в точку -1,5, а центр имеет координату -1,75. В ячейки D9:F9 следует скопировать формулы из ячеек D8:F8. Теперь, чтобы следить за ходом вычислений, достаточно выделить ячейки A9:F9 и распространить находящиеся в них формулы маркером заполнения на нужное количество строк вниз.

В Excel есть возможность автоматизировать повторение вычислений до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность. Для этого необходимо проделать ту же процедуру, что и в предыдущем примере, но после заполнения ячеек A32:C32 поступить несколько иначе: вернуться к ячейке **A31** и записать в ней формулу **=A32**, а в ячейке **C31** записать формулу **=C32**. Теперь значения в ячейках A31 и A32 оказались замкнуты друг на друга через ячейку D31, а в ячейках C31 и C32 через F31 (рис. 2.12).



	A	B	C	D	E	F
30	Левая граница	Центр	Правая граница	Ф-я слева	Ф-я в центре	Ф-я справа
31	-1,84141	-1,8414057	-1,841406	1,13E-09	5,4E-10	-4,82E-11
32	-1,84141	-1,8414057	-1,841406			

Рис.2.12. Циклические вычисления

Однако для того, чтобы циклические вычисления выполнялись, необходимо предпринять специальные усилия. В меню **Файл>Параметры** на вкладке **Формулы** необходимо установить флажок **Включить итеративные вычисления** и указать предельное число шагов итерационного процесса (установленное по умолчанию число шагов 100 явно недостаточно во многих случаях) и относительную погрешность, по достижении которой вычислительный процесс остановится. Без этих ограничений циклический вычислительный процесс никогда бы не остановился. Как видно из рис. 2.12, решение задачи в случае организации циклических вычислений выглядит намного более компактным, чем в предыдущем случае.

Метод Ньютона

Сначала выбирается начальное приближение к корню (точка x_0). В этой точке строится касательная к графику $y = f(x)$.Точка пересечения этой касательной с осью абсцисс является следующим приближением для корня (точка x_1). В этой точке снова строится касательная и т.д. Последовательность точек x_0, x_1, x_2… должна привести к истинному значению корня (рис. 2.13).

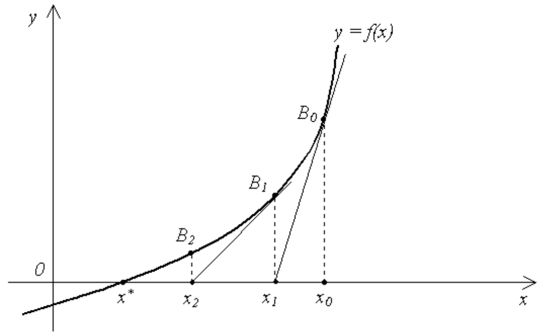


Рис. 2.13. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Так как уравнение касательной, проходящей через точку (x_0, $f(x_0)$) записывается в виде

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

а в качестве следующего приближения x_1 для корня исходного уравнения принимается точка пересечения этой прямой с осью абсцисс, то следует положить в этой точке $y = 0$, откуда следует уравнение для нахождения следующего приближения через предыдущее:

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$$

Затем вычисления повторяются, пока не будет достигнута заданная точность.

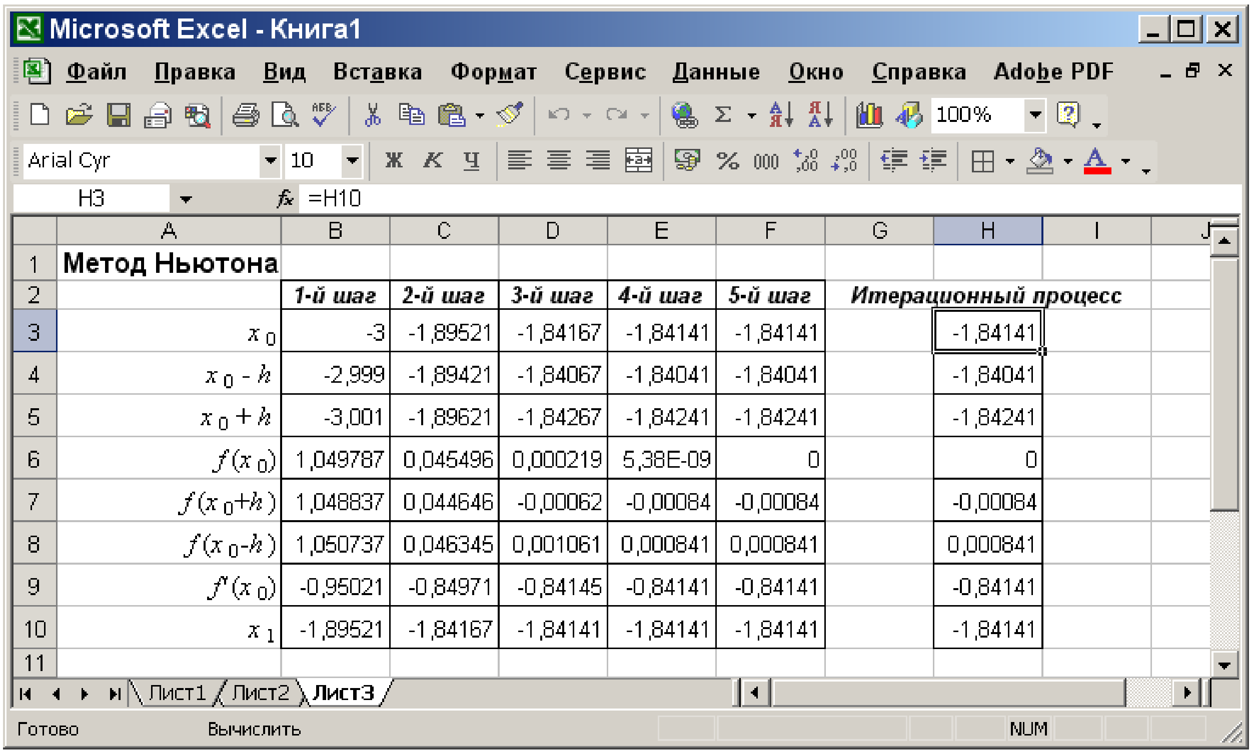
Неудачный выбор начального приближения может дать расходящуюся последовательность. *Достаточное условие сходимости метода:* в качестве начального приближения x_0 выбрать тот из концов отрезка, для которого

$$f(x)f''(x) \geq 0$$

На практике следует мысленно провести касательную в точке начального приближения. Точка пересечения с осью абсцисс должна попадать в выбранный отрезок, где находится корень.

Для нахождения производной удобно использовать приближенную формулу центральных разностей.

$$f'(x_0) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Метод Ньютона							
2		*1-й шаг*	*2-й шаг*	*3-й шаг*	*4-й шаг*	*5-й шаг*	*Итерационный процесс*	
3	x_0	-3	-1,89521	-1,84167	-1,84141	-1,84141		-1,84141
4	$x_0 - h$	-2,999	-1,89421	-1,84067	-1,84041	-1,84041		-1,84041
5	$x_0 + h$	-3,001	-1,89621	-1,84267	-1,84241	-1,84241		-1,84241
6	$f(x_0)$	1,049787	0,045496	0,000219	5,38E-09	0		0
7	$f(x_0+h)$	1,048837	0,044646	-0,00062	-0,00084	-0,00084		-0,00084
8	$f(x_0-h)$	1,050737	0,046345	0,001061	0,000841	0,000841		0,000841
9	$f'(x_0)$	-0,95021	-0,84971	-0,84145	-0,84141	-0,84141		-0,84141
10	x_1	-1,89521	-1,84167	-1,84141	-1,84141	-1,84141		-1,84141
11								

Рис. 2.14. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

На рисунке 2.14 показана реализация метода Ньютона средствами Excel. В ячейку B3 вводится начальное приближение (x_0 = -3), а затем в остальных ячейках столбца вычисляются все промежуточные величины вплоть до вычисления x_1. Для выполнения второго шага в ячейку C3 вводится значение из ячейки B10 и процесс вычислений повторяется в столбце C. Затем, выделив ячейки C2:C10 можно, потянув за маркер в правом нижнем углу выделенной области, распространить его на столбцы D:F. В итоге в ячейке F6 получено значение 0, т.е. значение в ячейке F3 есть корень уравнения.

Этот же результат можно получить, используя циклические вычисления. Тогда после заполнения первого столбца и получения первого значения x_1 следует ввести в ячейку H3 формулу =H10. При этом вычислительный процесс будет зациклен. Для того, чтобы он выполнялся, необходимо включить итеративные вычисления: в окне **Файл>Параметры> Формулы** необходимо установить флажок **Включить итеративные вычисления.**

Метод итераций (метод последовательных приближений)

Сущность метода заключается в следующем. Исходное уравнение $f(x)=0$ заменяется эквивалентным ему уравнением вида $x=\varphi(x)$.

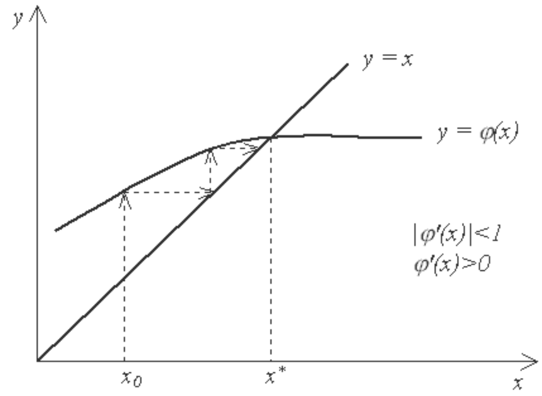
Предположим, что задано исходное приближение x_0 к решению уравнения. Все дальнейшие приближения строятся по единообразному правилу: за следующее приближение принимается результат подстановки предыдущего приближения в правую часть уравнения.

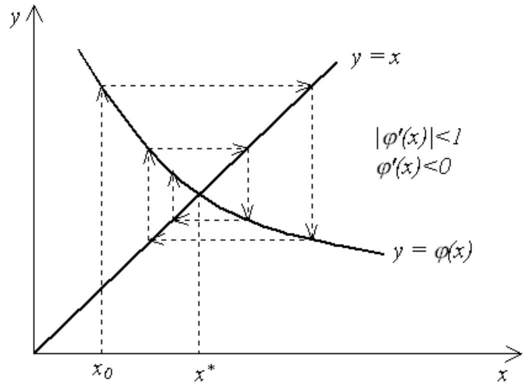
$$x_{i+1}=\varphi(x_i),\ (i=0, 1,\ldots).$$

Процесс продолжается до тех пор, пока относительная погрешность для двух последовательных приближений не станет меньше ε, т.е. $|(x_{i+1}-x_i)/x_i|<\varepsilon$.

Итерационный процесс сходится на $[a, b]$, если $|\varphi'(x)|<1$ для всех $x \in [a, b]$, т.е. функция $y=\varphi(x)$ должна быть более пологой, чем функция $y=x$.

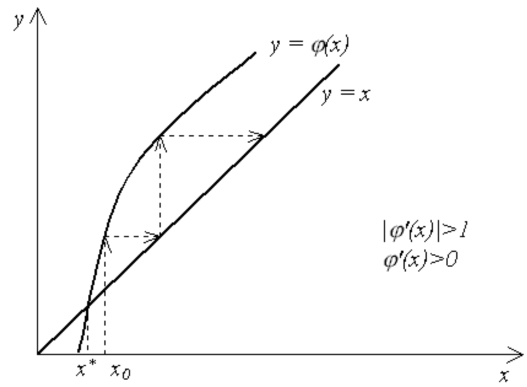
Графическая интерпретация метода представлена на рис.2.15. Находится точка пересечения прямой $y=x$ и графика функции $y=\varphi(x)$ ().

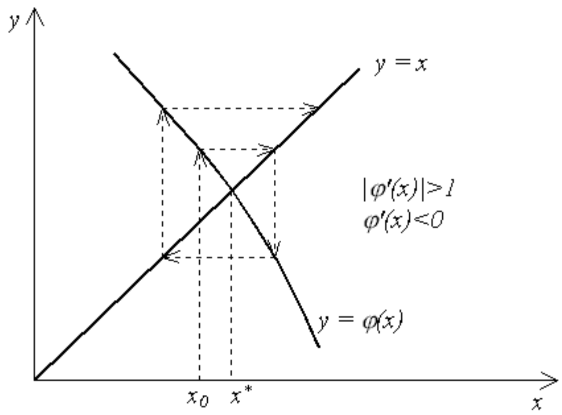




а) б)

Итерационный процесс сходится.





в) г)

Итерационный процесс расходится.

Рис. 2.15. Геометрическая интерпретация метода итераций

Тема 2.3. Интегральное исчисление

Численное интегрирование

Приближенное вычисление определенных интегралов базируется на простой, хорошо известной аналогии: геометрический смысл определенного интеграла функции есть площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и осью абсцисс (рис. 2.16).

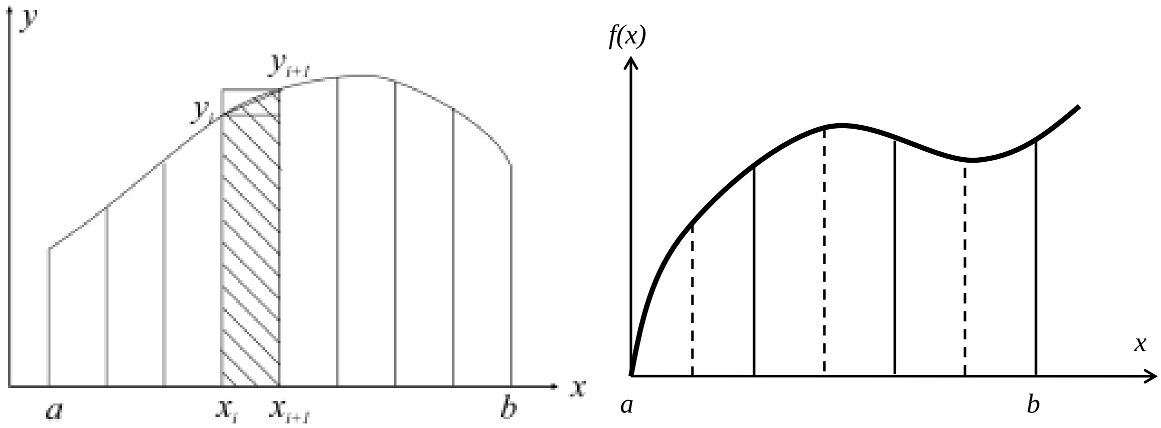


Рис. 2.16. Геометрическая интерпретация методов численного интегрирования

Область определения функции можно разбить на отрезки и записать

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$, где N – число точек

после чего остается только выбрать способ вычисления соответствующего интеграла под знаком суммы. Существуют простейшие варианты приближенной записи этого интеграла, наглядный смысл которых ясен из их названия и демонстрируется на рис. 2.14:

- формула левых прямоугольников - $\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$
- формула правых прямоугольников - $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$
- метод средних прямоугольников $\sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)$
- формула трапеций - $\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}(x_{i+1}-x_i)$

Точность вычислений выше для формул средних прямоугольников и трапеций. Формулы левых и правых прямоугольников имеют первый порядок точности, формула трапеций – второй.

Наглядная интерпретация этих формул состоит в том, какой фигурой заменяется истинная криволинейная трапеция. Понятно, что прямоугольник оставляет за своими пределами намного большую площадь (или наоборот, увеличивает ее), чем трапеция, образованная прямой линией, соединяющей две соседние точки на графике функции. Поэтому ошибка в методе трапеций намного меньше.

Однако еще лучше произвольную функцию могла бы описать парабола. Но для того, чтобы ее построить, мало двух точек, нужны три точки, через которые можно единственным образом провести параболу. Метод приближенного вычисления интегралов, основанный на замене исходной функции параболой, был разработан британским математиком Томасом Симпсоном (1710—1761 гг.) и записывается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1, i\neq 2k}^{N-2} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})h/3$$

где N – число равноотстоящих точек, которые делят отрезок a – b на отрезки длиной h, причем N– нечетное, а индекс i принимает только нечетные значения.

Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности и прост в программировании, что обеспечивает ему широкое применение.

На рис. 2.17 представлены примеры реализации методов численного интегрирования в Excel при вычислении интеграла $\int_2^3 (e^x - x - 2)dx$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		**Вычисление интегралов**								
2		**Метод**								
3	**i**	**xi**	**f(x)**	**левых**	**правых**	**трапеций**	**Симпсона**		Аналитически	
4	1	2	3,38906	0,33891	0,40662	0,3727613		a	2	1,389056
5	2	2,1	4,06617	0,40662	0,4825	0,4445592	0,8159583	b	3	9,585537
6	3	2,2	4,82501	0,4825	0,56742	0,5249598				8,196481
7	4	2,3	5,67418	0,56742	0,66232	0,6148679	1,138164			
8	5	2,4	6,62318	0,66232	0,76825	0,7152835				
9	6	2,5	7,68249	0,76825	0,88637	0,8273116	1,540563			
10	7	2,6	8,86374	0,88637	1,01797	0,9521735				
11	8	2,7	10,1797	1,01797	1,16446	1,0912189	2,0409104			
12	9	2,8	11,6446	1,16446	1,32741	1,2459396				
13	10	2,9	13,2741	1,32741	1,50855	1,4179841	2,6608922			
14	11	3	15,0855							
15	Значение интеграла			7,62224	8,79188	8,2070595	8,1964879			
16										
17										

	B	C	D	E	F	G
1	**Вычисление интегралов**					
2	**Метод**					
3	**xi**	**f(x)**	**левых**	**правых**	**трапеций**	**Симпсона**
4	2	=EXP(B4)-B4-2	=C4*(B5-B4)	=C5*(B5-B4)	=(B5-B4)*(C5+C4)/2	
5	2,1	=EXP(B5)-B5-2	=C5*(B6-B5)	=C6*(B6-B5)	=(B6-B5)*(C6+C5)/2	=(B6-B4)/6*(C4+4*C5+C6)
6	2,2	=EXP(B6)-B6-2	=C6*(B7-B6)	=C7*(B7-B6)	=(B7-B6)*(C7+C6)/2	
7	2,3	=EXP(B7)-B7-2	=C7*(B8-B7)	=C8*(B8-B7)	=(B8-B7)*(C8+C7)/2	=(B8-B6)/6*(C6+4*C7+C8)
8	2,4	=EXP(B8)-B8-2	=C8*(B9-B8)	=C9*(B9-B8)	=(B9-B8)*(C9+C8)/2	
9	2,5	=EXP(B9)-B9-2	=C9*(B10-B9)	=C10*(B10-B9)	=(B10-B9)*(C10+C9)/2	=(B10-B8)/6*(C8+4*C9+C1
10	2,6	=EXP(B10)-B10-2	=C10*(B11-B10)	=C11*(B11-B10)	=(B11-B10)*(C11+C10)	
11	2,7	=EXP(B11)-B11-2	=C11*(B12-B11)	=C12*(B12-B11)	=(B12-B11)*(C12+C11)	=(B12-B10)/6*(C10+4*C11-
12	2,8	=EXP(B12)-B12-2	=C12*(B13-B12)	=C13*(B13-B12)	=(B13-B12)*(C13+C12)	
13	2,9	=EXP(B13)-B13-2	=C13*(B14-B13)	=C14*(B14-B13)	=(B14-B13)*(C14+C13)	=(B14-B12)/6*(C12+4*C13-
14	3	=EXP(B14)-B14-2				
15	Значение интеграла		=СУММ(D4:D14	=СУММ(E4:E14	=СУММ(F4:F14)	=СУММ(G4:G14)
16						

Рис. 2.17. Реализация в Excel методов численного интегрирования

Тема 2.4. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практически все инженерные задачи в своей основе сводятся к дифференциальным уравнениям, которые связывают физические величины и их производные. Поэтому умение решать дифференциальные уравнения является базовым в инженерной практике.

Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называется *дифференциальным уравнением*. Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* (ОДУ). Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением с частными производными*.

Общее решение дифференциального уравнения представляет собой семейство функций. Для того чтобы полностью (однозначно) описать тот или иной физический процесс, необходимо кроме самого уравнения этого процесса задать еще дополнительные условия, называемые *краевыми условиями:* они подразделяются на начальные и граничные условия.

Наибольшее распространение имеют *задачи Коши*, в которых заданы *начальные условия*: при $x=x_0$ $y(x_0)=y_0$ В общем виде эта задача была сформулирована французским математиком Коши и носит его имя. *Задача Коши* формулируется следующим образом:

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0; \;\; x \in [x_0; x_1].$$

Это означает, что нам известна связь производной от функции y с величинами x, y, известно значение искомой функции в точке x_0, необходимо найти значение функции y на всем отрезке от x_0 до x_1.

В некоторых простейших случаях задача Коши имеет аналитическое решение. Однако в случае сложных зависимостей $f(x, y)$ точных решений нет, и приходится искать приближенные решения с помощью численных методов.

При использовании численных методов решение дифференциального уравнения представляется в табличном виде, т.е. совокупности значений x_i и y_i. (i=0, 1, 2, …) (рис.2.18, кривая 2). Решение носит шаговый характер: по одной или по нескольким начальным точкам находят следующую точку, затем следующую и т.д. Разница между двумя со-

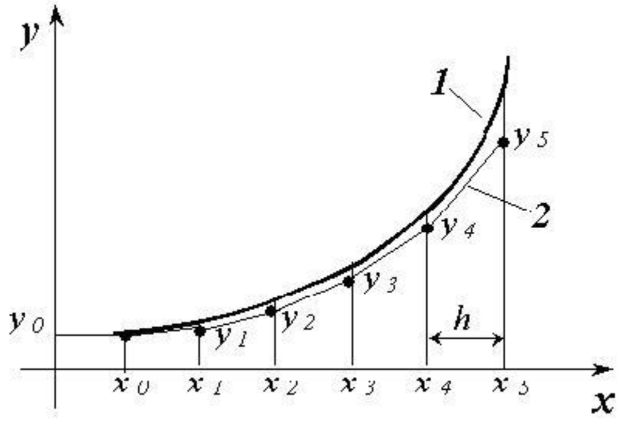


Рис. 2.18. Геометрическая интерпретация численных методов решения ОДУ

седними значениями аргумента $h = x_{i+1} - x_i$ называется *шагом.*

Основная идея получения простейших вычислительных алгоритмов сводится к разложению искомого решения *y(x)* в ряд Тейлора в окрестности текущей точки и усечения его. Количество оставленных членов ряда определяет порядок и, следовательно, точность метода.

Метод Эйлера

Один из первых методов был предложен известным математиком и физиком Эйлером и носит его имя. Основную идею метода иллюстрирует рис. 2.19.

Предположим, что нам известно значение функции $y(x)$ в точке x_i. Обозначим эту величину как y_i. Через эту точку проходит касательная к графику функции AB. В точке x_{i+1} эта касательная принимает значение y_{i+1}. Из графика видно, что это значение отличается от истинного значения искомой функции в точке x_{i+1}, которое равно $y(x_{i+1})$. Однако из этого же графика понятно, что при приближении точки x_{i+1} к точке x_i разница $y(x_{i+1}) - y_{i+1}$ будет уменьшаться, стремясь к нулю.

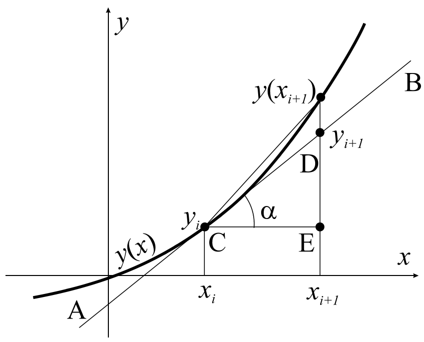


Рис. 2.19. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Эйлер строго показал, что эта разница имеет порядок расстояния h между соседними точками x_i и x_{i+1}. Тогда, исходя из треугольника CDE, можно записать

$$DE/CE = \mathrm{tg}\alpha$$

Так как DE = $y_{i+1} - y_i$, а CE = $x_{i+1} - x_i$, то можно записать

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)\cdot\mathrm{tg}\alpha = h\cdot\mathrm{tg}\alpha$$

Но α - это угол наклона касательной к графику функции, тангенс которого, как известно, равен производной этой функции. Тогда это уравнение можно переписать в виде

$$y_{i+1} - y_i = y'(x_i)h = h\cdot f(x_i, y_i)$$

Так как искомая функция и найденное значение отличаются на величину порядка $O(h)$, то можно записать

$$y(x_{i+1}) = y_i + hf(x_i,y_i) + O(h)$$

Вычислительный алгоритм записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i,y_i)$$

Ошибка накапливается и в конце заданного отрезка может быть весьма значительной. С уменьшением шага эта ошибка уменьшается. Поэтому критерием заданной точности может быть изменение искомой функции на правом краю заданного отрезка при уменьшении шага. Как правило, шаг уменьшают вдвое. Если найденная функция при этом не изменяется в требуемом количестве значащих цифр, то решение считается найденным с приемлемой точностью.

Точность метода Эйлера невелика (метод первого порядка), однако на основе этого метода легче понять алгоритм других более эффективных методов. Более точным является модифицированный метод Эйлера(второго порядка):

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}5 \cdot h \cdot (f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y^{Э}_{i+1}))$$

где промежуточное значение $y^{Э}_{i+1}$ находится по методу Эйлера.

Рассмотрим, как работает метод Эйлера на примере, в котором имеется точное решение, чтобы можно было оценить точность метода. Пусть задача Коши задана в виде

$$y' = y\cos x, \qquad y(0) = 1, \qquad x \in [0; 8\pi]$$

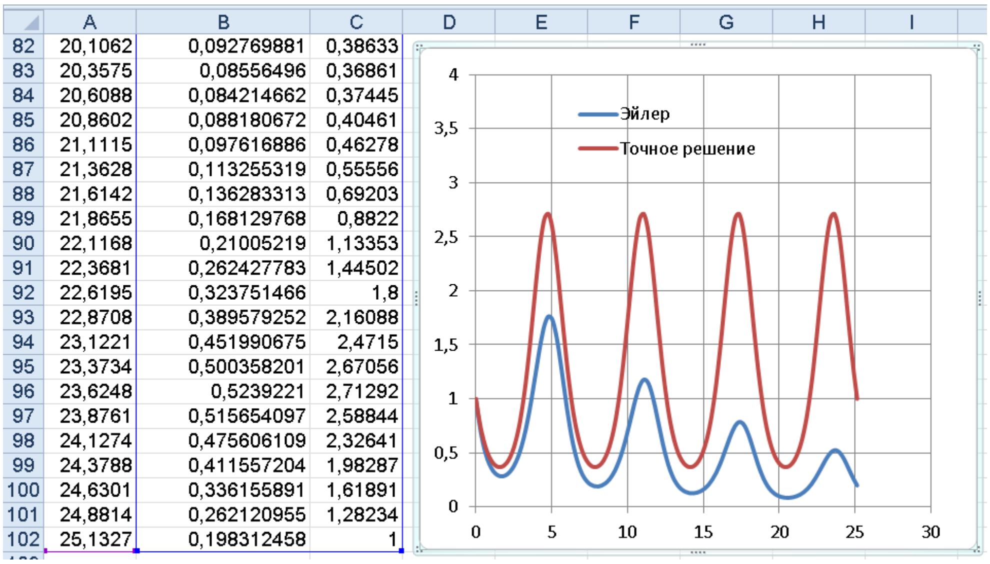
Задача имеет точное решение $y = Ae^{\sin x}$.

Разобьем область решения на отрезки величиной $8\pi/100$. Создадим в Excel таблицу, показанную на рис. 2.20.

	A	B	C
1	x	$y_{эйлер}$	$y_{точное}$
2	0	1	=EXP(-SIN(A2))
3	=A2+4*ПИ()/50	=-B2*COS(A2)*(A3-A2)+B2	=EXP(-SIN(A3))
4	=A3+4*ПИ()/50	=-B3*COS(A3)*(A4-A3)+B3	=EXP(-SIN(A4))
5	=A4+4*ПИ()/50	=-B4*COS(A4)*(A5-A4)+B4	=EXP(-SIN(A5))
6	=A5+4*ПИ()/50	=-B5*COS(A5)*(A6-A5)+B5	=EXP(-SIN(A6))

Рис. 2.20. Реализация метода Эйлера в Excel

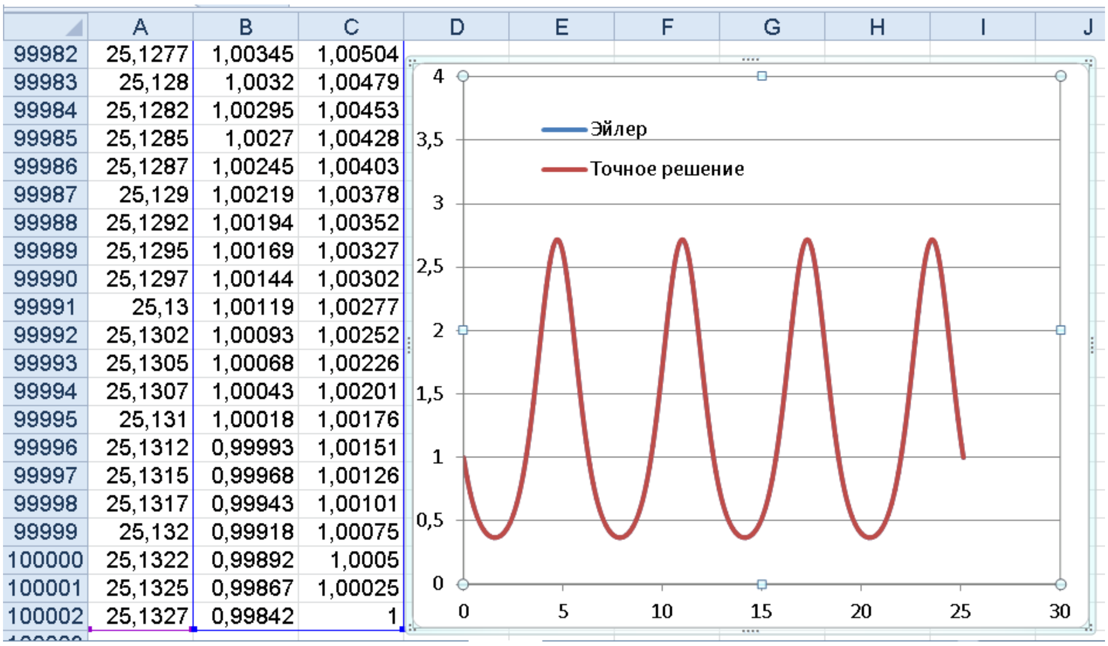
В этой таблице в строке 2 расположены начальные значения величин x и y, известные из условия задачи. В строке 3 в первой колонке расположено следующее значение переменной x, отстоящее от предыдущего на заданный выше шаг $8\pi/100$. Во второй колонке в этой строке вычисляется приближенное значение функции в этой точке в соответствии с выражением (2). Из ячейки B2 берется предыдущее значение функции, вычисляется правая часть уравнения, умноженная на шаг h и добавляется предыдущее значение функции. Следующая строка создается путем копирования предыдущей строки. Таблица насчитывает (включая заголовок) 102 строки, так что последнее значение переменной x равно 8π. В правой колонке таблицы расположено для сравнения точное решение. На рис. 2.21 показаны графики найденного и точного решений. Видно, что с ростом переменной x ошибка накапливается и в конце заданного отрезка она стала весьма значительной, так что необходимо уменьшать шаг.



	A	B	C
82	20,1062	0,092769881	0,38633
83	20,3575	0,08556496	0,36861
84	20,6088	0,084214662	0,37445
85	20,8602	0,088180672	0,40461
86	21,1115	0,097616886	0,46278
87	21,3628	0,113255319	0,55556
88	21,6142	0,136283313	0,69203
89	21,8655	0,168129768	0,8822
90	22,1168	0,21005219	1,13353
91	22,3681	0,262427783	1,44502
92	22,6195	0,323751466	1,8
93	22,8708	0,389579252	2,16088
94	23,1221	0,451990675	2,4715
95	23,3734	0,500358201	2,67056
96	23,6248	0,5239221	2,71292
97	23,8761	0,515654097	2,58844
98	24,1274	0,475606109	2,32641
99	24,3788	0,411557204	1,98287
100	24,6301	0,336155891	1,61891
101	24,8814	0,262120955	1,28234
102	25,1327	0,198312458	1

Рис. 2.21. Сравнение приближенного решения уравнения с точным

С уменьшением шага эта ошибка также линейно должна уменьшаться. Поэтому критерием заданной точности может быть изменение искомой функции на правом краю заданного отрезка при уменьшении шага. Как правило, сравниваются величина при уменьшении шага вдвое. Если найденная функция при этом не изменяется в требуемом количестве значащих цифр, то решение считается найденным с приемлемой точностью. В приведенном выше примере для обеспечения совпадения приближенного решения с точным в трех значащих цифрах пришлось уменьшать шаг вплоть до 50000 шагов. Как видно из рис. 2.22, графики точного и приближенного решений практически совпадают, хотя из таблицы видно, что значение функции 0,998 отличается от 1.



	A	B	C
99982	25,1277	1,00345	1,00504
99983	25,128	1,0032	1,00479
99984	25,1282	1,00295	1,00453
99985	25,1285	1,0027	1,00428
99986	25,1287	1,00245	1,00403
99987	25,129	1,00219	1,00378
99988	25,1292	1,00194	1,00352
99989	25,1295	1,00169	1,00327
99990	25,1297	1,00144	1,00302
99991	25,13	1,00119	1,00277
99992	25,1302	1,00093	1,00252
99993	25,1305	1,00068	1,00226
99994	25,1307	1,00043	1,00201
99995	25,131	1,00018	1,00176
99996	25,1312	0,99993	1,00151
99997	25,1315	0,99968	1,00126
99998	25,1317	0,99943	1,00101
99999	25,132	0,99918	1,00075
100000	25,1322	0,99892	1,0005
100001	25,1325	0,99867	1,00025
100002	25,1327	0,99842	1

Рис. 2.22. Реализация метода Эйлера в Excel с малым шагом

Метод Рунге – Кутты

Метод Эйлера чрезвычайно нагляден, но в связи с низкой точностью в практике численных решений применяется редко. Намного чаще применяется более громоздкий, но намного более точный метод, который разработали в XIX веке математики Рунге и Куттá. Метод Рунге – Кутты записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)/6$$
$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right); \quad k_2 = f\left(x_i + h/2, \;\; y_i + k_1 h/2\right);$$
$$k_3 = f\left(x_i + h/2, \;\; y_i + k_2 h/2\right); \quad k_4 = f\left(x_i + h, \;\; y_i + k_3 h\right)$$

Метод имеет четвертый порядок точности. Последовательность реализации метода состоит из пяти шагов: сначала поочередно, исходя из имеющихся в условии данных, вычисляются коэффициенты k, затем находится значение функции y_{i+1}.

В приведенном выше примере на шаге $8\pi/100$ максимальное отклонение от точного решения составляет 0,0038%, в отличие от 80,2% в случае метода Эйлера на том же шаге. Разница очевидна.

Тема 2.5. Решение дифференциальных уравнений с частными производными

Уравнения с частными производными

Многие задачи, связанные с процессами переноса тепла, диффузией, распространением электромагнитных полей в проводящих средах, движением вязкой жидкости и др. сводятся к решению уравнений *с частными производными*, где неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных.

Для того чтобы полностью (однозначно) описать тот или иной физический процесс, необходимо кроме самого уравнения этого процесса задать еще начальные условия (начальное состояние процесса) и режим изменения определяемой функции на границе области, в которой происходит процесс.

Точное решение такого рода задач аналитическими методами возможно только для областей правильной формы и весьма трудоемко. В инженерных приложениях зачастую важно иметь численные значения, например, максимальных температур, или времени распространения процесса на некое расстояние в областях, форма которых может значительно отличаться от правильной. Для их нахождения используются приближенные методы решения перечисленных выше дифференциальных уравнений. Возможны следующие подходы к решению дифференциальных уравнений: замена производных разностями, интегрирование уравнения, вероятностный подход.

Используемые в задачах математической физики модели физических процессов предполагают в большинстве случаев непрерывность распределения искомых величин в пространстве и их непрерывное изменение во времени. Вместе с тем можно получить некоторое приближенное представление о пространственном распределении и эволюции во времени этих величин, если оперировать совокупностью их значений в фиксированные моменты времени на конечном множестве точек пространства. Ясно, что уменьшение интервалов между выбранными фиксированными моментами времени и сокращение расстояний между выбранными точками пространства должны приближать такое дискретное представление к непрерывному распределению искомых величин.

В сеточных методах непрерывная искомая функция заменяется сеточной, т. е. значения функции ищутся в узлах сетки.

Метод конечных разностей

Идея метода

Метод основан на разностной аппроксимации производных.

Область решения покрывается прямоугольной сеткой. Отыскиваются значения функции в узлах сетки. Производные заменяются конечными разностями, т.е. строится разностная схема. В результате дифференциальные уравнения сводятся к системе линейных алгебраических уравнений.

Запись дифференциальных уравнений и краевых условий с разностями вместо производных называется ***разностной схемой***. Разностная схема зависит от шаблона, т.е. узлов сетки, выбранных для описания производных.

Разностная схема для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{в области } \{0 < x < L,\ 0 < t \le \mathrm{T}\}$$

с начальными условиями

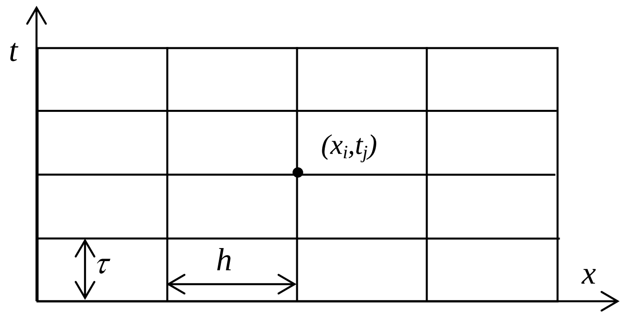
$u(x,0)=\varphi(x)$

и граничными условиями:

$u(0,t)=p(t),\ u(L,t)=s(t)$

где $f(x, t)$ - функция источника, $\varphi(x)$, $p(t)$, $s(t)$- заданные функции, удовлетворяющие равенствам $\varphi(0)= p(0)$, $\varphi(L)=s(0)$.

Построим сетку. Для этого проведем прямые линии, параллельные осям через равный шаг h по пространственной координате x и τ по временной t. Узлы, имеющие одинаковый индекс j, образуют j-ый слой.



Распишем производные функции u во внутренней точке.

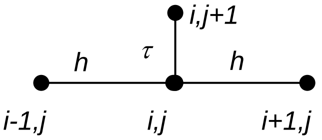
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} - \frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}\right] = \frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau}$$

Явная разностная схема

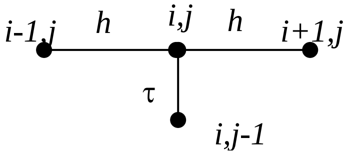


$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2} + f_{i,j,}$$

Отсюда $u_{i,j+1} = \frac{\tau}{h^2}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}) + \left(1-\frac{2\tau}{h^2}\right)u_{i,j} + \tau f_{i,j}$

Разностная схема устойчива при выполнении условия $\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$.

Неявная разностная схема



$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\tau}=\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}+f_{i,j,}$$

Для вычисления значения сеточной функции $u_{i,j}$ на j-м слое нужно найти решение системы линейных алгебраических уравнений $Cu_j = u_{j-1}$ с трехдиагональной матрицей:

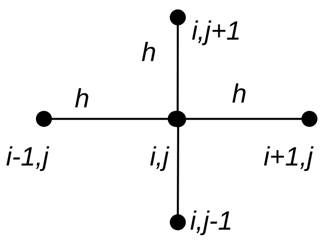
$$C=\begin{pmatrix} -(1+\frac{2\tau}{h^2}) & \frac{\tau}{h^2} & \dots & 0 \\ \frac{\tau}{h^2} & -(1+\frac{2\tau}{h^2}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots 0 & \dots & \frac{\tau}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{h^2} & -(1+\frac{2\tau}{h^2}) \end{pmatrix}$$

(это можно сделать методом прогонки или итерационными методами)

Ограничений на шаг τ нет.

Разностная схема для уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-Q$$



Для построения разностной схемы рассмотрим произвольный внутренний узел сетки (i,j). С ним соседствуют четыре узла: верхний (i,$j+1$), нижний (i,$j-1$), левый ($i-1$,j) и правый ($i+1$,j). Расстояние между узлами в сетке равно h. Тогда, используя выражение для приближенной записи вторых производных, можно приближенно записать:

$$\frac{T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}}{h^2}+\frac{T_{i,j-1}-2T_{i,j}+T_{i,j+1}}{h^2}=-Q\,,$$

откуда легко получить выражение, связывающее значение температуры в центральной точке с ее значениями в соседних точках:

$$T_{i,j}=\frac{T_{i-1,j}+T_{i+1,j}+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}}{4}+\frac{Qh^2}{4}$$

Это выражение позволяет нам, зная значения температуры в соседних точках, вычислить ее значение в центральной точке. Перед началом счета на границе области задаются граничные условия, во внутренних точках задается начальное приближение.

Метод конечных элементов

Идея метода

Область решения разбивается на элементы (например, треугольные). На каждом элементе искомая функция заменяется интерполяционным многочленом (например, линейной функцией). Уравнение интегрируется. В результате дифференциальные уравнения сводятся к системе линейных алгебраических уравнений.

Более подробно рассмотрим вариацию метода конечных элементов – метод контрольных объемов.

Область вычислений разбивается на треугольные элементы. Треугольные элементы предпочтительнее прямоугольных:

1) сильно нерегулярные (неправильной формы) области легче делить на треугольники, чем на прямоугольники;

2) области с криволинейными границами лучше аппроксимируются треугольниками;

3) для одного и того же числа узлов треугольные элементы обеспечивают большую точность.

Медианами этих треугольников область разбивается на контрольные объемы. Центры тяжести треугольников (точки пересечения медиан) соединяются с серединами сторон, образуя контрольные объемы вокруг каждой вершины. Построенные контрольные объемы не перекрываются и полностью заполняют область вычислений.

На каждом треугольном элементе строится интерполяционная функция (например, линейная). Исходное дифференциальное уравнение в частных производных представляется в виде дивергенции потока

$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{J}} = f$, где $\vec{\mathrm{J}}$ – поток.

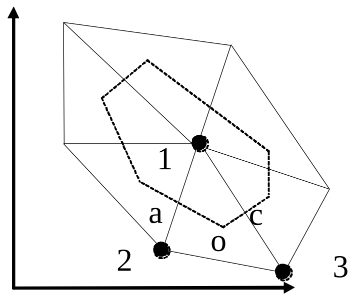
В декартовой системе координат

$$div\vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

Уравнение интегрируется по каждому контрольному объему вокруг точки. Применяется теорема Остроградского-Гаусса, сводящая интеграл по объему Ω к интегралу по поверхности S (границе области L в плоском случае):

$$\iint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{J}}\,dV = \int_{S} \vec{\mathrm{J}}\,\vec{\mathrm{n}}\,dS = \int_{L} \vec{\mathrm{J}}\,\vec{\mathrm{n}}\,dl$$

Так, например, уравнение Лапласа $\Delta v = 0$, описывающее поле скоростей, можно записать в следующем виде:



$$div\vec{J} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

На треугольном элементе «1-2-3» функцию v интерполируем линейной функцией

$$v = Ax + By + C$$

Тогда $J_x = \dfrac{\partial v}{\partial x} = A$, $J_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = B$.

Применяем теорему Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\mathrm{J}}\, dV = \int_{aoc} \vec{\mathrm{J}}\,\vec{\mathrm{n}}\, dl = \int_{aoc} \left(J_x dy - J_y dx\right) = \int_{ao} A dy - \int_{ao} B dx + \int_{oc} A dy - \int_{ac} B dx = A\left(y_c - y_a\right) + B\left(x_a - x_c\right)$$

Здесь точки a, c – середины отрезков 1-2 и 1-3 легко находятся по известным координатам узлов сетки.

Коэффициенты A, B, C находятся из системы трех уравнений, записанных для вершин треугольника 1-2-3, по правилу Крамера.

$$\begin{cases} v_1 = Ax_1 + By_1 + C \\ v_2 = Ax_2 + By_2 + C \\ v_3 = Ax_2 + By_2 + C \end{cases}$$

Для вершины 1 суммируем значения интегралов по всем соседним треугольникам. В результате для всех узлов области получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$a_i v_i + \sum_j a_j v_j = s_i$$

где суммирование производится по всем узлам i, соседним с узлом j.

Для решения полученных уравнений может быть применен любой из известных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, например, итераций или Зейделя.

Метод Монте-Карло

Идея метода

Метод Монте-Карло – метод статистических испытаний – численный метод, использующий моделирование случайных величин и построение статистических оценок для искомых величин. Искомые величины (связанные или несвязанные со случайностью) представляются вероятностными характеристиками какого-либо случайного явления. Это явление моделируют, после чего определяют с помощью статистической обработки «наблюдений» модели.

Рассмотрим пример.

Требуется рассчитать потоки тепла в нагреваемой тонкой пластине, на краях которой поддерживается нулевая температура. Распределение тепла описывается тем же уравнением, что и расплывание пятна краски в слое жидкости. Поэтому моделируют плоское броуновское движение частиц «краски» по пластине, следя за их положениями в моменты времени $k\tau$, k=0,1,2, ... Приближенно принимают, что за малый интервал τ частица перемещается на шаг h равновероятно во всех направлениях. Каждый раз направление выбирается случайным образом независимо от всего предыдущего. Соотношение между τ и h определяется коэффициентом теплопроводности.

Движение начинается в источнике тепла и кончается при первом достижении края («краска» налипает на край). Поток тепла $Q(\tau)$ через участок с границей измеряется количеством налипшей краски. При общем количестве N частиц согласно закону больших чисел такая оценка дает случайную ошибку порядка $1/\sqrt{N}$ (и систематическую ошибку порядка из-за дискретности выбранной модели). Искомую величину представляют математическим ожиданием числовой функции f от случайного исхода ω:

$$Ef(\omega) = \int f(\omega)dp$$

т.е. интегралом по вероятностной мере p.

На оценку $Ef(\omega) = (f(\omega_1) + \ldots + f(\omega_N))/N$, где ω_1, …, ω_N– смоделированные исходы, можно смотреть как на квадратурную формулу для указанного интеграла со случайными узлами ω_k и случайными погрешностями.

Проведение каждого «эксперимента» состоит из двух этапов: «розыгрыш» случайного исхода и последующее вычисление функции $f(\omega)$. Случайный набор моделируется с помощью, например, датчика случайных чисел.

Достоинства метода: универсальный метод, не требует большого объема памяти.

Недостатки: большие случайные погрешности, слишком медленно убывающие при увеличении числа экспериментов.

Пример. Распределение температуры в пластине

Процесс переноса тепла, как известно, подчиняется закону Фика́, который в общем виде записывается следующим образом:

$$\vec{q} = -\lambda(T)\mathrm{grad}T$$

где $\vec{q}$ – плотность потока тепла, λ– теплопроводность, T– температура. Знак «минус» показывает, что поток тепла направлен в сторону, противоположную градиенту температуры, т.е. тепло распространяется в направлении от горячей области к холодной. Если в исследуемой области нет источников тепла, то в установившемся режиме, когда распределение температуры в области не изменяется, всё тепло, которое попадает внутрь области, должно полностью ее покидать. Математически это означает, что

$$\mathrm{div}\vec{q} = 0$$

что для двухмерного случая может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0$$

Если в рассматриваемой области имеется источник тепла с объемной плотностью A, то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = -A$$

В случае постоянной теплопроводности уравнение может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{A}{\lambda} = -Q$$

Решение этого уравнения аналитически возможно только для областей простой формы: прямоугольник, круг, кольцо. В остальных ситуациях точное решение этого уравнения невозможно. Тогда приходится использовать приближенные методы решения таких уравнений.

Приближенное решение уравнения в области сложной формы методом конечных разностей состоит из нескольких этапов: 1) построение сетки; 2) построение разностной схемы; 3) решение системы алгебраических уравнений.

Рассмотрим последовательно каждый из этапов и реализацию с помощью пакета Excel.

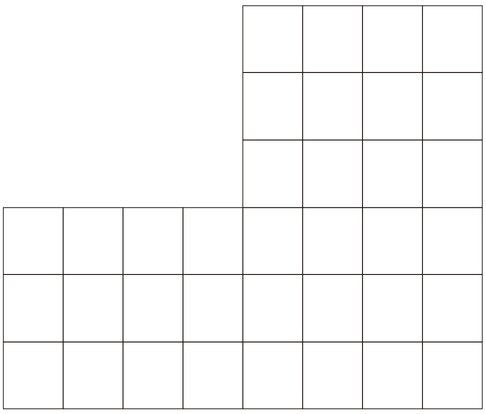


Рис. 2.23. Сетка

Построение сетки. Пусть область имеет форму, показанную на рис. 2.23. Нанесем на область равномерную сетку, состоящую из квадратов со стороной h. Вместо того чтобы искать непрерывное решение уравнения, определенное в каждой точке области, будем искать приближенное решение, определенное только в узловых точках сетки, т.е. в углах квадратов.

Построение разностной схемы. Для построения разностной схемы рассмотрим произвольный внутренний узел сетки Ц (центральный) (рис. 2.24). С ним соседствуют четыре узла: В (верхний), Н (нижний), Л (левый) и П (правый). Расстояние между узлами в сетке равно h. Тогда, используя выражение для приближенной записи вторых производных, можно записать:

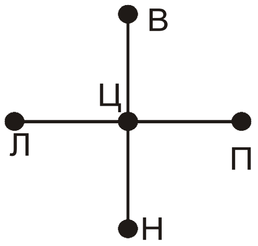


Рис. 2.24 Схема взаимосвязей узлов в сетке

$$\frac{T_{Ë} - 2T_{Ö} + T_{Ï}}{h^2} + \frac{T_{Â} - 2T_{Ö} + T_{Í}}{h^2} = -Q ,$$

откуда легко получить выражение, связывающее значение температуры в центральной точке с ее значениями в соседних точках:

$$T_Ц = \frac{T_Л + T_П + T_В + T_Н}{4} + \frac{Qh^2}{4}$$

Такая схема, в которой производные заменяются конечными разностями, а для поиска значений в точке сетки используются только значения в ближайших соседних точках, называется центрально-разностной схемой, а сам метод – методом конечных разностей.

Аналогичное уравнение мы получаем для каждой точки сетки, которые, таким образом, оказываются связанными друг с другом. То есть мы имеем систему алгебраических уравнений, в которой число уравнений равно числу узлов сетки. Решать такую систему уравнений можно различными методами.

Решение системы алгебраических уравнений. Метод итераций. Пусть в граничных узлах температура задана и равна 20, а мощность теплового источника равна 100. Размеры нашей области заданы и равны по вертикали 6, а по горизонтали 8, так что сторона квадрата сетки (шаг) $h = 1$. Тогда выражение для вычисления температуры во внутренних точках принимает вид

$$T_{Ö} = \frac{T_{Ë} + T_{Ï} + T_{Â} + T_{Í}}{4} + \frac{100 \cdot 1^2}{4}$$

Поставим в соответствие каждому узлу ячейку на листе Excel. В ячейках, соответствующих граничным точкам, введем число 20 (на рис. 2.25 они выделены серым цветом). В остальных ячейках запишем расчетную формулу. Например, в ячейке F2 она будет выглядеть следующим образом:

=(F1 + F3 + E2 + G2)/4 + 100*(1^2)/4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					20	20	20	20	20
2					20	99,87924	122,5	99,1316	20
3					20	137,017	170,9892	134,0264	20
4	20	20	20	20	20	157,1994	190,4133	145,9849	20
5	20	82,6162	107,9191	121,4933	138,2522	181,3674	187,4797	139,4997	20
6	20	82,54573	107,5667	119,8021	130,1482	142,5384	138,6381	104,5345	20
7	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Рис. 2.25. Схема ячеек на листе Excel, соответствующая расчетной области

Записав эту формулу в ячейку F2, можно ее скопировать и вставить в остальные ячейки области, соответствующие внутренним узлам. При этом может появиться сообщение Excel о циклической ссылке. Перейдите в окно **Файл>Параметры>Формулы,** установите флажок в разделе «Итеративные вычисления», указав при этом в качестве относительной погрешности величину 0,00001, а в качестве предельного количества итераций 10000. Такие значения обеспечат малую счётную погрешность и гарантируют, что итерационный процесс дойдет до заданной погрешности.

Однако эти значения не обеспечивают малую погрешность самого метода, так как последняя зависит от погрешности при замене вторых производных конечными разностями. Очевидно, что эта погрешность тем меньше, чем меньше шаг сетки, т.е. размер квадрата, на котором строится разностная схема. Это означает, что точно вычисленное значение температуры в узлах сетки, представленное на рис. 2.24, на самом деле может оказаться совсем не соответствующим действительности. Существует единственный метод проверить найденное решение: найти его на более мелкой сетке и сравнить с предыдущим. Если эти решения отличаются мало, то можно считать, что найденное распределение температуры соответствует действительности.

Уменьшим шаг вдвое. Вместо 1 он станет равным ½. Число узлов изменится. По вертикали вместо 7 узлов станет 13 (12 квадратов, т.е. 13 узлов), а по горизонтали вместо 9 станет 17 узлов. При этом не следует забывать, что величина шага уменьшилась вдвое и теперь в расчетной формуле вместо 1^2 нужно в правой части подставлять $(1/2)^2$. В качестве контрольной точки, в которой будем сравнивать найденные решения, возьмем точку с максимальной температурой, отмеченную на рис. 2.25 желтым цветом. Результат вычислений показан на рис. 2.26:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1					20	20	20	20	20								
2					20	99,9	122,5	99,1	20								
3					20	137,0	171,0	134,0	20								
4	20	20	20	20	20	157,2	190,4	146,0	20								
5	20	82,6	107,9	121,5	138,3	181,4	187,5	139,5	20								
6	20	82,5	107,6	119,8	130,1	142,5	138,6	104,5	20								
7	20	20	20	20	20	20	20	20	20								
8																	
9																	
10									20	20	20	20	20	20	20	20	20
11									20	51,4	69,7	79,4	82,4	79,2	69,3	51,1	20
12									20	70,7	102,9	120,6	126,0	119,9	102,0	70,0	20
13									20	83,7	125,7	149,0	156,0	147,7	123,6	82,1	20
14									20	93,3	142,0	168,9	176,5	166,1	137,6	89,7	20
15									20	102,5	155,1	183,0	189,9	177,6	146,1	94,2	20
16	20	20	20	20	20	20	20	20	20	116,6	168,1	193,1	197,6	183,2	149,9	96,2	20
17	20	46,8	61,9	71,0	76,9	81,5	86,3	93,7	109,4	150,7	182,4	198,8	199,1	182,9	149,0	95,5	20
18	20	60,3	84,9	100,2	110,2	117,8	125,0	134,2	148,2	169,4	187,1	195,6	192,2	175,2	142,6	91,9	20
19	20	64,4	92,2	109,6	121,0	129,4	136,7	144,8	154,9	166,6	175,9	179,2	174,0	158,1	129,3	84,6	20
20	20	60,3	84,9	100,1	109,9	116,9	122,7	128,6	134,9	141,2	145,7	146,4	141,4	128,9	106,9	72,2	20
21	20	46,8	61,9	70,9	76,6	80,6	83,8	86,8	89,8	92,6	94,4	94,3	91,2	84,3	72,1	52,3	20
22	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Рис. 2.26. Результат вычислений

Видно, что уменьшение шага привело к существенному изменению значения температуры в контрольной точки: на 4%. Для повышения точности найденного решения следует ещё уменьшить шаг сетки. Для h = ¼ получим в контрольной точке 199,9, а для h = 1/8 соответствующее значение равно 200,6. Можно построить график зависимости найденной величины от величины шага:

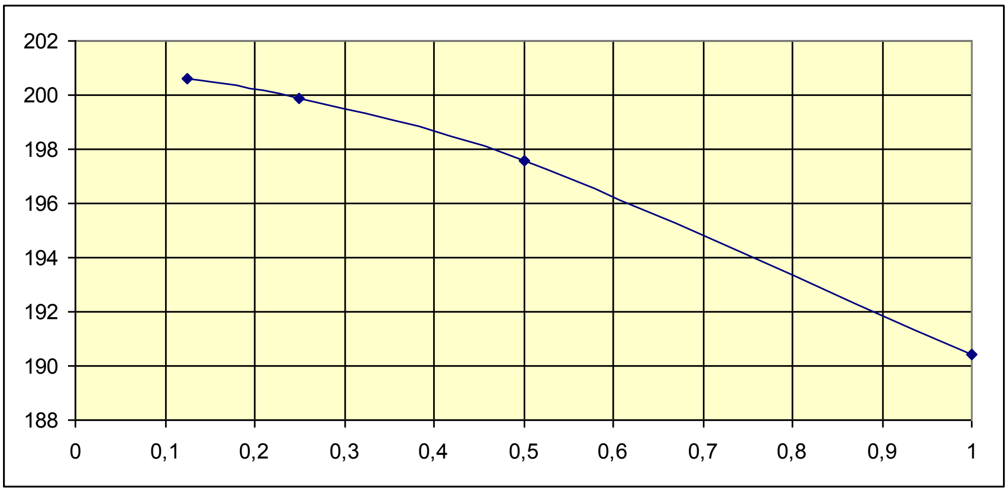


Рис. 2.27. График зависимости температуры, вычисленной в контрольной точке, от величины шага сетки

Видно, что уменьшение шага привело к существенному изменению значения температуры в контрольной точки: на 4%. Для повышения точности найденного решения следует ещё уменьшить шаг сетки. Для h = ¼ получим в контрольной точке 199,9, а для h = 1/8 соответствующее значение равно 200,6.

Можно сделать вывод, что дальнейшее уменьшение шага не приведет к существенному изменению температуры в контрольной точке и точность найденного решения можно считать удовлетворительной.

Используя возможности пакета Excel, можно построить поверхность температуры, наглядно представляющую ее распределение в исследуемой области (рис. 2.28):

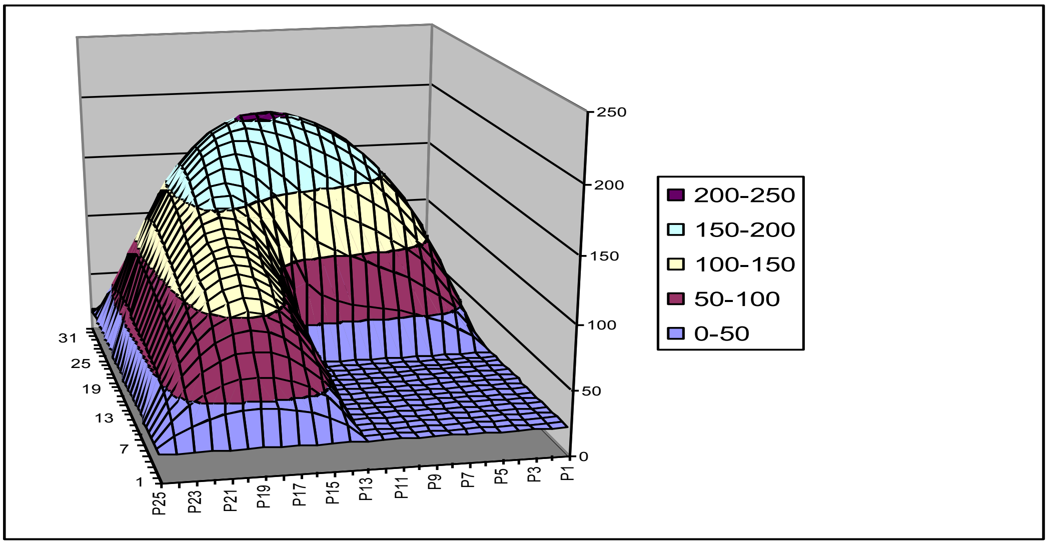


Рис. 2.28. Распределение температуры на пластине

Раздел III. ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Тема 3.1. Графическое представление данных

Построение диаграммы. Диапазон ячеек заполнить значениями. Выделить этот диапазон и выбрать инструмент на вкладке **Вставка>Гистограмма> Гистограмма с группировкой** (рис.3.1).

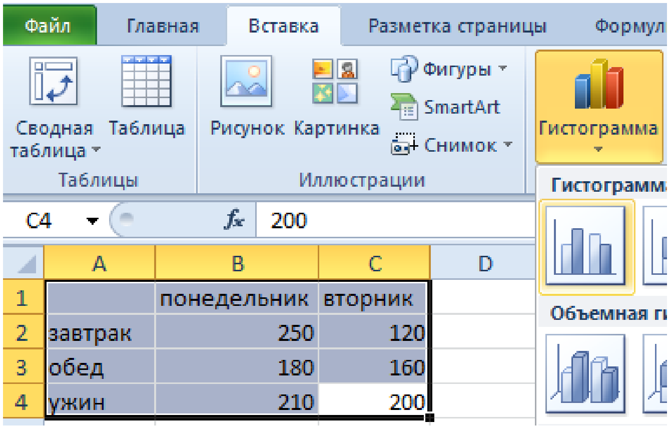


Рис. 3.1. Ввод данных и выбор инструмента для вставки диаграммы

Щелкнуть по графику, чтобы активировать его и вызвать дополнительное меню «Работа с диаграммами» (рис. 3.2). Там доступны три закладки инструментов: «Конструктор», «Макет», «Формат».

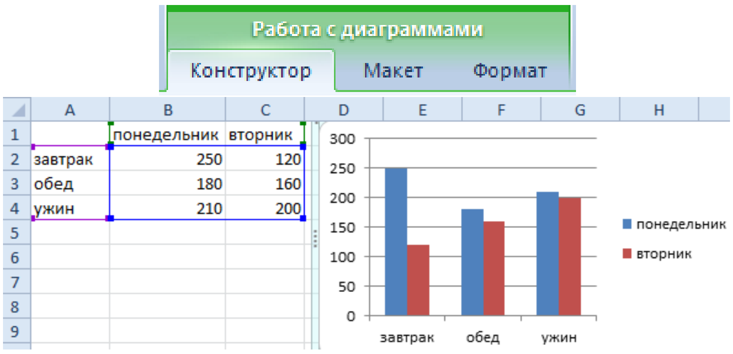


Рис. 3.2. Вызов меню «Работа с диаграммами»

Чтобы поменять оси в графике следует выбирать вкладку «Конструктор», а на ней инструмент-переключатель «Строка/столбец».

Чтобы снять выделение с графика и таким образом дезактивировать режим его настройки, следует щелкнуть по любой ячейке.

Построение круговой диаграммы. Выделите в исходной таблице диапазон A1:B4. Выберите **Вставка>Круговая**. Из группы вариантов диаграмм выберите «Разрезная круговая» (рис.3.3 а)). Подпишите заголовок вашей диаграммы. Для этого сделайте по заголовку двойной щелчок левой кнопкой мышки и введите текст как показано на рисунке рис.3.3 б):

а) б)

Рис. 3.3. Круговая диаграмма
а) – построение, б) – изменение заголовка

Построение графика функции. Для построения графика функции необходимо иметь таблицу аргументов и значений функции в виде двух колонок или строк. Тогда, расположив курсор внутри таблицы, или выделив необходимый диапазон данных, содержащий аргумент так и функцию, следует выбрать в меню **Вставка** в группе «Диаграммы» тип диаграммы «Точечная» (ни в коем случае не «График»!!!) и указать тип графика (рис. 3.4).

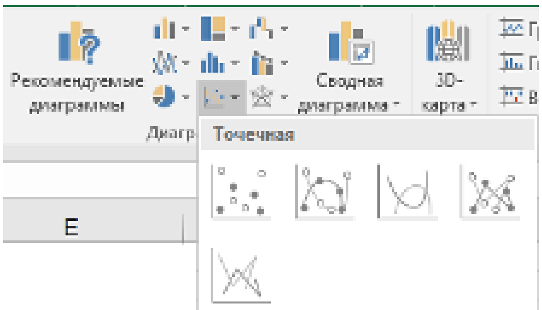


Рис.3.4. Построение графика по точкам

Так для функции y=sin *x* получим следующую картину (рис. 3.5)

x	y
0	0
0,5	0,47943
1	0,84147
1,5	0,99749
2	0,9093
2,5	0,59847
3	0,14112
3,5	-0,35078
4	-0,7568
4,5	-0,97753
5	-0,95892
5,5	-0,70554
6	-0,27942
6,5	0,21512

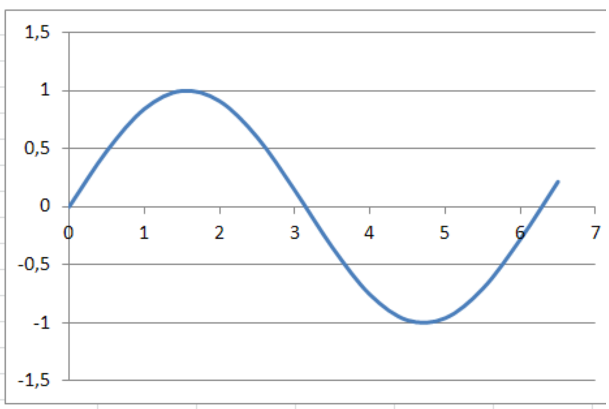
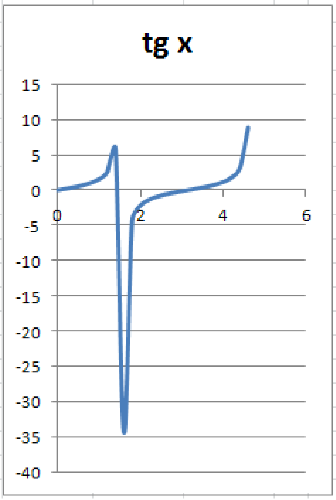


Рис. 3.5. Построение графика функции *y*=sin *x*

График функции с разрывами. Если у функции имеется разрыв, то Excel соединит точки с двух сторон разрыва и график получится сплошной (рис. 3.6). Для получения правильной картины достаточно удалить некоторые значения функции, прилегающие к области разрывов.

x	tg x
0	0
0,2	0,20271
0,4	0,422793
0,6	0,684137
0,8	1,029639
1	1,557408
1,2	2,572152
1,4	5,797884
1,6	-34,2325
1,8	-4,28626
2	-2,18504
2,2	-1,37382
2,4	-0,91601
2,6	-0,6016
2,8	-0,35553
3	-0,14255
3,2	0,058474
3,4	0,264317
3,6	0,493467
3,8	0.773556



x	tg x
0	0
0,2	0,20271
0,4	0,422793
0,6	0,684137
0,8	1,029639
1	1,557408
1,2	2,572152
1,4	5,797884
1,6	
1,8	-4,28626
2	-2,18504
2,2	-1,37382
2,4	-0,91601
2,6	-0,6016
2,8	-0,35553
3	-0,14255
3,2	0,058474
3,4	0,264317
3,6	0,493467
3,8	0.773556

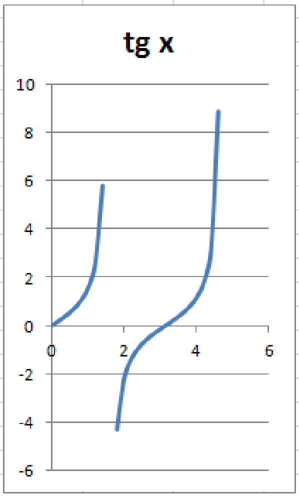


Рис. 3.6. Построение графика функции с разрывами

Управление подписями, осями, областью построения. С помощью команд вкладки **Макет** можно:

- вставить название диаграммы;
- вставить легенду;
- добавить подписи данных;
- задать параметры осей и линий сетки;
- задать формат области построения;
- добавить линии тренда и планки погрешностей.

Управление кривыми. Через контекстное меню, щелкнув правой клавишей мыши по кривой, можно вызвать окно «Формат ряда данных». С его помощью можно оформить кривую:

- задать тип линии (штриховая, штрих-пунктирная, сплошная и т.д.) или вовсе убрать линию;
- выбрать цвет линии и ее толщину;
- оформить окончания линии;
- выбрать тип маркера, его размеры, цвет;
- придать линии различные эффекты.

Добавление кривых на существующий график. Предположим, что на существующий график функции $y = \sin x$ необходимо добавить график еще одной функции, например, $y = 1{,}2\cos x$. Для этого следует щелкнуть правой клавишей мыши по диаграмме, выбрать в контекстном меню команду «Выбрать данные». Откроется окно диалога «Выбор источника данных» (рис. 3.7).

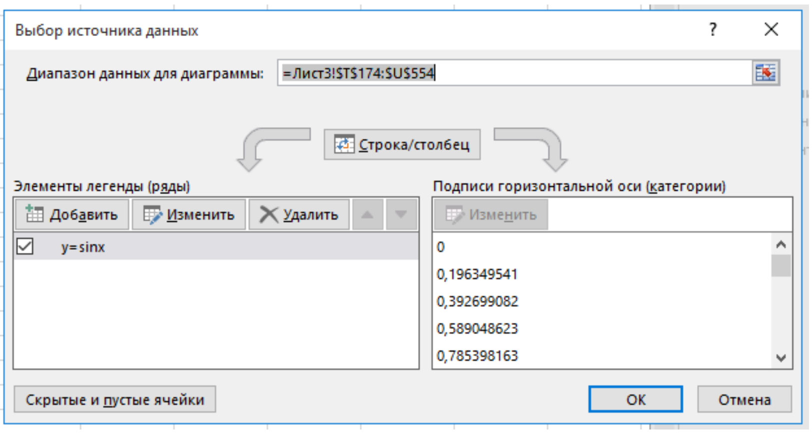


Рис. 3.7. Окно диалога «Выбор источника данных»

В этом окне следует выбрать команду «Добавить» и, указав имя нового ряда, выбрать для него диапазон значений аргумента и функции (рис. 3.8):

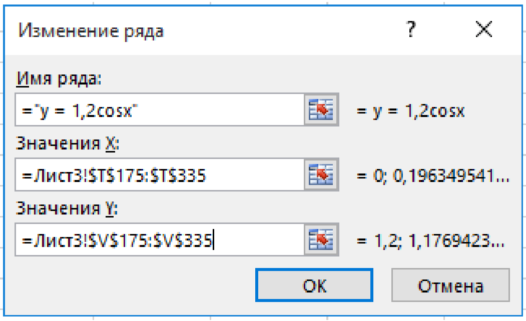


Рис.3.8. Добавление нового ряда

Перенос кривых с одного графика на другой. Кривые не только можно добавлять, но, если они имеются на разных графиках, то для объединения их на одном достаточно выполнить стандартную процедуру «Копировать – Вставить».

Спарклайны

Excel позволяет получить графическое представление данных без построения отдельной диаграммы, непосредственно в ячейках (*спарклайны*). С помощью спарклайнов удобно прослеживать тенденции рядов значений (рис. 3.9).

Филиал	Кв.1	Кв.2	Кв.3	Кв.4	Тенденции продаж
Филиал1	10355	9880	11700	10100	
Филиал2	15300	13600	17500	18000	
Филиал3	8900	9800	10700	9600	

Рис.3.9. Отображение спарклайнов

Чтобы создать спарклайны, необходимо:

1) выделить ячейку (диапазон ячеек), куда требуется вставить спарклайн;

2) на вкладке **Вставить** в группе **Спарлайн** указать тип графика;

3) в диалоговом окне «Создание спаклайнов» указать диапазон, данные которого требуется отобразить на кривой.

Тема 3.2. Интерполяция и аппроксимация данных. Построение эмпирических формул

В процессе моделирования и инженерной практике часто возникает необходимость описания неизвестной функциональной зависимости по известным ее значениям в некоторых точках. Задача подбора эмпирической формулы для опытных или табличных данных возникает на этапе построения математической модели объекта, а также при обобщении результатов эксперимента. Иногда в расчетах прибегают к замене сложной с вычислительной точки зрения функции более простой, хотя и с некоторой ошибкой.

При решении задачи поиска приближенной функции возникают следующие проблемы.

1. Необходимо выбрать вид приближенной функции. Для приближения широко используются многочлены, тригонометрические функции, показательные функции и т. д.

2. Необходимо выбрать критерий близости исходной и приближенной функции. Это может быть требование совпадения обеих функций в узловых точках (задача ***интерполяции***), минимизация отклонений (***аппроксимация***).

3. Необходимо указать правило (алгоритм), позволяющее с заданной точностью найти приближение функции.

Практически необходимо решить обратную задачу: по известным табличным данным и известному виду приближенной функции требуется определить коэффициенты этой функции (в прямой задаче все коэффициенты известны и вычисляются значения функции исходя их данных).

Интерполяция

Обычно под интерполяцией понимают получение промежуточных данных внутри диапазона, на границах которого данные известны.

Задача интерполирования может быть сформулирована следующим образом. Пусть на отрезке [a, b] заданы n+1 точек x_0,, x_1, …, x_n которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой интерполируемой функции $f(x)$ в этих узлах, т.е.

$$y_0=f(x_0);\ y_1=f(x_1);\ \ldots;\ y_n=f(x_n).$$

Требуется построить некоторую интерполирующую зависимость $F(x)$, которая в узлах интерполяции принимает те же значения, что и интерполируемая функция $f(x)$, т.е.

$$F(x_0)=f(x_0)=y_0;\ \ldots;\ F(x_n)=f(x_n)=y_n.$$

При решении задачи интерполирования обычно принимается, что интерполируемая функция непрерывна на заданном отрезке и в каждой точке имеет конечные производные.

Графически решение задачи интерполирования заключается в том, чтобы построить такую интерполирующую функцию, которая бы проходила через все узлы интерполяции.

В качестве интерполирующей функции обычно выбирают полином, так как полином легко вычислять, дифференцировать и интегрировать. Через n+1 точку x_0,, x_1, …, x_n однозначно можно построить полином n степени. Существуют различные методы построения таких полиномов (полином Лагранжа, Ньютона, метод разделенных разностей). Следует иметь ввиду, что при большом количестве точек получается полином высокой степени, что усложняет вычисления, а также может привести к искажению результатов, если данные имеют погрешность.

На практике чаще всего линейную интерполяцию используют для нахождения промежуточных значений между двумя точками табличных данных (x_1,y_1) и (x_2,y_2):

$$y = y_1 + (x - x_1) \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Другой подход к построению интерполирующей функции состоит в том, что строится кусочно-непрерывная функция на каждом отдельном интервале. Отдельные функции «сшиваются» в узлах и называются сплайнами. Чаще всего используют кубические сплайны, т. е. на каждом участке между двумя точками строится свой полином третьей степени. Для нахождения коэффициентов полиномов составляется система уравнений (равенство значений функций и производных в узлах). Эти методы реализованы в системах компьютерной математики (Matlab, Mathcad, и др.).

Аппроксимация экспериментальных данных методом наименьших квадратов

Зачастую, получив совокупность экспериментальных данных, требуется построить функцию, приближенно описывающую эти данные и сглаживающую случайные отклонения, возникающие из-за погрешностей эксперимента (рис.3.10). Такую функцию называют аппроксимирующей, а сам процесс построения функции – аппроксимацией.

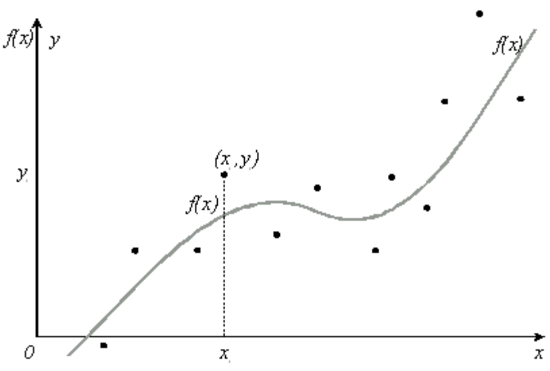


Рис.3.10. Аппроксимация данных

Метод наименьших квадратов базируется на применении в качестве критерия близости суммы квадратов отклонений заданных и расчетных значений. Математически задача может быть сформулирована следующим образом: если известна совокупность экспериментальных данных $y_i = f(x_i)$, которая аппроксимируется функцией $p(x)$, то должно выполняться требование: величина квадрата ошибки (отклонения экспериментальных данных от аппроксимирующей функции)

$$G = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - p(x_i) \right]^2$$

должна быть минимальной. Если коэффициенты функции p неизвестны, то задача сводится к поиску минимума функции G относительно этих коэффициентов.

Рассмотрим простейший пример, когда аппроксимирующая функция является линейной, т.е. $p(x) = a_0 + a_1x$. Тогда

$$G(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

Поиск минимума этой функции означает, что ее производные по неизвестным коэффициентам a_0 и a_1 должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_1) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - a_0 - a_1 x_1) = 0$$

Раскрывая скобки под знаками суммы, получим

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

Т. е. получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными a_0 и a_1. Решив систему по правилу Крамера, получаем выражения для коэффициентов a_0 и a_1:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2},$$

$$a_1 = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2},$$

где суммирование ведется от 1 до N.

Реализация метода наименьших квадратов в Excel

Искомые коэффициенты можно найти с помощью статистических функций процессора электронных таблиц MS Excel:

ОТРЕЗОК(известные_значения_у;известные_значения _х).

где **известные_значения_у** – это интервал ячеек, содержащих числовые зависимые точки данных; **известные_значения_х** – множество независимых точек данных. Используется для нахождения коэффициента a_0 линейной функции $y = a_0 + a_1x$.

НАКЛОН(известные_значения_у;известные_значения_х).
находит коэффициент линейной функции a_1

ЛИНЕЙН(известные_значения_у; известные_значения_х; константа; статистика)
возвращает массив значений коэффициентов $\{a_n,\ldots,a_1, a_0\}$ линейной функции $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_n$.

Если аргумент константа имеет значение ИСТИНА или опущен, то константа a_0 вычисляется обычным образом, если аргумент константа имеет значение ЛОЖЬ, то значение a_0 полагается равным 0. Функция ЛИНЕЙН может также возвращать дополнительную регрессионную статистику. Поскольку возвращается массив значений, функция должна задаваться в виде формулы массива, т.е. выделяется группа ячеек, в которых необходимо создать формулу, вводится формула, а затем нажимаются клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

ПРЕДСКАЗ(новое_значение_х;известные_значения_у; известные_значения_х)
вычисляет на основе линейной аппроксимации будущее значение *у*, соответствующее заданному значению *х*.

ТЕНДЕНЦИЯ(известные_значения_у; известные_значения _ х; новые_значения_х; константа)

возвращает значения y для заданного массива **новые_значения_х** в соответствии с линейной аппроксимацией. Если аргумент **константа** имеет значение ИСТИНА или опущен, то a_0 вычисляется обычным образом, Если аргумент константа имеет значение ЛОЖЬ, то коэффициент a_0 полагается равным 0.

В Excel имеется функция **ЛГРФПРИБЛ**, которая вычисляет параметры экспоненциальной кривой $y = b{\cdot}m^x$, аппроксимирующей заданные значения, и функция **РОСТ**, которая вычисляет значения для новых значений x в соответствии с экспоненциальной аппроксимацией.

Для обработки и анализа статистических данных в Excel предназначена надстройка **Анализ данных**.

Пример. Требуется аппроксимировать следующие экспериментальные данные (рис. 3.11) линейной функцией $y = a_0 + a_1x$.

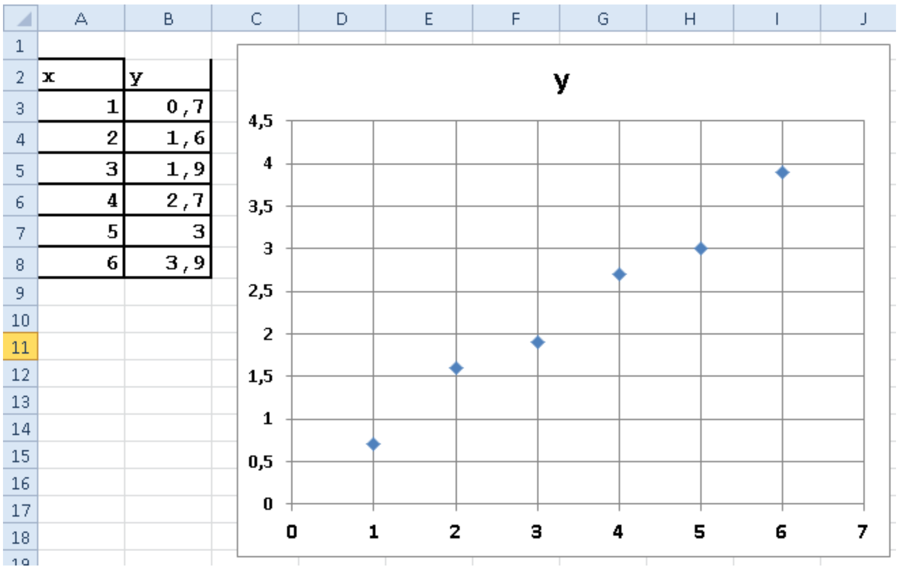


Рис.3.11. Экспериментальные данные

Для того чтобы построить прямую, наилучшим образом описывающую экспериментальные данные, найдем коэффициенты a_0 и a_1, используя статистические функции Excel:

ОТРЕЗОК(B3:B8;A3:A8)	нахождение a_0
НАКЛОН(B3:B8;A3:A8)	нахождение a_1

Вычислим в указанных точках значения линейной функции по формуле $y = a_0 + a_1x$ с найденными коэффициентами и добавим линию на уже построенный точечный график (рис.3.12).

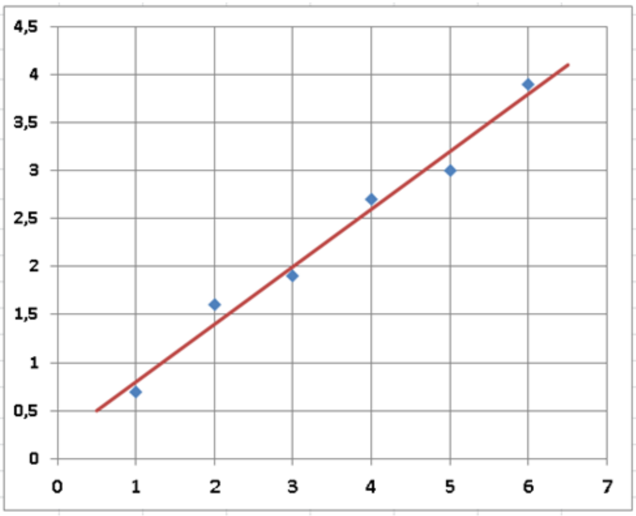


Рис.3.12. Экспериментальные данные с аппроксимирующей прямой

Excel позволяет построить аппроксимирующую кривую собственными средствами, не прибегая к вычислениям. Для этого необходимо построить график с исходными данными, как на рис. 3.11 и, кликнув правой клавишей мыши по одной из точек, вызвать контекстное меню, затем выбрать пункт «Добавить линию тренда», после чего откроется окно «Формат линии тренда» и одновременно будет построена аппроксимирующая прямая, совпадающая с построенной нами самостоятельно прямой (рис. 3.13):

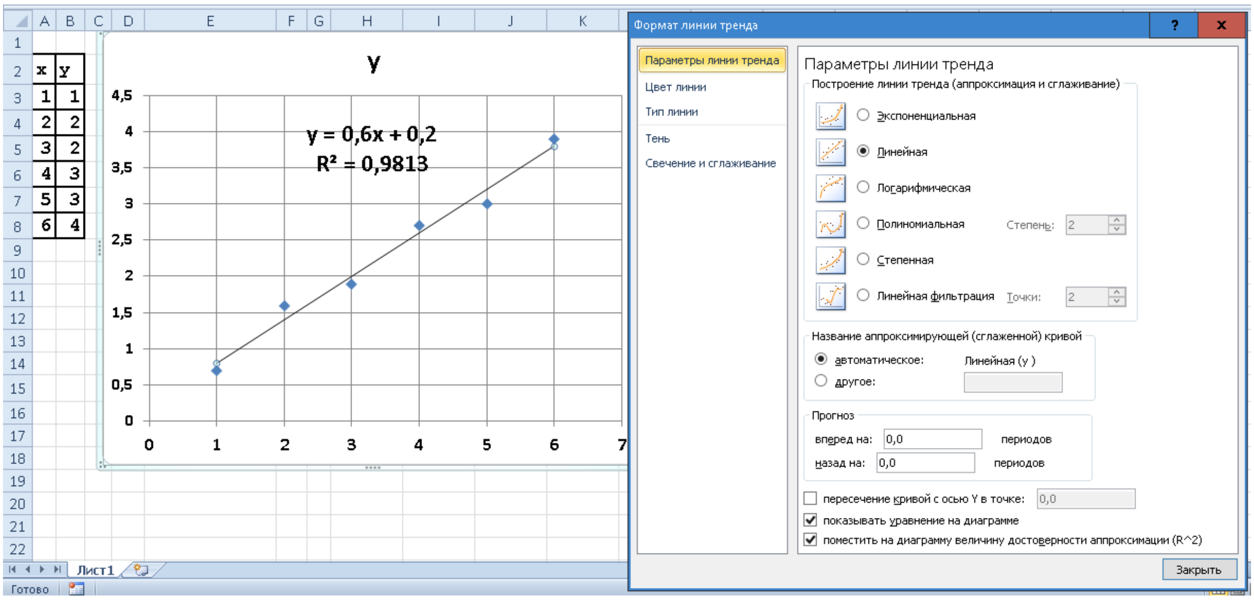


Рис.3.13. Построение линии тренда

Отметим, что Excel предлагает в качестве аппроксимирующих функций не только прямую («Линейная»), но и экспоненту (e^x, «Экспоненциальная»), логарифмическую функцию (ln$x$), полиномиальную ($a_0x^n + a_1x^{n\text{-}1} + \ldots + a_n$) с показателем максимальной степени до 6, степенную (a^x). Кроме того, установив флажки «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)», можно вывести на диаграмму как уравнение аппроксимирующей линии, так и ее среднеквадратичное отклонение от исходных данных. Наилучшее приближение, когда R^2 близко к единице (больше 0,95).

Построение эмпирических формул

Эмпирические формулы служат для аналитического представления опытных данных. Пусть имеются какие-то данные, полученные опытным путем (в ходе эксперимента или наблюдения) $y_1(x_1), \ldots.\ y_n(x_n)$. На основе этих данных требуется подобрать функцию $y=f(x_i)$, которая наилучшим образом сглаживала бы экспериментальную зависимость между переменными и по возможности точно отражала общую тенденцию зависимости между x и y, исключая погрешности измерений и случайные отклонения.

Этапы построения эмпирических формул:

I. устанавливают вид экспериментальной зависимости и, соответственно, вид эмпирической формулы;

II. определяют численные значения неизвестных параметров выбранной эмпирической формулы, при которых приближение к заданной функции оказывается наилучшим.

Определение вида приближенного уравнения регрессии

Вид формулы подбирают, исходя из теоретических соображений, физического смысла, либо выбирают функциональную зависимость из числа наиболее простых, сравнивая их графики с графиком заданной функции.

1. Линейная функция $\boldsymbol{y=a+bx}$ обычно применяется, когда экспериментальные данные возрастают или убывают с постоянной скоростью.

2. Гиперболическая $\boldsymbol{y=a+b/x}$ применяется, когда зависимость обратно пропорциональная.

3. Полиномиальная используется для описания экспериментальных данных, попеременно возрастающих и убывающих. Степень полинома определяется количеством экстремумов (максимумов или минимумов) кривой. Так, полином второй степени может описать только один максимум или минимум, полином третьей степени может иметь один или два экстремума, четвертой степени – не более трех экстремумов.

4. Степенная используется для экспериментальных данных с постоянно увеличивающейся (или убывающей) скоростью роста.

5. Экспоненциальная применяется описания экспериментальных данных, которые быстро растут или убывают, а затем постепенно стабилизируются. Часто ее использование вытекает из теоретических соображений.

6. Логарифмическая применяется описания экспериментальных данных, которые вначале быстро растут или убывают, а затем постепенно стабилизируются.

Приведение зависимостей к линейному виду (линеаризация)

Для нахождения коэффициентов линейной функции разработан метод наименьших квадратов. Он реализован во многих вычислительных пакетах. Поэтому, чтобы воспользоваться этими возможностями, искомую зависимость требуется привести к линейному виду (линеаризовать)

Основные приемы: логарифмирование, введение новых переменных.

$y=ae^{bx}$;	$\ln y=\ln (ae^{bx})=\ln a+bx$	$y'=\ln y,\ a'=\ln a \rightarrow a=exp(a')$
$y=ax^{b}$;	$\ln y=\ln (ax^{b})=\ln a+b\ln x$	$x'=\ln x,\ y'=\ln y,\ a'=\ln a$
$y=ab^{x}$;	$\ln y=\ln a+x\ln b$;	$y'=\ln y,\ a'=\ln a,\ b'=\ln b$
$y=a+bx^{n}$, *n-фиксировано,*		$x'=x^{n}$
$y=1/(a+bx)$;	$1/y=a+bx$	$y'=1/y$
$y=a+b/x$;	$y=a+b(1/x)$	$x'=1/x$
	$yx=ax+b$, *если x мало*	
$y=x/(a+bx)$;	$1/y=b+a(1/x)$; $x/y=a+bx$;	
	$y/x=(1/a)-(b/a)y$	

Тема 3.3. Оптимизация

Многие проблемы производства, проектирования, прогнозирования сводятся к широкому классу задач оптимизации. *Оптимизация* – это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Постановка задачи оптимизации предполагает наличие *объекта оптимизации*. Задача оптимизации возникает, когда задача имеет множество решений. Оптимальное решение – это наилучшее. Но решения, наилучшего во всех смыслах, быть не может. Постановка задачи оптимизации предполагает существование конкурирующих свойств процесса, например:

- количество продукции - расход сырья
- количество продукции - качество продукции.

Принимающий решение должен точно представлять, в чем заключается оптимальность решения, т.е. по какому критерию (от греч. criterion – мерило, оценка) принимаемое решение должно быть оптимально. В общем случае, с помощью критерия можно оценивать качества как желательные (например, прибыль, производительность, надежность), так и нежелательные (затраты, расход материала, простои оборудования). Тогда в первом случае стремятся к максимизации критерия, а во втором – к его минимизации.

Работа по решению оптимизационной задачи начинается с построения математической задачи, для чего необходимо ответить на следующие вопросы:

- каковы переменные модели (для определения каких величин строится модель)?
- в чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
- каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные? Следует учитывать, что многие величины по своему физическому смыслу не могут быть отрицательными.

Таким образом, задачу оптимизации можно кратко сформулировать: найти значение оптимизирующих факторов, соответствующих экстремуму (min, max) целевой функции (критерия оптимальности) с учетом ограничений.

В общем виде задачи оптимизации математически формулируются следующим образом: имеется некая целевая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, на аргументы которой наложен ряд ограничений $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i$, где число ограничений $i = 1 \ldots m$. Требуется найти такие значения аргументов (в рамках ограничений), для которых целевая функция принимает максимальное (минимальное или заданное) значение.

В Excel для решения задач оптимизации используется надстройка «Поиск решения». Кнопка расположена на вкладке **Данные**. Если она на указанной вкладке отсутствует, то вывести ее можно следующим образом: в диалоговом окне «Параметры» (**Файл>Параметры**) выбрать категорию «Надстройки» и в поле «Управление» выбрать значение «Надстройки» (установлено по умолчанию), а затем нажать кнопку «Перейти». В открывшемся окне «Надстройки» установить флажок напротив «Поиск решения» (рис. 3.14).

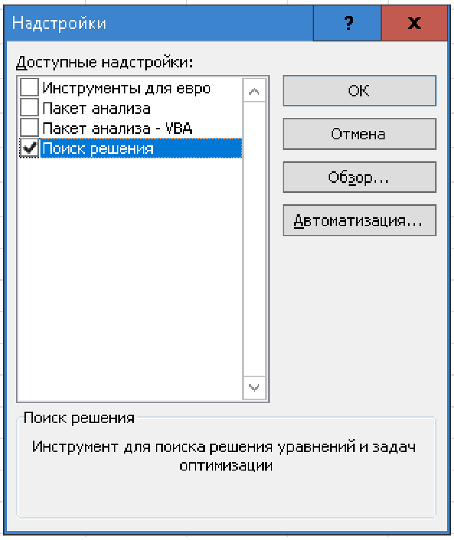


Рис. 3.14. Установка надстройки «Поиск решения»

Решение задач с помощью надстройки Поиск решения

1. Необходимо предварительно подготовить рабочий лист Excel, разместив исходные данные:

- выбрать место для значений переменных;
- ввести формулу для целевой функции;
- ввести ограничения и формулы, описывающие зависимости между переменными.

2. Вызвать **Данные>Поиск решения** и заполнить элементы окна диалога:

- в поле ввода «Оптимизировать целевую функцию» указать ячейку, содержащую целевую функцию;
- выбрать один из трех переключателей для целевой функции (Равной максимальному, минимальному или заданному значению);
- в поле ввода «Изменяя ячейки переменных» указать ячейки, которые должны изменяться в процессе поиска решения задачи, т.е. ячейки, где находятся переменные.
- добавить ограничения с помощью кнопки **Добавить.**

3. Нажать кнопку **Найти решение**.

Сформулируем типичную задачу оптимизации – определение оптимального ассортимента продукции. Пусть предприятие изготавливает четыре вида продукции: П1, П2, П3 и П4. Для производства продукции используются ресурсы: трудовые, материальные, финансовые. Максимальный запас этих ресурсов, приведенный к неким безразмерным денежным единицам, расход ресурсов на единицу производства продукции каждого вида представлены в таблице 3.1:

Таблица 3.1

Распределение ресурсов

Ресурсы	Расход на единицу продукции				Запас
	П1	П2	П3	П4	
Трудовые	8	3	4	4	800
Материальные	7	8	12	10	2000
Финансовые	15	14	13	14	2900
Минимальное выпускаемое количество	12		3		
Максимальное выпускаемое количество	30	25			

Максимальное и минимальное выпускаемое количество некоторых видов продукции может быть вызвано как требованиями рынка, так и госзаказом.

Прибыль от реализации единицы каждого вида продукции равна 8, 10, 7 и 8 денежных единиц соответственно.

Задача состоит в том, чтобы определить, какое количество каждого вида продукции нужно производить, чтобы обеспечить максимальную прибыль.

Математическая модель поставленной задачи имеет вид:

- Обозначим количество производимой продукции каждого вида x_1, x_2, x_3 и x_4.
- Получаемая прибыль (целевая функция) описывается выражением:

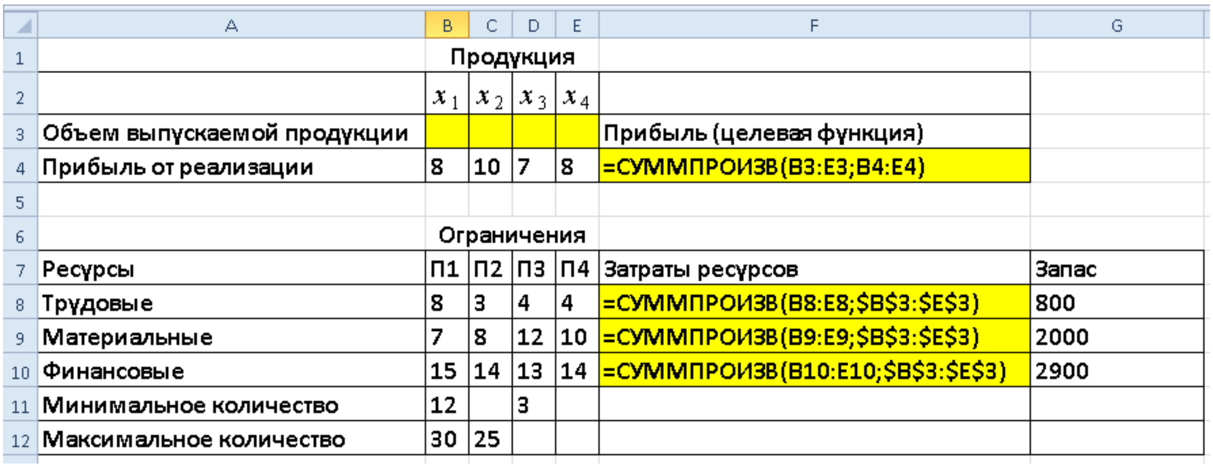
$$\text{Прибыль} = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 8x_4$$

- В связи с ограниченностью ресурсов и требованием к выпускаемому количеству должны выполняться следующие ограничения:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 800, \\ 7x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 \leq 2000, \\ 15x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 14x_4 \leq 2900, \\ 12 \leq x_1 \leq 30, \\ 0 \leq x_2 \leq 25, \\ x_3 \geq 3, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку речь идет о выпускаемой продукции, то все значения переменных x_i должны быть неотрицательными.

Создадим на листе Excel таблицу, в которую введем исходные данные (рис. 3.15).



	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукция					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции					Прибыль (целевая функция)	
4	Прибыль от реализации	8	10	7	8	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)	
5							
6		Ограничения					
7	Ресурсы	П1	П2	П3	П4	Затраты ресурсов	Запас
8	Трудовые	8	3	4	4	=СУММПРОИЗВ(B8:E8;$B$3:$E$3)	800
9	Материальные	7	8	12	10	=СУММПРОИЗВ(B9:E9;$B$3:$E$3)	2000
10	Финансовые	15	14	13	14	=СУММПРОИЗВ(B10:E10;$B$3:$E$3)	2900
11	Минимальное количество	12		3			
12	Максимальное количество	30	25				

Рис. 3.15. Лист Excel с исходными данными

Здесь в ячейках B3:E3, выделенных цветом, будут располагаться найденные в ходе решения значения количества производимой продукции. С ними связаны ячейки, в которых записаны выражения для целевой функции (ячейка F4) и расхода ресурсов (ячейки F8:F10).

В группе «Анализ» вкладки «Данные» выберем «Поиск решения». Откроется окно диалога «Параметры поиска решения», в котором установим следующие параметры:

- в поле «Оптимизировать целевую функцию» устанавливаем «Максимум» и адрес целевой ячейки F4;
- в поле «Изменяя ячейки переменных» указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных B3:E3;
- в области «В соответствии с ограничениями» нажимаем кнопку «Добавить» для размещения ограничений. Откроется окно диалога (рис.3.16):

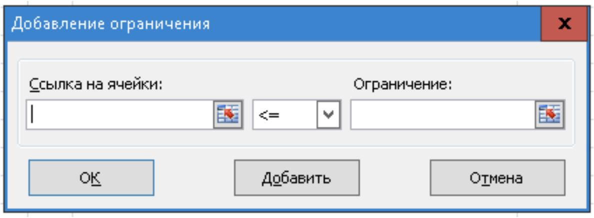


Рис. 3.16. Добавление ограничений

В левом поле вводим адрес ячейки с расходом ресурса (например, F8), в среднем – характер ограничения (≥, =, ≤), а в правом – либо непосредственно величину ограничения, либо ссылку на ячейку, в которой эта величина содержится (в нашем случае G8). Проделываем эту процедуру (нажимая кнопку «Добавить» в этом окне) со всеми имеющимися в задаче ограничениями, включая ограничение $x_i \geq 0$. В результате получаем (рис. 3.17). При решении задач оптимизации часто, исходя из практического смысла, на переменные накладывается условие целочисленности. Это условие задается в окне «Добавление ограничения» в центральном поле.

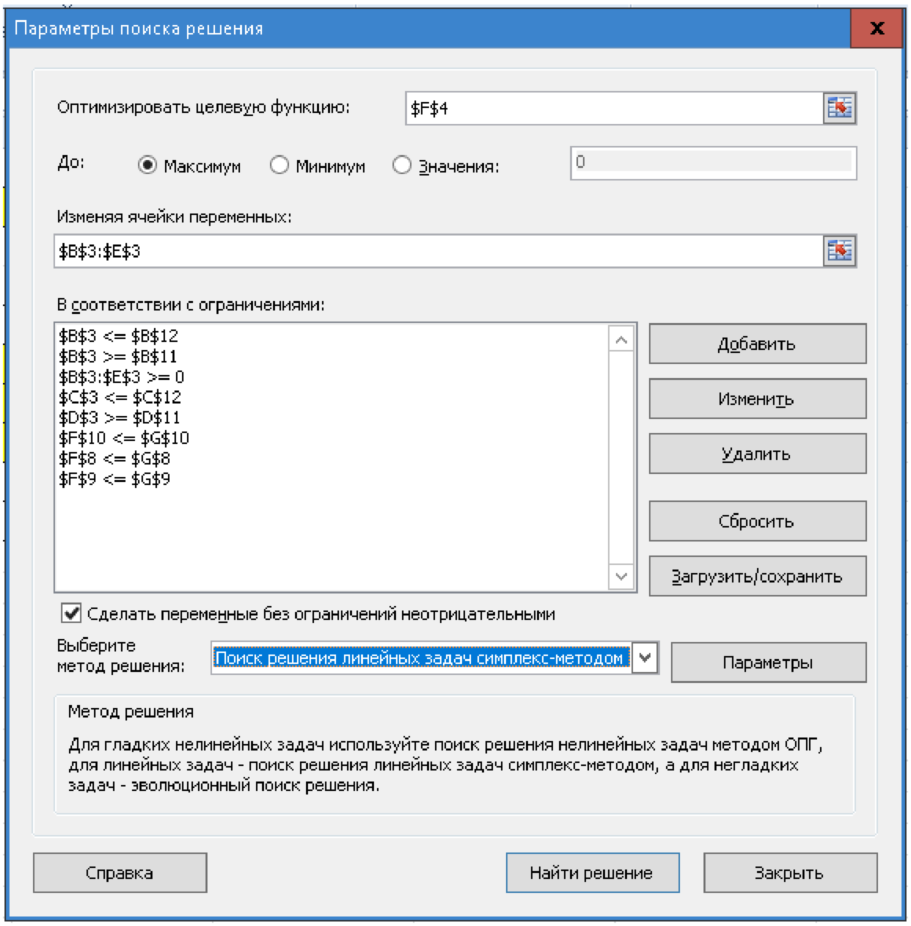


Рис. 3.17. Параметры поиска решения

После чего можно нажать кнопку «Найти решение». В результате получаем следующий результат (рис.3.18):

	A	B	C	D	E	F	G
1			Продукция				
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции	12,00	25,00	3,00	154,25	Прибыль (целевая функция)	
4	Прибыль от реализации	8	10	7	8	1601	
5							
6			Ограничения				
7	Ресурсы	П1	П2	П3	П4	Затраты ресурсов	Запас
8	Трудовые	8	3	4	4	800	800
9	Материальные	7	8	12	10	1862,5	2000
10	Финансовые	15	14	13	14	2728,5	2900
11	Минимальное количество	12		3			
12	Максимальное количество	30	25				

Рис. 3.18. Результаты решения

Тема 3.4. Электронные базы данных. Обработка данных в таблицах (списки)

MS Excel содержит широкий набор средств для работы с таблицами как с базами данных. В общем смысле термин база данных можно применить к любой совокупности связанной информации, объединенной вместе по определенному признаку. Основным назначением баз данных является хранение и быстрый поиск содержащейся в ней информации.

В MS Excel базы данных размещаются в таблицах. Каждая таблица состоит из строк и столбцов, которые в базах данных называют *записями* и *полями*. Информация в базах данных имеет постоянную структуру. Каждую строку можно рассматривать как единичную запись. Информация в пределах каждой записи содержится в полях.

Таблицы (в предыдущих версиях Excel они назывались *списками*) должны удовлетворять определенным требованиям:

- Нельзя включать в список пустые строки и столбцы.
- Для заголовков столбцов использовать одну строку в шапке.
- Каждый столбец должен содержать информацию одного типа. Например, в списке сотрудников отвести один столбец для фамилии, второй для имени и т.д.

В MS Excel 2010 есть команда **Вставка>Таблица**, по которой указанный диапазон ячеек оформляется как прямоугольная таблица со строкой заголовка. После создания таблицы становится доступен набор инструментов **Работа с таблицами** с вкладкой **Конструктор**. С помощью инструментов на вкладке **Конструктор** можно настраивать и изменять таблицу. Вкладка **Конструктор** видна лишь в том случае, если в таблице выбрана какая-нибудь ячейка.

Работа с подготовленным списком может осуществляться по трем направлениям:

- сортировка – выстраивание данных в нужном порядке;
- отбор данных – извлечение записей данных из списка в соответствии с некоторыми требованиями (критериями);
- анализ данных – обработка различными средствами информации, находящейся в списке или отфильтрованных данных.

Сортировка

Для быстрой сортировки по одному поля следует поставить курсор в любую ячейку этого поля и нажать кнопку **Данные>Сортировка и фильтр>** (по возрастанию) или (по убыванию) (рис. 3.19). Эти же команды находятся на вкладке **Главная >Сортировка и фильтр**.

Для настраиваемой сортировки нажать кнопку **Сортировка и фильтр.**

Появится окно диалога (рис. 3.20), в котором можно выбрать заголовок столбца, по которому нужно отсортировать список. Можно добавить еще уровни сортировки и порядок.

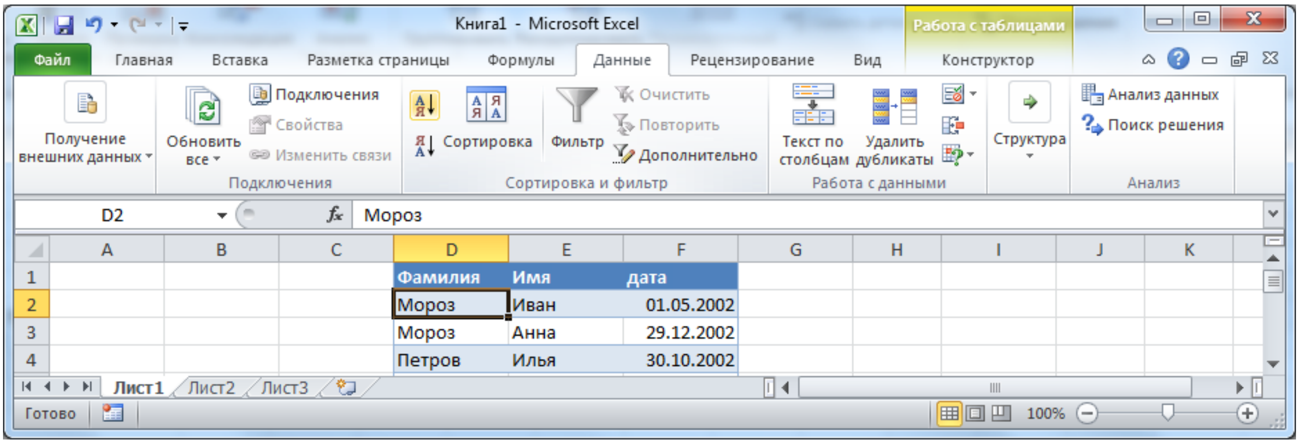


Рис. 3.19. Сортировка таблиц

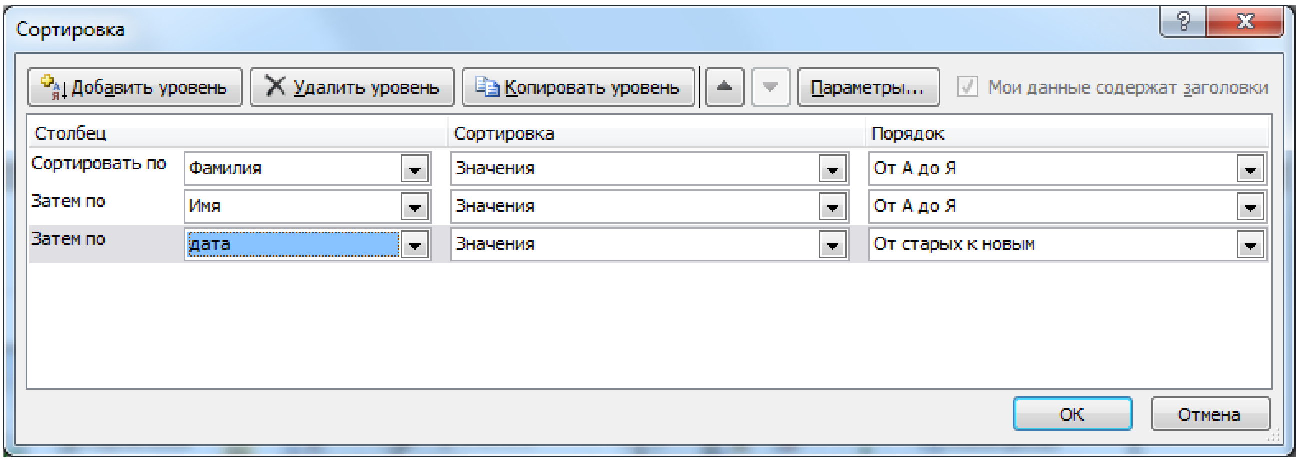


Рис. 3.20. Окно диалога «Сортировка»

Отбор (фильтрация) данных

С помощью фильтрации данных на листе можно быстро находить нужные значения. Выполнять фильтрацию можно по одному или нескольким столбцам данных. Можно выполнять фильтрацию на основе выбранных в списке параметров или создавать специальные фильтры, чтобы сконцентрироваться на необходимых данных.

Отфильтровать список - значит скрыть все строки за исключением тех, которые удовлетворяют заданным условиям отбора. Excel предоставляет две команды: **Фильтр** (Автофильтр) - для простых условий отбора и **Дополнительно** (Расширенный фильтр) - для более сложных критериев.

Нажать кнопку Фильтр. Excel выведет кнопки со стрелками (кнопки автофильтра) рядом с каждым заголовком столбца. Щелчок по кнопке со стрелкой рядом с заголовком столбца раскрывает список значений, которые можно использовать для задания условий отбора строк (рис. 3.21). Предусмотрены разные фильтры для отбора текстовых, числовых данных и данных типа «Дата и время».

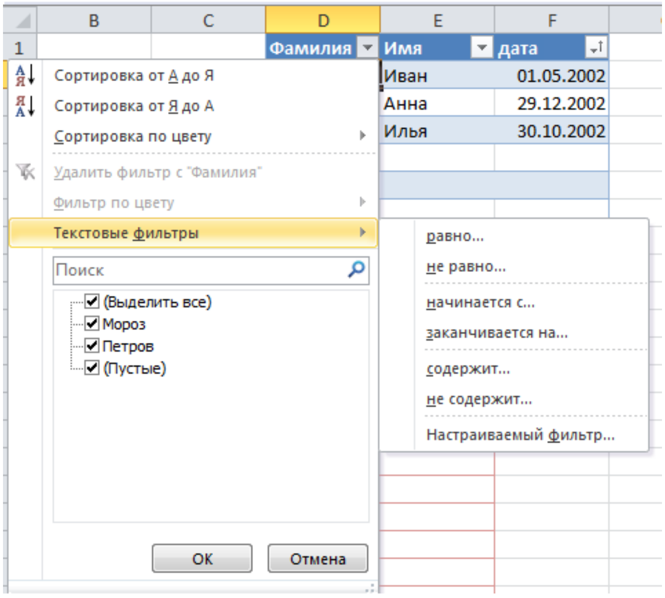


Рис. 3.21. Окно диалога «Сортировка»

Если нужно отобранные строки скопировать в другую часть рабочего листа или в другой лист, то рекомендуется использовать команду **Дополнительно** Расширенный фильтр. В отличие от команды **Фильтр** она позволяет задать несколько условий для конкретного столбца с использованием логического оператора ИЛИ, а также задать условия с этим логическим оператором для нескольких столбцов. Можно задать вычисляемые условия.

Анализ табличных данных

- Автоматическое подведение итогов.
- Консолидация.
- Сводные таблицы.

С помощью команды **Промежуточные итоги** можно автоматически подсчитать промежуточные и общие итоги в списке для столбца.

Чтобы подвести итоги и составить отчет по результатам нескольких листов, можно консолидировать данные из отдельных листов на основном листе. Листы могут находиться в той же книге, что и основной лист, или в других книгах. При консолидации данных они компонуются так, что их становится проще обновлять и обобщать на регулярной основе или при необходимости.

Сводная таблица является специальным типом таблицы, которая суммирует информацию из конкретных полей списка.

Отчет сводной таблицы представляет собой интерактивный метод быстрого обобщения больших объемов данных. Отчет сводной таблицы используется для обобщения, анализа, изучения и представления итоговых данных, а отчет сводной диаграммы — для наглядного отображения итоговых данных в отчете сводной таблицы и упрощения поиска сравнений, закономерностей и тенденций. Отчеты сводной таблицы и сводной диаграммы позволяют принимать более обоснованные решения относительно важных данных организации.

Тема 3.5. Макросы

Для автоматизации часто выполняемых в Microsoft Excel задач можно записать макрос. Макрос представляет собой действие (или набор действий), которое можно выполнять любое количество раз. При создании макроса записываются щелчки мышью и нажатия клавиш. После создания макроса его можно отредактировать, чтобы изменить выполняемые им действия.

Для работы с макросами предназначена вкладка **Разработчик** (рис. 3.22).

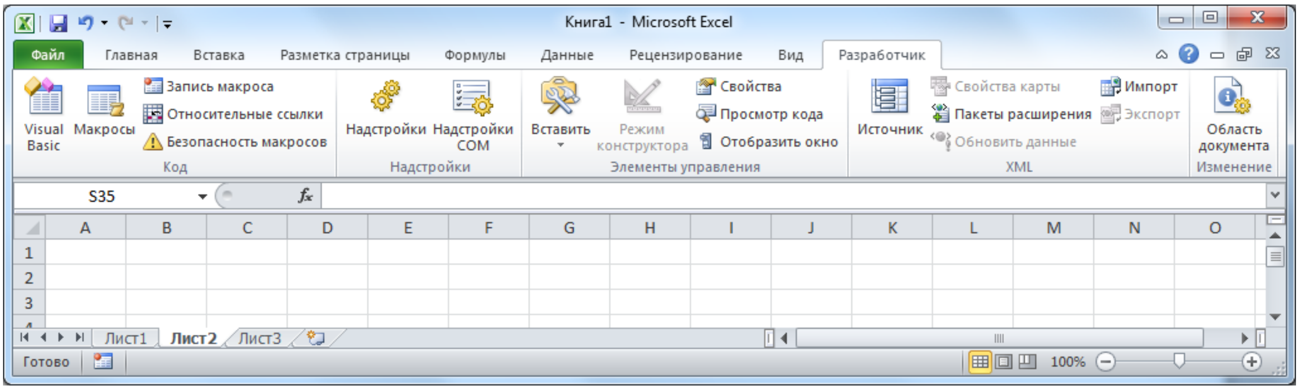


Рис. 3.22. Вкладка ленты **Разработчик**

Запись макроса

В группе **Код** на вкладке **Разработчик** щелкните элемент **Записать макрос** (рис. 3.23). Следует иметь в виду, что если мы хотим, чтобы действия в макросах записывались относительно ячейки, где находится курсор, то необходимо предварительно нажать кнопку «Относительные ссылки».

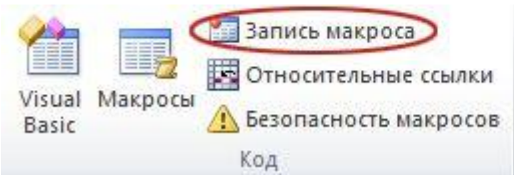


Рис. 3.23. Кнопка «Запись макроса»

Появится окно диалога «Запись макроса» (рис3.24). В этом окне следует ввести имя макроса, местоположение макроса, можно задать сочетание клавиш, а также дать краткое описание макроса.

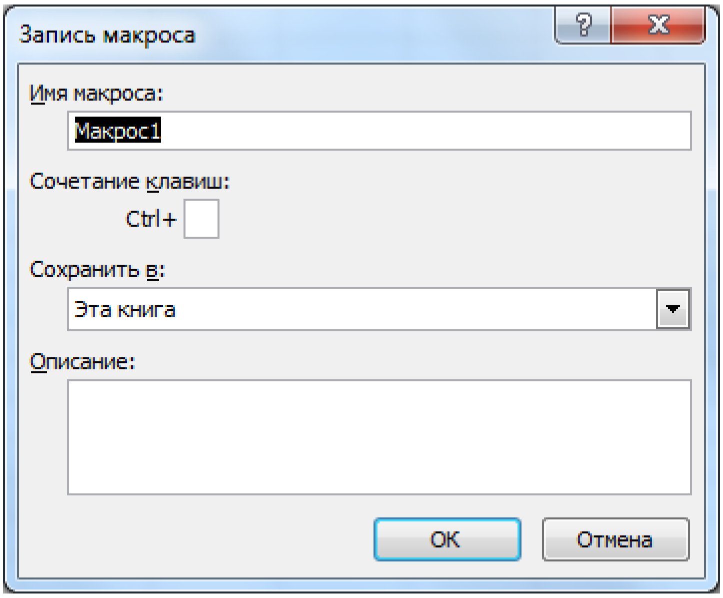


Рис. 3.24. Окно диалога «Запись макроса»

Выполните на листе какие-либо действия, например, введите текст, выделите столбцы или строки или введите какие-либо данные. В группе **Код** на вкладке **Разработчик** нажмите кнопку **Остановить запись** (рис.3.24).

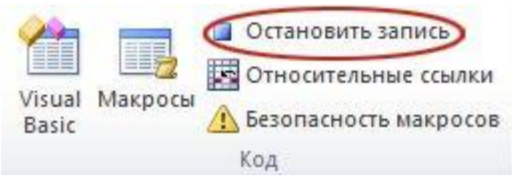


Рис. 3.24. Кнопка «Остановить запись»

Выполнение макроса

Макрос можно выполнить с помощью команды **Макросы** на ленте (группа **Код** на вкладке **Разработчик**). В зависимости от назначенного способа запуска макросы можно также запускать с помощью с клавишей CTRL либо кнопки на панели быстрого доступа или в настраиваемой группе на ленте, а также по щелчку области графического объекта или элемента управления. Кроме того, макросы можно запускать автоматически при открытии книги.

Чтобы назначить макрос графическому объекту, следует щелкнуть по объекту правой клавишей мыши и в контекстном меню выбрать команду «Назначить макрос». В окне диалога выбрать нужный макрос.

Тема 3.6. Финансово-экономические расчеты

Понятие сложного процента. Финансовые ресурсы, полученные из внешних источников, требуется оплачивать. При вложении финансовых ресурсов в банк, банк оплачивает вкладчику оговоренный в договоре процент от вложенной суммы и, наоборот, кредитополучатель, взявший кредит в банке, через определенные договором периода возвращает не только основной долг, но и проценты по нему.

Как правило, банк устанавливает процентные выплаты за определенный период. Если периодов несколько, а начисленный процент вкладчиком не изымается, то на него начисляется процент. Проценты начисляются по схеме сложного процента.

Пример. Пусть на банковский вклад 1000 рублей на протяжении пяти лет начисляются 10% годовых. Определить сумму, полученную по истечении срока вклада.

1000 + 10%*1000 = 1100 руб.

1100 + 10%*1100 = 1210 руб.

1210 + 10%*1210 = 1331 руб.

1331 + 10%*1331 = 1464,1 руб.

1464,1 + 10%*1464,1 = 1610,51 руб.

В общем виде формула вычислений в соответствии с правилом сложного процента выглядит следующим образом:

$$S = V\cdot(1 + p)^N,$$

где S – начисленная сумма, V – вклад, p – банковский процент, N – количество периодов.

Таким образом, стоимость суммы 1000 руб., взятой банком у вкладчика на пять лет, оказалась для банка равной 610,51 руб., а вернуть в сумме банку пришлось 1610,51 руб.

Отсюда следует вывод: 1000 рублей сегодня равны 1610,51 рубля через пять лет. Иначе чистая приведенная (к сегодняшнему дню) стоимость 1610,51 руб. через пять лет равна 1000 рублей сегодня. Смысл понятия «чистая приведенная стоимость» состоит в приведении к сегодняшнему дню стоимости финансовых ресурсов, запланированных к выплатам в заданные периоды в будущем. Величина V является чистой приведенной стоимостью величины S и вычисляется по формуле $V = S/(1 + p)^N$.

Финансовые функции Excel

Функция БС. Для определения будущей стоимости сделанной инвестиции (банковского вклада) через заданной количество периодов при постоянной банковской ставке используется **функция БС**. В приведенном выше примере для вычисления будущей стоимости 1000 рублей при процентной ставке 10% по истечению 5 лет следует в ячейке с помощью кнопки «Вставить функцию» вызвать окно ввода финансовой функции БС и ввести исходные данные (рис. 3.25):

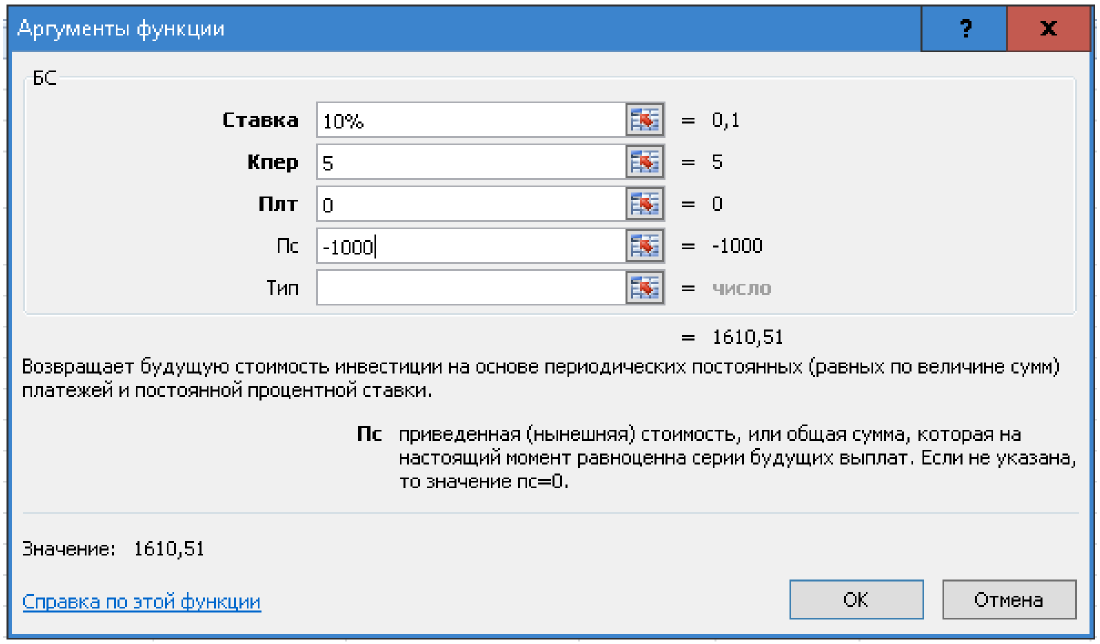


Рис. 3.25. Аргументы функции БС

Здесь аргумент «Ставка» означает величину ставки в процентах, по которой вносится инвестиция, «Кпер» - количество периодов, «Плт» - величину платежа за каждый период, «Пс» – сумма инвестиции, «Тип» - 0 (или отсутствие данных) означает, что выплаты в конце каждого периода, 1 – в начале. Отметим, что во всех финансовых функциях используется следующий принцип: если инвестор вносит деньги, то сумма берется со знаком «минус», если получает, то со знаком «плюс». Поэтому величина 1000 руб. в графе «Пс» записана со знаком «минус».

Функция ЧПС определяет величину чистой приведенной стоимости заранее известных выплат.

Пример. Компания приобретает теплообменник за 40000 рублей. Известно, что его эксплуатация приведет к экономии энергоресурсов: в первый и второй годы по 7000 руб., а в последующие годы по 5500 руб. ежегодно. Требуется определить срок окупаемости теплообменника.

На лист Excel внесем в одну колонку исходные данные, а во вторую – величину чистой приведенной стоимости выплат за прошедший период и добавим со знаком «минус» стоимость инвестиции, получив тем самым текущую стоимость инвестиции (рис. 3.26):

	A	B	G	H
10		0,1		
11	Номер периода	%	ЧПС	Остаточная стоимость
12	0	-40000		-40000
13	1	7000	=ЧПС($B$10;$B$13:B13)	=ЧПС($B$10;$B$13:B13)+$H$12
14	2	7000	=ЧПС($B$10;$B$13:B14)	=ЧПС($B$10;$B$13:B14)+$H$12
15	3	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B15)	=ЧПС($B$10;$B$13:B15)+$H$12
16	4	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B16)	=ЧПС($B$10;$B$13:B16)+$H$12
17	5	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B17)	=ЧПС($B$10;$B$13:B17)+$H$12
18	6	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B18)	=ЧПС($B$10;$B$13:B18)+$H$12
19	7	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B19)	=ЧПС($B$10;$B$13:B19)+$H$12

Рис. 3.26. Использование функции ЧПС

Здесь в первой колонке записан номер периода, во второй – сумма выплат (экономии), в третьей – чистая приведенная стоимость выплат, сделанных до данного периода, в последней – остаточная стоимость. Телообменник окупается тогда, когда остаточная стоимость становится положительной.

В числах эта запись выглядит следующим образом (рис.3.27):

	A	B	G	H
10		10%		
11	Номер период	%	ЧПС	Остаточная стоимость
12	0	-40000		-40 000,00р.
13	1	7000	6 363,64 ₽	-33 636,36р.
14	2	7000	12 148,76 ₽	-27 851,24р.
15	3	5500	16 280,99 ₽	-23 719,01р.
16	4	5500	20 037,57 ₽	-19 962,43р.
17	5	5500	23 452,63 ₽	-16 547,37р.
18	6	5500	26 557,24 ₽	-13 442,76р.
19	7	5500	29 379,61 ₽	-10 620,39р.
20	8	5500	31 945,40 ₽	-8 054,60р.
21	9	5500	34 277,94 ₽	-5 722,06р.
22	10	5500	36 398,42 ₽	-3 601,58р.
23	11	5500	38 326,14 ₽	-1 673,86р.
24	12	5500	40 078,61 ₽	78,61р.
25	13	5500	41 671,76 ₽	1 671,76р.
26	14	5500	43 120,09 ₽	3 120,09р.
27	15	5500	44 436,74 ₽	4 436,74р.
28	16	5500	45 633,70 ₽	5 633,70р.
29	17	5500	46 721,85 ₽	6 721,85р.
30	18	5500	47 711,07 ₽	7 711,07р.
31	19	5500	48 610,37 ₽	8 610,37р.
32	20	5500	49 427,91 ₽	9 427,91р.
33		73000		

Рис. 3.27. Определение чистой приведенной стоимости и срока окупаемости

Как видно, общая сумма полученных выплат (экономии) за все 20 лет равна 73000 рублей, а их чистая приведенная стоимость равна 49427,91 руб. В результате обесценения денег теплообменник стоимостью 40000 руб. окупается через 12 лет, когда общая сумма выплат номинально равна 69000 руб., а их чистая приведенная стоимость превышает 40000 руб. на 78,61 руб.

Функция ВСД. Функция **ВСД** в Excel используется для расчета внутренней ставки доходности на основе имеющихся числовых данных о финансовых потоках, принимаемых в качестве первого аргумента, и возвращает соответствующее приближенное значение. Внутренняя ставка доходности представляет собой такое значение процентной ставки, при которой стоимость всех финансовых потоков будет равна 0 (нулю), то есть инвестор сможет возместить свои убытки, связанные с финансированием инвестиционного проекта, но без получения какой-либо прибыли.

*Пример***.** Строительной компании требуется автокран стоимостью 65000 рублей. Стоимость аренды автокрана у другой компании составляет 9700 рублей в год, а срок полезного использования составляет 10 лет, по истечению которых остаточная стоимость автокрана составит всего 12000 рублей, а он возвращается в собственность арендодателю. Альтернативным вариантом является привлечение стороннего капитала со ставкой 15% годовых. Какой вариант более выгодный?

Заполнение таблицы (рис. 3.28) финансовых потоков и вычисление внутренней ставки доходности (формула в ячейке D14 имеет вид =ВСД(D2:D12)) показывает, что она равна 12% – ниже 15%, т.е. аренда выгоднее, чем приобретение за счет кредита. Диапазон ячеек, передаваемых в качестве аргумента, должен содержать не менее одного отрицательного и одного положительного чисел.

	A	B	C	D
1	**Период**	**Цена**	**Отчисления**	**Финансовые потоки**
2	Договор	65000	9700	55300
3	1-й год		9700	-9700
4	2-й год		9700	-9700
5	3-й год		9700	-9700
6	4-й год		9700	-9700
7	5-й год		9700	-9700
8	6-й год		9700	-9700
9	7-й год		9700	-9700
10	8-й год		9700	-9700
11	9-й год		9700	-9700
12	10-й год	-12000		-12000
13				
14				**12%**

Рис. 3.28. Расчет внутренней ставки доходности

Функция ПЛТ в Excel используется для расчета фиксированного значения суммы периодических взносов для выплат задолженностей при условии, что процентная ставка является постоянной величиной.

Пример. Взят ипотечный кредит для покупки квартиры стоимостью 100000 руб. Начальный взнос за счет собственных средств составил 20% стоимости квартиры, остальное банковский кредит со ставкой 14%. Срок кредита 15 лет, выплаты производятся ежемесячно. Требуется определить сумму ежемесячных выплат, если они являются равномерными, т.е. кредит взят на условиях аннуитета.

Вносим на лист Excel начальные данные (рис. 3.29):

	A	B
1		**ПЛТ()**
2	Ипотека	100000
3	Срок	15
4	Начальный взнос	0,2
5	Периодичность	12
6	Ставка	0,14
7	Ежемесячные выплаты	=ПЛТ(B6/12;B5*B3;B2*(1-B4))

Рис. 3.29. Расчет ежемесячных выплат

В ячейке B7 в функции ПЛТ внесены следующие аргументы:

- B6/12 – месячная ставка по кредиту, т. к. выплаты производятся ежемесячно, а в ячейке B6 внесена годовая ставка;
- B5*B3 означает количество периодов выплат, т.к. в ячейке B3 указано количество лет, а выплаты помесячно, т.е. необходимо внести количество месяцев;
- B2*(1-B4) означает сумму кредита, т.к. часть стоимости квартиры (20%) покупатель внес из собственных средств и только 80% стоимости оплатил из кредитных средств.

Функция ОСПЛТ определяет величину платежа, направленного на погашение основного долга при кредите в форме аннуитета. Так как суммарный платеж в этом случае остается постоянным (его вычисляет функция ПЛТ), то ясно, что оплата основного долга должна при этом возрастать, а процентные выплаты – падать. Пример расчета выплат основного долга по тому же кредиту, что и в предыдущем примере, показан на рис. 3.30 для периодов под номерами 1; 10; 100; 179 и 180:

	A	B	C
1		**ПЛТ()**	**ОСПЛТ()**
2	Ипотека	100000	=ОСПЛТ(B6/12;1;180;80000)
3	Срок	15	=ОСПЛТ(B6/12;10;180;80000)
4	Начальный взнос	0,2	=ОСПЛТ(B6/12;100;180;80000)
5	Периодичность	12	=ОСПЛТ(B6/12;179;180;80000)
6	Ставка	0,14	=ОСПЛТ(B6/12;180;180;80000)
7	Ежемесячные выплаты	=ПЛТ(B6/12;B5*B3;B2*(1-B4))	

Рис. 3.30. Расчет величины выплат в погашение основной суммы по кредиту

Смысл аргументов функции ОСПЛТ следующий:

- первый аргумент – ставка по кредиту за период (в данном примере – за месяц);
- второй– номер периода, за который производится выплата;
- третий – количество периодов;
- четвертый – сумма кредита.

В числах картина показана на рис. 3.31:

	A	B	C
1		ПЛТ()	ОСПЛТ()
2	Ипотека	100 000	-132,06 ₽
3	Срок	15	-146,59 ₽
4	іальный взнос	20%	-416,37 ₽
5	ериодичность	12	-1 040,96 ₽
6	Ставка	14%	-1 053,11 ₽
7	ıные выплаты	-1 065,39р.	

Рис. 3.31. Результаты вычислений с использованием функции ОСПЛТ

Все выплаты являются затратами и поэтому записываются со знаком «минус». Видно, что в начале выплат сумма платежа по основному долгу невелика и, следовательно, в сумме ежемесячных выплат основную часть составляют процентные выплаты.

В Excel существует эффективный механизм анализа влияния параметра на конечный результат, который называется «Таблица данных». Предположим, что планируется получение кредита в размере 100000 рублей на срок 3 года с ежемесячной выплатой процентов и основной суммы банку на условиях аннуитета (см. пример выше). Прежде чем взять кредит, необходимо проанализировать, как зависит величина выплат от процентной ставки. Для этого вначале выполним базовый расчет для ставки 12% и рядом заполним возможные значения процентной ставки (рис. 3.32):

	A	B	C	D	E	F
1	Сумма кредита	-100000				
2	Количество периодов	36				
3	Ставка	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16
4	Выплаты	=ПЛТ(B3/12;B2;B1)				

	A	B	C	D	E	F
1	Сумма кредита	-100000				
2	Количество периодов	36				
3	Ставка	12%	13%	14%	15%	16%
4	Выплаты	3 321,43 ₽				

Рис. 3.32. Расчет выплат

Для анализа возможных выплат необходимо выделить диапазон ячеек B3:F4, в котором находится тестовый расчет и возможные значения аргументы и функции и на вкладке «Данные» в группе «Работа с данными» в разделе «Анализ «что если»…» выбрать «Таблица данных», после чего в открывшемся окне диалога (рис.3.33) в первое поле ввести координаты ячейки, в которой находится переменная ставка B3, после чего таблица заполнится (рис. 3.34), что даст возможность провести необходимый анализ.

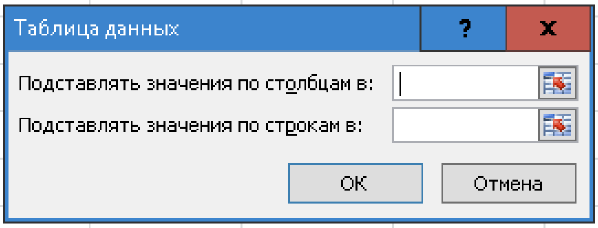


Рис. 3.33. Окно диалога «Таблицы данных»

	A	B	C	D	E	F
1	**Сумма кредита**	**-100000**				
2	Количество периодов	36				
3	Ставка	12%	13%	14%	15%	16%
4	Выплаты	3 321,43 ₽	3 369,40 ₽	3418	3467	3516

Рис. 3.34. Расчет выплат в зависимости от величины ставки

При наличии двух переменных (например, процентная ставка и количество периодов) можно построить таблицу с двумя переменными. Для этого предварительно выполняется тестовый расчет, его результат вносится в левую угловую ячейку таблицы, а по вертикали горизонтали от этой ячейки вносятся возможные значения переменных, например, представляет интерес выяснить, как изменяется величина выплат, если процентная ставка изменяется от 5% до 15%, а срок кредитования от двух до четырех лет:

В этом случае необходимо выделить диапазон B4:I10 и в окне диалога «Таблица данных» указать ячейки с переменными: количество периодов и ставка (рис. 3.35):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Сумма кредита	-100000							
2	Количество периодов	36							
3	Ставка	12%							
4	Выплаты	3 321,43 ₽	24	28	32	36	40	44	48
5		5%							
6		7%							
7		9%							
8		11%							
9		13%							
10		15%							
11									
12									
13									
14									
15									

Таблица данных ? ×

Подставлять значения по столбцам в: $B$2

Подставлять значения по строкам в: $B$3

ОК Отмена

Рис. 3.35. Расчет выплат в зависимости от ставки и количества периодов

Функция КПЕР определяет количество периодов, за которые инвестиции с известной ставкой доходности и равномерными выплатами полностью окупаются.

Пример. Сумма инвестиций 14 000 000, ежегодные выплаты по ним 12 000 000, банковская ставка на протяжении срока инвестиций постоянная и равна 3%. Количество периодов, за которые эти инвестиции полностью окупаются не равно 7 годам, так как чистая приведенная стоимость денег падает с каждым годом. Расчет производим с помощью функции КПЕР (рис.3.36). Первый аргумент функции КПЕР – банковская ставка, второй – выплаты в каждый период, а третий – объем инвестиций. Так как инвестиции – это затраты, то они берутся со знаком «минус».

	A	B
1	Объем инвестиций	140000000
2	Ежегодный доход	12000000
3	Ставка (дисконт)	0,03
4	Срок окупаемости	=КПЕР(B3;B2;-B1)

Рис. 3.36. Расчет срока окупаемости

В результате с учетом дисконтирования (чистой приведенной стоимости) инвестиции окупаются не за 13,5 года (140/12), а за 14,57 года при ставке 3%.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Лабораторная работа № 1. Ввод и редактирование данных в EXCEL

Цель работы: ознакомиться с интерфейсом программы Excel и основными приемами работы, научиться вводить данные различных типов и форматировать ячейки электронных таблиц.

Выполнение работы

1. Запустить программу MS Excel.
2. В ячейку A1 ввести свою фамилию, B1 – имя.
3. Изменить ширину столбцов A и B таким образом, чтобы фамилия и имя помещались целиком.
4. В ячейку C1 ввести текущую дату, в ячейку D1 – время начала занятий. Измените формат даты.
5. Ввести число 123; десятичную дробь 9,81; число в экспоненциальном формате $1{,}4 \cdot 10^5$.
6. На новом листе составить график дежурств. *Указание*. Номер по порядку и дни недели ввести как ряды данных, протягивая маркер заполнения (квадратик в правом нижнем углу выделенной ячейки). Чтобы закрасить ячейки, следует выделить их с нажатой клавишей Ctrl и выбрать на ленте цвет заливки. Переименовать лист, для этого выполнить двойной щелчок по ярлычку листа и набрать новое имя «График дежурств».

ГРАФИК ДЕЖУРСТВ

<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th rowspan="2">ФИО</th><th colspan="7">День недели</th></tr>
<tr><th>ПН</th><th>ВТ</th><th>СР</th><th>ЧТ</th><th>ПТ</th><th>СБ</th><th>ВС</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Петрович С.М.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="6">ВЫХОДНОЙ</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Сидоров В.И.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Воронова А.В.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Лущик В.В.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Мороз С.А.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Павлов А.В.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

7. На новом листе набрать и оформить таблицу «УЧЕБНЫЙ ПЛАН». Графу «ВСЕГО» вычислить, используя Автосумму для первой строки, затем с помощью маркера заполнения распространить формулу на весь столбец.

№ п/п	НАЗВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	Распределение по семестрам			ЧАСОВ			
					ВСЕГО	из них		
		Экзаменов	Зачетов	Контрольных работ		Лекций	Лаборатор-ных занятий	Практиче-ских занятий
1	Математика	1,2	3	1,2		154		152
2	Химия	1				52	16	
3	Физика	1,2				68	68	34
4	Информатика		1			34	34	

8. Заполнить последовательностями таблицы пересчета физических величин (по выбору):

Величина	**Единицы измерения старые**	**Ввести последовательности**
	новые	**Вычислить по формуле**
Скорость	км/час	от 0 до 100 с шагом 5
	м/с	вычислить
Длина	дюйм	от 0 до 40 с шагом 2
	сантиметр	1 дюйм = 2,54 см
Давление	атм техн.	от 0,5 до 6 с шагом 0,5
	Паскаль	1 атм=$9{,}80665 \cdot 10^4$ Па
Давление	мм рт.ст.	от 100 до 400 с шагом 20
	Паскаль	1 мм рт.ст.=133,32 Па
Температура	градус Фаренгейта	от 0 до 80 с шагом 4
	градус Цельсия	$t^{o}C = (t_{f} - 32^{o}F) \cdot 5/9$
Энергия	калория	от 1000 до 3000 с шагом 200
	Джоуль	1 кал=4,19 Дж
Мощность	лошадиная сила	от 0 до 100 с шагом 5
	Ватт	1 л. с. =735,49875 Вт
Объем нефти	Баррель	от 5000 до 10000 с шагом 500
	$м^3$	1 баррель нефтяной США = 0,15899 $м^3$
Объем памяти	килобайт	от 1000 до 10000 с шагом 500
	мегабайт	вычислить

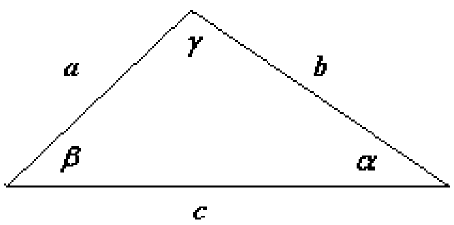
Контрольные вопросы

1. Назначение электронных таблиц.
2. Перечислите основные элементы интерфейса Excel.
3. Каким образом формируется адрес ячейки?
4. Как записываются числа в экспоненциальной форме?
5. Как ввести в ячейку дату, время?
6. Как ввести формулу?
7. Как ввести ряд данных?
8. Как изменить шрифт в ячейке?
9. Как установить перенос текста в ячейке?
10. Как объединить ячейки?

Лабораторная работа № 2. Работа с формулами и функциями

Выполнение работы

1. Рассчитать параметры треугольника по трем сторонам *a, b* и *c* по следующим формулам:



$$P = a + b + c$$

$$S = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)}$$

$$r = \frac{2S}{P} \quad R = \frac{abc}{4S} \quad \sin\alpha = \frac{2S}{bc}$$

где *P*– периметр треугольника, *S* – его площадь, *r* – радиус вписанной окружности, *R* – радиус описанной окружности.

Нарисовать треугольник и записать формулы, используя инструменты на вкладке ленты **Вставка**. Исходные данные и расчеты разместить в таблице.

Расчет треугольника по трем сторонам

<table>
<tr><td colspan="5">Исходные данные</td></tr>
<tr><td>a</td><td colspan="2">b</td><td colspan="2">c</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td colspan="5">Выполнение</td></tr>
<tr><td>P– периметр</td><td></td><td colspan="2">r – радиус вписанной окружности</td><td></td></tr>
<tr><td>S – площадь</td><td></td><td colspan="2">R – радиус описанной окружности</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Внутренние углы треугольника</td><td>в радианах</td><td>в градусах</td></tr>
<tr><td>sin α</td><td></td><td>α</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>sin β</td><td></td><td>β</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>sin γ</td><td></td><td>γ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Сумма внутренних углов треугольника</td><td></td><td></td></tr>
</table>

2. Вычислить математические выражения при заданных в ячейках параметрах (задания на выбор):

1) $z = \ln\left(y^{-\sqrt{|x|}}\right)\cdot\left(\sin x + e^{(x+y)}\right)$ при *x*= 4, *y*= 0,5. *Ответ: z= 123,7411.*

2) $y = \sqrt{1 + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2\cdot e^{\sin x})}}$ при *x*= π. *Ответ: y=1,6798.*

3) $y = \ln\left|\sin^2 x - \sqrt{\cos x}\right|$ при *x*= π/4. *Ответ: y= -1,0762.*

4) $y = \sqrt{\left|\dfrac{e^{2x} + \sqrt{x}}{\sin x - \arcsin x}\right|}$ при *x*= 0,4. *Ответ: y=5,1375.*

5) $f = \sqrt[3]{m\cdot \operatorname{tg} t + |c\cdot \sin t|}$ при *m* = 2, *c* = 4 и *t* = 0,5. *Ответ: f =1,4439.*

6) $y = e^{-bt}\sin(at+b) - \sqrt{|bt+a|}$ при *a* = 2, *b* = 4 и *t* = 0,7. *Ответ: y= -2,2379.*

7) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\left|\dfrac{x-\sin y}{x+\sin y} + \dfrac{x+\sin y}{x-\sin y}\right|}$ при *x*= 4, *y*= 0. *Ответ: z = 0,9553.*

8) $f = \sqrt{c\left(\sqrt{y} + x^2\right)}\cdot\left(\cos x - |c-y|\right)$ при *c* = 3, *y*= 4 и *x* = 1,5. *Ответ: f = -3,3181.*

3. Обработать экспериментальные данные испытаний ветроколеса в аэродинамической трубе:

№ опыта	Показания микроманометра		Скорость потока *u, м/с*	Параметры генератора ветроустановки			C_N
	l_0, *мм*	*l, мм*		*U, В*	*I, А*	*N, Вт*	
1	80	90		8,5	0,0037		
2	80	96		16	0,0072		
3	80	106		24,3	0,0105		

1) Скорость потока воздуха *u* измеряется с помощью микроманометра и вычисляется по формуле:

$$u = \sqrt{(l - l_0)\cdot 10^{-3}\cdot 2g\frac{\rho_ж}{\rho_в}\sin\alpha}$$

где l - l_0 – разность показаний микроманометра;

g =9,81 – ускорение свободного падения. Присвойте имя этой константе (Вкладка **Формулы**, кнопка «Присвоить имя»);

Плотность спирта $\rho_ж$, кг/м^3	Плотность воздуха $\rho_в$, кг/м^3	Угол наклона трубки микроманометра α,°
809,5	1,2	12

2) Вычислить электрическую мощность генератора $N = UI$.

3) Определить коэффициент мощности ветроколеса

$$C_N = \frac{2N}{S\rho_в u^3}$$

где $S = \pi d^2/4$ – ометаемая площадь ветроколеса,

диаметр ветроколеса d = 0,17 м.

При вычислениях в таблице используйте абсолютную ссылку на ячейку с вычисленным значением S.

4. Составить таблицу умножения. Записать формулу таким образом, чтобы ее можно было распространить на всю расчетную область. Указание: при записи формулы использовать смешанную адресацию.

	1	2	3	…	8	9
1	формула →	→				
2	↓					
…	↓					
8						
9						

Контрольные вопросы

1. Что входит в понятие «формула» в Excel?
2. С какого символа начинается запись формулы?
3. Каковы правила записи функций в Excel?
4. Укажите порядок выполнения операторов.
5. Чем отличаются относительная и абсолютная ссылки?
6. Как присвоить имя ячейке?
7. Каким требованиям должны удовлетворять имена?
8. Как меняются ссылки при перемещении и копировании формулы?

Лабораторная работа № 3.
Логические функции и проверка данных

Цель работы: научиться проводить вычисления и оформлять данные в зависимости от выполнения определенных условий.

Выполнение работы

1. Задать в ячейках значения x, y и вычислить выражения, используя логическую функцию **ЕСЛИ**:

1) $F = \begin{cases} \sin x \lg x & x > 3{,}5 \\ \cos^2 x & x \le 3{,}5 \end{cases}$

2) $W = \begin{cases} \lg(x+1) & x > 1 \\ \sin^2 x\sqrt{|x|} & x \le 1 \end{cases}$

3) $H = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & x < 1{,}2 \\ 1/x + \sqrt{x^2+1} & x = 1{,}2 \\ (1+x)/\sqrt{x^2+1} & x > 1{,}2 \end{cases}$

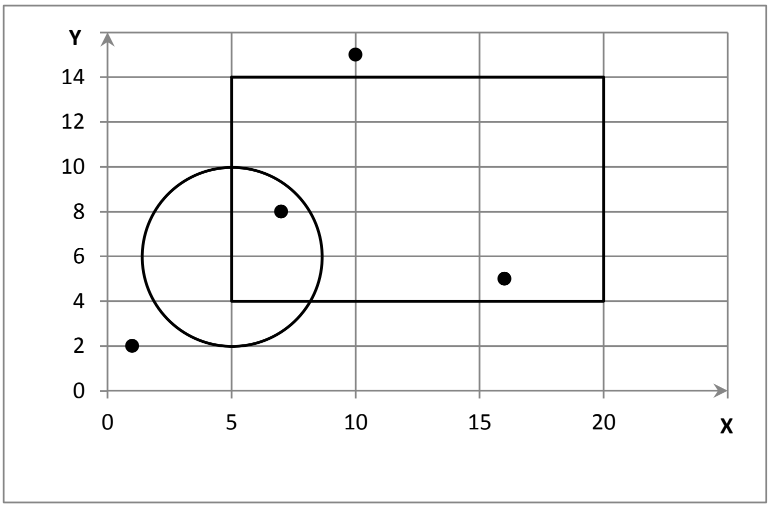
4) $R = \begin{cases} (x+y)^2 - \sqrt{x \cdot y}, & x \cdot y > 0 \\ (x+y)^2 - \sqrt{|x \cdot y|}, & x \cdot y < 0 \\ (x+y)^2 + 1, & x \cdot y = 0 \end{cases}$

2. Выяснить, находятся ли точки (x, y) внутри:

1) круга радиуса R=4 с центром в точке (a,b), где a=5, b=6.
Указание: выполнить проверку $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$;

2) прямоугольника, нижний левый и верхний правый углы имеют координаты (5;4) и (20;14) соответственно.
Указание: использовать логическую функцию **И**. Должны одновременно выполняться условия: $x \ge 5$, $x \le 20$, $y \ge 5$, $y \le 14$.

3) Подсчитать количество внутренних точек с помощью функции Excel **СЧЕТЕСЛИ**.



x	y	внутри круга (да,нет)	внутри прямоугольника (да,нет)
1	2		
7	8		
10	15		
16	5		
Количество внутренних точек			

3. Введите список фамилий студентов.

В диапазоне ввода оценок установите режим проверки данных. Для этого в окне диалога «Проверка вводимых значений» (вкладка **Данные** > **Работа с данными** > **Проверка данных**) установите значения параметров: тип данных – целое, значения между 4 и 10. Примените к ячейкам с оценками условное форматирование – цветовую шкалу от красного к зеленому.

В графе «Средний балл», если все работы сданы, т.е. нет пустых ячеек (значение функции **СЧИТАТЬПУСТОТЫ** равно нулю), вычислить средний балл (функция **СРЗНАЧ**) с округлением до целого числа (функция **ОКРУГЛ**), в противном случае записать текст «не зачтено».

Подсчитать количество оценок 9 и 10 **(СЧЕТЕСЛИ)**.

Фамилия студента	Лабораторные работы					Средний балл	Кол-во 9,10
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5		
Иванов	10	8	7	8		не зачтено	
Петров	6	7	5	6	4	6	
Сидоров	5	8	9	6	4	6	
Ковалев		9	7	8		не зачтено	
Климович	4	5	5	5	8	5	
Максимальный балл							

Дополнительные задания

4. Даны положительные *a, b, c*. Выяснить, существует ли треугольник с такими сторонами. Результат вывести в виде соответствующего текста. *Указание*: выполнить проверку – сумма двух сторон треугольника больше третьей.
5. Вычислить корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$. Коэффициенты *a, b, c* задать в ячейках, результат вывести в виде чисел или текста «действительных корней нет».
6. Ввести номер года. Определить, является ли он високосным. *Указание:* в современном (григорианском) календаре каждый год, номер которого делится на 4, является високосным, за исключением тех, которые делятся на 100 и не делятся на 400. Например, 1900 - не високосный, 2000 - високосный год.

Контрольные вопросы

1. Каковы возможности логических функций?
2. Как работает функция **ЕСЛИ**?
3. Какую функцию следует применить для проверки одновременного выполнения нескольких условий?
4. Как вычислить среднее значение?
5. Как выполнить проверку данных при вводе?
6. Как отформатировать ячейку в зависимости от ее значения?
7. Как вычислить количество ячеек внутри интервала, удовлетворяющих заданному критерию?

Лабораторная работа № 4. Операции с массивами и матрицами. Решение систем линейных уравнений

Цель работы: научиться выполнять операции с матрицами и массивами, решать системы линейных уравнений.

Выполнение работы

1. Ввести в ячейки элементы матриц C и D.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Умножить матрицу C на число 2. *Указание*: выделить диапазон ячеек для размещения результата, ввести формулу и нажать клавиши Ctrl+Shift+Enter.

3. Сложить матрицы C и D.

4. Поэлементно перемножить матрицы C и D.

5. Умножить матрицу C на матрицу D.

6. Найти определитель матрицы C.

7. Найти обратную матрицу для матрицы C.

8. Транспонировать C.

9. Решить систему линейных уравнений методом умножения на обратную матрицу $x=A^{-1}b$. Выполнить проверку $Ax=b$.

$$x_1+2x_2-3x_3=4$$
$$4x_1-x_2+2x_3=-3$$
$$-x_1+3x_2-5x_3=1$$

10. Решить систему линейных уравнений из п.9 методом Крамера.

11. Решить системы линейных уравнений (по вариантам). Выполнить проверку.

1) $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=13 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x_1+0{,}47x_2-0{,}11x_3+0{,}55x_4=1{,}33 \\ 0{,}42x_1+x_2+0{,}35x_3+0{,}17x_4=1{,}29 \\ -0{,}25x_1+0{,}67x_2+5x_3+0{,}36x_4=2{,}11 \\ 0{,}54x_1-0{,}32x_2-0{,}74x_3+x_4=0{,}1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3 \\ 2x_1+x_2+x_3=11 \\ x_1+x_2-2x_3=8 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-2=0 \\ x_1+5x_2-4x_3+5=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+4=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1=7x_2-3x_3=10 \\ 2x_1+9x_2-x_3=8 \\ x_1-6x_2+3x_3=-3 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \\ 4x+y-3z=3 \end{cases}$

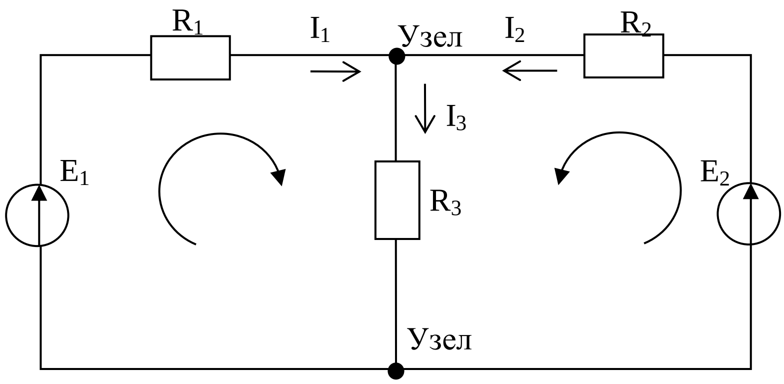
4) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+34x_3=11 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8 \end{cases}$.

12. Получить координаты центра масс системы N материальных точек. Указание. Для нахождения суммы произведений использовать функцию **СУММПРОИЗВ**.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

x	1	7	10	16
y	2	8	15	5
m	8	2	6	4

13. Выполнить анализ сложной электрической цепи постоянного тока, т.е. определить значение токов I_1, I_2, I_3 на ее участках при заданных параметрах источников ЭДС E_1, E_2 и приемников R_1, R_2, R_3.



Токи сложной электрической цепи могут быть определены в результате совместного решения уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases}$$

Исходные данные

Вариант	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом	E_1, В	E_2, В
1	50	20	40	26	20
2	25	40	30	30	23
3	15	35	18	42	32
4	45	28	34	32	16

Контрольные вопросы

1. Как выполняются операции над массивами?
2. Как выполняется умножение матриц?
3. Как найти обратную матрицу?
4. Как вычислить определитель матрицы?
5. Как решить систему линейных уравнений методом Крамера?
6. Как решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы?

Лабораторная работа № 5. Диаграммы и графики

Цель работы: научиться строить диаграммы и графики функций, управлять форматом вывода графиков.

Выполнение работы

1. Построить диаграмму начисления премий сотрудникам за первый квартал.

Фамилия	январь	февраль	март	Всего
Иванов	100	90	120	
Синичкин	150	110	160	
Воробьева	130	120	140	

Указание: выделить таблицу вместе с заголовками (кроме столбца «Всего»), перейти на вкладку **Вставка**. В группе «Диаграммы» выбрать тип «Гистограмма».

2. Вычислить премии за первый квартал и построить круговую диаграмму с указанием доли каждого сотрудника. *Указание*: выделить несмежные области: столбец с фамилиями, затем с нажатой клавишей Ctrl столбец «Всего». Выбрать тип диаграммы «Круговая». Дать ей название «Премии за 1 квартал». Выбрать макет с указанием фамилий и доли.

3. Построить гистограмму изменения **Показателя** за указанные годы:

Год	2000	2005	2010	2015	2020
Показатель	100	120	150	200	230

Указание: выделить строку «Показатель», на вкладке **Вставка** выбрать тип «Гистограмма». Щелкнуть в любом месте диаграммы. Откроется панель Работа с диаграммами. На вкладке **Конструктор** нажать кнопку «Выбрать данные». Откроется окно диалога «Выбор источника данных». В области «Подписи горизонтальной оси (категории)» щелкнуть кнопку «Изменить», затем в поле «Диапазон подписей оси» указать ячейки с годами.

4. Построить температурный график за неделю в городах.

Город	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Минск	20	18	15	16	14	12	13
Витебск	18	16	14	14	13	11	10
Гродно	21	18	17	18	16	14	15

Указание: выбрать тип диаграммы «График». С помощью команд вкладки **Макет** подписать оси: горизонтальная ось – Дни недели, вертикальная ось – Температура. Изменить заливку области построения графика, цвет и тип линий.

5. Построить на отрезке [–3; 3] график функции $y_1 = 0{,}2e^{-x}\sin(x)$. Указание. Построить последовательность значений x от -3 до 3 с шагом 0,5. Вычислить значения функции при соответствующих значениях аргумента. Выделить диапазон значений x, y. Выбрать тип диаграммы «Точечная».

6. На построенную в предыдущем пункте диаграмму добавить график функции $y_2 = \dfrac{2x}{x^2+1}$ на той же области определения аргумента. Изменить на диаграмме тип линии.

7. Построить поверхность гиперболического параболоида $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$, a =4, b =5, -5≤ x ≤5, -5≤ y ≤5.

y \ x	-5	-4	...	4	5
-5	формула z(x,y)				
-4					
...					
5					

Указание: использовать смешанную адресацию в расчетной формуле. Формулу распространить на всю область. Тип диаграммы – поверхность.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные типы диаграмм в Excel?
2. Этапы построения графика в Excel.
3. Как отредактировать диаграмму?
4. Как изменить цвет и стиль кривых на графике?
5. Как построить несколько кривых на одном графике?

Лабораторная работа № 6. Решение уравнений методом деления пополам

Цель работы: получить представление о приближенных методах решения уравнений, ознакомиться с методом деления пополам.

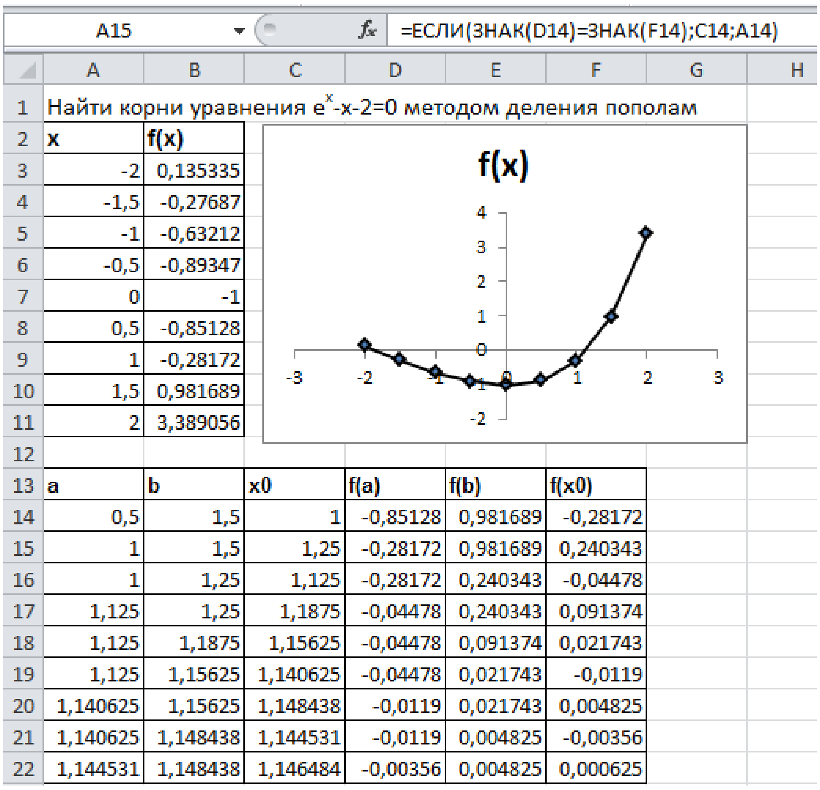
Выполнение работы

1. Найти корни уравнения $e^x – x – 2 = 0$ на отрезке [-2, 2] методом деления пополам с точностью до четырех значащих цифр.

1) Построить график функции $f(x)=e^x – x – 2$ на заданном отрезке [-2, 2] с шагом 0,5.

2) Визуально определить отрезок [a, b], на котором находится один из корней. Значения a, b занести в первую строку таблицы. В ячейку A14 поместить значение аргумента на левом краю отрезка a = 0,5, а в ячейку B14 – значение на правом краю b = 1,5.

a	b	x_0	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_0)$


A15 =ЕСЛИ(ЗНАК(D14)=ЗНАК(F14);C14;A14)

	A	B	C	D	E	F
1	Найти корни уравнения e^x-x-2=0 методом деления пополам					
2	x	f(x)				
3	-2	0,135335				
4	-1,5	-0,27687				
5	-1	-0,63212				
6	-0,5	-0,89347				
7	0	-1				
8	0,5	-0,85128				
9	1	-0,28172				
10	1,5	0,981689				
11	2	3,389056				
12						
13	a	b	x0	f(a)	f(b)	f(x0)
14	0,5	1,5	1	-0,85128	0,981689	-0,28172
15	1	1,5	1,25	-0,28172	0,981689	0,240343
16	1	1,25	1,125	-0,28172	0,240343	-0,04478
17	1,125	1,25	1,1875	-0,04478	0,240343	0,091374
18	1,125	1,1875	1,15625	-0,04478	0,091374	0,021743
19	1,125	1,15625	1,140625	-0,04478	0,021743	-0,0119
20	1,140625	1,15625	1,148438	-0,0119	0,021743	0,004825
21	1,140625	1,148438	1,144531	-0,0119	0,004825	-0,00356
22	1,144531	1,148438	1,146484	-0,00356	0,004825	0,000625

3) Вычислить значение аргумента в середине отрезка $x_0=(a+b)/2$, для этого в ячейку C14 ввести формулу =(A14+B14)/2.

4) Вычислить значение функции $f(x)=e^x – x – 2$ на левой границе отрезка при $x=a$, для этого в ячейке D14 записать формулу =exp(A14)-A14-2.

5) Скопировать эту формулу и вставить в ячейки для вычисления *f(b)* и *f(x0)* (можно протянуть маркер заполнения на две ячейки вправо), при этом ссылки на аргумент сместятся.

6) Во второй строке следует поместить координаты нового отрезка с корнем. Корень находится на той половине отрезка, где функция имеет разные знаки на концах. Для определения левого конца отрезка записать формулу с использованием логической функции ЕСЛИ: при равенстве знаков функций $f(a)$и $f(x_0)$ в качестве левой границы a берется значение x_0 из предыдущей строки, а при их неравенстве остается прежняя левая граница a. Формула в ячейке A15 имеет вид: =ЕСЛИ(ЗНАК(D14)=ЗНАК(F14);C14;A14).

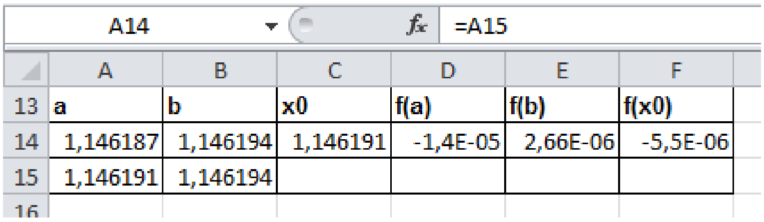
7) По аналогии в ячейке B15 записать формулу для определения значения правого конца отрезка b.

8) Остальные формулы скопировать из первой строки.

9) Распространить находящиеся во второй строке формулы вниз, наблюдая за ходом вычислений. Остановить процесс можно, когда совпадет заданное число знаков в значениях x_0 в соседних строках.

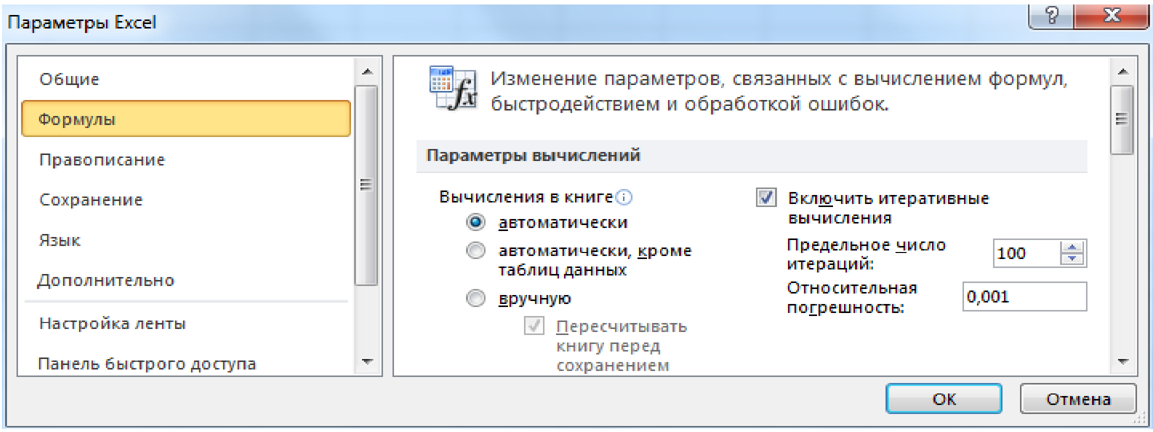
10) Для вычисления второго корня скопировать таблицу и вставить на новом месте. Записать новые значения границ отрезка a и b, где находится второй корень.

11) Excel позволяет автоматизировать процесс повторения вычислений, пока не будет достигнута заданная точность. После заполнения ячеек A15 и B15 поступить несколько иначе: вернуться к ячейке A14 и записать в ней формулу =A15, а в ячейке B14 записать формулу =B15.


A14 fx =A15

	A	B	C	D	E	F
13	a	b	x0	f(a)	f(b)	f(x0)
14	1,146187	1,146194	1,146191	-1,4E-05	2,66E-06	-5,5E-06
15	1,146191	1,146194				
16						

Однако для того, чтобы циклические вычисления выполнялись, необходимо в меню **Файл** > **Параметры** > **Формулы** установить флажок «Включить итеративные вычисления» и указать предельное число итераций и относительную погрешность, по достижении которой вычислительный процесс остановится.



2. Решить уравнения методом деления пополам (по вариантам)

1) $e^x \cos x = 0$;

2) $x \cdot 2^x = 1$;

3) $\sqrt{x+1} = x - 1$;

4) $x - 2\sqrt{x} - 15 = 0$;

5) $2\lg x = \lg(5x - 4)$;

6) $3\cos x = \cos^2 x$.

Контрольные вопросы

1. Каковы этапы нахождения приближенных значений корней уравнений.
2. Опишите алгоритм метода деления пополам?
3. Критерий окончания вычислений?
4. Как включить итеративные вычисления?

Лабораторная работа № 7. Вычисление производных. Итерационные методы решения уравнений. Циклы в Excel

Цель работы: научиться вычислять производные с заданной точностью, ознакомиться с итерационными методами решения уравнений, изучить метод Ньютона.

Выполнение работы

1. Вычислить первую и вторую производные от функции $f(x)=e^x - x - 2$ в точке $x = 1{,}5$ с точностью до четырех значащих цифр.

1) Заполнить таблицу. В качестве шага отступа от заданной точки $x = 1{,}5$ взять $h=0{,}1$.

h	x	x-h	x+h	f(x)	f(x-h)	f(x+h)	f '(x)	f "(x)

2) Вычислить значения функции в указанных точках.

3) Вычислить значение первой производной по формуле:

$$f(x)' = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

4) Вычислить значение второй производной по формуле.

$$f(x)'' = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Производные $f(x)=e^x - x - 2$								
2	h	x	x-h	x+h	f(x)	f(x-h)	f(x+h)	f '	f ''
3	0,1	1,5	1,4	1,6	0,981689	0,6552	1,353032	3,489162	4,485425
4	0,05	1,5	1,45	1,55	0,981689	0,813115	1,16147	3,483557	4,482623
5	0,025	1,5	1,475	1,525	0,981689	0,896036	1,070144	3,482156	4,481922
6	0,0125	1,5	1,4875	1,5125	0,981689	0,938517	1,025562	3,481806	4,481747
7									

5) Для оценки точности повторить вычисления с уменьшенным в два раза шагом. Для этого во второй строке положить в ячейке A4 значение =A3/2, в ячейке B4 значение =B3. Остальные формулы скопировать из первой строки. Выделить всю вторую строку и протянуть вниз за маркер заполнения. Остановить процесс, пока не будут совпадать четыре значащие цифры в производных.

2. Вычислить первую и вторую производные от заданных функций в указанных точках с точностью до четырех значащих цифр (по выбору).

1) $(\cos 2x + 5)(3 - x)$ $x=2$

2) $\sin^2(2x)$ $x=8$

3) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\sin \pi x$ $x=0,7$

4) $x^2 e^{-x}$ $x=0,3$

5) $\dfrac{\ln(x+1)}{x}e^{-x}$ $x=0,5$

3. Найти корни уравнения e^x–x–2 =0 на отрезке [-2, 2] методом Ньютона.

1) Построить график функции $f(x)=e^x– x– 2$ на заданном отрезке [-2, 2] с шагом 0,5.

2) Визуально определить начальное приближение к одному из корней x_0 (точке пересечения графика функции с осью абсцисс). Занести значение x_0 в ячейку первой строки таблицы.

x_0	x_0-h	x_0+h	$f(x_0)$	$f(x_0$-$h)$	$f(x_0$+$h)$	$f\,'(x_0)$	x_1

3) С целью последующего численного нахождения производной задать небольшое отклонение от точки x_0, например, h =0,001 и посчитать x_0-h и x_0+h.

4) Вычислить значения функции в этих точках.

5) Найти значение производной в точке x_0 по формуле.

$$f(x)' = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

6) Найти следующее приближение к корню x_1 по формуле.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

7) Для выполнения второго шага во второй строке таблицы в ячейку для x_0 ввести ссылку на значение x_1 из первой строки. Остальные вычисления повторить, как в первой строке.

8) Вторую строку выделить и протянуть за маркер заполнения вниз, пока не совпадет заданное число знаков в значениях x_0.

H3 | f_x | =A3-D3/G3

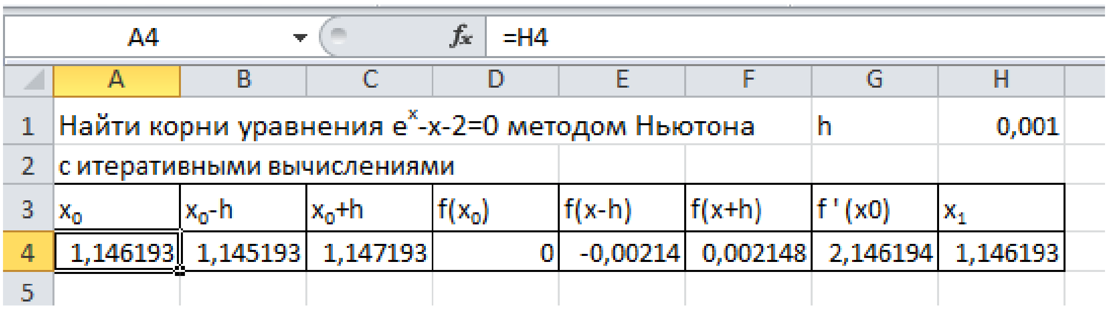
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Найти корни уравнения e^x-x-2=0 методом Ньютона						h	0,001
2	x_0	x_0-h	x_0+h	f(x_0)	f(x-h)	f(x+h)	f ' (x0)	x_1
3	1,5	1,499	1,501	0,981689	0,97821	0,985173	3,48169	1,218042
4	1,218042	1,217042	1,219042	0,162521	0,160142	0,164903	2,380564	1,149772
5	1,149772	1,148772	1,150772	0,007702	0,005546	0,009861	2,157475	1,146203
6	1,146203	1,145203	1,147203	2,01E-05	-0,00212	0,002168	2,146223	1,146193
7								

4. Для вычисления второго корня уравнения e^x–x–2 =0 скопировать таблицу и вставить на новом месте. Задать новое начальное приближение к этому корню.

5. Найти корни уравнения e^x–x–2 =0 на отрезке[-2, 2] методом Ньютона, используя циклические вычисления.

1) Включить в Excel итеративные вычисления: **Файл > Параметры > Формулы > Включить итеративные вычисления**. При необходимости можно указать предельное число шагов итерационного процесса и относительную погрешность.

2) После заполнения первой строки таблицы и получения первого значения x_1 следует это значение присвоить первой ячейке, где находится начальное приближение x_0. После этого вычислительный процесс будет зациклен.



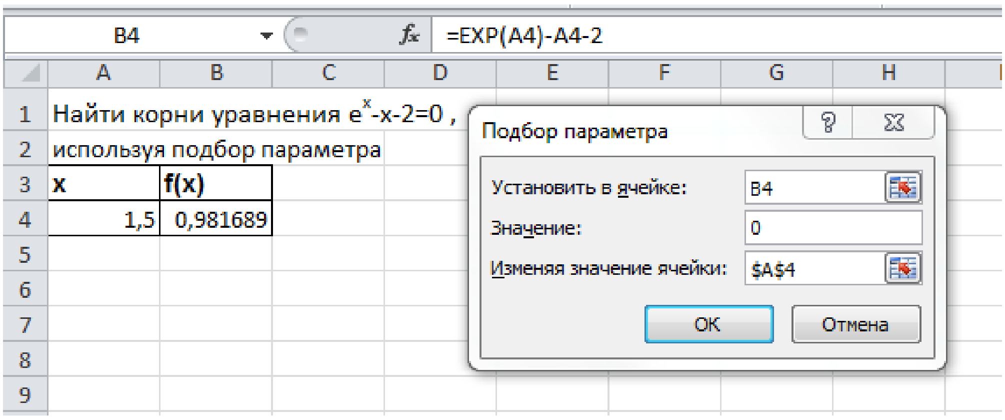
6. Найти корни уравнения $e^x–x–2 =0$, используя встроенное средство Excel «Подбор параметра».

1) В одной ячейке задать начальное приближение к корню, в другой вычислить значение функции $f(x)=e^x– x– 2$ в этой точке.

2) Вызвать окно диалога «Подбор параметра»:

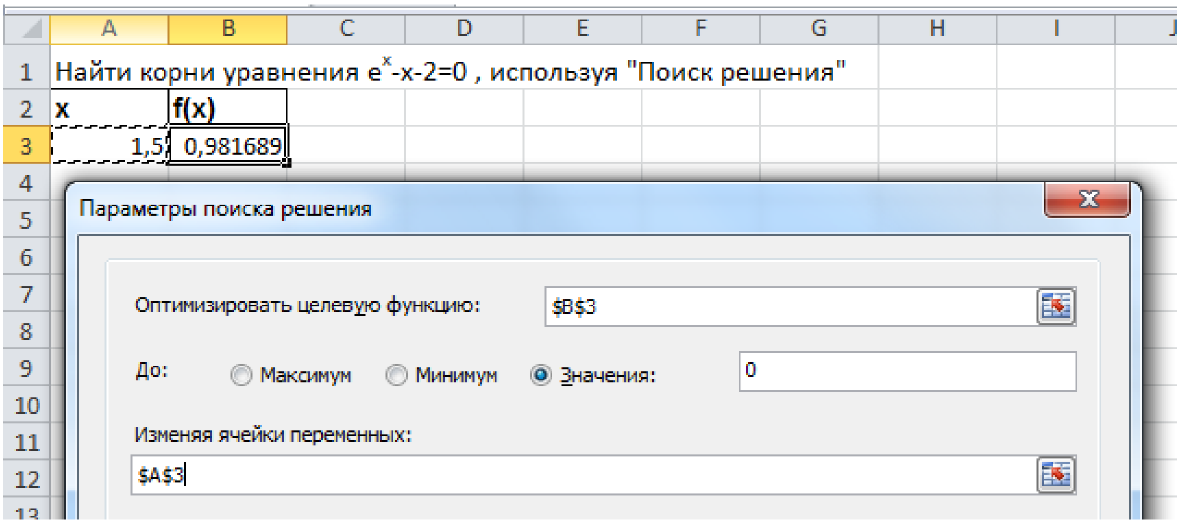
Данные > Работа с данными> Анализ «что если» >Подбор параметра.

В поле «Установить в ячейке» указать ячейку, где вычисляется функция. В поле «Значение» задать число 0. В поле «Изменяя значение ячейки» указать ячейку, где находится начальное приближение. Нажать кнопку ОК.



3) После выполнения команды вместо начального приближения в ячейке будет находиться решение.

7. Найти корни уравнения $e^x–x–2 =0$, используя надстройку Excel «Поиск решения».



1) В одной ячейке задать начальное приближение к корню, в другой вычислить значение функции $f(x)=e^x-x-2$ в этой точке.

2) Открыть окно надстройки «Поиск решения»:
Данные > Анализ > Поиск решения.

3) Указать параметры поиска решения:

В поле «Оптимизировать целевую функцию» указать ячейку, где вычисляется функция, установить переключатель в положение «Значения» и ввести в поле число 0, в поле «Изменяя ячейки переменных» указать ячейку, где находится начальное приближение.

4) Нажать кнопку «Найти решение». После того, как решение будет найдено, его можно сохранить. Решение будет помещено в ячейку, где находилось начальное приближение.

8. Решить уравнения п. 2 лабораторной работы № 6 методом Ньютона (по вариантам).

Контрольные вопросы

1. Как численно найти первую и вторую производные?
2. Каков вычислительный алгоритм метода Ньютона?
3. Как оценить погрешность решения?
4. Как организовать итерационные вычисления?
5. Какие средства имеет Excel для поиска решений?

Лабораторная работа № 8. Численное интегрирование

Цель работы: ознакомиться с методами численного интегрирования.

Выполнение работы

1. Вычислить интеграл $\int_{2}^{3}(e^{x}-x-2)dx$.

1) Разбить область интегрирования на 10 отрезков, значения x_i от 2 до 3 с шагом 0,1 занести в таблицу. Следует учесть, что количество точек на единицу больше, чем количество отрезков.

x_i	$f(x_i)$	левых прямо-угольников	правых пря-моугольников	трапеций	Симпсона
Значение интеграла		Σ	Σ	Σ	Σ

2) Вычислить в этих точках значения подынтегральной функции

$$f(x)=e^{x}-x-2$$

3) В первой строке вычислить значение интеграла на участке от первой точки до второй по формуле левых прямоугольников $(x_2-x_1)f(x_1)$.

4) Вычислить значение интеграла на участке от первой точки до второй по формуле правых прямоугольников $(x_2-x_1)f(x_2)$.

5) Вычислить значение интеграла на участке от первой точки до второй по формуле трапеций $(x_2-x_1)\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}$.

6) Протянуть формулы до предпоследней точки, поскольку число частей на единицу меньше числа точек, разбивающих отрезок, затем столбцы просуммировать.

7) Вычислить значение интеграла на участке от первой точки до третьей по методу Симпсона:

$$\int_{x_1}^{x_3}f(x)dx\approx\big(f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3)\big)(x_2-x_1)/3$$

8) Выделить ячейки первой и второй строки и протянуть вниз за маркер заполнения. Затем столбец просуммировать.

9) Для контроля вычислить значение определенного интеграла аналитически. Первообразной является функция $e^x - x^2/2 - 2x$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		**Вычисление интегралов**								
2		**Метод**								
3	i	**xi**	**f(x)**	**левых**	**правых**	**трапеций**	**Симпсона**		Аналитически	
4	1	2	3,38906	0,33891	0,40662	0,3727613		a	2	1,389056
5	2	2,1	4,06617	0,40662	0,4825	0,4445592	0,8159583	b	3	9,585537
6	3	2,2	4,82501	0,4825	0,56742	0,5249598				8,196481
7	4	2,3	5,67418	0,56742	0,66232	0,6148679	1,138164			
8	5	2,4	6,62318	0,66232	0,76825	0,7152835				
9	6	2,5	7,68249	0,76825	0,88637	0,8273116	1,540563			
10	7	2,6	8,86374	0,88637	1,01797	0,9521735				
11	8	2,7	10,1797	1,01797	1,16446	1,0912189	2,0409104			
12	9	2,8	11,6446	1,16446	1,32741	1,2459396				
13	10	2,9	13,2741	1,32741	1,50855	1,4179841	2,6608922			
14	11	3	15,0855							
15	Значение интеграла			7,62224	8,79188	8,2070595	8,1964879			
16										
17										

	B	C	D	E	F	G
1	**Вычисление интегралов**					
2	**Метод**					
3	**xi**	**f(x)**	**левых**	**правых**	**трапеций**	**Симпсона**
4	2	=EXP(B4)-B4-2	=C4*(B5-B4)	=C5*(B5-B4)	=(B5-B4)*(C5+C4)/2	
5	2,1	=EXP(B5)-B5-2	=C5*(B6-B5)	=C6*(B6-B5)	=(B6-B5)*(C6+C5)/2	=(B6-B4)/6*(C4+4*C5+C6)
6	2,2	=EXP(B6)-B6-2	=C6*(B7-B6)	=C7*(B7-B6)	=(B7-B6)*(C7+C6)/2	
7	2,3	=EXP(B7)-B7-2	=C7*(B8-B7)	=C8*(B8-B7)	=(B8-B7)*(C8+C7)/2	=(B8-B6)/6*(C6+4*C7+C8)
8	2,4	=EXP(B8)-B8-2	=C8*(B9-B8)	=C9*(B9-B8)	=(B9-B8)*(C9+C8)/2	
9	2,5	=EXP(B9)-B9-2	=C9*(B10-B9)	=C10*(B10-B9)	=(B10-B9)*(C10+C9)/2	=(B10-B8)/6*(C8+4*C9+C1
10	2,6	=EXP(B10)-B10-2	=C10*(B11-B10)	=C11*(B11-B10)	=(B11-B10)*(C11+C10)	
11	2,7	=EXP(B11)-B11-2	=C11*(B12-B11)	=C12*(B12-B11)	=(B12-B11)*(C12+C11)	=(B12-B10)/6*(C10+4*C11-
12	2,8	=EXP(B12)-B12-2	=C12*(B13-B12)	=C13*(B13-B12)	=(B13-B12)*(C13+C12)	
13	2,9	=EXP(B13)-B13-2	=C13*(B14-B13)	=C14*(B14-B13)	=(B14-B13)*(C14+C13)	=(B14-B12)/6*(C12+4*C13-
14	3	=EXP(B14)-B14-2				
15	Значение интеграла		=СУММ(D4:D14	=СУММ(E4:E14	=СУММ(F4:F14)	=СУММ(G4:G14)
16						

10) Повторить те же вычисления с уменьшенным в два раза шагом. Сравнить полученные результаты с предыдущими вычислениями.

2. Вычислить значения определенных интегралов методом трапеций.

1) $\int\limits_0^{0,6} x\cdot tg(x^2+1)dx$ $\qquad \int\limits_0^1 x\cdot(2+x)e^x dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{x^x\cdot\ln(1+x^x)}{1+x^x}dx$ $\qquad \int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\sin(\pi x)dx$

3) $\int\limits_0^{0.75} \frac{\sin^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}e^{-(1+x)}dx$ $\qquad \int\limits_1^{\pi} \frac{dx}{x(1+\ln(x))}$;

4) $\int\limits_0^{0.5} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad \int\limits_0^{0.5} x\cdot tg(x^2+1)\ln(x+1)dx$;

5) $\int\limits_{0.5}^1 \frac{\cos(x)}{x^2+1}e^{-x}dx$ $\qquad \int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}arctg(x)dx$;

6) $\int\limits_0^{0.5} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad \int\limits_0^1 x^3 e^{-x^2}dx$;

7) $\int_0^{0.5} \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad \int_0^1 \sin x \cdot (5+x)e^x dx$;

8) $\int_1^{\pi} \frac{dx}{x\cdot(1+\ln(x))}$ $\qquad \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\cos(\pi x)dx$.

3. Имеется табличная зависимость изобарных массовых теплоемкостей газов c_p от температуры. Найти количество подведенной теплоты к выбранному газу в данном интервале изменения температур по формуле:

$$q = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT$$

Зависимость массовых теплоемкостей газов от температуры

Температура T °C	Массовая теплоемкость c_p, кДж/(кг_К)					
	кислород	азот	окись углерода	водород	воздух	водяной пар
600	0,9927	1,076	1,0861	14,542	1,0496	2,0092
700	1,0048	1,0869	1,0978	14,587	1,0605	2,0419
800	1,0157	1,0974	1,1091	14,641	1,0710	2,0754
900	1,0258	1,1078	1,1200	14,706	1,0815	2,1097
1000	1,0350	1,1179	1,1304	14,776	1,0907	2,1436
1100	1,0434	1,1271	1,1401	14,853	1,0999	2,1771
1200	1,0509	1,1359	1,1493	14,934	1,1082	2,2106
1300	1,0580	1,1447	1,1577	15,023	1,1166	2,2429
1400	1,0647	1,1526	1,1656	15,113	1,1242	2,2743
1500	1,0714	1,1602	1,1731	15,202	1,1313	2,3048

4. *Дополнительное задание*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми. *Указание*. Изобразить фигуру графически, найти координаты узлов, где пересекаются графики функций. Вычислить интеграл от разности функций в найденных пределах.

1) $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=1+0.07x$;
2) $y=\ln x$ и $y=1/x$, а также прямой y = 3;
3) $y=\sin x$ и $y=(\pi-x)/5$ в диапазоне от 0 до π;
4) $y=\sqrt[4]{x}\ln x$ и $y=1/x-1$ и прямой x= 5;
5) $y=-(x-2.5)^2+4\text{-}1.5x^2e^{-0.035x^3}$ и $y=-2$;
6) $y=\sqrt{x}$ и $y=0.75x$;
7) $y=e^x$ и $y=-1.44x^2+1.2x+1.75$;
8) $y=x^2$ и $y=\cos x$.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2. Какова идея методов прямоугольников и трапеций?
3. Каковы вычислительные формулы этих методов?
4. В чем суть метода Симпсона?

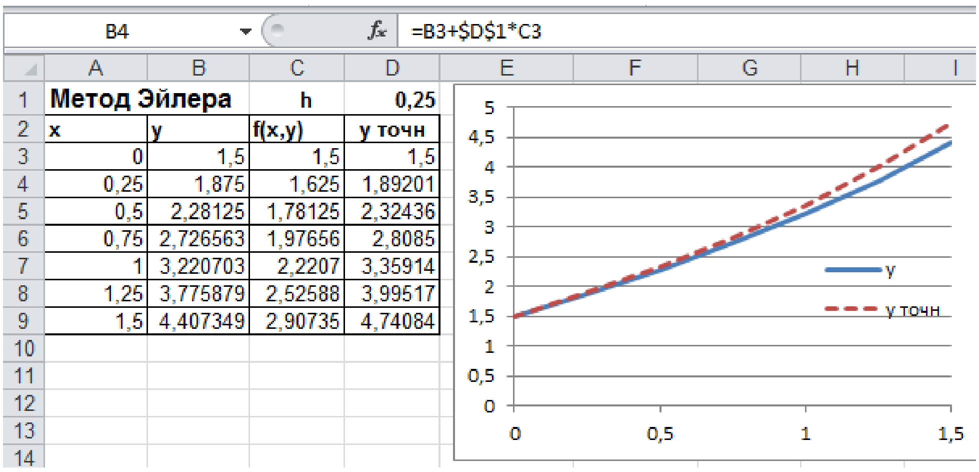
Лабораторная работа № 9. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы: научиться численно решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядок выполнения работы

1. Решить в Excel обыкновенное дифференциальное уравнение $y'=y-x$ с заданными начальными условиями $x_0=0$; $y_0=1,5$ на отрезке от 0 до 1,5 методом Эйлера. Сравнить с точным решением. Построить графики.

1) Разбить область решения на отрезки величиной $h=0,25$. В первой строке таблицы в Excel в ячейки A3 и B3 ввести начальные значения величин x_0 и y_0, известные из условия задачи. В ячейке C3 вычислить значение функции $f(x,y)=y-x$ при заданных начальных данных.


B4 =B3+$D$1*C3

	A	B	C	D
1	Метод Эйлера		h	0,25
2	x	y	f(x,y)	y точн
3	0	1,5	1,5	1,5
4	0,25	1,875	1,625	1,89201
5	0,5	2,28125	1,78125	2,32436
6	0,75	2,726563	1,97656	2,8085
7	1	3,220703	2,2207	3,35914
8	1,25	3,775879	2,52588	3,99517
9	1,5	4,407349	2,90735	4,74084

2) Во второй строке ввести формулы: значение x равно значению x из предыдущей строчки плюс шаг h. Из ячейки B3 берется предыдущее значение функции y и прибавляется правая часть уравнения из ячейки C3, умноженная на шаг h из ячейки D1. Следующие строки создаются путем копирования предыдущих строк.

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

3) По точкам *x* и *y* построить график найденной таблично функции *y(x)*.

4) Задача имеет точное решение, равное $y=x+1+0{,}5\cdot e^x$. Вычислить по этой формуле точные значения и добавить их на график.

5) Выполнить вычисления с шагом *h*, уменьшенным вдвое. Полученную зависимость добавить на график. Сравнить значения функций на конце отрезка.

2. Найти решение предыдущей задачи методом Рунге – Кутты.

1) Ввести начальные данные. Значение *x* меняется от 0 до 1,5 с шагом 0,25. Вычислить значения k по формулам.

$$k_1 = f(x_i, y_i); \quad k_2 = f(x_i + h/2, \;\; y_i + k_1 h/2);$$
$$k_3 = f(x_i + h/2, \;\; y_i + k_2 h/2); \quad k_4 = f(x_i + h, \;\; y_i + k_3 h)$$
$$y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

B19 fx =B18+$E$16/6*(C18+2*D18+2*E18+F18)

	A	B	C	D	E	F	G
16	**Метод Рунге-Кутты**			**h**	**0,25**		
17	**x**	**y**	**k1**	**k2**	**k3**	**k4**	
18	0	1,5	1,5	1,5625	1,5703125	1,64257813	
19	0,25	1,892008	1,64201	1,72226	1,732290904	1,82508119	
20	0,5	2,32435	1,82435	1,92739	1,940273916	2,05941821	
21	0,75	2,808479	2,05848	2,19079	2,207327624	2,36031092	
22	1	3,359105	2,3591	2,52899	2,550229106	2,74666225	
23	1,25	3,995114	2,74511	2,96325	2,990520413	3,24274389	
24	1,5	4,740756	3,24076	3,52085	3,555861904	3,87972112	

2) Полученную зависимость добавить на график п.1.

3. Найти решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(t,y)$ на интервале $[t_0; t_1]$ с заданными начальными условиями $y(t_0) = y_0$.

1) $y' = t^3 \cos(y/\sqrt{5})$, $t_0=0;\ t_1=1;\ y_0=3;$

2) $y' = \dfrac{y}{1-t^2}$, $t_0=0;\ t_1=0{,}5;\ y_0=1;$

3) $y' = \ln t \cos(y/3)$, $t_0=1;\ t_1=2;\ y_0=0;$

4) $y' = \dfrac{ty}{\sqrt{t^2-4}}$, $t_0=2{,}5;\ t_1=5;\ y_0=1;$

5) $y' = y\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$, $t_0=-1;\ t_1=0{,}99;\ y_0=1;$

6) $y' = \dfrac{t}{2y} \cdot \dfrac{2-t}{(1-t)^2}$, $t_0=2;\ t_1=3{,}615;\ y_0=1;$

7) $y' = \dfrac{y^2 \ln t}{t}$, t_0=0,01; t_1=3; y_0=1;

8) $y' = \dfrac{\operatorname{ctg} t}{y^2}$, t_0=0,04; t_1=3,1; y_0=1.

4. Решить следующую задачу.

Бассейн был наполнен холодной водой. Чтобы повысить температуру в бассейне, открыли кран с горячей водой. Зависимость температуры воды в бассейне T от температуры горячей воды, поступающей в бассейн $T_{вх}$, объема бассейна V и объемной скорости потока горячей воды $Q = dV/dt$ описывается дифференциальным уравнением (предполагается идеальное смешивание, потери тепла не учитываются):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{V}\left(T_{вх} - T\right)$$

Температура воды в бассейне в начальный момент времени T_0=10,2°C. Температура горячей воды $T_{вх}$=54,4°C. Бассейн наполняется со скоростью Q=30 л/мин и всего в него вмещается V=3000 л воды.

Необходимо найти зависимость температуры воды в бассейне от времени в течение 60 мин.

Построить график. По графику визуально определить время, в течение которого температура воды поднимется до 26°C.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача Коши?
2. Что является решением дифференциального уравнения?
3. В чем суть метода Эйлера?
4. Какой порядок точности имеет метод Рунге – Кутты?

Лабораторная работа № 10.
Метод конечных разностей

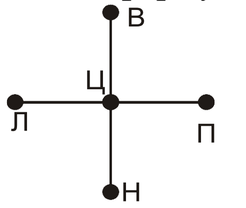
Цель работы: ознакомиться с методом конечных разностей, научиться решать дифференциальные уравнения с частными производными.

Выполнение работы

Рассчитать методом конечных разностей распределение температуры внутри заданных серым цветом областей. Считать, что размер одного квадрата равен 1. Распределение температуры описывается уравнением

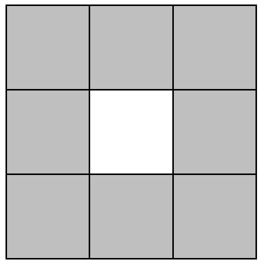
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -Q$$

Значение температуры на границе задано. Во внутренних точках вычислять по формуле:

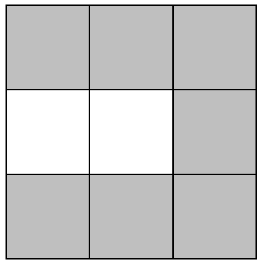


$$T_Ц = \frac{T_Л + T_П + T_В + T_Н}{4} + \frac{Qh^2}{4},$$ h – шаг сетки.

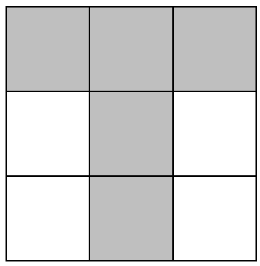
1. Температура внешних границ области равна 10^{o}С, а внутренняя поверхность нагрета до температуры 45^{o}С. Q=270.



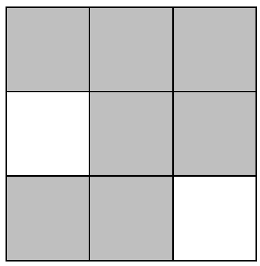
2. Температура верхней, правой и нижней границ области равна 20^{o}С, а левая и внутренняя поверхность имеют температуру 125^{o}С. Q=200.



3. Температура всех границ верхних трех квадратов равна 20^{o}С, а двух нижних 75^{o}С. Q=100.



4. Температура верхней и правой границ области равна 8^{o}С, а всех остальных 44^{o}С. Q=185.



Контрольные вопросы

1. В чем идея метода конечных разностей?
2. Каковы этапы приближенного решения уравнения методом конечных разностей?
3. Как строится разностная схема?
4. Как приближенно вычислить вторую производную?
5. Как разрешить в Excel выполнять итеративные вычисления?
6. Каков критерий окончания расчетов?

Лабораторная работа № 11. Аппроксимация данных

Цель работы: научиться применять метод наименьших квадратов, строить формулы, описывающие экспериментальные данные.

Выполнение работы

1. Описать экспериментальную зависимость $y(x)$ линейной функцией $f(x)=a+bx$.

Для нахождения коэффициента a используется статистическая функция

ОТРЕЗОК(известные_значения_y;известные_значения_x).

Коэффициент линейной функции b находят с помощью статистической функции

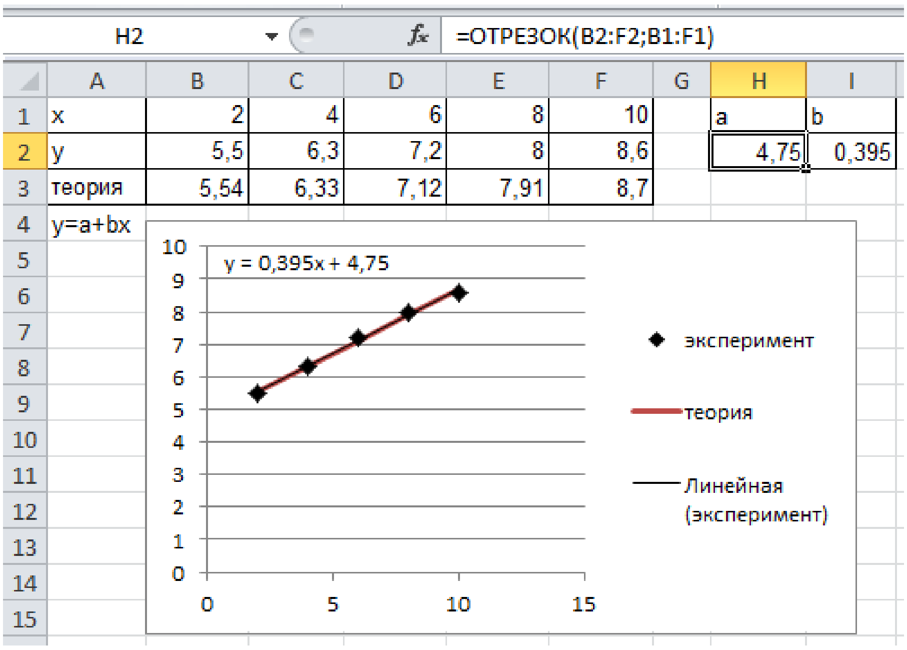
НАКЛОН(известные_значения_y;известные_значения_x)

Построить график: эксперимент – маркеры, теория – непрерывная линия. Для экспериментальных точек на график добавить линию тренда и вывести уравнение прямой.

1)

x	2	4	6	8	10
y	5,5	6,3	7,2	8	8,6

Решение представлено ниже.



2)

x	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60
y	60	71	76	81	87	98	103	111	120

3)

x	10	12	14	16	18	20	22	24	26
y	15	13	11	8,5	7	4	2,5	1	-1

4)

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6
y	5,2	5	4,5	4,4	3,9	3,8	3,7	3,3	3,1

2. В таблицах представлены экспериментальные данные. Имеется предположение, какой зависимостью они могут быть аппроксимированы. Найти значения коэффициентов, построить график аппроксимирующей функции вместе с исходными табличными данными:

1) экспоненциальная зависимость $y=ae^{bx}$

x	6,9	12,9	19,8	26,7	35,1
y	21,4	15,7	12,1	8,5	5,2

2) степенная зависимость $\boldsymbol{y=ax^b}$

x	1	2	3	4	5	6
y	3	12	27	48	75	108

3) показательная зависимость $\boldsymbol{y=ab^x}$

x	1	2	3	4	5
y	6	7	8,7	10,4	12,4

4) гиперболическая зависимость $\boldsymbol{y=a+b/x}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12,2	6,8	5,2	4,6	3,9	3,7	3,5	3,2

5) $Y = C_1 + C_2\sqrt{x}$

x	0,1	0,3	0,7	1,0	1,4	1,9	2,3	2,9	3,5	4,1	7,0
y	0,85	1,23	1,65	1,9	2,25	2,41	2,61	2,96	3,23	3,49	4,43

6) $Y = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(2x)$

x	0,1	0,3	0,7	1,0	1,4	1,9	2,3	2,9	3,5	4,1	7,0
y	0,53	0,50	0,22	-0,04	-0,28	-0,22	0,10	0,53	0,31	-0,34	0,21

3. В таблице приведены данные, полученные в результате экспериментов по изучению зависимости напряжения от относительной деформации для образца сплава металла. Определить модуль упругости, равный тангенсу угла наклона прямой, описывающей экспериментальные данные.

Деформация	0,0000	0,0015	0,0030	0,0045	0,0060
Напряжение, МПа	0	168	336	504	672

4. $Y = c_0 + c_1x + c_2x^2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	298	299	301	304	306	309	312	316	319	322

5. Имеется табличная зависимость изобарных массовых теплоемкостей газов от температуры (лабораторная работа 8). Описать эту зависимость для выбранного газа квадратичным полиномом.

6. Предположим, что застройщик оценивает стоимость группы небольших офисных зданий в традиционном деловом районе. Предполагается, что существует линейная зависимость между независимыми переменными x_1 (общая площадь в квадратных метрах), x_2 (количество офисов), x_3 (количество входов), x_4 (время эксплуатации здания в годах) и зависимой переменной y (оценочная цена здания под офис).

$$y = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + b$$

x_1	x_2	x_3	x_4	y
2310	2	2	20	142 000
2333	2	2	12	144 000
2379	3	2	43	150 000
2402	2	3	53	139 000
2425	4	2	23	169 000
2471	2	2	34	142 900
2494	3	3	23	163 000
2517	4	4	55	169 000
2540	2	3	22	149 000

Определить оценочную стоимость здания под офис в том же районе (здание имеет площадь 2500 квадратных метров, три офиса, два входа, построено 25 лет назад).

Массив значений коэффициентов $\{a_n,\ldots,a_1, a_0\}$ линейной функции $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_n$ возвращает функция

ЛИНЕЙН(известные_значения_y; известные_значения_x; константа;статистика)

Контрольные вопросы

1. Что такое аппроксимация?
2. В чем заключается идея метода наименьших квадратов?
3. Какие функции Microsoft Excel позволяют найти коэффициенты линейной аппроксимирующей функции?
4. Как получить значение функции в промежуточных точках?
5. Способы приведения зависимостей к линейному виду.
6. Как построить линию тренда?

Лабораторная работа № 12. Задачи оптимизации

Цель работы: научиться использовать среду Excel для поиска оптимальных решений.

Выполнение работы

1. Решить задачу оптимизации

$$L(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Указание. Расположить на рабочем листе MS Excel исходные данные и формулы:

1) заготовить место для расположения переменных x_1, x_2, x_3, x_4; например, ячейки B3:E3;

2) ввести коэффициенты целевой функции в ячейки B6:E6;

3) ввести в ячейку F6 формулу для вычисления целевой функции:

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)

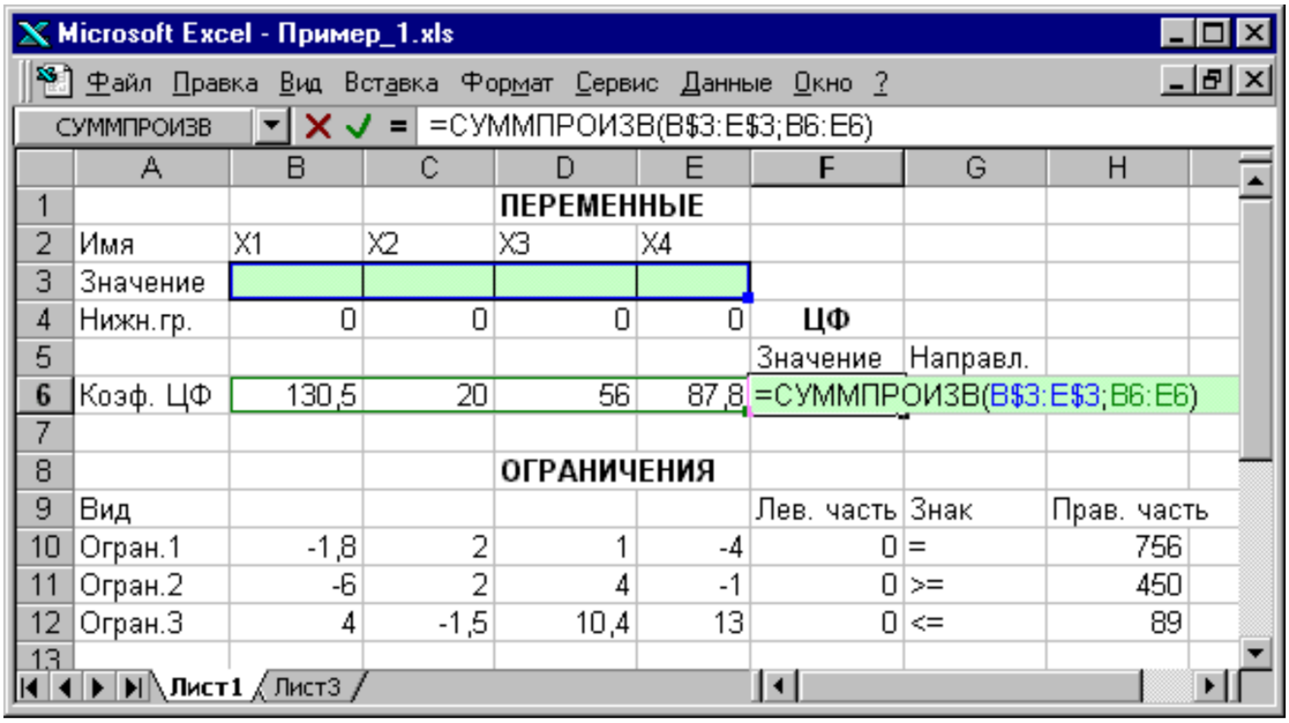
4) ввести коэффициенты матрицы ограничений в ячейки B10:E12;

5) ввести значения правой части ограничений в ячейки H10:H12;

6) записать в ячейку F10 формулу для расчета значений левых частей ограничений

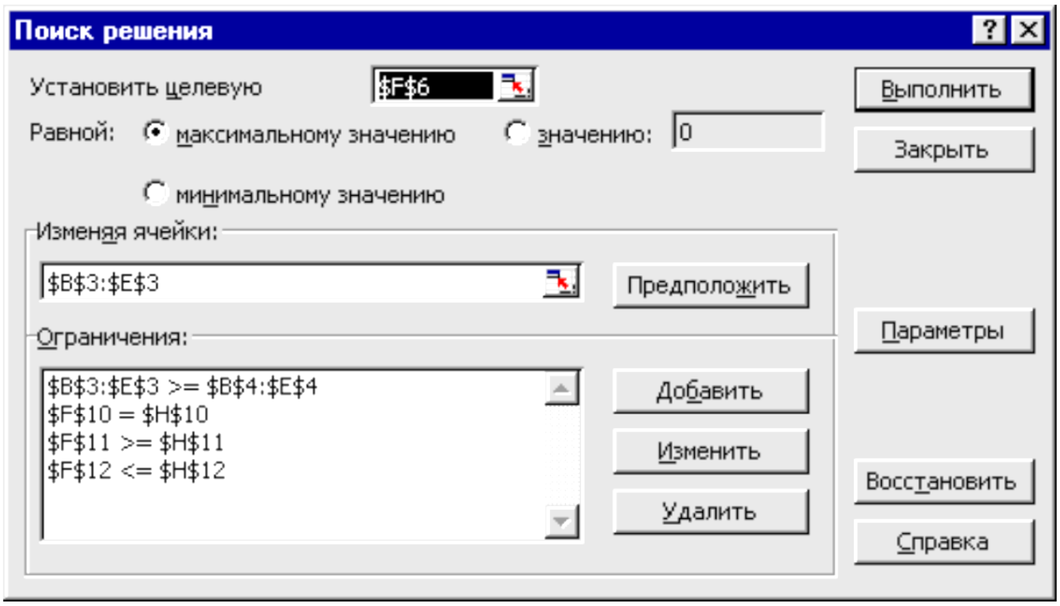
=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)

и скопировать в ячейки F11, F12 (протянуть за маркер заполнения вниз);

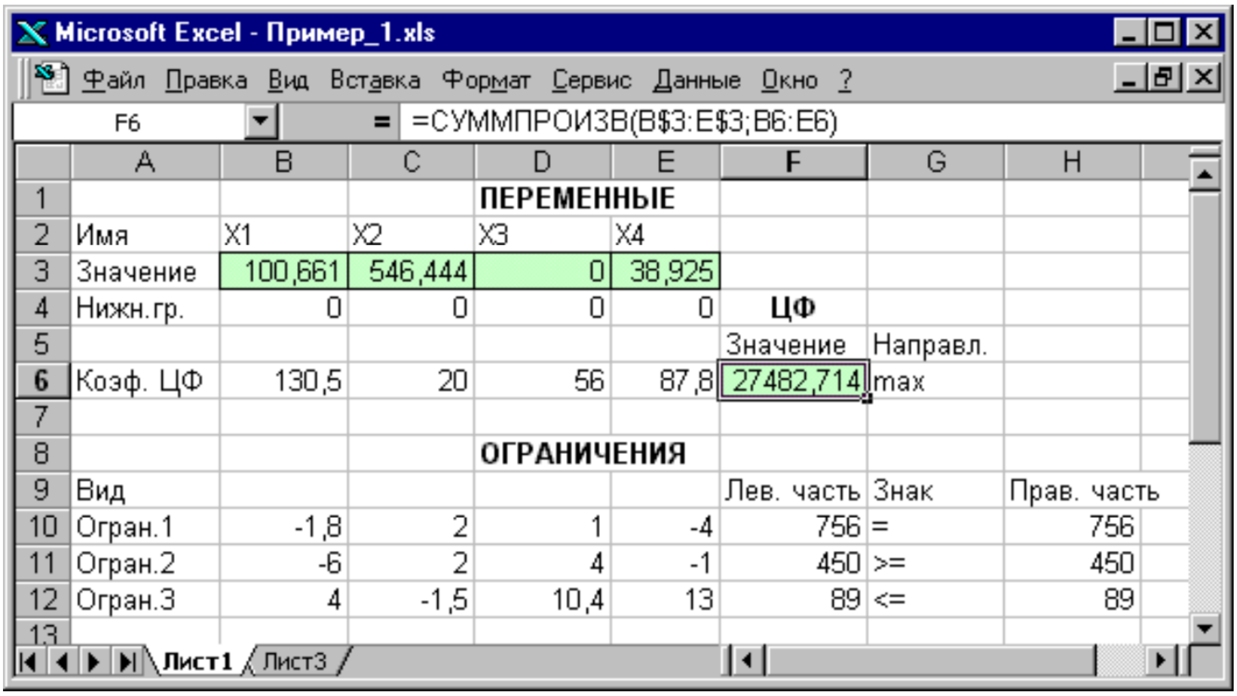


7) поставить курсор в ячейку F6, где находится целевая функция и вызвать окно «Параметры поиска решения» (**Данные>Поиск решения**). Если на панели этого окна нет, то установить **Файл>Параметры>Надстройки**.

8) в окне «Параметры поиска решения» установить адрес целевой ячейки $F$6, ввести направление оптимизации целевой функции, щелкнув левой клавишей мыши по селекторной кнопке "максимальному значению", в поле "Изменяя ячейки" вписать адреса $B$3:$E$3. Необходимые адреса можно вносить в поле "Изменяя ячейки" и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме. Ввести ограничения. Для этого щелкнуть кнопку «Добавить», в появившемся окне указать ссылку на ячейку, знак и ограничение.

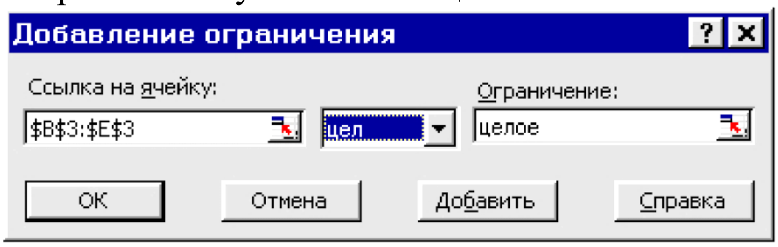


9) нажать кнопку «Найти решение». После этого в экранной форме появится оптимальное решение задачи



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925			
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,714	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89
13								

Допустим, что к условиям задачи добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо дополнить следующими шагами: в окне «Параметры поиска решения» нажать кнопку «Добавить» и для ссылок на переменные в поле ввода знака ограничения установить «цел».



2. Решить задачу оптимизации, найдя экстремум функции в соответствии с заданием при действующих ограничениях. Учесть, что все решения должны быть положительными и целыми:

1) $4x_1+15x_2+2x_3 \to \max$

$3x_1 - x_3>=11$

$-2x_1+x_2+2x_3>=21$

$4x_1+x_2<=47$

2) $x_1-5x_2+7x_3+40 \to \max$

$2x_1+3x_2-7x_3>=15$

$-x_1+5x_2-x_3>=24$

$3x_1+5x_2-6x_3<=30$

3) $3x_1-5x_2+9x_3 \to \min$

$3x_1-2x_3>=21$

$-x_1+2x_2-6x_3<=27$

$2x_1+7x_3<=71$

4) $2x_1-4x_2+6x_3 \to \min$

$4x_1-3x_3>=29$

$-3x_1+3x_2-9x_3<=44$

$3x_1+8x_3<=91$

3. Решить задачу об использовании сырья. Для изготовления трех видов продукции П1, П2 и П3 на предприятии используются три вида сырья: С1, С2 и С3, причем сырье С2 должно быть израсходовано полностью. Данные приведены в таблице.

Исходные данные задачи о сырье

Виды сырья	Расход на единицу продукции			Запас
	П1	П2	П3	
С1	1	2	0	12
С2	1	0	1	4
С3	2	2	0	14
Прибыль	3	2	1	

Составить план выпуска продукции, чтобы при его реализации предприятие получало максимальную прибыль. Искомые значения должны быть целыми.

4. Решить транспортную задачу. Определить оптимальный план перевозок продукции в контейнерах со складов в пункты реализации, минимизируя суммарные транспортные расходы. Нужно перевести весь груз из трех складов в два пункта, причем весь груз должен быть перевезен во все пункты. Стоимость перевозки единицы груза со склада в пункт, а также объемы продукции на складах и объемы потребления для каждого пункта реализации представлены в таблице.

Исходные данные для транспортной задачи

	Стоимость перевозки единицы груза		Объем грузов на складах
	Пункт 1	Пункт 2	
Склад 1	17	6	18
Склад 2	12	13	75
Склад 3	9	8	31
Объем грузов на пунктах	45	79	

Указание.

Записать на лист данные о стоимости перевозки единицы груза с каждого склада в каждый пункт a_{ij}.

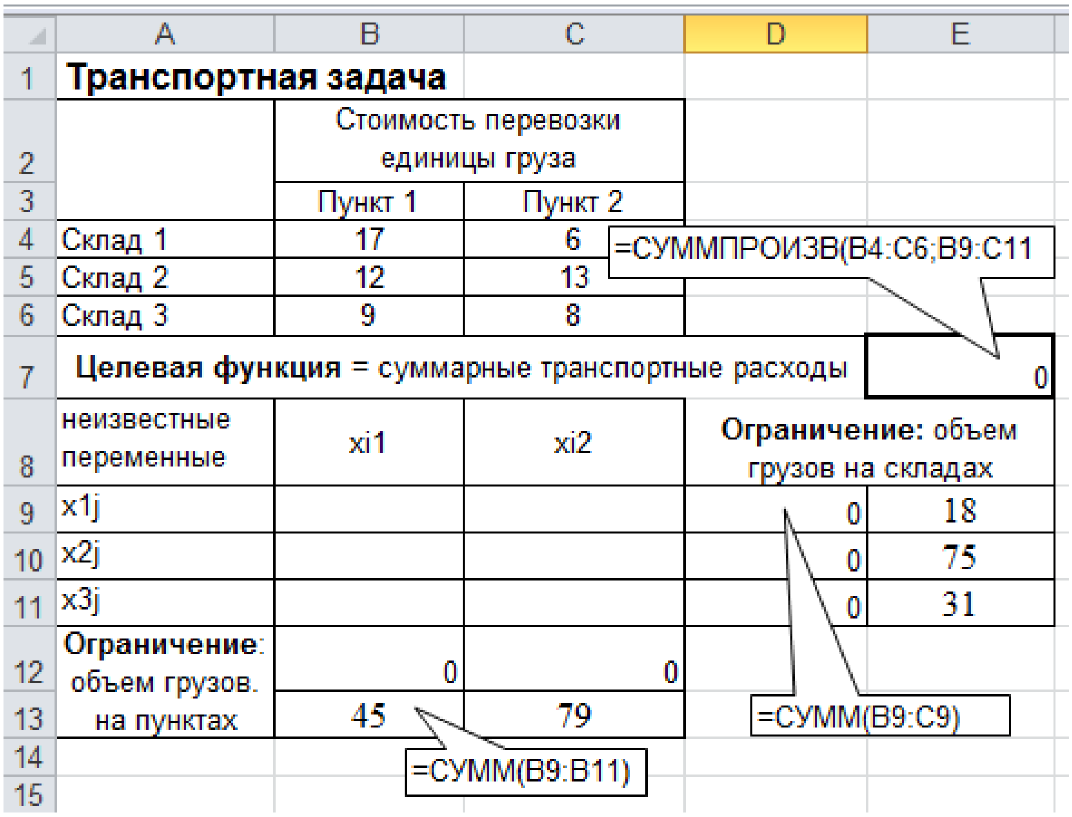
Определить ячейки для неизвестных x_{ij} – объем перевозок из склада i в пункт j.

Записать в ячейке целевую функцию, равную сумме затрат на перевозки.

Вычислить объем перевезенных грузов из каждого склада.

Вычислить сумму грузов в каждом из двух пунктов.

В окне диалога «Параметры поиска решения» указать ячейки, где находится целевая функция, переменные, а также ввести ограничения с указанием соответствующих ячеек. Все значения переменных должны быть целыми и неотрицательными. Целевую ячейку положить равной минимальному значению.



Контрольные вопросы

1. Как в общем виде формулируется задача оптимизации?
2. Как в Excel осуществляется поиск оптимальных решений?
3. Почему при вводе формул в ячейки целевой функции и левых частей ограничений в них отображаются нулевые значения?
4. Как установить и вызвать надстройку «Поиск решения»?
5. Как вводятся параметры поиска решения?
6. Каковы особенности решения в MS Excel целочисленных задач оптимизации?

Лабораторная работа № 13. Финансовые функции

Цель работы: ознакомиться с возможностями пакета Excel для проведения экономических и финансовых расчетов.

Выполнение работы

1. Определить сумму на счете по истечении срока вклада, если проценты по вкладу начислялись ежемесячно и капитализировались. Воспользоваться функцией БС.

Вариант	1	2	3
Сумма банковского вклада	10000	3000	8000
Срок	10 лет	11 лет	5 лет
Периодичность начисления процентов	12 раз в год	12 раз в год	12 раз в год
Ставка	8%	5%	6%
Конечная сумма на счете	?	?	?

2. Определить чистую приведенную стоимость проекта. Воспользоваться функцией ЧПС.

Вариант	1	2	3
Объем инвестиций	570 млн. руб.	290 млн. руб.	90 млн. руб.
Срок	3 года	4 года	2 года
Годовые доходы	270 млн. руб. 330 млн. руб. 290 млн. руб.	80 млн. руб. 90 млн. руб. 95 млн. руб. 85 млн. руб.	50 млн. руб. 60 млн. руб.
Чистая приведенная стоимость проекта	?	?	?
Ставка	17%	12%	14%

3. Оценить целесообразность проекта, исходя из его внутренней нормы доходности. Воспользоваться функцией ВСД.

Вариант	1	2	3
Затраты по проекту	850 млн. руб.	1250 млн. руб.	1250 млн. руб.
Срок реализации	5 лет	5 лет	5 лет
Доходы по годам	200 млн. руб. 185 млн. руб. 195 млн. руб. 210 млн. руб. 220 млн. руб.	300 млн. руб. 330 млн. руб. 350 млн. руб. 370 млн. руб. 390 млн. руб.	300 млн. руб. 330 млн. руб. 350 млн. руб. 370 млн. руб. 390 млн. руб.
Рыночная ставка	10%	12%	12%

4. Определить ежемесячные выплаты по ипотеке, воспользовавшись функцией ПЛТ.

Вариант	1	2	3
Ипотека	100 000	700 000	200 000
Срок	7 лет	3 года	8 лет
Начальный взнос	10%	14%	10%
Периодичность	12 раз в год	1 раз в год	12 раз в год
Ставка	11%	6%	5%
Ежемесячные выплаты	?	?	?

5. Определить размер основного платежа за каждый год при выплате займа в форме аннуитета. Воспользоваться функцией ОСПЛТ.

Вариант	1	2	3
Сумма займа	12 млн. руб.	20 млн. руб.	12 млн. руб.
Срок займа	4 года	5 лет	5 лет
Основной платеж за каждый год	?	?	?
Ставка	22%	18%	12%

6. Определить срок окупаемости инвестиций. Воспользоваться функцией КПЕР.

Вариант	1	2	3
Объем инвестиций	10 897 000	15 500 000	10 000 000
Срок	? лет	? лет	? лет
Периодичность начисления дивидендов	1 раз в год	1 раз в год	1 раз в год
Сумма выплат	2 000 000	1 950 000	15 000 000
Ставка	14,5%	11,5%	12,0%

Контрольные вопросы

1. Как вычисляются сложные проценты?
2. Какие задачи можно решить с использованием финансовых функций Excel?
3. Как определить будущую стоимость инвестиции?
4. Какая функция позволяет выполнить расчет внутренней ставки доходности?
5. Какая функция используется для расчета фиксированного значения суммы периодических выплат для погашения кредита?
6. Какая функция определяет количество периодов, за которые инвестиции с известной ставкой доходности и равномерными выплатами полностью окупаются?

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Задания к экзамену

1. Решить систему уравнений $AX = B$. Проверить найденное решение, убедившись, что при подстановке вектора X в уравнение действительно получаем, что $AX = B$.

2. Построить график функции и найти корни уравнения на указанном отрезке с точностью до четырех значащих цифр:

$(\cos 2x + 5)(3 - x) = 0$ на отрезке [0; 4]

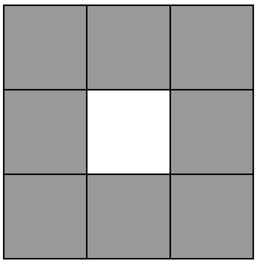
3. Вычислить первую и вторую производные от заданных функций в указанных точках с точностью до четырех значащих цифр.

$(\cos 2x + 5)(3 - x)$ в точке $x = 2$

4. Вычислить интеграл $\int_2^3 1000 \ln x \, e^{-2x} \operatorname{arctg} x \, dx$ с точностью до четырех значащих цифр.

5. Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$, найти с точностью до трех значащих цифр значение функции на правом конце заданного отрезка, построить график.

Уравнение	**Граничное условие**	**Отрезок**
$y' = x - 7y$	$y(0) = 2$	[0; 1]



6. Рассчитать методом конечных разностей поле распределения температуры внутри области, геометрия которой представлена на рисунке серым цветом. Использовать равномерную сетку. Считать, что размер одного стандартного квадрата, из которых составлена область, равен 1. Температура верхней, левой, правой и нижней границ области равна 10°C, а внутренняя поверхность нагрета до температуры 45°C. Распределение температуры описывается уравнением $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -270$

Найти распределение температуры в области с точностью до двух значащих цифр.

7. Описать экспериментальную зависимость $y(x)$ линейной функцией $f(x)=a+bx$. Построить график: эксперимент – маркеры, теория – непрерывная линия.

x	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60
y	60	71	76	81	87	98	103	111	120

8. Решить задачу оптимизации, найдя экстремум функции в соответствии с заданием при действующих ограничениях. Учесть, что все решения должны быть положительными и целыми.

x_1-5x_2+7x_3+40 - max

2x_1+3x_2-7x_3>=15

-x_1+5x_2-x_3>=24

3x_1+5x_2-6x_3<=30

9. Определить ежемесячные выплаты по ипотеке, воспользовавшись функцией ПЛТ.

Ипотека	10 000
Срок	7 лет
Начальный взнос	10%
Периодичность	12 раз в год
Ставка	11%
Ежемесячные выплаты	?

10. Создать макрос, который пишет в ячейке А1 «Сегодня экзамен» и назначить его созданному графическому объекту.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Учебная программа дисциплины «Численные методы и обработка данных»

Белорусский национальный технический университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Белорусского национального
технического университета

___________________ А.Г. Баханович

«_04_» __01___ 2017 г.

Регистрационный № УД ФТУГ93- 45 /уч

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности

1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент»

Минск 2017 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-43 01 06-2013

СОСТАВИТЕЛИ:

М.С. Краков, профессор кафедры ЮНЕСКО «Энергосбережение и возобновляемые источники энергии» Белорусского национального технического университета, доктор физико-математических наук, профессор;
С.Г. Погирницкая, старший преподаватель кафедры ЮНЕСКО «Энергосбережение и возобновляемые источники энергии» Белорусского национального технического университета

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Ю.В. Жукова, старший научный сотрудник лаборатории турбулентности ГНУ«Институт тепло- и массообмена имени А.В.Лыкова НАН Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент;

И.В. Никифоров, доцент кафедры вычислительной математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой ЮНЕСКО «Энергосбережение и возобновляемые источники энергии
(протокол № 11 от 16 мая 2016г.)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В.Г. Баштовой

Методической комиссией факультета технологий управления и гуманитаризации
(протокол № 5 от 30 июня 2016 г.)

Председатель методической комиссии Е.Г. Богданович

Научно-методическим советом Белорусского национального технического университета
(протокол №____секции №1 от__________2016 г.)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по учебной дисциплине «Численные методы и обработка данных» разработана для специальности 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент» Белорусского национального технического университета как для дисциплины учреждения высшего образования, входящей в цикл естественнонаучных дисциплин.

Основная цель дисциплины – дать знания о современных способах обработки экспериментальных данных, обучить их применению в практической деятельности инженера, дать знания об алгоритмизации вычислений и математических методах решения инженерных задач.

Каждый инженер, экономист, менеджер, современный специалист практически в любой области деятельности решает задачи обработки массивов данных, решения уравнений, описывающих инженерные задачи.

Основными задачами преподавания дисциплины является подготовка квалифицированного пользователя, способного свободно применять в своей деятельности численные методы и современные компьютерные технологии для решения следующих проблем: представления и хранения данных, обработки данных, численного решения задач, оптимизации.

Дисциплина обеспечивает изучение студентами возможностей и основных функций прикладной программы Microsoft Excel.

При выполнении лабораторных работ осуществляется практическое освоение методов работы на компьютере с прикладными программами.

Учебная дисциплина базируется на знаниях, полученных при изучении таких дисциплин как: «Информатика», «Физика», «Математика».

Полученные знания в дальнейшем используются при изучении специальных дисциплин, позволяя студентам широко использовать в учебном процессе современные компьютеры, прикладные программы и данные.

В результате изучения учебной дисциплины «Численные методы и обработка данных» студент должен:

знать:

– основы алгоритмизации инженерных задач;

– назначение и возможности электронных таблиц по обработке, анализу и представлению данных;

– методы численного решения математических уравнений;

уметь:

– ставить прикладные задачи, строить их математические модели, разрабатывать алгоритмы решения;

– применять электронные таблицы для обработки данных и решения прикладных инженерных задач;

– применять численные методы для решения инженерных задач;

владеть:

– методами обработки и графического представления данных;

– численными методами решения уравнений (алгебраических, нелинейных, дифференциальных), описывающих инженерные задачи;
– навыками алгоритмизации и программирования прикладных задач в электронных таблицах.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в коллективе.

ПК-1. Разрабатывать (выявлять) и внедрять энергоэффективные технологии и устройства, в том числе на основе возобновляемых и экологически чистых источников энергии, в различных производственных процессах.

ПК-2. Проводить системный энергоанализ (энергоаудит) предприятий, технологических процессов и устройств, оценивать их функционально-экономическую и энергетическую эффективность на основе энергетических балансов.

ПК-3. Организовывать контроль и учет потребления топливно-энергетических ресурсов и контроль за эффективным их использованием, в том числе с использованием систем автоматизированной обработки технико-экономической и организационной информации.

ПК-6. Анализировать и оценивать тенденции развития энергоэффективных технологий и устройств.

ПК-7. Выбирать эффективные критерии оценки энергоэффективности и осуществлять их оптимизацию.

ПК-23. Анализировать и оценивать собранные данные.

ПК-25. Готовить доклады, материалы к презентациям.

Согласно учебным планам на изучение учебной дисциплины отведено:

- для очной формы получения высшего образования всего 160 ч., из них аудиторных - 68 часов;

- для заочной формы получения высшего образования всего 160 ч., из них аудиторных - 14 часов.

Распределение аудиторных часов по курсам, семестрам и видам занятий приведено ниже.

Таблица 1.

Очная форма получения высшего образования					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
1	2	34	34		экзамен

Таблица 2.

Заочная форма получения высшего образования					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
2	3	8	6		экзамен

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. ОСНОВЫ РАБОТЫ С ПРИКЛАДНЫМ ПАКЕТОМ EXCEL

Тема 1.1. Назначение и основные функции электронных таблиц

Современные компьютерные средства для эффективного выполнения инженерных и научных расчетов. Электронные таблицы. Назначение и возможности электронных таблиц. Запуск Excel. Пользовательский интерфейс пакета. Получение справочной информации. Работа с файлами. Ввод чисел и текста. Форматы данных. Ряды данных. Формирование заголовков таблиц и их структуры. Оформление таблиц.

Техника безопасности и организация охраны труда при работе на персональном компьютере.

Тема 1.2. Функции и формулы

Ввод и редактирование формул. Стандартные функции Excel. Категории функций. Перемещение и копирование формул. Абсолютные и относительные ссылки. Использование имен в формулах. Значения ошибок. Математические функции. Логические функции. Функции ЕСЛИ, ИСТИНА, ЛОЖЬ, НЕ, И и ИЛИ. Таблица с условиями. Условное форматирование.

Раздел II. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Тема 2.1. Матричное исчисление

Программирование в электронной таблице. Умножение матриц. Обратная матрица. Определитель. Транспонирование матриц и таблиц. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера. Метод обратной матрицы.

Тема 2.2. Дифференциальное исчисление. Решение нелинейных алгебраических уравнений

Точные и численные методы. Погрешности. Вычисление производных методом конечных разностей. Первая и вторая производные. Итерационные методы. Приближенное решение нелинейных алгебраических уравнений. Метод деления пополам. Метод Ньютона. Графическая интерпретация методов. Реализация итерационных вычислений в MS Excel. Инструмент MS Excel «Подбор параметра».

Тема 2.3. Интегральное исчисление

Приближенное вычисление определенных интегралов. Методы прямоугольников, трапеций. Метод Симпсона. Погрешности методов.

Тема 2.4. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши. Начальные условия. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Графическая интерпретация метода. Метод Рунге – Кутты. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Тема 2.5. Решение дифференциальных уравнений с частными производными

Типы дифференциальных уравнений с частными производными и физический смысл. Уравнение теплопроводности и диффузии. Волновое уравнение. Уравнение Пуассона (для описания стационарных процессов). Краевые задачи. Методы численного решения уравнений. Сеточное представление функций. Метод конечных разностей. Конечно-разностное представление производных по времени и пространству. Явные и неявные разностные схемы. Понятие о методах конечных элементов и Монте-Карло.

Раздел III. ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Тема 3.1. Представление данных

Представление функциональных зависимостей (табличное, аналитическое, графическое). Диаграммы и графики. Построение диаграмм. Редактирование диаграмм. Форматирование диаграмм: установка цвета и стиля линий, легенды, надписей к осям, заголовков. Перемещение объектов диаграммы. Встроенные форматы диаграмм. Тренды. Трехмерная графика. Графики элементарных функций. Графики двумерных и трехмерных функций.

Тема 3.2. Интерполяция и аппроксимация данных. Построение эмпирических формул

Интерполяция данных. Аппроксимация. Формулировка задачи аппроксимации для описания экспериментальных зависимостей и получения эмпирических моделей процессов. Построение эмпирических формул. Определение вида приближенного уравнения регрессии. Виды критериев аппроксимации. Метод наименьших квадратов. Определение параметров эмпирических моделей (параметров регрессии) для линейных моделей с помощью метода наименьших квадратов. Линеаризация моделей. Реализация метода наименьших квадратов в MS Excel. Надстройка MS Excel «Анализ данных».

Тема 3.3. Оптимизация

Постановка задачи оптимизации. Оптимальные параметры и ограничения. Целевая функция. Критерий оптимальности. Надстройка MS Excel «Поиск решения». Оптимальная организация производства продукции при ограниченных запасах сырья. Транспортная задача. Автоматизация анализа данных. Сценарии. Таблица подстановки.

Тема 3.4. Электронные базы данных

Понятие и назначение базы данных. Создание списка данных в MS Excel. Сортировка данных. Поиск данных. Фильтрация данных. Получение итогов. Консолидация данных. Сводные таблицы. Построение диаграмм по сводным таблицам.

Тема 3.5. Макросы

Макросы. Создание макросов. Программирование макросов с помощью алгоритмического языка Visual Basic. Редактирование текста макроса. Удаление макроса. Назначение макроса графическому объекту и кнопке.

Тема 3.6. Финансово-экономические расчеты

Сложные проценты. Финансовые функции Excel. Будущая стоимость инвестиций. Чистая приведенная стоимость заранее известных выплат. Расчет внутренней ставки доходности на основе имеющихся числовых данных о финансовых потоках. Расчет фиксированного значения суммы периодических взносов для выплат задолженностей при условии, что процентная ставка является постоянной величиной. Расчет величины платежа, направленного на погашение основного долга при кредите в форме аннуитета. Определение количества периодов, за которые инвестиции с известной ставкой доходности и равномерными выплатами полностью окупаются.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
очная форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2 семестр							
1.	Основы работы с прикладным пакетом EXCEL							
1.1	Назначение и основные функции электронных таблиц	4			4			
1.2	Функции и формулы	4			4			
2.	Численные методы							
2.1	Матричное исчисление	2			2			
2.2	Дифференциальное исчисление. Решение нелинейных алгебраических уравнений	4			4			
2.3	Интегральное исчисление	2			2			
2.4	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	2			2			
2.5	Решение дифференциальных уравнений с частными производными	2			2			
3	Обработка данных							
3.1	Представление данных	2			2			
3.2	Интерполяция и аппроксимация данных. Построение эмпирических формул	2			2			
3.3	Оптимизация	2			2			
3.4	Электронные базы данных	4			4			
3.5	Макросы	4			4			
	Итого за семестр	34			34		92	экзамен
	Всего аудиторных часов			68				

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
заочная форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	3 семестр							
1.	Основы работы с прикладным пакетом EXCEL	4			2			
2.	Численные методы	2			2			
3.	Обработка данных	2			2			
	Итого за семестр	8			6		146	экзамен
	Всего аудиторных часов	14						

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Список литературы

Основная литература

1. Плотников, А.Д. Численные методы: учебн. пособие / А.Д. Плотников. – Минск: Новое знание, 2007. – 174 с.
2. Рудикова, Л.В. Microsoft Excel для студента. / Л.В. Рудикова – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007 – 368 с.
3. Гельман, В.Я. Решение математических задач средствами Excel.: Практикум / В.Я Гельман – СПб.: 2003. – 240 с.
4. Васильков, Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: учеб. пособие / Ю.В. Васильков, Н.Н.Василькова– М.:Финансы и статистика, 2001.-256 с.

Дополнительная литература

1. Разоренова, Т.Р. Лабораторный практикум по информатике «Электронные таблицы MS Excel» / Т.Р.Разоренова, Т.А.Галай, О.В. Альшевская / Минск, БНТУ, 2000 – 56 с.
2. Мачула, В.Г. Excel 2010. Лучший самоучитель / В.Г. Мачула, О.В. Мачула. – М.: АСТ: Астрель; Владимир, ВКТ, 2011. 416 с. (Учебный курс)
3. Курицкий, Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б.Я.Курицкий . - СПб. и др. : BHV - Санкт-Петербург, 1997. - 384 с.
4. Ларсен, Рональд У. Инженерные расчеты в Excel. / Рональд У. Ларсен – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 544 с.
5. Васильев, А.Н. Научные вычисления в Microsoft Excel. / А.Н. Васильев – Москва: Издательский дом «Вильяме», 2004 – 512 с.

Средства диагностики результатов учебной деятельности

Оценка уровня знаний студента производится по десятибалльной шкале в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки достижений студента рекомендуется использовать следующий диагностический инструментарий:

- защита выполненных на лабораторных занятиях индивидуальных заданий;
- защита выполненных в рамках самостоятельной работы индивидуальных заданий;
- собеседование при проведении индивидуальных и групповых консультаций;
- проведение расчетно-графических работ;
- выступление студента на конференции;
- сдача экзамена.

Перечень тем лабораторных работ

1. Основные приемы работы в Excel и элементы форматирования.
2. Вычисления в таблицах
3. Математические и логические функции.
4. Способы адресации. Связывание листов. Именованные области.
5. Построение графиков и диаграмм в Excel.
6. Матричные вычисления.
7. Нахождение корней нелинейного уравнения.
8. Численное интегрирование.
9. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
10. Итерационные вычисления. Решение дифференциального уравнения теплопроводности.
11. Построение эмпирических формул.
12. Решение задач оптимизации.
13. Списки данных в MS Excel.
14. Макросы.

Перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы студентов

1. Решить систему линейных уравнений вида $A{\cdot}x = B$.
2. Построить график функции и найти корни уравнения на указанном отрезке.
3. Вычислить первую и вторую производные от заданных функций в указанных точках.
4. Вычислить значение интеграла с заданной точностью.
5. Численно решить обыкновенное дифференциальное уравнение.
6. Рассчитать методом конечных разностей поле распределения температуры внутри заданной области.
7. Описать экспериментальную зависимость $y(x)$ линейной функцией $f(x)=a+bx$.
8. Решить задачу оптимизации.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– решение индивидуальных задач, в том числе разноуровневых, в аудитории во время проведения лабораторных работ под контролем преподавателя в соответствии с расписанием;

– управляемая самостоятельная работа, в том числе в виде выполнения индивидуальных расчетных заданий с консультациями преподавателя;

– выполнение исследований по индивидуальным темам;

– участие студентов на конференциях с докладами по результатам проведенной исследовательской работы.

Список рекомендуемой литературы

1. Плотников, А.Д. Численные методы: учебн. пособие / А.Д. Плотников. – Минск: Новое знание, 2007. – 174 с.
2. Рудикова, Л.В. Microsoft Excel для студента. / Л.В. Рудикова – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007 – 368 с.
3. Гельман, В.Я. Решение математических задач средствами Excel.: Практикум / В.Я Гельман – СПб.: 2003. – 240 с.
4. Васильков, Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: учеб. пособие / Ю.В. Васильков, Н.Н.Василькова– М.:Финансы и статистика, 2001.-256 с.
5. Мачула, В.Г. Excel 2010. Лучший самоучитель / В.Г. Мачула, О.В. Мачула. – М.: АСТ: Астрель; Владимир, ВКТ, 2011. 416 с. (Учебный курс)
6. Курицкий, Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б.Я.Курицкий . - СПб. и др. : BHV - Санкт-Петербург, 1997. - 384 с.
7. Ларсен, Рональд У. Инженерные расчеты в Excel. / Рональд У. Ларсен – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 544 с.
8. Васильев, А.Н. Научные вычисления в Microsoft Excel. / А.Н. Васильев – Москва: Издательский дом «Вильяме», 2004 – 512 с.
9. Информатика : базовый курс : [для бакалавров и специалистов] : учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / С.В. Симонович. — 3-е изд. — Санкт-Петербург [и др.] : Питер, 2018. — 637 с.
10. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Информатика» для специальностей 1-36 20 01 «Низкотемпературная техника» и 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент» [Электронный ресурс] / Белорусский национальный технический университет, Кафедра ЮНЕСКО ”Энергосбережение и возобновляемые источники энергии" ; сост. М. С. Краков, С. Г. Погирницкая. – Минск : БНТУ, 2021.
11. Краков, М.С. Численные методы и обработка данных: пособие / М.С.Краков, С.Г.Погирницкая; Белорусский национальный технический университет, Кафедра ЮНЕСКО «Энергосбережение и возобновляемые источники энергии». – Минск : БНТУ, 2021. – 87 с.