УДК 517.39

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В РЕКУРРЕНТНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Студенты гр.104610 Важнова А.И., Щербо А.С.
Канд. техн. наук, доцент Волкович П.Ф.
Белорусский национальный технический университет

В силу общности и простоты метод математической индукции продуктивен в различных разделах математики, в том числе, в рекуррентном интегрировании. Именно методом математической индукции здесь получены решения ряда интегральных рекуррентных соотношений и представлены в виде комбинаторных (факториальных) сумм известных функций (чисел), в частности

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(2\nu-1)!!}{\nu!2^\nu}\dfrac{\pi}{2}, \textit{для } n = 2\nu,\ \nu = 0,1,2,\ldots \\[2ex] \dfrac{\nu!2^\nu}{(2\nu+1)!!}, \textit{для } n = 2\nu+1\ ; \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(2\nu-1)!!}{\nu!2^\nu}\dfrac{\pi}{2}, \textit{для } n = 2\nu,\ \nu = 0,1,2,\ldots \\[2ex] \dfrac{\nu!2^\nu}{(2\nu+1)!!}, \textit{для } n = 2\nu+1\ ; \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n+1}} = x\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(2n-1)!!(n-\nu)!x}{(2n-(2\nu+1))!!n!\left(2a^2\right)^{\nu+1}\left(a^2+x^2\right)^{n-\nu}} + \frac{(2n-1)!!}{n!\left(2a^2\right)^n}\frac{1}{a}\,arctg\frac{x}{a},\ a\in R;$$

$$\int \frac{dx}{X^n} = (2ax+b)\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{(2n-3)!!\left(n-((\nu+2))!(2a)^\nu\right)}{(2n-(2\nu+3))!!(n-1)!\Delta^{\nu+1}X^{n-(\nu+1)}} + \frac{(2n-3)!!(2a)^{n-1}}{(n-1)!\Delta^{n-1}}\int\frac{dx}{X},$$

где $X = ax^2+bx+c$; $\Delta = 4ac-b^2$; $n\in N,\ a,b,c\in R$,

$$\int\frac{dx}{X} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}\,arctg\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}, \textit{ для } \Delta>0, \\[2ex] -\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\,arctg\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \textit{ для } \Delta<0\,. \end{cases}$$

Полученные здесь представления определенных интегралов и первообразных функций в виде комбинаторных сумм чисел (функций) служат цели снижения сложности вычислительных алгоритмов при проведении научных исследований и инженерных расчетов.