8. Шпак, И. И. Повышение эффективности дистанционного образования на основе адаптивных и модульных технологий / И. И. Шпак, Ю. А. Скудняков // Сборник статей V Международной научно-практической конференции «Непрерывная система образования “Школа – университет”. Инновации и перспективы», Минск, 28–29 октября 2021 года. – Минск: БНТУ, 2021. – С. 302–305.

9. Скудняков, Ю. А.Применение графовых моделей для адаптивного обучения студентов с особыми потребностями / Ю. А. Скудняков, И. И. Шпак // IV МНПК «Непрерывное профессиональное образование лиц с особыми потребностями», Минск, 9 декабря 2021 года. – Минск : ИИТ БГУИР, 2021. – С. 261–266.

УДК 629.735

Задачи на разбиение многогранника наклонной плоскостью или включение одного многогранника в другой

Чернявская С. В., канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ковалёнок Н. В., старший преподаватель
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Аннотация:

В статье рассматриваются методические приемы решения усложненных стереометрических задач, предлагавшихся учащимся на вступительных испытаниях и математических олимпиадах. Предлагается ряд задач, связанных с нахождением объемов частей многогранников, разделенных на части наклонной плоскостью или находящихся один внутри другого.

Определенную сложность в решении стереометрических задач представляют собой нестандартные задачи, для которых отсутствует общий подход к решению, и, более того, иногда затруднительным бывает даже построение чертежа к задаче. Изо всего многообразия нестандартных задач рассмотрим в данной статье два типа, а именно, когда многогранник разбит наклонной плоскостью на части, которые не являются многогранниками известных типов, но требуется найти их объемы. Второй тип задач содержит комбинацию многогранников, вставленных друг в друга определенным образом. Предложим для рассмотрения несколько примеров. В первой задаче проведено сечение правильной усеченной пирамиды, разделяющее ее на два многогранника, один из которых – клин, не изучаемый в школьном курсе стереометрии, а второй – многогранник, вообще не имеющий название. Основным подходом к решению задачи является разбитие клина на две пирамиды и призму.

Задача 1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 9. Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость. Найдите значение выражения $5N$, где N – число, показывающее, в каком отношении проведенная плоскость делит объем пирамиды, если известно, что $N > 1$. (рисунок 1).

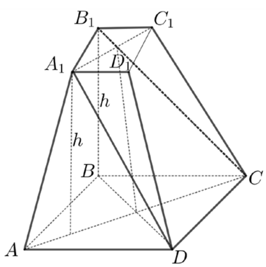

Рис. 1

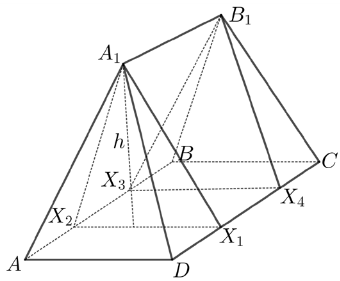

Рис. 2

Решение. Рассмотрим нижнюю часть – клин AA_1BB_1CD (рисунок 2). Разобьем его на две равные четырехугольные пирамиды $A_1AX_2X_1D$ и $B_1BX_3X_4C$ и прямую треугольную призму $A_1X_2X_1X_4B_1X_3$.

Найдем объем пирамид: высота пирамиды равна высоте исходной усеченной пирамиде и равна высоте треугольника $A_1X_1X_2$. Тогда объем пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot h = 9h$.

Объем призмы вычисляется так:

$$S_{A_1X_1X_2} \cdot A_1B_1 = \frac{1}{2}X_1X_2 \cdot h \cdot A_1B_1 = \frac{1}{2} \cdot 9h \cdot 3 = \frac{27}{2}h.$$

Тогда объем клина равен $2 \cdot 9h + \frac{27}{2}h = h(18 + 13{,}5) = 31{,}5h$, а объем усеченной пирамиды равен $\frac{1}{3}h\left(9 + \sqrt{9 \cdot 81} + 81\right) = 39h$.

Следовательно, объем оставшейся части равен $39h - 31{,}5h = 7{,}5h$.

Ответ: $5N = 5 \cdot \frac{31{,}5h}{7{,}5h} = 5 \cdot 4{,}2 = 21$.

В следующей задаче прямоугольный параллелепипед разбит наклонной плоскостью на еще более сложные части, чем в задаче 1. Для нахождения объема одной из частей требуется сложить ее, как пазл, из трех пирамид так, чтобы они, соединившись, составили нужный многогранник. Отметим, что даже начертить эти составные части проблематично, не говоря о нахождении их объемов.

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, его измерения равны 6, 9 и 15. Точка O лежит на прямой AD так, что точка A делит отрезок OD в отношении 2:3, считая от точки O. Через точки O, A_1, C_1 проведена секущая плоскость, которая делит прямоугольный параллелепипед на две части. Найдите объем большей из частей.

Решение. Так как отрезок X_1X_2 параллелен прямой AC (рисунок 3), то $A_1C_1X_1X_2$ – искомое сечение. Оно разбивает параллелепипед на две части.

Рассмотрим меньшую из двух получившихся частей и сложим ее из трех пирамид: $A_1X_1B_1X_2, X_2BA_1B_1, A_1B_1C_1X_2$. Из условия задачи следует, что $BX_2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$, $X_2C = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ и $X_2A = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

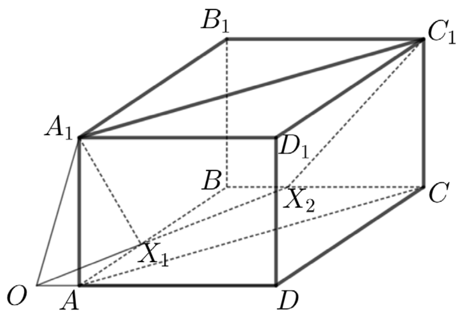

Рис. 3

Найдем объемы указанных пирамид:

$$V_{A_1X_1B_1X_2} = \frac{1}{3} S_{X_1BX_2} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BX_1 \cdot BX_2 \cdot AA_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15}{6} = 15,$$

$$V_{X_2BA_1B_1} = \frac{1}{3}S_{BA_1B_1} \cdot X_2B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot B_1B \cdot X_2B = \frac{1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 3}{6} = 45,$$

$$V_{A_1B_1C_1X_2} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot AA_1 = \frac{1 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 15}{6} = 135.$$

Тогда их сумма равна $15 + 45 + 135 = 195$. Так как объем параллелепипеда: $6 \cdot 9 \cdot 15 = 81$, то объем большей его части равен: $810 - 195 = 615$ед^3.

Ответ: 615.

Аналогичной по идее решения является задача 3. Разница состоит в том, что здесь многогранник не разделяется на части, но внутрь одного включается второй многогранник, имеющий с первым некоторые общие элементы. Основная проблема – связать площади оснований обоих многогранников, а также их высоты. Для этого необходимо ввести несколько переменных величин и вычислить значение некоторой их комбинации (произведения), а не каждой величины в отдельности и оперировать этой комбинацией в целом.

Задача 3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, площадь основания которого равна 42. Точка N лежит на ребре AD так, что $AN : ND = 1 : 2$. Точка M – середина ребра AB. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найдите объем пирамиды B_1CDNK, если $CC_1 = 12$.

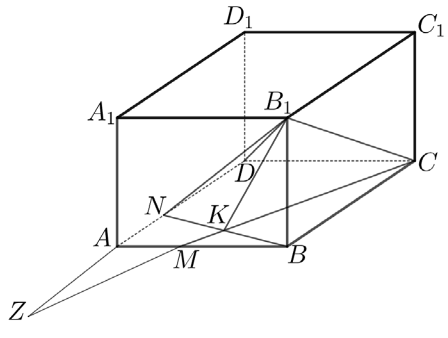

Рис. 4

Заметим, что у искомой пирамиды B_1CDNK высота B_1B, и она же является высотой данного параллелепипеда.

Продлим прямые DA и CM до их пересечения в точке Z (рисунок 4). $AM = MB = a$. Тогда треугольники AMZ и BMC равны.

Пусть $CB = AZ = 3k$. Треугольники NKZ и BKC подобны с коэффициентом $\frac{4}{3}$, поэтому $\frac{NK}{KB} = \frac{4p}{3p}$.

$$S_{ABCD} = 3k \cdot 2a = 42 => ka = 7.\ S_{MBC} = \frac{1}{2}a \cdot 3k = \frac{3}{2}ak = 10{,}5.$$

$$S_{NAB} = \frac{1}{2}k \cdot 2a = 7.$$

По свойству отношения площадей треугольников:

$$\frac{S_{NBA}}{S_{KBM}} = \frac{7p \cdot 2a}{3p \cdot a} == \frac{14}{3} => S_{KBM} = \frac{7 \cdot 3}{14} = 1{,}5.$$

Тогда

$$S_{NDCK} = S_{ABCD} - S_{NAB} - S_{KCB} = 42 - 7 - (10{,}5 - 1{,}5) = 26.$$

Наконец,

$$V_{B_1CDNK} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot B_1B = \frac{1}{3} \cdot 26 \cdot 12 = 104\text{ед}^3.$$

УДК 378.01

Организация учебного процесса в вузе

[1]Чепелева Т. И., канд. тенд. наук, доцент,
[2]Чепелев А. Н., ассистент
[1]Белорусский национальный технический университет,
[2]Белорусский государственный медицинский университет
Минск, Республика Беларусь

Аннотация:
Рассматриваются проблемы организации учебного процесса в условиях эпидемиологической обстановки. Оценивается роль планов и программ, правильность ведения самостоятельной работы студента, контроль выполнения домашних заданий студентами, использование информационных технологий в учебном процессе.