Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания

Минск 2007

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям для студентов инженерно-педагогических специальностей

Минск 2007

УДК 51 (075.8)
~~ББК 22.1я7~~
В 93

Составители:
Е.В. Емеличева, С.Ю. Лошкарева

Рецензенты:
В.В. Карпук, Л.Д. Матвеева

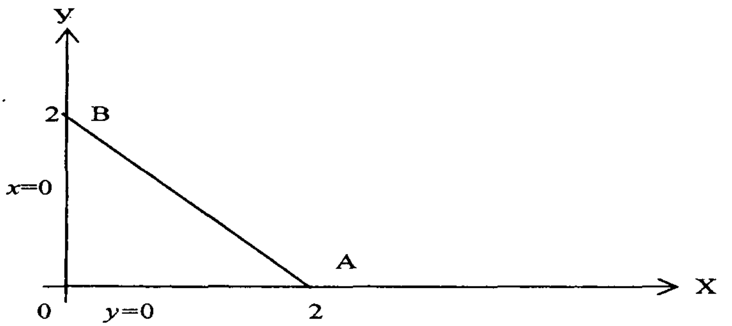
В издании приведены задачи для практических занятий и самостоятельной работы по высшей математике по темам: «Двойные и тройные интегралы», «Ряды» и «Теория вероятности» для студентов инженерных и инженерно-педагогических специальностей.

Практическое занятие № 1

Тема. Двойные интегралы в декартовых координатах

Задача 1. Перейдя к повторным интегралам, расставьте пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если область D ограничена прямыми $x+y=2,\ x=0,\ y=0$.

Решение. Проведем указанные линии и нарисуем область D:



Если взять интеграл по dx как внешний, а по dy как внутренний, то переменная x будет меняться от 0 до 2, а y – от функции $y=0$ (линия входа OA) до функции $y=2-x$ (линия выхода AB). Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy .$$

Если же внешний интеграл взять по переменной y, а внутренний – по переменной x, то y будет изменяться от 0 до 2, а x – от функции $x=0$ (линия входа OB) до функции $x=2-y$ (линия выхода AB). Тогда

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx .$$

Ответ. $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx .$

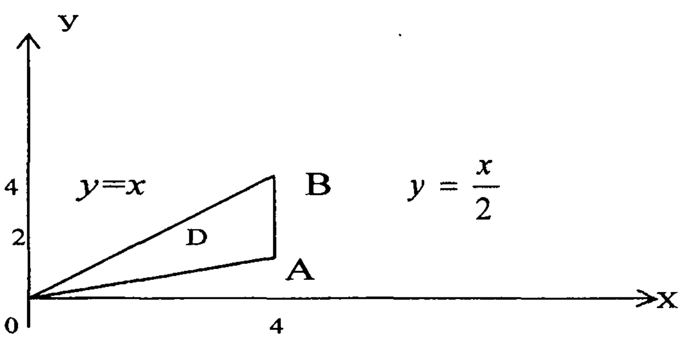
Задание. Представьте двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных, предварительно изобразив область D, если D ограничена заданными линиями:

1. $y=0,\ 4x+y=4,\ x=0$.
2. $y=2,\ x=-1,\ y=-x$.
3. $y=4-x^2,\ y=x^2-4$.
4. $x=1,\ x=3,\ y=-(x-1)^2+2,$ $y=x^2+1.$

Задача 2. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x,y)dy .$$

Решение. Проведя линии $x=0,\ x=4,\ y=\frac{x}{2},\ y=x$, изобразим область D:



Если за внешнюю переменную взять y, то она будет меняться от 0 до 4, при этом линией входа будет линия *OB*, заданная уравнением $x = y$, а линией выхода – ломаная *O–A–B*, причем для $y \in [0, 2]$ линией выхода будет прямая *OA*, заданная уравнением $x = 2y$, а для $y \in [2, 4]$ линией выхода будет прямая *AB*, заданная уравнением $x = 4$.

Таким образом, при изменении порядка интегрирования интеграл разбивается на два интеграла:

$$\int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x,y)dx.$$

Ответ. $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x,y)dx.$

Задание. Измените порядок интегрирования, предварительно изобразив область интегрирования *D*:

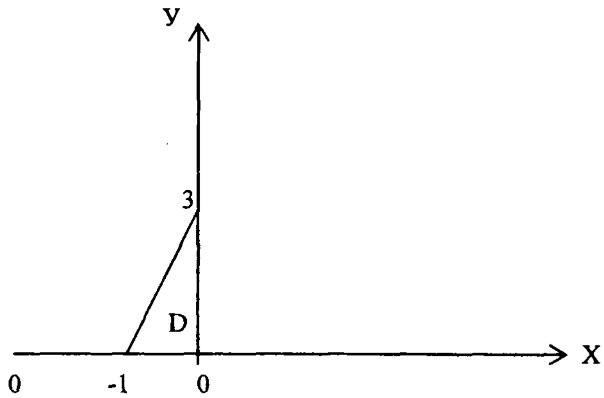
1. $\int_4^8 dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{x}} f(x,y)dy$. 2. $\int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx$. 3. $\int_1^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

4. $\int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x,y)dy$.

Задача 3. Вычислите интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если область *D* ограничена заданными линиями

$$x = 0,\ \ y = 0,\ \ 3x - y + 3 = 0.$$

Решение. Изобразим область *D* на чертеже и перейдем к повторному интегралу, взяв в качестве внешней переменной переменную x:



$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{3x+3} (x+y)\,dy = \int_{-1}^{0} dx \left(xy\Big|_0^{3x+3} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{3x+3} \right) =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \left(xy\Big|_0^{3x+3} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{3x+3} \right) = \int_{-1}^{0} dx \left(x(3x+3) + \frac{(3x+3)^2}{2} \right) =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{15}{2}x^2 + 12x + \frac{9}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{15}{2}\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}x \right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\left(\frac{-5}{2} + 6 - \frac{9}{2} \right) = 1$$

З а д а н и е. Вычислите двойные интегралы:

1. $\iint_D (x^2 - y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2 - 1,\ y = 2 - 2x$.

О т в е т. –6,4

2. $\iint\limits_D (x^2+3y^2)dxdy$, если область D ограничена линиями $x=0,\ y=1,\ y=x$.

Ответ. $\dfrac{5}{6}$

3. $\iint\limits_D xydxdy$, если область D ограничена линиями $y=0,\ x=1,\ y=x^3$.

Ответ. $\dfrac{1}{16}$

4. $\iint\limits_D ydxdy$, если область D ограничена линиями $x=4,\ y^2=4x$.

Ответ. 0

Практическое занятие № 2

Тема. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

Задача 1. Вычислите интеграл $\iiint\limits_V zdxdydz$, если тело V ограничено поверхностями

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z-2=0.$$

Решение. Для данного тела

$$0\le z\le 2-x-y,\ \ 0\le y\le 2-x,\ \ 0\le x\le 2\ ,$$

поэтому

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\int\limits_0^{2-x-y} z\,dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{2-x-y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}(2-x-y)^2\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}((2-x)-y)^2\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}\left((2-x)^2-2(2-x)y+y^2\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\left.\left((2-x)^2y-(2-x)y^2-\frac{y^2}{3}\right)\right|_0^{2-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\left((2-x)^3-(2-x)^3+\frac{(2-x)^3}{3}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\frac{(2-x)^3}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3}-\left.\frac{(2-x)^4}{4}\right|_0^2=\frac{-1}{24}(2-x)^4\Big|_0^2=\frac{-1}{24}\left(0^4-2^4\right)=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

О т в е т. $\frac{2}{3}$

З а д а н и е. Вычислите тройные интегралы:

1. $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, если V – параллелепипед, ограниченный плоскостями $x=0, x=2,\ y=-1,\ y=1,\ z=1, z=3$.

О т в е т. 24

2. $\iiint\limits_V 4y\,dxdydz$, если тело V ограничено плоскостями $x=0, y=0, z=0,\ x+y+z-1=0$.

О т в е т. $\frac{1}{6}$

3. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{2-x}$, если тело V ограничено поверхностями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ \ z=2,\ y=4-x$.

Ответ. 12

4. $\iiint\limits_V (2+z)dxdydz$, если тело V ограничено поверхностью $y=x^2$ и плоскостями $y=1,\ z=0,\ z=2$.

Ответ. 8

5. $\iiint\limits_V xdxdydz$, если тело V ограничено плоскостями $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ \ z=0,\ z=6-x-2y$.

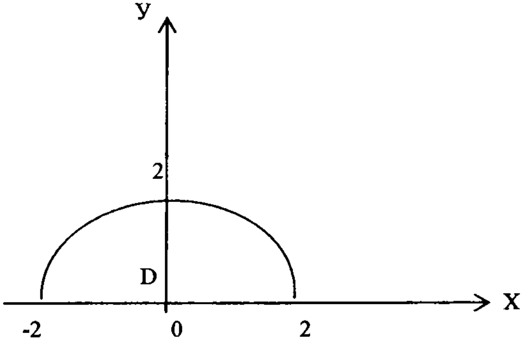
Ответ. $\frac{10}{3}$

Практические занятия № 3–4

Тема 1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Задача 1. Перейдя к полярным координатам, вычислите интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, если область D задана условиями $x^2+y^2 \le 4;\ \ y \ge 0$.

Решение. Область D – верхняя половина круга радиуса 2.



При переходе к полярным координатам угол φ будет изменяться от 0 до π, а расстояние r от 0 до 2.

Выразим подынтегральную функцию через r и φ:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=\sqrt{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=r.$$

Тогда

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{\pi} d\varphi 2\int\limits_0^2 r\cdot r dr=$$

$$=\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^2 r^2 dr=\int\limits_0^{\pi} d\varphi\frac{r^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi} d\varphi=\frac{8}{3}\pi.$$

О т в е т. $\frac{8}{3}\pi$

З а д а н и е. Перейдя к полярным координатам, вычислите интегралы:

1. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где D – верхнее полукольцо, заданное условиями $x^2+y^2\geq 4,\ x^2+y^2\leq 9,\ y\geq 0$.

О т в е т. $\frac{19}{3}\pi$

2. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где D – часть круга $x^2+y^2\leq 9$, лежащая в первой четверти.

О т в е т. $\frac{3\pi}{2}$

3. $\iint\limits_D y\,dxdy$, если область D задана условиями

$$x^2+y^2\le 9,\ x\le 0,\ y\ge 0.$$

Ответ. 9

4. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если область D задана условиями $x^2+y^2\ge\frac{\pi^2}{4},\ x^2+y^2\le\pi^2$.

Ответ. 2π

5. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{16-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2(\sqrt{x^2+y^2})}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}\cdot tg4$

6. $\int\limits_{-R}^0 dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0\frac{xydy}{x^2+y^2}$.

Ответ. $\frac{R^2}{4}$

7. $\int\limits_{-R}^R dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy$.

Ответ. $\pi(1-e^{-R^2})$

Тема 2. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Задача 1. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислите интеграл $\iiint\limits_V z\cdot(x^2+y^2)dxdydz$, где V – часть цилиндра $x^2+y^2\le 1$, ограниченная плоскостями $z=0,\ z=2$.

Р е ш е н и е. Для данного тела

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le 1,\ \ 0 \le z \le 2.$$

Тогда

$$\iiint\limits_V z \cdot (x^2 + y^2)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_0^2 z(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr \int\limits_0^2 zdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr \left(\frac{z^2}{2}\bigg|_0^2 \right) =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^4}{4}\bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \pi .$$

О т в е т. π

З а д а н и е. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислите интегралы:

1. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z)dxdydz$, где тело V ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 1$.

О т в е т. 10π

2. $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$, где тело V ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $z = -1$, $z = 2$.

О т в е т. $\dfrac{3\pi}{2}$

3. $\iiint\limits_V dxdydz$, где тело V ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - x - y$, $z \ge 0$.

О т в ет. 16π

4. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, где тело V ограничено поверхностями $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Ответ. $\dfrac{64}{15}$

5. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, где тело V ограничено поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 9$, $y \geq 0$.

Ответ. $\dfrac{324}{5}$

Тема 3. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Задача 1. Перейдя к сферическим координатам, вычислите интеграл

$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, если тело V – часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, удовлетворяющая условиям $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Решение. Пределы изменения переменных для тела V определяются неравенствами $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 3$.

Тогда, переходя к сферическим координатам, получаем $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ и

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^3 r \cdot r^2 dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^3 r^3 dr =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^3 \right) = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{81\pi}{8}.$$

О т в е т. $\frac{81\pi}{8}$

З а д а н и е. Перейдя к сферическим координатам, вычислите интегралы:

1. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где тело V ограничено сферическими поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ и удовлетворяет условию $z \geq 0$.

О т в е т. $\frac{31\pi}{5}$

2. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, где V – часть шара, ограниченная сферической поверхностью $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

О т в е т. $\frac{\pi}{2}$

3. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, где тело V ограничено конической поверхностью $z^2=x^2+y^2$, плоскостью $z=2$ и удовлетворяет условию $z \geq 0$.

О т в е т. 8π

Практические занятия № 5–6

Тема. Достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов

З а д а ч а 1. Исследуйте по признаку Даламбера сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$.

Р е ш е н и е. $u_n = \frac{n^5}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$; находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2}.$$

Так как $l = \frac{1}{2} < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

З а д а н и е. Исследуйте по признаку Даламбера сходимость ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

О т в е т. Расходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

О т в е т. Расходится.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

О т в е т. Сходится.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$.

О т в е т. Расходится.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

О т в е т. Сходится.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$.

О т в е т. Расходится.

З а д а ч а 2. Исследуйте по признаку Коши сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$.

Р е ш е н и е. $u_n = \frac{2^n}{n^n}$; находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, данный ряд по признаку Коши сходится.

З а д а н и е. Исследуйте по признаку Коши сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

О т в е т. Сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

О т в е т. Расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

О т в е т. Сходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

О т в е т. Сходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{2n+1}\right)^n$.

О т в е т. Расходится.

6. При каких значениях c сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$?

О т в е т. При $c < e$.

З а д а ч а 3. Исследуйте по интегральному признаку сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Найдем несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{2x}{x^2+1}dx=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty}\ln(x^2+1)\Big|_1^{\beta}=\ln(+\infty)-\ln 2=+\infty.$$

Этот несобственный интеграл расходится. Следовательно, согласно интегральному признаку и данный ряд также расходится.

З а д а н и е. Исследуйте по интегральному признаку сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

О т в е т. Сходится.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

О т в е т. Расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$.

О т в е т. Сходится.

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\,ln^3 n}$.

О т в е т. Сходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

О т в е т. Сходится.

З а д а ч а 4. Исследуйте по признаку сравнения сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Р е ш е н и е. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Каждый член $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ данного ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $v_n = \frac{1}{n}$ гармонического ряда: $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, и так как гармонический ряд расходится, то согласно признаку сравнения данный ряд также расходится.

З а д а н и е. Исследуйте по признаку сравнения сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

О т в е т. Сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$.

О т в е т. Сходится.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

О т в е т. Сходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}}$.

О т в е т. Расходится.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

О т в е т. Расходится.

Практическое занятие № 7

Тема. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов

З а д а ч а 1. Исследуйте сходимость ряда (определите, является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся, расходящимся) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Р е ш е н и е. Для этого знакочередующегося ряда выполнены условия признака Лейбница: 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится (гармонический ряд). Значит исходный ряд условно сходящийся.

З а д а н и е. Исследуйте сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

О т в е т. Абсолютно сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3n^2+n}$.

О т в е т. Расходится.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

О т в е т. Условно сходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+2^n}$.

О т в е т. Абсолютно сходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+4}$.

О т в е т. Абсолютно сходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

О т в е т. Абсолютно сходится.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$.

О т в е т. Расходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+(0{,}1)^n)$.

О т в е т. Расходится.

Практическое занятие № 8

Тема. Степенные ряды

З а д а ч а 1. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Р е ш е н и е. Имеем $a_n = \frac{1}{n!}$; $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty .$$

Следовательно, ряд сходится при любом значении x.

З а д а ч а 2. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$a_n = \frac{1}{n};\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}. \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 .$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости $(-1, 1)$.

При $x = 1$ имеем ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, который расходится (гармонический ряд). При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок $[-1, 1)$.

З а д а ч а 3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n \cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2}{n} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x+2 < 2$, т. е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд).

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок $[-4, 0)$.

З а д а н и е. Найдите область сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{7^n}$.

О т в е т. $(-7, 7)$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$.

О т в е т. $[1, 3]$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

О т в е т. $[2, 8)$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$.

О т в е т. $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-5)^n$.

О т в е т. $x = 5$

Практическое занятие № 9

Тема. Разложение функций в степенные ряды

З а д а ч а 1. Разложите в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = 2^x.$$

Р е ш е н и е. Найдем значения функции и ее производных при $x = 0$.

$$f(x) = 2^x,\ f(0) = 2^0 = 1,$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2,\ f'(0) = \ln 2,$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2,\ f''(0) = \ln^2 2,$$

....

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2,\ f^{(n)}(0) = \ln^n 2.$$

Получим

$$2^x = 1 + x\ln 2 + \frac{x^2\ln^2 2}{2!} + \frac{x^3\ln^3 2}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

З а д а ч а 2. Выпишите ряд Маклорена функции e^{-x^2}.
Р е ш е н и е. В разложении

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \; x \in (-\infty, \infty),$$

заменим x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots, \; x \in (-\infty, \infty).$$

З а д а ч а 3. Разложите в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{2}{3 - x}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \; x \in (-1, 1).$$

Так как

$$f(x) = \frac{2}{3 - x} = \frac{2}{3\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{3}},$$

заменив x на $\dfrac{x}{3}$, получим:

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3^3}+\ldots,$$

где $-1<\frac{x}{3}<1$, т. е. $-3<x<3$.

З а д а н и е. Разложите в ряд Маклорена.

1. $f(x)=3^x$.

О т в е т. $3^x=1+\frac{\ln 3}{1!}x+\frac{\ln^2 3}{2!}x^2+\frac{\ln^3 3}{3!}x^3+\ldots,\ x\in(-\infty,\infty)$.

2. $f(x)=\sin\frac{2x^4}{3}$.

О т в е т. $\sin\frac{2x^4}{3}=\frac{2x^4}{3!}-\frac{2^3x^{12}}{3^3\cdot 3!}+\frac{2^5\cdot x^{20}}{3^5\cdot 5!}-\ldots,\ x\in(-\infty,\infty)$.

3. Разложите $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2}}$ в ряд по степеням x.

О т в е т. $x^2\left(1-x^2+\frac{1\cdot 4}{2!}x^4-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3!}x^6+\ldots\right),\ x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

4. Разложите $f(x)=\frac{1}{x}$ в ряд по степеням $x-2$.

О т в е т.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots,\ x\in(0,4).$$

5. Выпишите ряд Маклорена для функции $f(x)=\ln(4-x)$.

О т в е т.

$$\ln(4-x)=\ln 4-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4^3}\cdot\frac{x^3}{3}-\ldots,\ x\in[-4,4).$$

Практическое занятие № 10

Тема. Некоторые приложения степенных рядов

З а д а ч а 1. Вычислите $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 0,0001.

Р е ш е н и е. Преобразуем корень

$$\sqrt[4]{90}=\sqrt[4]{81+9}=\sqrt[4]{3^4\left(1+\frac{9}{81}\right)}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Полагаем в разложении функции $(1+x)^m$, $m=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{9}$ и, умножая на 3, получим

$$\sqrt[4]{90}=3\left(1+\frac{1}{4\cdot 9}-\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 4^2\cdot 9^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{3!\cdot 4^3\cdot 9^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4!\cdot 4^4\cdot 9^4}+\ldots\right)\approx$$

$$\approx 3+0{,}0833-0{,}00347+0{,}00023=3{,}08009.$$

Здесь частичная сумма S_4 обеспечивает заданную точность, так как

$$u_5=u_4\cdot\frac{11}{4\cdot 4\cdot 9}\approx 0{,}00023\cdot\frac{11}{144}<0{,}0001.$$

З а д а н и е.

1. Вычислите $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001.

О т в е т. $\sqrt[4]{17}\approx 2{,}0305$.

2. Вычислите $\sin 1$ с точностью до 0,001.

О т в е т. $\sin 1\approx 0{,}842$.

3. Вычислите $\ln 1{,}04$ с точностью до 0,0001.

О т в е т. $\ln 1{,}04\approx 0{,}0392$.

З а д а ч а 2. Вычислите интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Р е ш е н и е. $\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx =$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2\cdot5}-\frac{x^7}{6\cdot7}+\frac{x^9}{24\cdot9}-\frac{x^{11}}{120\cdot11}+\ldots\right)\Bigg|_0^1 \approx 0{,}747.$$

4. Вычислите интеграл $\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью до 0,0001.

О т в е т. $\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx \approx 0{,}2483.$

5. Вычислите интеграл $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до 0,001.

О т в е т. $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx \approx 0{,}098.$

Практические занятия № 11–12

Тема. Ряды Фурье

З а д а ч а 1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2$ при $-\pi \le x \le \pi$.

Р е ш е н и е. Данная функция четная. Все коэффициенты $b_n = 0$, а коэффициенты a_n вычисляются при $l = \pi$.

$$an=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2x}{n^2}\cos nx+\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=(-1)^n\frac{4}{n^2},\ n\neq 0$$

(Здесь дважды применена формула интегрирования по частям.)

Вычислим

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

Следовательно,

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right).$$

Задание.

1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x$ при $x\in(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Ответ. $f(x)=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$.

2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x+\pi$ при $x\in(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Ответ. $f(x)=\pi+2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right)$.

3. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=\frac{x}{2}$ в интервале $(0,2\pi]$.

Ответ. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\ldots$.

4. Разложите в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную формулой

$$f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi<x<0,\\ 1 \text{ при } 0<x<\pi.\end{cases}$$

О т в е т. $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$.

З а д а ч а 2. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную формулой

$$f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2} \text{ при } \frac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом, затем периодически продолжим ее с периодом 2π на всю ось Ox. Для полученной функции имеем:

$$b_n=0;\quad a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}dx\right)=\frac{3\pi}{4};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{x\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right).$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{3}{8}\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx, \text{ где } x\in[0,\pi].$$

З а м е ч а н и е. Можно было продолжить исходную функцию нечетным образом.

5. Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ x\in(0,\pi)$.

О т в е т.

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right),$$

где $x\in(0,\pi)$.

6. Разложите в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}0{,}3 & \text{при } 0<x<0{,}5,\\ -0{,}3 & \text{при } 0{,}5<x<1.\end{cases}$$

О т в е т. $f(x)=\dfrac{1{,}2}{\pi}\left(\dfrac{\sin 2\pi x}{1}+\dfrac{\sin 6\pi x}{3}+\dfrac{\sin 10\pi x}{5}+\ldots\right)$, где $x\in(0,1)$.

7. Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 1 \text{ при } 1 < x < 2, \\ 3 - x \text{ при } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

О т в е т.

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n}{3} - 1}{n^2} \cos\frac{2}{3}\pi n x, \text{ где } x \in [0, 3].$$

Практическое занятие № 13

Тема. Элементы комбинаторики

З а д а ч а 1. Вычислите: а) $4!$; б) A_7^3; в) C_6^4.

Р е ш е н и е. а) Воспользуемся формулой

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Тогда

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

б) Воспользуемся формулой $A_n^m = \frac{n!}{m!}$. Тогда

$$A_7^3 = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

в) Воспользуемся формулой $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)1}$. Тогда

$$C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

З а д а н и е.

1. Вычислите: 1) 3! ; 2) 5! ; 3) 6 !; 4) 7!

О т в е т. 1) 6; 2) 120; 3) 720; 4) 5040.

2. Вычислите: 1) A_5^2 ; 2) A_{10}^9 ; 3) A_6^4 .

О т в е т. 1) 60; 2) 10; 3) 30.

3. Вычислите: 1) C_4^1 ; 2) C_4^2 ; 3) C_4^3 ; 4) C_4^4 ; 5) C_8^6 ; 6) C_5^3 .

О т в е т. 1) 4; 2) 6; 3) 4; 4) 1; 5) 28; 6) 10.

4. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма?

О т в е т. 20

5. В магазине имеется 5 видов рубашек, 3 вида брюк и 6 видов галстуков. Сколькими способами можно подобрать набор брюки – рубашка – галстук?

О т в е т. 90

6. Группа студентов из 30 человек решила обменяться фотокарточками. Сколько всего фотокарточек понадобилось для этого?

О т в е т. 870

7. Сколько вариантов хоккейной команды можно составить из 9 нападающих, 5 защитников и 3 вратарей, если в состав команды входят 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?

О т в е т. 2520

8. На плоскости имеется 8 точек, из которых 3 лежат на одной прямой. Сколько различных прямых линий можно провести, если брать различные пары из имеющихся точек?

О т в е т. 26

9. Кодовый замок открывается набором из четырех цифр. Сколько может быть различных комбинаций набора?

О т в е т. 10^4

10. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых различны?

О т в е т. 136 080

11. Сколько существует «зеркальных» шестизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Ответ. 900

12. Группа из десяти мальчиков и десяти девочек размещается в ряд на скамейке. Сколько существует вариантов размещения, при которых: а) никакие два мальчика не сидят рядом; б) все мальчики сидят одной группой; в) Коля сидит рядом с Олей?

Ответ. а) $2 \cdot 10! \cdot 10!$; б) $11 \cdot 10! \cdot 10!$; в) $2 \cdot 19 \cdot 18!$

13. В гостиницу прибыло семь командированных мужчин. Имеются свободные номера: одноместный, двуместный и четырехместный. а) Сколько существует вариантов размещения прибывших? б) Сколько вариантов того, что Иванов и Петров попадут в один номер?

Ответ. а) 105; б) 35.

14. На первую горизонталь шахматной доски (8 клеток) расставляются пять фигур. Сколько существует различных вариантов расстановки, если эти фигуры: а) король, ферзь, конь, слон, ладья; б) король, ферзь, конь и два слона; в) король, два коня и два слона; г) пять пешек?

Ответ. а) 6720; б) 3360; в) 1680; г) 56.

15. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хоть одна четная цифра?

Ответ. 884 375

16. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть хоть одна единица?

Ответ. $9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$

17. Из колоды в 52 карты (4 масти по 13 карт) вынимаются четыре карты. а) Сколько существует вариантов выбора, при которых среди выбранных карт будет хоть одна карта «красной» масти? б) Сколько существует вариантов выбора, при которых среди выбранных карт будет хоть один туз?

Ответ. а) $C_{52}^4 - C_{26}^4$; б) $C_{52}^4 - C_{48}^4$.

Практические занятия № 14–15

Тема 1. Алгебра событий

З а д а ч а 1. Произведено два выстрела по мишени. Опишите пространство элементарных событий. Опишите через элементарные события следующие события: A – допущен хотя бы один промах и B – было два попадания. Являются ли события A и B совместными? Противоположными?

Р е ш е н и е. Пространство элементарных событий: $\{a_1$ – попадание при первом выстреле; a_2 – попадание при втором выстреле$\}$. Тогда событие $A = a_1\overline{a}_2 + \overline{a}_1 a_2 + \overline{a}_1\overline{a}_2$; событие $B = a_1 a_2$. События A и B несовместны и не являются противоположными.

З а д а н и е. Игральную кость бросают один раз. 1. Опишите пространство элементарных событий. 2. Укажите, из каких элементарных событий состоят события: A – выпало нечетное число очков, B – выпало число очков, кратное трем, C – выпало не более четырех очков, D – выпало не менее трех и не более пяти очков. 3. Опишите события: А+С, $B{\cdot}D$, $\overline{B} - A$, $\overline{C} \cdot \overline{D}$.

Тема 2. Непосредственный подсчет вероятностей

З а д а ч а 2. Прибор состоит из трех блоков. События B_1, B_2, B_3 – работает первый, второй и третий блок соответственно. Событие A – прибор работает. Опишите событие A через события B_1, B_2, B_3, если для того, чтобы прибор работал надо: а) чтобы работали все блоки; б) чтобы работали хотя бы два блока; в) чтобы работал хотя бы один блок.

З а д а н и е. Стрелок стреляет по мишени два раза. Какие из перечисленных ниже событий являются совместными:

C_1 – хотя бы одно попадание; C_2 – хотя бы один промах; C_3 – ровно два попадания; C_4 – ни одного попадания?

Задача 3. Из 60 вопросов к экзамену студент выучил 50. В билете 3 вопроса. Какова вероятность события A: студент выучил все вопросы билета; события B: студент выучил хотя бы один вопрос билета?

Решение. Воспользуемся формулой $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$. Тогда $|\Omega| = C_{60}^3 = \dfrac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 34\,220$ – число вариантов выбора трех вопросов из 60. $|A| = C_{50}^3 = 19\,600$ – число благоприятных вариантов выбора трех вопросов из 50 выученных. Получается $P(A) = \dfrac{19\,600}{34\,220} \approx 0{,}572$.

Чтобы найти вероятность события B воспользуемся формулой $P(B) = 1 - P(\overline{B})$, где событие $\overline{B}$ – студент не выучил ни одного вопроса билета, т. е. событие, противоположное событию B. $|\overline{B}| = C_{10}^3 = 120$; $P(\overline{B}) = \dfrac{|\overline{B}|}{|\Omega|} = 0{,}003$. Тогда $P(B) = 0{,}997$.

Ответ. 0,572; 0,997.

Задание

1. Бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков будет не более 3.

Ответ. $\dfrac{1}{12}$

2. Бросают 4 игральные кости. Найдите вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

Ответ. $\dfrac{1}{216}$

3. В партии из 20 деталей 16 стандартных. Наудачу выбираются три детали. Найдите вероятности событий: A – все три детали стандартны; B – все детали нестандартны; C – две детали стандартны; D – одна деталь стандартна.

Ответ.

$$P(A) = 0{,}497,\ P(B) = 0{,}003,\ P(C) = 0{,}42,\ P(D) = 0{,}08.$$

4. Кубик с окрашенными гранями разрезан на 1000 одинаковых маленьких кубиков, которые затем перемешиваются. Наудачу вынимается один кубик. Найдите вероятности событий: A – у кубика окрашена одна грань; B – у кубика окрашены две грани; C – у кубика окрашены три грани; D – кубик не окрашен.

Ответ.

$$P(A) = 0{,}384,\ P(B) = 0{,}96,\ P(C) = 0{,}008,\ P(D) = 0{,}512.$$

5. В ящике находятся 6 красных, 5 синих и 4 желтых шара. Наудачу вынимаются два шара. Найдите вероятности событий: A – вынуты два шара одного цвета; B – вынуты два шара разных цветов; C – среди вынутых шаров нет синих.

Ответ. $P(A) = \frac{31}{105}$, $P(B) = \frac{74}{105}$, $P(C) = \frac{45}{105}$.

6. На складе находится 10 телевизоров, из них 4 фирмы «Витязь». Найдите вероятность того, что из 5 наудачу отобранных телевизоров 2 будут фирмы «Витязь».

Ответ. $\frac{10}{21}$

7. Найдите вероятность того, что дни рождения 12 случайно выбранных людей придутся на разные месяцы года.

Ответ. $\frac{12!}{12^{12}} \approx 0{,}000053$

8. Для уменьшения общего числа игр 16 хоккейных команд разбиты на две подгруппы по 8 команд в каждой. Найдите вероятность того, что две наиболее сильные команды: а) окажутся в разных подгруппах; б) окажутся в одной подгруппе.

О т в е т. а) $\frac{7}{15}$; б) $\frac{8}{15}$.

9. В урне 10 шаров занумерованных числами 1, 2,..., 10. Из урны наудачу вынимается шар и записывается его номер. Затем шар откладывается в сторону и из урны вынимается второй. Найдите вероятность того, что номер второго шара больше, чем номер первого.

О т в е т. 0,5.

10. Монета бросается три раза. Найдите вероятность того, что герб выпадет хотя бы один раз.

О т в е т. $\frac{7}{8}$

11. В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Найдите вероятность того, что из 2 наугад отобранных изделий: а) ровно одно окрашено; б) хотя бы одно окрашено.

О т в е т. а) 0,6; б) 0,9.

12. Из 12 лотерейных билетов 4 выигрышных. Наудачу берут 6 билетов. Какова вероятность того, что среди них будет хоть один выигрышный?

О т в е т. 0,96

Тема 3. Геометрическая вероятность

З а д а ч а 4. На отрезок L длиной 20 см наудачу помещен отрезок l длиной 5 см. Найдите вероятность того, что точка, наудачу поставленная на L, попадет также и на отрезок l.

Р е ш е н и е. $P(A) = \frac{|l|}{|L|} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

З а д а н и е

13. На отрезке OA длины L наугад ставится точка B. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину не меньше чем $L/3$.

О т в е т. 1/3

14. В круг радиусом R наудачу помещен круг меньшего радиуса r. Найдите вероятность того, что точка, наудачу поставленная в круг R, попадет также и в круг r.

О т в е т. $\frac{r^2}{R^2}$

15. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиусом $r < a$. Найдите вероятность того, что монета не пересечет ни одну из параллельных прямых.

О т в е т. $\frac{a-r}{a}$

16. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиусом $r < a/2$. Найдите вероятность того, что монета не пересечет ни одну из сторон квадрата.

О т в е т. $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$

17. Внутри квадрата с вершинами в точках (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) наудачу выбрана точка M с координатами $(x;\ y)$. Найдите вероятность событий:

$$A\colon \{x > 1/2;\ y < 1/3\},\ B\colon \{x^2 + y^2 < 1\},\ C\colon \min\{x, y\} < 1/4.$$

О т в е т. $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{\pi}{4}$, $P(C) = \frac{1}{4}$.

18. На отрезке AB длиной 10 см наугад ставят точку M. Какова вероятность того, что площадь квадрата со стороной AM будет больше 25 см^2 и меньше 64 см^2?

О т в е т. 0,09

19. На отрезке OA длиной L числовой оси OX наудачу ставятся точки $B(x)$ и $C(y)$, причем $x \le y$. Найдите вероятность того, что длина отрезка BC меньше $L/2$.

Ответ. 3/8.

Практическое занятие № 16

Тема. Теоремы сложения и умножения вероятностей

При решении задач этой темы используются формулы:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

$$P(AB) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B).$$

Задача 1. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятности поражения ими цели равны соответственно 0,7 и 0,8. Какова вероятность поражения цели?

Решение. Пусть событие A – поражение цели первым стрелком, событие B – поражение цели вторым стрелком. Тогда $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,8$, $P(\overline{A}) = 0,3$, $P(\overline{B}) = 0,2$. Событие C – поражение мишени описывается через события A и B следующим образом: $C = AB + \overline{A}B + A\overline{B}$. Так как слагаемые представляют собой несовместные события, то

$$P(C) = P(AB) + P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,94.$$

Ответ. 0,94

Задание

1. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень равна 0,6 для первого стрелка и 0,7 для второго стрелка. Найдите вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок.

Ответ. 0,46

2. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе двух стрелков равна 0,38. Известно, что вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8. Найдите вероятность попадания в цель при одном выстреле для второго стрелка.

Ответ. 0,7

3. Для предупреждения пожара установлено два сигнализатора, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что при пожаре сработает первый сигнализатор, равна 0,9, для второго сигнализатора эта вероятность равна 0,95. Найдите вероятность того, что при пожаре сработает только один сигнализатор.

Ответ. 0,14

4. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведено три независимых измерения. Найдите вероятность того, что только в одном из них будет допущена ошибка, превышающая заданную точность.

Ответ. 0,432

5. При стрельбе из пистолета вероятность попадания в «десятку» равна 0,25; в «девятку» – 0,30; в «восьмерку» – 0,15; в «семерку» – 0,12. Найдите вероятность того, что стрелок, сделав один выстрел, выбьет: а) не менее 8 очков; б) не более 8 очков?

Ответ. а) 0,70; б) 0,45.

6. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула находится в первом справочнике, равна 0,6; во втором – 0,7; в третьем – 0,8. Найдите вероятность того, что нужная формула находится: а) только в

одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках; г) нет ни в одном справочнике.

О т в е т. а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336; г) 0,024.

З а д а ч а 2. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы вероятность того, что ни на одной из костей не выпадет 6 очков, стала бы меньше, чем 0,3?

Р е ш е н и е. Пусть событие A_i состоит в том, что на i-й кости не выпало 6 очков. Тогда $P(A_i)=\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при бросании n костей на них не выпадет ни одной «6», равна $P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Чтобы найти n, надо решить неравенство $\left(\frac{5}{6}\right)^n<0{,}3$, откуда $n\geq 7$.

О т в е т. $n\geq 7$

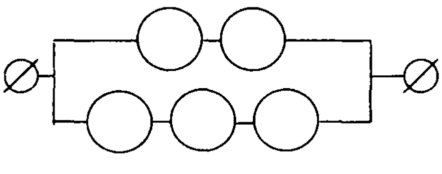
7. Вероятность выигрыша лотерейного билета равна $\frac{1}{5}$. Сколько надо купить лотерейных билетов, чтобы вероятность того, что хотя бы один билет выиграет, стала бы больше, чем 0,8?

О т в е т. Не менее 8.

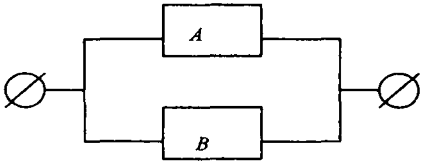
8. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Сколько надо сделать выстрелов, чтобы вероятность того, что не будет ни одного промаха, стала бы меньше, чем 0,4?

О т в е т. Не менее 5.

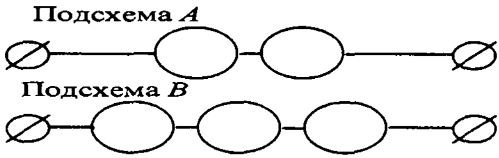
З а д а ч а 3. Найдите вероятность работы схемы, если вероятность работы каждого отдельного элемента равна 0,8.



Р е ш е н и е. Схема представляет собой параллельное соединение подсхем A и B.



Подсхема A представляет собой последовательное соединение двух элементов, а подсхема B – последовательное соединение трех элементов.



Тогда вероятность работы подсхемы A

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64;$$

вероятность отказа подсхемы A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}36;$$

вероятность работы подсхемы B

$$P(B) = (0{,}8)^3 = 0{,}512;$$

вероятность отказа подсхемы B

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}488;$$

вероятность отказа всей схемы

$$P_{\text{отк}} = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}17568;$$

вероятность работы всей схемы

$$P_{\text{раб}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0{,}82432.$$

О т в е т. 0,82432

З а д а н и е. Найдите вероятность работы схем (рис. 1–6), если вероятность работы каждого отдельного элемента равна 0,8. Ответ округлите до 0,0001.

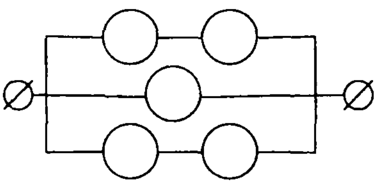


Рис. 1

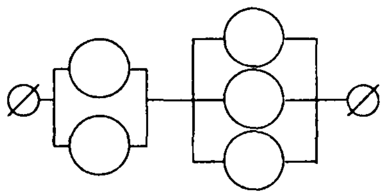


Рис. 2

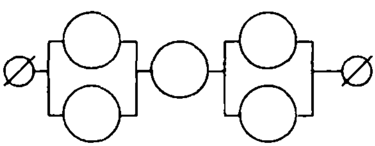


Рис. 3

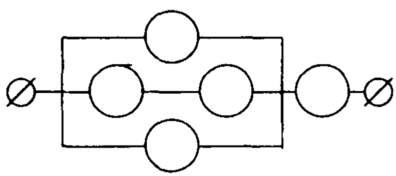


Рис. 4

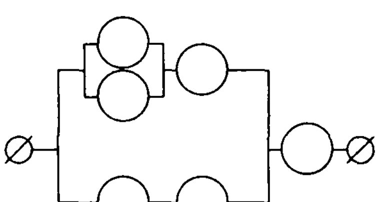


Рис. 5

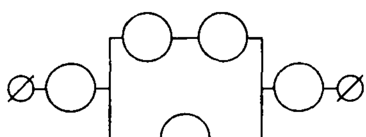


Рис. 6

О т в е т. 1) 0,974; 2) 0,952; 3) 0,737; 4) 0,788; 5) 0,733; 6) 0,594.

Практическое занятие № 17

Тема. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

З а д а ч а 1. В коробке находятся 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры наудачу берут из коробки 2 мяча, затем их возвращают в коробку. Какова вероятность для второй игры вынуть наудачу из этой коробки два новых мяча?

Р е ш е н и е. Пусть событие A = {вынуть два новых мяча для второй игры}. Ситуация перед второй игрой описывается следующими гипотезами: B_1 = {в коробке один новый мяч}, если для первой игры вынули два новых мяча; B_2 = {в коробке два новых мяча}, если для первой игры вынули один новый и один уже использованный мяч; B_3 = {в коробке три новых мяча}, если в первой игре играли уже использованными мячами. Гипотезы B_1, B_2 и B_3 образуют полную группу гипотез, так как они несовместны и в сумме составляют все возможные исходы. Найдем вероятности каждой гипотезы:

$$P(B_1)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5};\quad P(B_2)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5};\quad P(B_3)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}.$$

Найдем условные вероятности события A в случае осуществления каждой гипотезы:

$$P_{B_1}(A)=0;\quad P_{B_2}(A)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15};\, P_{B_3}(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}.$$

Теперь используя формулу полной вероятности, найдем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{Bi}(A)=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}.$$

Ответ. $\frac{2}{25}$

Задание

1. В первом ящике было 3 белых и 8 черных шаров, во втором – 6 белых и 5 черных. Из первого ящика во второй переложили наудачу взятый шар. Какова теперь вероятность вынуть черный шар: а) из первого ящика; б) из второго ящика?

Ответ. а) $\frac{8}{11}$; б) $\frac{21}{44}$.

2. В первом ящике 10 шаров, из них 8 белых; во втором ящике 20 шаров, из них 4 белых. Из каждого ящика наудачу извлекли по шару, после чего из этих двух шаров выбрали один. Какова вероятность того, что был выбран белый шар?

Ответ. 0,5

3. В ящике было 9 шаров. В него положили белый шар, шары перемешали, после чего из ящика наудачу вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый, если все предположения о цвете шаров в ящике равновероятны?

Ответ. 0,45

4. В ящике находится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей производства завода № 2 и 18 деталей – завода № 3. Вероятность того, что деталь отличного качества равна для 1, 2 и 3-го заводов 0,9, 0,6 и 0,9 соответственно. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная из ящика деталь будет отличного качества.

Ответ. 0,78

5. Из 12 лотерейных билетов было 4 выигрышных. Какова вероятность вытянуть выигрышный билет, если перед этим было вытянуто два билета?

Ответ. 0, 26

6. Группа состоит из 2 отличных, 4 хороших и 4 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9, 0,75 и 0,6 для отличного, хорошего и посредственного стрелков соответственно. Наугад выбранный стрелок выстрелил в цель. Какова вероятность поражения мишени?

О т в е т. 0,72

З а д а ч а 2. В коробке находятся 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры наудачу берут из коробки 2 мяча, затем их возвращают в коробку. Для второй игры вынули два новых мяча. Какова вероятность того, что при этом для первой игры вынули два уже использованных мяча?

Р е ш е н и е. Пусть событие A = {вынуть два новых мяча для второй игры}. Ситуация перед второй игрой описывается следующими гипотезами: B_1 = {в коробке один новый мяч}, если для первой игры вынули два новых мяча; B_2 = {в коробке два новых мяча}, если для первой игры вынули один новый и один уже использованный мяч; B_3 = {в коробке три новых мяча}, если в первой игре играли уже использованными мячами. Гипотезы B_1, B_2 и B_3 образуют полную группу гипотез, так как они несовместны и в сумме составляют все возможные исходы. Вероятность того, что при наступлении события A реализовалась именно гипотеза B_3, вычисляется по формуле Бейеса:

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}.$$

В ходе решения задачи 1 были найдены:

$$P(B_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}; \quad P_{B_3}(A) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}; \quad P(A) = \frac{2}{25}.$$

Таким образом, $P_A(B_3)=\dfrac{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}}{\dfrac{2}{25}}=\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$

7. В ящике было 3 белых и 7 черных шаров. Один шар вынули наудачу и отложили в сторону. Следующий вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что и первый шар был белым?

Ответ. $\frac{2}{9}$

8. Из 12 лотерейных билетов 5 выигрышных. Билеты тянут наудачу по одному. Во второй раз был вытянут выигрышный билет. Какова вероятность того, что и в первый раз был вытянут выигрышный билет?

Ответ. $\frac{4}{11}$

9. Число грузовых машин, проезжающих мимо АЗС, относится к числу легковых машин как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина заедет на заправку, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К АЗС подъезжает на заправку машина. Какова вероятность того, что это грузовик?

Ответ. $\frac{3}{7}$

10. Группа состоит из 2 отличных, 4 хороших и 4 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9; 0,75 и 0,6 для отличного, хорошего и посредственного стрелков соответственно. Наугад выбранный стрелок выстрелил в цель и попал в мишень. Какова вероятность того, что стрелял отличный стрелок?

Ответ. $\frac{1}{4}$

11. Три стрелка произвели залп, причем в цель попало две пули. Вероятности попадания стрелков равны 0,6; 0,5 и 0,4. Найдите вероятность того, что третий стрелок попал в цель.

О т в е т. $\frac{10}{19}$

Практические занятия № 18–19

Тема 1. Повторение испытаний. Схема Бернулли

З а д а ч а 1. Вероятность перерасхода воды на предприятии в течение одного дня равна 0,1. Каковы вероятности того, что в течение пятидневной рабочей недели перерасход воды произойдет от одного до пяти раз?

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Тогда вероятность того, что перерасход воды произойдет только один раз, равна

$$P_5(1) = C_5^1(0{,}1)(0{,}9)^4 = 0{,}32805;$$

дважды – $P_5(2) = C_5^2(0{,}1)^2(0{,}9)^3 = 0{,}0729$;

три раза – $P_5(3) = C_5^3(0{,}1)^3(0{,}9)^2 = 0{,}0081$;

четыре раза – $P_5(4) = C_5^4(0{,}1)^4(0{,}9) = 0{,}00045$;

пять раз – $P_5(5) = C_5^5(0{,}1)^5(0{,}9)^0 = 0{,}00001$.

Наконец, вероятность того, что перерасхода воды не произойдет, равна $P_5(0) = C_5^0(0{,}1)^0(0{,}9)^5 = 0{,}59049$.

З а д а н и е

1. Два равносильных противника играют в шахматы без ничьих. Что вероятнее: а) выиграть две партии из четырех или три партии из шести; б) выиграть не менее двух партий из трех или не менее трех партий из пяти?

О т в е т. а) две партии из четырех; б) одинаковая вероятность.

2. Монету бросают пять раз. Найдите вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

О т в е т. а) $\frac{3}{16}$; б) $\frac{13}{16}$.

3. Какова вероятность выпадения хотя бы двух шестерок при трех бросках игральной кости?

О т в е т. $\frac{2}{27}$

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,25. Было произведено пять выстрелов. Какова вероятность а) не менее трех попаданий; б) хотя бы одного попадания?

О т в е т. а) $\frac{53}{512}$; б) $1-\left(\frac{3}{4}\right)^5$.

З а д а ч а 2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он хотя бы один раз попал в цель?

Р е ш е н и е. Вероятность того, что при n выстрелах не будет ни одного попадания равна $P_n(0)=C_n^0(0{,}4)^0\,(0{,}6)^n=(0{,}6)^n$. Вероятность того, что будет хоть одно попадание равна $1-P_n(0)$. Таким образом, решение задачи сводится к решению неравенства $1-(0{,}6)^n\geq 0{,}9$; $(0{,}6)^n\leq 0{,}1$. Имеем: $(0{,}6)^4\approx 0{,}12$; $(0{,}6)^5\approx 0{,}07$. Следовательно, нужно сделать не менее пяти выстрелов.

5. Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы вероятность выпадения хотя бы одной шестерки была больше 0,8?

Ответ. Не менее 9.

6. В лотерее выигрывает каждый пятый билет. Сколько билетов надо приобрести, чтобы вероятность того, что хотя бы один билет выиграет, была больше 0,7?

Ответ. Не менее 6.

7. Партия изделий содержит 1 % брака. Каков должен быть объем контрольной выборки, чтобы вероятность обнаружить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

Ответ. Не менее 299 изделий.

Задача 3. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найдите наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

Решение. Наивероятнейшее число k_0 наступления события в независимых испытаниях определяется двойным неравенством $np - q \le k_0 < np + p$. По условию

$$n = 24,\ \ p = 0{,}6\ \ q = 0{,}4 .$$

Тогда $24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 < 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6$ или $14 \le k_0 < 15$. Так как $np - q = 14$ – целое число, то наивероятнейших чисел два: 14 и 15.

8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Произведено 15 выстрелов. Найдите наивероятнейшее число попаданий.

Ответ. 12

Тема 2. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Задача 1. Вероятность брака при штамповке деталей равна 0,05. Найдите вероятность того, что в партии из 10 000 деталей бракованными окажутся: а) ровно 500 деталей; б) ровно 530 деталей.

Решение. Имеем $p = 0,005,\ q = 1 - p = 0,95,\ n = 10\ 000$. Для первого случая $k = 500$; для второго – 530.

Воспользуемся формулой локальной теоремы Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Тогда

$$np = 500,\ \frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{0,05 \cdot 0,95 \cdot 10\ 000}} = \frac{1}{\sqrt{475}} \approx 0,046.$$

Для первого случая $x = 0$. По таблице находим

$$\varphi(0) = 0,3989.$$

Тогда

$$P_{10\,000}(500) = 0,046 \cdot 0,1569 \approx 0,007.$$

Ответ. а) 0,018; б) 0,007.

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найдите вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно: а) 50 мальчиков; б) 51 мальчик.

Ответ. а) 0,0782; б) 0,07978.

2. Посеяно 10 000 семян. Вероятность того, что семя не прорастет, равна 0,0003. Какова вероятность того, что все семена прорастут?

О т в е т. 0,0516

3. Вероятность выхода из строя одного элемента в течение года равна 0,2. Какова вероятность того, что из 100 элементов в течение года выйдут из строя ровно 15?

О т в е т. 0,04565

4. Вероятность прерывания телефонного соединения равна 0,03. Какова вероятность того, что среди 100 телефонных соединений будет ровно одно прерывание?

О т в е т. 0,118

З а д а ч а 2. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Вероятность любого абонента позвонить в течение часа равна 0,05. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят от 5 до 45 человек?

Р е ш е н и е. Искомую вероятность найдем с помощью интегральной теоремы Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$,

а значение функции Ф находится по специальной таблице.

Имеем: $n = 600, p = 0{,}05, q = 1 - p = 0{,}95,\ k_1 = 5,\ k_2 = 45$.

Вычислим: $\sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = \sqrt{28{,}5} \approx 5{,}34$,

$$x_2 = \frac{45 - 600 \cdot 0{,}05}{5{,}34} = \frac{15}{5{,}34} \approx 2{,}80,$$

$$x_2 = \frac{5 - 600 \cdot 0{,}05}{5{,}34} = \frac{-25}{5{,}34} \approx -4{,}68.$$

По таблице находим: $\Phi(2{,}80)=0{,}4974$,

$$\Phi(-4{,}68)=-\Phi(4{,}68)=-0{,}499.$$

Тогда $P_{600}(5{,}45)=0{,}497-(-0{,}499)=0{,}996.$

Ответ. 0,996

5. Газета содержит 20 000 букв. Каждая буква может быть неправильно напечатана с вероятностью 0,004. Какова вероятность того, что в газете будет не менее двух опечаток?

Ответ. 0, 9830

6. При штамповке деталей вероятность брака составляет 1 %. Какова вероятность того, что среди 10 000 случайно отобранных деталей не более 110 окажутся бракованными?

Ответ. 0,8413

7. Завод отправил в магазин 5000 лампочек. Вероятность того, что лампочка при транспортировке разобьется, равна 0,0002. Найдите вероятность того, что в магазин привезут не более трех разбитых лампочек.

Ответ. 0,8185

8. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Страховой взнос в год составляет 30 у.е., а в случае аварии компания выплачивает пострадавшему 3000 у.е. Вероятность аварии для одного автомобиля в течение года составляет 0,006. Найдите вероятность следующих событий: A – в течение года компания потерпит убыток; B – прибыль компании за год превысит 60 000 у.е.; C – прибыль компании за год превысит 120 000 у.е.; D – прибыль компании за год превысит 180 000 у.е.

Ответ. $P(A)=0$; $P(B)=0{,}9952$; $P(C)=0{,}5$; $P(D)=0{,}0048$.

Тема 3. Отклонение относительной частоты от теоретической вероятности

При решении задач по этой теме используется формула

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

1. Вероятность появления события в каждом из 900 испытаний равна 0,5. Найдите вероятность того, что относительная частота отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Ответ. 0,7698

2. Вероятность появления события в каждом из 10 000 испытаний равна 0,75. Найдите вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Ответ. 0,979

Задача 1. Вероятность появления события в опыте равна 0,2. Найдите число испытаний n, при котором с вероятностью примерно 0,99 можно ожидать, что отклонение относительной частоты от теоретической вероятности по абсолютной величине не превзойдет 0,04.

Решение. Имеем: $P=0{,}99,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2,\ \varepsilon=0{,}04$. Так как по формуле $P\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$, то $0{,}99\approx 2\Phi\left(0{,}04\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)$, откуда $\Phi\left(0{,}04\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}16}}\right)=0{,}495$. По таблице находим: $0{,}04\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}16}}=2{,}58$, откуда $\sqrt{n}=25{,}8$, $n\geq 666$.

Ответ. 666

3. В урне содержатся белые и черные шары в соотношении 4:1 (белых к черным). Из урны наудачу вынимается шар, регистрируется его цвет, после чего шар возвращается обратно. Чему равно минимальное число опытов, при котором с веро-

ятностью 0,95 можно ожидать, что относительная частота появления белого шара отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01?

Ответ. 6147

4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Сколько выстрелов надо сделать, чтобы отклонение относительной частоты попаданий от вероятности не превышало бы 0,01 с вероятностью: а) 0,96; б) 0,9?

Ответ. а) 8826; б) 5718.

5. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найдите такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 отклонение относительной частоты от вероятности не превысило бы ε.

Ответ. 0,05

6. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найдите такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,98 отклонение относительной частоты от вероятности не превысило бы ε.

Ответ. 0,01

Задача 2. Небольшой городок ежедневно посещают 100 туристов, которые независимо друг от друга идут обедать в один из двух ресторанов. Владелец одного из ресторанов хочет, чтобы с вероятностью, близкой к 0,99, все клиенты, пришедшие к нему, могли бы пообедать без очереди. Сколько мест он должен держать в ресторане?

Решение. Определим границы числа посетителей ресторана с точностью 0,99. Имеем:

$$P = 0{,}99,\ n = 100,\ p = 0{,}5,\ q = 0{,}5\,.$$

Воспользуемся формулой отклонения относительной частоты от вероятности:

$$P = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Тогда

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{100}{0,5\cdot 0,5}}\right) = 0,99\,;\ \Phi(20\varepsilon) = 0,495 = \Phi(2,58);\ 20\varepsilon = 2,58\,,$$

откуда $\varepsilon = 0,129$. Обратимся к левой части формулы: $P = P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$, где m – число произошедших событий, в данном случае число посетителей ресторана. Отсюда $-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$; $-0,129 < \frac{m}{100} - 0,5 < 0,129$; $0,371 < \frac{m}{100} < 0,629$; $37,1 < m < 62,4$.

Следовательно, с вероятностью 0,99 число посетителей ресторана находится между 37 и 63. Чтобы все посетители могли пообедать без очереди, в ресторане должно быть 63 места.

Ответ. 63

7. ОТК проверяет на брак 475 деталей. Вероятность того, что деталь бракованная, равна 0,05. Найдите с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число бракованных деталей.

Ответ. От 14 до 34.

8. Игральную кость бросают 80 раз. Найдите границы, в которых будет заключено число выпадений шести очков с вероятностью: а) 0,99; б) 0,8.

Ответ. а) от 4 до 22; б) от 9 до 12.

9. При штамповке деталей вероятность брака составляет 1 %. Найдите с вероятностью 0,9 границы, в которых будет заключено число бракованных деталей в партии из 1000 деталей.

Ответ. От 9 до 15.

Практическое занятие № 20

Тема. Дискретные случайные величины (СВ) и их характеристики

З а д а ч а 1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,1. Случайная величина X – число отказавших элементов. Составьте закон распределения СВ X и найдите математическое ожидание и дисперсию X.

Р е ш е н и е. Очевидно, что СВ X может принимать значения от 0 до 3. Для нахождения вероятности того, что X примет значение k, воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Имеем: $n = 3,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9$. Тогда

$$P(X=0) = C_3^0 (0{,}1)^0 \, (0{,}9)^3 = 0{,}729;$$

$$P(X=1) = C_3^1 (0{,}1)^1 \, (0{,}9)^2 = 0{,}243;$$

$$P(X=2) = C_3^2 (0{,}1)^2 \, (0{,}9)^1 = 0{,}027;$$

$$P(X=3) = C_3^3 (0{,}1)^3 \, (0{,}9)^0 = 0{,}001.$$

Составим таблицу

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Проверим выполнение условия $\sum_i p_i = 1$. Действительно, 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1. Следовательно, получен закон распределения СВ X.

Вычислим математическое ожидание X, воспользовавшись формулой $M(X)=\sum_i p_i x_i$. Тогда

$$M(X)=0\cdot 0{,}729+1\cdot 0{,}243+2\cdot 0{,}027+3\cdot 0{,}001=0{,}3.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2.$$

Тогда

$$M\left(X^2\right)=0{,}729\cdot 0^2+0{,}243\cdot 1^2+0{,}027\cdot 2^2+0{,}001\cdot 3^2=$$

$$=0{,}243+0{,}108+0{,}009=0{,}36.$$

$$D\left(X\right)=0{,}36-\left(0{,}3\right)^2=0{,}36-0{,}09=0{,}27.$$

Ответ. $M\left(X\right)=0{,}03$; $D\left(X\right)=0{,}27$.

1. В ящике 4 годные и 2 бракованные детали. Наудачу из ящика вынимают две детали. СВ X – число годных деталей среди вынутых. Найдите закон распределения СВ X.

2. В ящике 4 годные и 2 бракованные детали. Они достаются по одной, пока не будут отобраны две годные. СВ X – число вынутых деталей. Найдите закон распределения СВ X.

3. Стрелку выдано три патрона. Он стреляет в цель до первого попадания или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. СВ X – число выстрелов. Найдите закон распределения СВ X.

4. В партии деталей 10 % нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. СВ X – число нестандартных деталей среди отобранных. Найдите закон распределения СВ X и его математическое ожидание.

5. Дискретная СВ задана законом распределения

X	4	6	x_3
p	0,5	0,3	p_3

Известно, что математическое ожидание этой СВ равно 8. Найдите x_3 и p_3.

О т в е т. $x_3 = 21$, $p_3 = 0{,}2$.

6. Дискретная СВ задана таблицей распределения

X	0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

Напишите закон распределения СВ $y = \sin x$.

7. Найдите математическое ожидание и дисперсию СВ X, где X – число выпавших на игральной кости очков при одном броске.

О т в е т. $M(X) = \frac{7}{2}$, $D(X) = \frac{35}{12}$.

8. Найдите математическое ожидание и дисперсию СВ X, заданной таблицей распределения

X	-2	-1	0	1
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

О т в е т. $M(X) = -\frac{1}{8}$, $D(X) = \frac{119}{64}$.

9. По заданной таблице распределения найдите дисперсию СВ X

X	-1	1	2	3
p	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	p

Ответ. $\frac{175}{64}$

Практическое занятие № 21

Тема. Непрерывные СВ и их характеристики

Задача 1. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & \text{если } x\in[0,3], \\ 0, & \text{если } x\notin[0,3]. \end{cases}$$

Найдите: 1) коэффициент a; 2) функцию распределения $F(X)$; 3) математическое ожидание и дисперсию X; 4) вероятность попадания X в интервал $[0, 2]$.

Решение. 1. Для нахождения коэффициента a используем формулу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{3} f(x)dx+\int\limits_{3}^{+\infty} f(x)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{3} ax^2dx+\int\limits_{3}^{+\infty} 0dx=0+a\int\limits_{0}^{3} x^2dx+0=a\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3=9a.$$

Приравняв вычисленное значение к 1, получим $9a = 1$, откуда $a = \frac{1}{9}$.

2. Для вычисления функции распределения воспользуемся формулой

$$F(t) = P(-\infty < X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

Тогда при $t < 0$ имеем $F(t) = \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot dx = 0$; при $t \in [0, 3]$ имеем

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{t} \frac{1}{9}x^2 dx = 0 + \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^t = \frac{t^3}{27};$$

при $t > 3$ имеем

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}x^2 + \int_{3}^{t} 0dx = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Окончательно $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t^3}{27}, & t \in [0, 3], \\ 1, & t > 3. \end{cases}$

3. Математическое ожидание $M(X)$ найдем по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Тогда

$$M(x)=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{3} x\cdot\frac{1}{9}x^2dx+\int_{3}^{+\infty} x\cdot 0dx=$$

$$=0+\frac{1}{9}\int_{0}^{3} x^3dx+0=\frac{1}{9}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3=\frac{9}{4}.$$

Дисперсию $D(X)$ найдем, воспользовавшись формулой

$$D(X)=\int^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-(M(x))^2.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{3} x^2\cdot\frac{1}{9}x^2dx+\int_{3}^{+\infty} x^2\cdot 0dx=$$

$$=0+\frac{1}{9}\int_{0}^{3} x^4dx+0=\frac{1}{9}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^3=\frac{3^5}{9\cdot 5}=\frac{27}{5}.$$

Откуда $D(X)=\dfrac{27}{5}-\left(\dfrac{9}{4}\right)^2=\dfrac{27}{80}$.

4. Для нахождения вероятности попадания СВ X в интервал [0, 2] воспользуемся формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{0}^{2} f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha).$$

Тогда $P(0 \le X \le 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{27}$.

Ответ. 1. $a = \frac{1}{9}$. 2. $F(X) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{x}{27}, & x \in (0, 3], \\ 1, & x \in (0, 3]. \end{cases}$

3. $M(X) = \frac{9}{4}$, $D(X) = \frac{27}{80}$. 4. $P(0 \le X \le 2) = \frac{8}{27}$.

Задание

1. Дано: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ Найдите $F(X)$.

2. Дано: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ \frac{7-x}{8}, & x \in [3, 7], \\ 0, & x > 7. \end{cases}$ Найдите $F(X)$ и $P(2 \le X \le 4)$.

Ответ. $P(2 \le X \le 4) = \frac{7}{16}$.

3. По заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin 2x, & 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

найдите плотность распределения $f(x)$. Постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

4. По заданной функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & x\in[0,1],\\ 1, & x>1\end{cases}$$

найдите плотность распределения $f(x)$ и вероятность попадания X в интервал $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

О т в е т. $P\left(X\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}$.

5. Найдите коэффициент c, если $f(x)=\begin{cases}c\cdot\sin 2x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$

О т в е т. 1

6. Дано: $f(x)=\frac{c}{1+x^2}$. Найдите коэффициент c.

О т в е т. $\frac{1}{\pi}$

7. Дано: $f(x)=\begin{cases}c\cdot\cos x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$

Найдите вероятность $P\left(-\frac{\pi}{4}<X<\frac{\pi}{4}\right)$.

О т в е т. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Дано: $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\in[0,\ 2], \\ 0, & x\notin[0,\ 2]. \end{cases}$

Найдите вероятность $P(X\geq 1)$.

Ответ. $\frac{7}{8}$

9. По заданной плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x, & x\in(0,\ 2), \\ 0, & x\notin(0,\ 2) \end{cases}$$

найдите математическое ожидание $M(X)$.

Ответ. $\frac{4}{3}$

10. Дано: $f(x)=\begin{cases} c(x^2+2x), & x\in(0,\ 1), \\ 0, & x\notin(0,\ 1). \end{cases}$

Найдите коэффициент c и $M(X)$.

Ответ. $c=\frac{3}{4}$, $M(X)=\frac{11}{16}$.

11. По заданной функции распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0, \\ 1-e^{\lambda x}, & x>0 \end{cases}$$

найдите математическое ожидание $M(X)$.

Ответ. $\frac{1}{\lambda}$

12. По заданной функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

найдите дисперсию $D(X)$.

Ответ. $\dfrac{4}{3}$

13. По заданной плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{25}x, & x\in(0,\,5),\\ 0, & x\notin(0,\,5)\end{cases}$$

найдите дисперсию $D(X)$.

Ответ. $\dfrac{25}{18}$

14. СВ X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & x\in(0,\,1),\\ 0, & x\notin(0,\,1).\end{cases}$$

Найдите дисперсию СВ $y=x^3$.

Ответ. $\approx 0{,}09$

Практическое занятие № 22

Тема. Основные распределения СВ

1. Две игральные кости бросаются до первого выпадения шести очков хотя бы на одной кости. Найдите вероятность того, что первый раз шесть очков выпадет при k-м броске $(k = 1, 2, \ldots)$.

Ответ. $P(X = k) = \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{36}\right)$.

2. Проводятся испытания по схеме Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании p. Вычислите вероятность того, что все k успехов в n испытаниях появятся подряд.

Ответ. $P = (n - k + 1)p^k q^{n-k}$.

3. Вероятность отказа каждого прибора в испытаниях не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,2. Испытываются серии по девять приборов. Найдите наиболее вероятное число отказавших приборов в серии.

Ответ. 2

4. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа одного элемента в течение времени T равна 0,002. Найдите вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Ответ. $\frac{2^3}{3!}e^{-2}$

5. Среднее число вызовов, поступающих на АТС за минуту, равно 120. Найдите вероятности следующих событий: A – за две секунды не поступило ни одного вызова; B – за две секунды поступило менее двух вызовов; C – за одну секунду поступило ровно три вызова; D – за три секунды поступило более двух вызовов.

Ответ. $P(A) = e^{-4} \approx 0{,}0183$; $P(B) = 5e^{-4} \approx 0{,}0915$;

$$P(C) = \frac{4}{3}e^{-2} \approx 0{,}181; \; P(D) = 1 - 25e^{-6}.$$

6. Найдите среднее число λ бракованных изделий в партии, если вероятность того, что в партии есть хоть одно бракованное изделие, равна 0,95.

Ответ. 3

7. Ошибка округления в экспериментах по измерению подчинена равномерному распределению. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Найдите: а) среднюю ошибку округления; б) вероятность того, что ошибка округления при одном измерении будет меньше 0,04.

Ответ. а) 0,1; б) 0,4.

8. Ребро куба X измерено приблизительно: $a \le X \le b$. Найдите математическое ожидание и дисперсию объема куба.

Ответ. $M(X^3) = \frac{b^4 - a^4}{4(b-a)}$; $D(X^3) = \frac{b^7 - a^7}{7(b-a)} - \left(\frac{b^4 - a^4}{4(b-a)}\right)^2$.

9. Диаметр диска d измерен приближенно: $a \le d \le b$. Найдите математическое ожидание площади диска.

Ответ. $\frac{\pi(b^3 - a^3)}{12(b-a)}$

10. Время ожидания у бензоколонки АЗС подчинено показательному распределению со средним временем ожидания 6 минут. Найдите вероятности событий: A – время ожидания не менее трех и не более шести минут; B – время ожидания более двенадцати минут.

Ответ. $P(A) = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0{,}3833$; $P(B) = e^{-2} \approx 0{,}135$.

11. Время безотказной работы прибора распределено по показательному закону с параметром λ. Вычислите вероятность того, что прибор не выйдет из строя в течение времени $T \ge M(X)$.

Ответ. $e^{-1} \approx 0{,}3678$

Практические занятия № 23–24

Тема. Нормальное распределение

1. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 2$ и средним квадратичным отклонением $\sigma(X) = 3$. Запишите плотность вероятности X.

2. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 2$ и дисперсией $D(X) = 16$. Запишите плотность вероятности X.

3. X – нормальная случайная величина, плотность вероятности которой определяется формулой

$$f(X) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{50}\right).$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию X.

З а д а ч а 4. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 10$ и средним квадратичным отклонением $\sigma(X) = 2$. Найдите вероятность попадания X в интервал [12; 14].

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Имеем: $a = M(X) = 10$; $\sigma = 2$; $\alpha = 12$; $\beta = 14$. Тогда

$$P(12 \le X \le 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

Ответ. 0,1359

5. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 20$ и средним квадратичным отклонением $\sigma(X) = 5$. Найдите вероятность попадания X в интервал $[15; 25]$.

Ответ. 0,6826

6. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 2$ и средним квадратичным отклонением $\sigma(X) = 1$. Найдите вероятность следующих неравенств: а) $1 < X < 3$; б) $0 < X < 2$; в) $|X| \le 3$; г) $X < 3$; д) $X > 0$.

Ответ. а) 0,6826; б) 0,4772; в) 0,84129; г) 0,8413; д) 0,9772.

7. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M(X) = 50$ мм (проектная длина) и средним квадратичным отклонением $\sigma(X) = 6$. Деталь считается годной, если ее отклонение от проектной величины не превышает 10 мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

Ответ. 90,3 %.

8. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному распределению с $a = 0$. Найдите среднее квадратичное отклонение X, если известно, что вероятность события $(|X| < 1)$ равна 0,6626.

Ответ. $\approx 1{,}04$

9. Случайная величина X подчинена нормальному распределению с $a = 0$. Найдите среднее квадратичное отклонение X, если известно, что вероятность события $(X > 3)$ равна 0,0288.

Ответ. $\approx 1{,}58$

10. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному распределению с $a = 0$ и $\sigma = 20$ г. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превышающей 10 г.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P\left(|X - a| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Имеем: $a = 0;\ \sigma = 20;\ \delta = 10$. Тогда

$$\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{20}\right) = \Phi(0{,}5) = 0{,}1915.$$

Искомая вероятность равна $2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383$.

Ответ. 0,383

11. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 10$ и средним квадратичным отклонением $\sigma(X) = 5$. Найдите интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором X будет заключена с вероятностью: а) 0,9974; б) 0,5.

Ответ. а) (–5; 25); б) (6,6; 13,4).

12. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному распределению с $a = 0$ и $\sigma = 20$. Найдите вероятность того, что из трех независимых измерений хотя бы в одном измерении ошибка по абсолютной величине не превзойдет 4.

Ответ. 0,404

13. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 10$ и средним квадратичным отклонением $\sigma(X) = 3$. Пользуясь правилом «3σ», найдите интервал, симметричный относительно математического ожидания, куда X попадет с вероятностью 0,9973.

Ответ. (1; 19)

14. Автомат изготавливает диски проектным диаметром 2,5 см. Случайные ошибки (точность автомата) подчинены нормальному распределению с $M(X) = 0$ и $D(X) = 0{,}0001$. Пользуясь правилом «3σ», найдите интервал, симметричный относительно математического ожидания, куда X попадет с вероятностью 0,9973.

Ответ. (2,47; 2,53)

15. Станок-автомат штампует плитки. Контролируется толщина плитки X. Проектная толщина плитки равна 5 мм. Фактически толщина плитки колеблется от 2,3 до 7,7 мм. Плитка признается стандартной, если ее толщина составляет 4–6 мм. Сколько процентов стандартной плитки изготавливает автомат?

Ответ. 73,3 %

Практическое занятие № 25

Тема 1. Гистограмма и полигон

Задача 1. Для заданных выборок найдите: а) распределение относительно частот; б) эмпирическую функцию распределения. Постройте полигон частот и полигон относительных частот

1)

x_i	4	6	8	10
n_i	5	2	3	10

2)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

3)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

4)

x_i	20	40	65	80
n_i	10	20	30	40

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям
для студентов инженерно-педагогических специальностей

Составители:
ЕМЕЛИЧЕВА Елена Владимировна
ЛОШКАРЕВА Светлана Юрьевна

Редактор Е.Н. Гордейчик
Компьютерная верстка А.Г. Занкевич

Подписано в печать 06.11.2007.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 3,27. Тираж 100. Заказ 718.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.
220013, Минск, проспект Независимости, 65.