УДК 517.518.153

Некоторые аспекты применения приложений производной к решению экономических задач

Потоцкая А. О., студент
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь
Научный руководитель: канд. пед. наук, доцент Якимович В. С.

Аннотация:
Рассматриваются вопросы нахождения максимума и минимума функции двух переменных для расчета максимальной прибыли. Показана межпредметная связь дисциплины «Математика» со специальными экономическими дисциплинами.

Очень часто не только в различных областях наук, но и в практической деятельности приходится сталкиваться с задачами поиска экстремума функции. Экстремумы и методы их нахождения имеют широкое применение в экономических исследованиях, при выборе: наилучших вариантов инвестиций, производственных программ, вложения денег в покупки и др. Дело в том, что многие экономические процессы моделируются функцией или несколькими функциями, зависящими от переменных – факторов, влияющих на состояние моделируемого явления. Требуется найти экстремумы таких функций для того, чтобы определить оптимальное (рациональное) состояние, управление процессом. Так в экономике, часто решаются задачи минимизации издержек или максимизации прибыли – микроэкономическая задача фирмы.

Рассмотрим алгоритмы поиска экстремумов функций в простейшем варианте, когда на переменные не накладываются ограничения (безусловная оптимизация). Путь небольшая фирма производит два вида товаров G_1 и G_2 продает их по цене 2000 и 1600 соответственно. Функция затрат (издержек) имеет вид:

$$C = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 ,$$

где Q_1 и Q_2 обозначают объемы выпуска соответственно товаров G_1 и G_2. Требуется найти такие значения G_1 и G_2, при которых прибыль, получаемая фирмой, максимальна.

Поскольку фирма небольшая, она не может монопольно устанавливать цены и вынуждена ориентироваться на рыночные цены, которые не зависят от объемов производства G_1 и G_2 (эти объемы слишком малы). Поэтому суммарный доход от продажи товаров G_1 и G_2 будет равен: $R = 2000Q_1 + 1600Q_2$.

Прибыль Π представляет собой разницу между доходом R и затратами C, поэтому:

$$\Pi = R - C = \left(2000Q_1 + 1600Q_2\right) - \left(3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2\right)$$

$$\text{или } \Pi\left(Q_1, Q_2\right) = 2000Q_1 + 1600Q_2 - 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 .$$

Это и есть та функция двух переменных, максимум которой следует найти, т. е. решить задачу оптимизации. На первоначальном этапе найдем стационарные точки, для этого вычислим частные производные первого порядка

$$\Pi'_{Q_1}\left(Q_1, Q_2\right) = 2000 - 6Q_1 - 2Q_2, \ \Pi'_{Q_2}\left(Q_1, Q_2\right) = 1600 - 2Q_1 - 4Q_2 .$$

и приравниваем их к нулю, что дает систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_1}\left(Q_1, Q_2\right) = 2000 - 6Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ \Pi'_{Q_2}\left(Q_1, Q_2\right) = 1600 - 2Q_1 - 4Q_2 = 0 \end{cases}.$$

Решение этой системы и даст нам координаты стационарной точки. Разделив втрое уравнение на 2 и вычтя из первого уравнения полученный результат, получаем $1200 - 5Q_1 = 0$ или $Q_1 = 240$. Подставляя полученное значение в первое уравнение, находим $Q_2 = 280$ Таким образом, стационарная точка имеет координаты $\left(Q_1, Q_2\right) = \left(240, 280\right)$. Осталось выяснить вопрос; есть ли в стационарной точке максимум, минимум или не имеем ни того, ни другого. Для решения вычисляем частные производные второго порядка: $П''_{Q_1Q_1} = -6 = A$, $П''_{Q_1Q_2} = -2 = B$ $П''_{Q_2Q_2} = -4 = C$ и согласно теоремы о достаточном условии экстремума получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0 .$$

Так как $A = -6 < 0$, следовательно в стационарной точке имеет место максимум. Подставляя координаты стационарной точки в функцию прибыли получаем:

$$П(240, 280) = 2000 \cdot 240 + 1600 \cdot 280 - 3 \cdot 240^2 - 2 \cdot 240 \cdot 280 - 2 \cdot 280^2 = 464000 .$$

Это и есть величина максимальной прибыли, которая достигается при объемах производства $Q_1 = 240,\ Q_2 = 280$, что завершает решение задачи.

Учитывая актуальность получения максимальной прибыли при любой предпринимательской деятельности, рассмотрим еще одну задачу. [1, С. 137–139]. Фирма реализует часть товара на внутреннем рынке, а другую часть поставляет на экспорт. Связь цены товара Q_1 и его количества P_1, проданного на внутреннем рынке, описывается кривой спроса с уравнением $P_1 + Q_1 = 500$. Аналогично для экспорта цена P_2 и количество Q_2 также связаны соотношением (уравнением кривой спроса): $2P_2 + Q_1 = 72$. Суммарные затраты даются выражением $C = 50000 + 20 \cdot (Q_1 + Q_2)$. Спрашивается, какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальна.

На первоначальном этапе определим доход фирмы, который складывается из двух частей: продаж на внутреннем рынке:

$$R_1 = P_1 \cdot Q_1 = (500 - Q_1) \cdot Q_1 = 500Q_1 - Q_1^2$$

и экспортных поставок $R_2 = P_2 \cdot Q_2 = (360 - 1,5Q_2) \cdot Q_2 = 360 \cdot Q_2 - 1,5 \cdot Q_2^2$ (в обоих случаях цена берется из соответствующих кривых спроса). Поэтому суммарный доход будет равен:

$$R = R_1 + R_2 = 500 \cdot Q_1 - Q_1^2 + 360 \cdot Q_2 - 1,5 \cdot Q_2^2 .$$

Таким образом, мы можем найти получаемую фирмой прибыль:

$\Pi(Q_1, Q_2) = R - C = \left(500Q_1 - Q_1^2 + 360Q_2 - 1,5Q_2^2\right) - \left(50000 + 20Q_1 + 20Q_2\right) =$
$= 480Q_1 - Q_1^2 + 340Q_2 - 1,5Q_2^2 - 50000$. Это функция двух переменных, нахождение максимума которой и решает задачу оптимизации. Вычислим частные производные первого порядка

$$\Pi'_{Q_1} = 480 - 2Q_1 \text{ и } \Pi'_{Q_2} = 340 - 3Q_2$$

Приравниваем их к нулю, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 480 - 2Q_1 = 0 \\ 340 - 2Q_2 = 0 \end{cases}.$$

Решаем ее и получаем координаты стационарной точки $(Q_1, Q_2) = \left(240, 340/3\right)$. Далее вычисляем частные производные второго порядка $\Pi''_{Q_1Q_1} = -2 = A < 0$, $\Pi''_{Q_1Q_2} = 0 = B$ $\Pi''_{Q_2Q_2} = -3 = C$ и проверяем выполнение теоремы о достаточном условии экстремума $\Delta = -2 \cdot (-3) - 0^2 = 6 > 0$. Отсюда заключаем, что в стационарной точке $(Q_1, Q_2) = \left(240, 340/3\right)$ имеет место максимум. Для того чтобы ответить на вопрос об оптимальной ценовой политике фирмы, подставляем координаты точки максимума в кривые спроса:

$$P_1 = 500 - Q_1 = 500 - 240 = 260 \text{ и } P_2 = 360 - 1,5Q_2 = 360 - 1,5 \cdot (340/3) = 190 .$$

Это и есть оптимальные цены для продажи на внутреннем рынке и по экспорту. Найдем максимальную прибыль при оптимальных объемах продаж на внутреннем и внешнем рынках. Подставим координаты стационарной точки в функцию прибыли, находим:

$$\Pi\left(240,\frac{340}{3}\right)=480\cdot 240-240^2+340\left(\frac{340}{3}\right)-1,5\left(\frac{340}{3}\right)^2-50000=26866,67.$$

Список использованных источников

1. Колесников А. Н., Краткий курс математики для экономистов: учебно-методическое пособие / А. Н. Колесников. – М: Инфра-М, 1997. – С. 133–139.

УДК 371.3

«Знаю. Хочу знать. Умею» как современный педагогический метод и прием повышения мотивации обучащихся к процессу обучения

Песняк И. М., студент,
Нуриллоев К. А., студент
Белорусский национальный технический университет
г. Минск, Республика Беларусь
Научный руководитель: старший преподаватель Зуёнок А. Ю.

Аннотация:

В статье рассматриваются различные педагогические приемв повышения мотивации. Подробно рассмотрено использование приема «Знаю. Хочу знать. Умею». Приведены советы педагогам по использованию данного приема.

Эффективность того или иного методического приема формирования профессиональных знаний, умений и навыков, успешность проведения занятия во многом определяются теми психологическими закономерностями, которые лежат в основе учебно-познавательной деятельности обучающихся.

На успешность обучения большое влияние оказывают различные факторы:

– интересы;

– ценностные установки и потребности;

– навыки по переработке информации;