УДК 517.39

РЕКУРРЕНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КАК РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Студент гр. 104210 Савич А.Ю.
Канд. техн. наук, доцент Волкович П.Ф.
Белорусский национальный технический университет

Множество первообразных функций

$$I_n = \int cth^n ax\,dx,\ n = 0,1,2,\ldots,\ a \in R, \tag{1}$$

образует рекуррентную функциональную последовательность I_n и методом интегрирования по частям представляется интегральным рекуррентным соотношением второго порядка

$$I_n = -\frac{cth^{n-1} ax}{a(n-1)} + I_{n-2}. \tag{2}$$

Решение соотношения (2) получаем методом математической индукции. Чтобы это решение было однозначным, определим вначале первые два члена последовательности I_n непосредственно из выражения (1)

$$I_0 = \int cth^0 a\,x\,dx = x,\ I_1 = \int cth\,a\,x\,dx = \frac{1}{a}|sh\,ax|.$$

Далее, полагая $n = 2,3,4,\ldots,$ из соотношения (2) последовательно получаем

$$I_2 = -\frac{cthax}{1 \cdot a} + x,$$

$$I_3 = -\frac{cth^2 ax}{2 \cdot a} + \frac{1}{a}\ln|\,shax\,|,\ldots.$$

Продолжая так далее по индукции, рекуррентную последовательность первообразных функций I_n представим в виде комбинаторных сумм

$$I_{2k} = x - \frac{1}{a}\sum_{\nu=1}^{k} \frac{cth^{2(k-\nu)+1} a\,x}{2(k-\nu)+1},\ I_0 = x, \tag{3}$$

$$I_{2k+1} = \frac{1}{a}\left(\ln|shax| - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{cth^{2(k-\nu+1)} ax}{2(k-\nu+1)}\right),\ I_1 = \frac{1}{a}\ln|shax|. \tag{4}$$

Такое представление последовательностей первообразных функций служит цели снижения сложности вычислительных алгоритмов при проведении научных исследований, инженерных и экономических расчетов.