Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Конспект лекций по математике для студентов инженерно-технических специальностей

В 4 частях

Часть 3

Электронное учебное издание

Минск БНТУ 2007

Авторы:

И.Г. Латышева, И.В. Прусова,
Л.А. Барминова, О.Г. Вишневская,
Е.А. Глинская, Н.А. Кондратьева, А.Н. Мелешко,

Электронная версия *И.Л. Алифановой*

Под редакцией: *В.А.Нифагина, И.В.Прусовой*

Рецензент:
Кандидат физико-математических наук В.В. Веременюк

Оглавление

15. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

15.1. Постановка задачи. Основные понятия и определения

При изучении различных явлений часто не удается найти закон, связывающий только величины, характеризующие данное явление. Однако сравнительно легко устанавливается зависимость между этими величинами и их производными.

Рассмотрим следующую задачу.

Пример 15.1 (задача об охлаждении тела). Пусть в момент времени $t = 0$ тело имеет температуру T_0, а окружающая среда − температуру $T_{ср} = \text{const} < T_0$. Требуется найти закон, по которому изменяется температура тела T в зависимости от времени t.

Решение. Из физики известно (закон Ньютона), что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $T(t)$ убывающая, в силу механического смысла производной получаем

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k[T(t) - T_{ср}], \tag{15.1}$$

где k – коэффициент пропорциональности $(k > 0)$. Соотношение (15.1) является математической моделью данного физического процесса. Оно является дифференциальным уравнением, потому что в него наряду с неизвестной функцией $T(t)$ входит и ее производная.

Перепишем (15.1) в виде $\dfrac{dT(t)}{T - T_{ср}} = -kdt$ и проинтегрируем:

$$\int \frac{dT(t)}{T - T_{ср}} = -k\int dt \;\Leftrightarrow\; \ln\left|T - T_{ср}\right| = -kt + C \Leftrightarrow\; T = T_{ср} + C\mathrm{e}^{-kt}.$$

По условию $T(0) = T_{ср} + C\mathrm{e}^{-k\cdot 0} = T_0$, откуда $C = T_0 - T_{ср}$.

В результате получаем

$$T = T_{ср} + (T - T_{ср})\mathrm{e}^{-kt}.$$

Задачи подобного рода часто возникают в физике и инженерной практике и состоят в отыскании функции из так называемых дифференциальных уравнений.

Определение 15.1. Соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{15.2}$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$, называется дифференциальным уравнением (сокращенно ДУ).

Порядком дифференциального уравнения (15.1) называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция зависит от одного переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, в противном случае ДУ в *частных производных*.

Определение 15.2. Решением дифференциального уравнения порядка n называется n раз дифференцируемая на некотором интервале (a, b) функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Процесс отыскания решения ДУ называется его интегрированием, а график решения ДУ – интегральной кривой.

15.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если его можно разрешить относительно y', то оно примет вид

$$y' = f(x, y). \qquad (15.3)$$

Соотношение (15.3) называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной y'.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в дифференциальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (15.4)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – известные функции.

В частности, поскольку $y' = dy/dx$, то дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в виде (15.4):

$$f(x, y)dx - dy = 0.$$

При подобной форме записи дифференциального уравнения переменные x и y равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения ДУ (15.3).

Теорема 15.1 (*Коши*). Если в уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости $0xy$, содержащей точку (x_0, y_0), то найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{15.5}$$

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что при выполнении условий теоремы через каждую точку (x_0, y_0) области D проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения (15.3).

Задача нахождения решения уравнения (15.3), удовлетворяющего условию (15.5), называется *задачей Коши*, а условие (15.5) – *начальным условием*, которое часто записывается в виде $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Из теоремы 15.1 вытекает, что уравнение (15.3) имеет бесконечное множество решений (например, решение, график которого проходит через точку (x_0, y_0) другое решение, график которого проходит через точку (x_0, y_1) и т. д., если только эти точки принадлежат области D). Таким образом, множество решений уравнения (15.3) представляет собой однопараметрическое семейство функций вида $y = y(x, C)$, зависящих еще и от параметра C.

Определение 15.3. Общим решением дифференциального уравнения (15.3) называется функция $y = y(x, C)$, зависящая от одного произвольного постоянного C, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) она является решением этого дифференциального уравнения при любом значении произвольной постоянной C;
2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in D$, существует такое единственное значение $C = C_0$, что функция $y = y(x, C_0)$ удовлетворяет данному условию.

Определение 15.4. Частным решением дифференциального уравнения (15.3) называется решение, которое получается из общего решения $y = y(x,C)$ при конкретном значении произвольной постоянной C.

В процессе отыскания общего решения дифференциального уравнения нередко приходят к соотношению

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{15.6}$$

не разрешенному относительно y. Выразить y из этого соотношения в элементарных функциях не всегда удается. В таких случаях общее решение остается в неявном виде (15.6) и называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называется в этом случае *частным интегралом* уравнения.

С геометрической точки зрения общий интеграл представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C или семейство интегральных кривых. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Итак, решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – значит:

а) найти его общее решение или общий интеграл (если начальные условия не заданы) или

б) найти то частное решение уравнения (частный интеграл), которое удовлетворяет заданным начальным условиям (если таковые имеются).

Дадим геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$, и пусть $y = y(x,C)$ – общее решение данного уравнения.

Уравнение (15.3) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, дифференциальное уравнение (15.3) дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости $0xy$.

Следовательно, с геометрической точки зрения задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, т. е. в которых выполняется соотношение $y' = C = \text{const}$, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины, соответствующей значению C, будет, очевидно, $f(x, y) = C$. Построив семейство изоклин, можно приближенно построить семейство интегральных кривых.

Пример 15.2. Построить семейство интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение. Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения будет $2x = C$, т. е. изоклинами являются прямые, параллельные оси $0y$ $\left(x = \frac{C}{2}\right)$. В точках каждой прямой проведем вектор, образующий с осью $0x$ один и тот же угол α, тангенс которого равен C.

Так как при $C = 0$ имеем $x = 0$, $\text{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $C = 1$ уравнение изоклины $x = \frac{1}{2}$, поэтому $\text{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = \pi/4$;

при $C = -1$: $x = -\frac{1}{2}$, $\text{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -\pi/4$;

при $C = 2$: $x = 1$, $\text{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \text{arctg}2 \approx 63^\circ$.

К полученным векторам плавно проведем касательные. Они представляют собой семейство парабол (рис. 15.1).

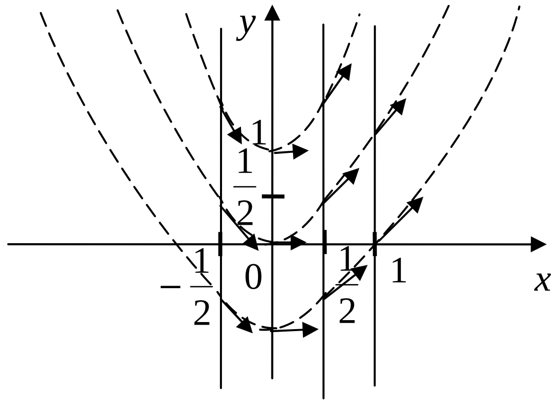


Рис.15.1

15.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 15.5. Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется всякое дифференциальное уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \qquad (15.7)$$

Интегрируя его, получаем общий интеграл этого уравнения:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = 0.$$

Пример 15.3. Проинтегрировать уравнение $xdx + ydy = 0$.

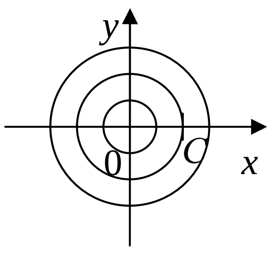


Рис. 15.2

Решение. Это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получаем общий интеграл $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Так как левая часть последнего равенство неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$ через C^2, имеем: $x^2 + y^2 = C^2$. Это уравнение семейства окружностей с центром в начале координат и радиусом C (рис. 15.2).

Определение 15.6. Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{15.8}$$

где $M_1(x)$, $M_2(x)$, $N_1(y)$, $N_2(y)$ – заданные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение (15.8) может быть приведено к уравнению с разделенными переменными (15.7) путем деления обеих его частей на $N_1(y)\,M_2(x)$ (предполагая, что $N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$):

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = 0,$$

т. е. к уравнению вида (15.7). Проинтегрировав последнее равенство, получаем искомую зависимость:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \tag{15.9}$$

Пример 15.4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Решение. Предположив, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и разделив обе части данного уравнения на $x\,y$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \left(1-\frac{1}{y}\right)dy.$$

Интегрируя его, находим:

$$\ln|x| + x = y - \ln|y| + C \text{ или } \ln|xy| + x - y = C.$$

Последнее равенство есть общий интеграл данного уравнения. При его нахождении были приняты ограничения $x \neq 0$, $y \neq 0$. Однако функции $x = 0$ и $y = 0$ также являются решением исходного уравнения, что легко проверяется, но не входят в общий интеграл.

Замечание 15.1. При разделении переменных можно потерять некоторые решения. Пусть, например, $y = y_0$ − корень уравнения $N_1(y) = 0$. Так как $N_1(y_0) = 0$ и $dy_0 = 0$, подставив $y = y_0$ в уравнение (15.8), получим тождество. Следовательно, при любых x $y = y_0$ − решение дифференциального уравнения (15.8). И, если это решение нельзя получить из соотношения (15.9) при некотором значении C, то его нужно рассматривать отдельно от решения (15.9).

Аналогично, если $x = x_0$ − корень уравнения $M_2(x) = 0$, то при любом y $x = x_0$ − решение уравнения (15.8). Поэтому следует отдельно решить уравнение $M_2(x)N_1(y) = 0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения.

Замечание 15.2. Уравнение $y' = f(ax + by + c)$, где a, b, c − числа, путем замены $ax + by + c = u$ сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Дифференцируя по x, получаем: $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, т. е. $\frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u)$, откуда следует $\frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx$. Интегрируя это уравнение и заменяя u на $ax + by + c$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 15.5. Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости v. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через $3c$ после начала замедления, если $v(0) = 100\,\text{м}/\text{с}$, а $v(1) = 50\,\text{м}/\text{с}$.

Решение. Примем за независимую переменную время t, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки v будет функцией от t, т. е. $v = v(t)$. Для нахождения $v(t)$ воспользуемся вторым законом Ньютона: $m \cdot a = F$, где $a = v'(t)$ − есть ускорение движущегося тела, F − результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F = -kv^2$, $k > 0$ − коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $v = v(t)$ является решением дифференциального уравнения $m \cdot v' = -k \cdot v^2$ или $v' = -\frac{k}{m} \cdot v^2$, где m − масса тела. Приведем уравнение к виду (15.7): $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = 0$, $\frac{dv}{v^2} + \frac{k}{m}dt = 0$. Интегрируем: $\int \frac{dv}{v^2} + \frac{k}{m}\int dt = c$, т. е. $-\frac{1}{v} + \frac{k}{m}t - c = 0$. Отсюда $v = \frac{1}{\frac{k}{m}t - c}$ − общее решение уравнения, где $c - \text{const}$.

Найдем теперь скорость точки через $3c$ после начала замедления. Согласно условию задачи, имеем: $v(0) = -\frac{1}{c} = 100$ и $v(1) = -\frac{1}{\frac{k}{m} - c} = 50$. Отсюда $c = -\frac{1}{100}$, $\frac{k}{m} = \frac{1}{100}$. Следовательно, скорость точки изменяется по закону $v = \frac{100}{t+1}$. Поэтому $v(3) = 25 \text{м}/\text{с}$.

15.4. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка

Основной в теории ДУ является задача Коши. Достаточные условия, при которых эта задача для уравнения (15.3) имеет решение, указывает теорема 15.1 Коши. Остановимся на случае, когда условия теоремы Коши нарушаются.

Определение 15.7. Точка (x_0, y_0) плоскости $0xy$ называется особой точкой уравнения (15.3), если нарушается хотя бы одно из условий:

1) $f(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0);

2) f'_y непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Отметим, что через каждую особую точку проходит более чем одна интегральная кривая дифференциального уравнения.

Определение 15.8. Интегральная кривая дифференциального уравнения первого порядка называется особой, а соответствующее ей решение – особым решением дифференциального уравнения, если через каждую ее точку проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая этого уравнения.

В каждой точке особого решения нарушается единственность решения. Особые решения не могут быть получены из общего решения дифференциального уравнения ни при каких (конечных) значениях произвольной постоянной *C*.

Пример 15.6. Найти все решения уравнения $\sqrt{1-y^2}dx - ydy = 0$.

Решение. Разделив переменные и проинтегрировав, получим $x = -\sqrt{1-y^2} + c$ или $(x-c)^2 + y^2 = 1$.

В общем интеграле содержатся не все решения исходного уравнения. При делении на $\sqrt{1-y^2}$ были потеряны решения $y = \pm 1$, которые невозможно получить из общего интеграла ни при каких *c*.

Таким образом, множество интегральных кривых данного уравнения состоит из семейства окружностей радиуса 1 с центром в точках $(c;0)$ и прямых $y = \pm 1$ (рис. 15.3).

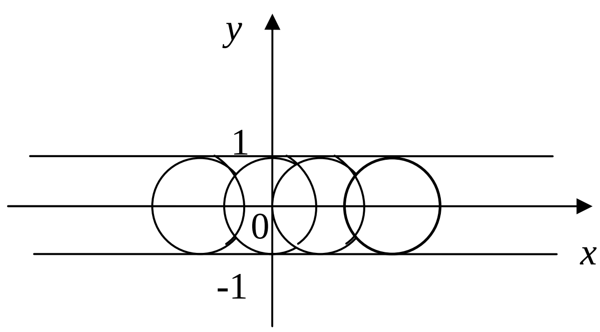


Рис. 15.3

Через каждую точку прямых $y = \pm 1$ проходит еще одна интегральная кривая (окружность) данного уравнения. Следовательно, $y = \pm 1$ – особые решения исходного уравнения.

15.5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.

Определение 15.9. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией *n*-го измерения (порядка) относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Пример 15.7. Функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ − однородная функция первого измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y)$.

Пример 15.8. $f(x, y) = xy - y^2$ есть однородная функция второго измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 (xy - y^2) = \lambda^2 f(x, y)$.

Пример 15.9. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ − однородная функция нулевого измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{(\lambda x^2) - (\lambda y^2)}{(\lambda x)(\lambda y)} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy} = \lambda^\circ f(x, y)$.

Определение 15.10. Уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (15.10)$$

называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ − однородные функции одного и того же измерения (порядка).

Разрешив уравнение (15.10) относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − однородные функции одного измерения, то $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ является однородной функцией нулевого порядка. Следовательно, уравнение вида

$$y' = f(x,y) \tag{15.11}$$

будет однородным, если $f(x,y)$ − однородная функция нулевого порядка, т. е. по определению $f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)$. Положив $\lambda = 1/x$, получим $f(x,y) = f(1, y/x) = \varphi(y/x)$, т. е. однородную функцию нулевого порядка можно представить как функцию одного аргумента (y/x).

Уравнение (15.11) в этом случае примет вид $y' = f(1, y/x)$.

Обозначив $y/x = u$, имеем

$$y = ux. \tag{15.12}$$

Тогда $y' = u'x + u$. Подставив значения y и y' в (15.11), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u'x + u = f(1,u) \text{ или } \frac{du}{dx}x = f(1,u) - u.$$

Интегрируя его, найдем:

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Подставляя вместо u отношение y/x, находим общее решение или общий интеграл уравнения (15.11).

Пример 15.10. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

Решение. Данное уравнение однородное, так как функции $P(x,y) = x^2 - y^2$ и $Q(x,y) = 2xy$ − однородные функции второго измерения.

Положим $y = ux$. Тогда $dy = xdu + udx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2 - u^2x^2)dx + 2x \cdot ux(xdu + udx) = 0,$$

$$x^2(1 - u^2 + 2u^2)dx + 2ux^3du = 0,$$

$$(1 + u^2)dx + 2uxdu = 0 \quad (x \neq 0).$$

Последнее уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2}du = 0$$

и интегрируя, имеем:

$$\ln|x| + \ln(1 + u^2) = C_1, \quad \ln(|x|(1 + u^2)) = C_1, \quad |x|(1 + u^2) = \mathrm{e}^{C_1}.$$

Обозначив $\mathrm{e}^{C_1} = C \quad (C > 0)$, получим $|x|(1 + u^2) = C$. Заменяя u на y/x, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$x^2 + y^2 = Cx.$$

Замечание 15.3. Исходное уравнение можно было сначала привести к виду (15.11):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad y' = \frac{(y/x)^2 - 1}{2 \cdot y/x}.$$

Затем положить $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$ и т. д. Однако в этом нет необходимости: подстановка (15.12) сразу преобразует уравнение (15.10) в уравнение с разделяющимися переменными.

15.6. Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}. \tag{15.13}$$

Если $c = c_1 = 0$, то уравнение (15.13) есть, очевидно, однородное. Пусть теперь c и c_1 (или одно из них) отличны от нуля. Сделаем замену переменных: $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \tag{15.14}$$

Подставляя в уравнение (15.14) выражения x, y и $\frac{dy}{dx}$ будем иметь:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1 x_1 + b_1 y_1 + a_1 h + b_1 k + c_1}. \tag{15.15}$$

Подберем h и k так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \end{cases}, \tag{15.16}$$

т. е. определим h и k как решения системы (15.16). При этом условии уравнение (15.15) становится однородным:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Найдем решение системы (15.16). Пусть определитель системы (15.16) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Тогда коэффициенты h и k находятся из соотношений:

$$h = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -c & b \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix},\ k = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & -c \\ a_1 & -c_1 \end{vmatrix},\ \Delta \neq 0.$$

Если $\Delta \neq 0$, то замена $x = x_1 + h,\ y = y_1 + k$ приводит к однородному уравнению.

Система (15.16) не имеет решения, если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $ab_1 = a_1b$. Но в этом случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, т. е. $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ и, следовательно, уравнение (15.13) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}.$$

Тогда подстановкой $z = ax + by$ уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Прием, примененный к интегрированию уравнения (15.13), применяется к интегрированию уравнения $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$, где f – какая угодно непрерывная функция.

Пример 15.11. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$.

Решение. Чтобы преобразовать его в однородное уравнение, делаем замену: $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$. Тогда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

Решая систему двух уравнений $\begin{cases} h + k - 3 = 0, \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$, находим $h = 2$, $k = 1$.

В результате получаем однородное уравнение $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$, которое решаем подстановкой $\frac{y_1}{x_1} = u$; тогда $y_1 = ux_1$, $\frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1\frac{du}{dx_1}$, и $u + x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными $x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$.

Разделяя переменные $\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx_1}{x_1}$, интегрируя, находим:

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left(1 + u^2\right) = \ln|x_1| + \ln|C|,$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left|Cx_1\sqrt{1 + u^2}\right|$$

или

$$Cx_1\sqrt{1 + u^2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} u}.$$

Подставляя $\dfrac{y_1}{x_1}$ вместо u, получаем:

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}.$$

Переходя к переменным x и y, окончательно получаем:

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

15.7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 15.11. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{15.17}$$

где $p(x), f(x)$ − заданные непрерывные функции, линейные относительно неизвестной функции и ее производной.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется линейным однородным, в противном случае – линейным неоднородным.

Рассмотрим два метода интегрирования линейных ДУ – метод И.Бернулли и метод Лагранжа.

Метод И.Бернулли

Решение уравнения (15.17) ищется в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки $y(x) = u(x)v(x)$, где $u(x), v(x)$ − неизвестные функции от x. Одну из них можно выбрать произвольно, другая должна быть определена так, чтобы их произведение удовлетворяло линейному уравнению.

Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (15.17), получаем:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x). \tag{15.18}$$

Выберем одну из функций, например u, так чтобы уравнение (15.18) имело простой вид. Для этого в уравнении

$$uv' + v(u' + p(x)u) = f(x) \tag{15.19}$$

приравняем нулю выражение, стоящее в круглых скобках:

$$u' + p(x)u = 0.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решим его. Итак, $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$, т. е. $\frac{du}{u} = -p(x)dx$. Интегрируя, получаем:

$$\ln|u| = -\int p(x)dx + C_1 \quad \text{или} \quad u = C_1 \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

Ввиду свободы выбора функции $u(x)$, возьмем какое-либо частное, отличное от нуля решение, например $u(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$. Очевидно, что $u(x) \neq 0$. Подставив значение $u(x)$ в уравнение (15.19), получаем $u\frac{dv}{dx} = f(x)$, откуда $\frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{u(x)}$, $v(x) = \int \frac{f(x)}{u(x)}dx + C$.

Подставляя найденные значения $u(x)$ и $v(x)$ в выражение $y(x) = u(x)v(x)$, окончательно имеем

$$y(x)=u(x)\left(\int\frac{f(x)}{u(x)}dx+C\right),\text{ или }y(x)=\left(\int f(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}+C\right)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

Замечание 15.4. Уравнение (15.18) также можно было бы переписать в виде $u'v+u(v'+p(x)v)=f(x)$, в качестве $v(x)$ взять какое-либо частное решение уравнения $v'+p(x)v=0$, а затем найти $u(x)$ из уравнения $u'v=f(x)$.

Пример 15.12. Проинтегрировать уравнение $y'\sin x-y\cos x=1$.

Решение. Данное уравнение является линейным (оно содержит первые степени y и y', но не содержит их произведения). Решение уравнения ищем в виде $y=uv$. Подставляя функцию y и ее производную $y'=u'v+v'u$ в данное уравнение, получаем

$$(u'v+v'u)\sin x-uv\cos x=1,\ u(v'\sin x-v\cos x)+u'v\sin x=1.$$

Выберем функцию v так, чтобы $v'\sin x-v\cos x=0$, $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{\cos x}{\sin x}dx$, откуда $\ln|v|=\ln|\sin x|$ или $v=\sin x$.

Теперь решаем уравнение $u'v\sin x=1$. Подставив в него найденное v, имеем $u'\sin^2 x=1$, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, откуда $u=-\mathrm{ctg}\ x+C$.

Итак, общее решение данного уравнения есть $y=uv=(-\mathrm{ctg}\,x+C)\sin x$ или $y=C\sin x-\cos x$.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Уравнение (15.17) интегрируется следующим образом. Рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение, т. е. уравнение $y'+p(x)y=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{dx}=-p(x)y$, $\dfrac{dy}{y}=-p(x)dx$.

Интегрируя, находим $\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|$. Таким образом, $\left|\dfrac{y}{C_1}\right| = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$, т. е. $y = \pm C_1\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$ или $y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$, где $C = \pm C_1$.

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную C в полученном решении заменяем функцией $C(x)$, т. е. полагаем $C = C(x)$. Решение уравнения (15.17) ищем в виде

$$y = \mathrm{C}(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{15.20}$$

Находим производную y' и, подставляя y и y' в уравнение (15.17), получаем:

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение примет вид $C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = f(x)$. Следовательно, $C(x) = \int f(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C$, где $C - \mathrm{const}$. Подставляя выражение $C(x)$ в равенство (15.20), получим общее решение ДУ (15.17):

$$y = \left[\int f(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C\right]\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{15.21}$$

Та же формула была получена методом Бернулли.

Пример 15.13. Проинтегрировать уравнение $y' - y/x = -x^2$,

Решение. Найдем общее решение данного линейного уравнения методом Лагранжа.

Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Интегрируя это уравнение, находим его общее решение $y = Cx$.

Общее решение исходного уравнения ищем в виде $y = C(x)x$. Подставляя в исходное уравнение эту функцию и ее производную $y' = C'(x)x + C(x)$, получаем уравнение $C'(x)x + C(x) - {C(x)x}/{x} = -x^2$, $C'(x)x = -x^2$, $C'(x) = -x$, из которого находим $C(x) = -{x^2}/{2} + C$, где C − произвольная постоянная. Следовательно, общее решение уравнения определяется формулой

$$y = \left(C - \frac{x^2}{2} \right) x.$$

Замечание 15.5. Уравнение вида $(xP(y) + Q(y))y' = R(y)$, где $Q(y), P(y), R(y) \neq 0$ − заданные функции, можно свести к линейному, если x считать функцией, а y − аргументом: $x = x(y)$. Тогда, пользуясь равенством $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, получаем $\dfrac{xP(y) + Q(y)}{x'} = R(y)$, т. е. $x' - \dfrac{P(y)}{R(y)} x = \dfrac{Q(y)}{R(y)}$ − линейное относительно x уравнение. Его решение ищется в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ − неизвестные функции.

Пример 15.14. При постоянном напряжении V в цепи по закону Ома $V = RI$, где R − сопротивление цепи и I − сила тока; т. к. V и R − величины постоянные, то сила тока I здесь также постоянная. При переменном напряжении V в ряде случаев наблюдается явление, называемое самоиндукцией, которое состоит в возникновении электродвижущей силы, пропорциональной скорости изменения силы тока I. Явление самоиндукции возникает, если, например, в сеть включаются двигатели (а также при замыкании и размыкании тока постоянного напряжения). Скорость изменения тока есть производная силы тока по времени: $\dfrac{dI}{dt}$. Если сила тока убывает $\left(\dfrac{dI}{dt} < 0 \right)$, то возникающая электродвижущая сила действует в одном направлении с напряжением V, а если сила тока возрастает $\left(\frac{dI}{dt} > 0\right)$, то эта сила действует в направлении, противоположном V. Таким образом, величину возникающей электродвижущей силы можно представить выражением $-L\frac{dI}{dt}$, где L − множитель пропорциональности (коэффициент самоиндукции). При наличии самоиндукции соотношение между V, R и I выражается уже равенством $V - L\frac{dI}{dt} = RI$, т. к. теперь имеется добавочная электродвижущая сила $-L\frac{dI}{dt}$. Последнее равенство представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, в котором I − неизвестная функция переменной t.

Переписав это уравнение в виде

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$$

и воспользовавшись одним из методов решения линейного уравнения, находим общее решение:

$$I = \mathrm{e}^{-\int \frac{R}{L}dt}\left[\int\left(\frac{V}{L}\mathrm{e}^{\int \frac{R}{L}dt}\right)dt + C\right]$$

или, т. к. R и L − постоянные (а потому $\int \frac{R}{L}dt = \frac{R}{L}t$), $I = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{1}{L}\int V\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}dt + C\right)$.

15.8. Уравнения Я. Бернулли

Определение 15.12. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}, \ \alpha \in R, \ \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1 \tag{15.22}$$

называется уравнением Бернулли.

Если $\alpha = 0$, то ДУ (15.22) – линейное, а при $\alpha = 1$ − с разделяющимися переменными. В общем случае, разделив уравнение (15.22) на $y^{\alpha} \neq 0$, получим:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x).$$

Заменой $z = y^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$ последнее уравнение приводится к линейному уравнению $\frac{1}{(1-\alpha)}z' + p(x)z = f(x)$.

Решение его известно (ф. (15.21) п.15.7). На практике ДУ (15.22) удобнее искать методом И.Бернулли в виде $y = u(x)v(x)$ (не сводя к линейному).

Пример 15.15. Проинтегрировать уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2y^2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, для которого $\alpha = 2$. Введем новую переменную $z = y^{1-2} = y^{-1} = 1/y$, то, выражая y и y' через z и z' и подставляя в исходное уравнение, получаем $-z' + z/x = x^2$ или $z' - z/x = -x^2$. Это линейное уравнение, его решение находится с помощью подстановки $z = uv$. Воспользуемся результатом примера (15.13), где решено это уравнение (искомая функция была обозначена буквой y): $z = \left(C - x^2/2\right)x$.

Возвращаясь к переменной y по формуле $y = 1/z$, получаем общий интеграл исходного уравнения: $y = \frac{1}{\left(C - x^2/2\right)x}$ или $xy\left(C - x^2/2\right) = 1$.

15.9. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Определение 15.13. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{15.23}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т. е.

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Справедлива

Теорема 15.2. Уравнение (15.23) с непрерывно дифференцируемыми функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{15.24}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть левая часть уравнения (15.23) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Следовательно,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

откуда

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Продифференцировав первое из соотношений по y, а второе по x, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

В силу равенства вторых смешанных производных заключаем, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достаточность. Покажем, что при выполнении условия (15.24) левая часть уравнения (15.23) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$. Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{15.25}$$

Если в первом уравнении (15.25) зафиксировать y и проинтегрировать его по x, то получим:

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y). \tag{15.26}$$

Здесь произвольная постоянная $C = \varphi(y)$ зависит от y (либо является числом). Подберем $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (15.25). Для этого продифференцируем функцию (15.26) по y и результат приравняем $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x, y)dx\right)_y' + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \left(\int P(x, y)dx\right)'_y . \qquad (15.27)$$

Левая часть последнего равенства зависит от y.

Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y.

Для этого продифференцируем правую часть по x и убедимся, что производная равна нулю.

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(P) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$$

в силу условия (15.24).

Интегрируя равенство (15.27) по y, находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int\left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right)\right)dy .$$

Подставляя найденное значение для $\varphi(y)$ в равенство (15.26), находим функцию $u(x,y)$:

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \int\left(Q(x, y) - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx\right)dy .$$

Теперь перейдем к решению ДУ (15.23).

Найдя функцию $u(x,y)$, уравнение (15.23) можно записать в виде

$$du(x,y)=0, \text{ откуда } u(x,y)=C.$$

Это и есть искомый общий интеграл уравнения (15.23).

Замечание 15.6. При отыскании функции $u(x,y)$ порядок действий можно изменить, т. е. сначала подобрать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую второму из соотношений (15.25), а затем – первому.

Пример 15.16. Решить дифференциальное уравнение $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^2}dy=0$ и найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(1;1)$.

Решение. Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Действительно, $P(x,y)=\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{-6x}{y^4}$, $Q(x,y)=\frac{\left(y^2-3x^2\right)}{y^4}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}$. Условие (15.24) при $y\neq 0$ выполняется. Значит, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x,y)$. Найдем эту функцию.

Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$ находим $u(x,y)=\int\frac{2x}{y^3}dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ − не определяемая пока функция от y. Дифференцируя это соотношение по y и учитывая, что от $\frac{\partial u}{\partial y}=Q=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$, находим: $\frac{-3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$, следовательно, $\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}$, $\varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1$, отсюда $u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1$.

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения есть $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1=C_2$ или $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C$, где $C=C_2-C_1$.

В частности, при $x=1$, $y=1$, $C=0$, и, следовательно, $\frac{1}{y}=\frac{x^2}{y^3}$, $y^2=x^2$ ($y\neq 0$) является уравнением искомой кривой.

Если условие (15.24) не выполняется, то ДУ (15.23) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако это уравнение иногда можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением его на некоторую функцию $\mu(x,y)$, называемую *интегрирующим множителем*. Общее решение полученного таким образом уравнения совпадает с общим решением первоначального уравнения.

Чтобы уравнение $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x,y)P(x,y)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x,y)Q(x,y)\big).$$

Выполнив дифференцирование

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\frac{\partial P}{\partial y}\mu=\frac{\partial\mu}{\partial y}Q+\frac{\partial Q}{\partial y}\mu$$

и приведя подобные слагаемые, получим

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P-\frac{\partial\mu}{\partial y}Q=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Для нахождения $\mu(x,y)$ надо проинтегрировать полученное ДУ в частных производных.

Но в общем случае задача нахождения $\mu(x,y)$ из последнего уравнения еще труднее, чем первоначальная задача интегрирования исходного уравнения.

Только в некоторых частных случаях удается найти функцию $\mu(x, y)$. Нахождение интегрирующего множителя может быть упрощено, если допустить существование μ как функции только одного аргумента x либо только y.

Пусть, например, интегрирующий множитель зависит только от x: $\mu = \mu(x)$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$-\frac{\partial \mu}{\partial y} Q = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{ или } \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx.$$

Отсюда

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{dx}}{Q} dx}. \qquad (15.28)$$

При этом выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно зависеть только от x.

Аналогично получаем, что если $\mu = \mu(y)$ (μ не зависит от x), то $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} dy}$, а подынтегральное выражение должно зависеть только от y.

Пример 15.17. Решить уравнение $(x^2 - y)dx + (x^2 y^2 + x)dy = 0$.

Решение. Здесь $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2 + 1$, т. е. $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, левая часть уравнения не есть полный дифференциал. Однако $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \dfrac{-1 - 2xy^2 - 1}{x^2 y^2 + x} = -\dfrac{2}{x}$ зависит только от x.

Следовательно, уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, выражение которого может быть получено при помощи формулы (15.28). В нашем случае получим, что $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln|x|} = 1/x^2$.

Умножая исходное уравнение на $t = 1/x^2$, получаем: $\left(1 - y/x^2\right)dx + \left(y^2 + 1/x\right)dy = 0$, т. е. уравнение в полных дифференциалах. Решив его, найдем, что общий интеграл заданного уравнения имеет вид $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^3}{3} = C$.

15.10. Уравнения Лагранжа и Клеро

Рассмотрим дифференциальные уравнения, неразрешимые относительно производной. К ним, в частности, относятся уравнения Лагранжа и Клеро.

Определение 15.14. Уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{15.29}$$

где φ, ψ – известные функции от $y' = dy/dx$, называется *уравнением Лагранжа*.

Покажем, что уравнение Лагранжа интегрируется в квадратурах, т. е. его удается параметризовать и решить.

Введем вспомогательный параметр, положив $y' = p$. Тогда уравнение (15.29) примет вид

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{15.30}$$

Дифференцируя по x, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

т. е.

$$p - \varphi(p) = \left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx},$$

или

$$\left(p-\varphi(p)\right)\cdot\frac{dx}{dp}-x\varphi'(p)=\psi'(p). \qquad (15.31)$$

Последнее уравнение является линейным относительно неизвестной функции $x = x(p)$. Решив его, найдем

$$x=\lambda x(p;C). \qquad (15.32)$$

Исключая параметр p из уравнений (15.30) и (15.32), получаем общий интеграл уравнения (15.29) в виде $y=\gamma(x;C)$.

Переходя к уравнению (15.31), мы делим на dp/dx. При этом могли быть потеряны решения, для которых $dp/dx=0$, т. е. $p=p_0=\mathrm{const}$. Это значение p_0 является корнем уравнения $p-\varphi(p)=0$ (см. (15.31)).

Решение $y = x\cdot\varphi(p_0)+\psi(p_0)$ является особым для уравнения (15.29).

Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа при $\varphi(y')\equiv\psi(y')$. Уравнение (15.29) принимает вид

$$y=xy'+\psi(y') \qquad (15.33)$$

и называется *уравнением Клеро*.

Положив $y'=p$, получаем:

$$y=xp+\psi(p). \qquad (15.34)$$

Дифференцируя по x, имеем:

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}, \text{ или } \left(x+\psi'(p)\right)\frac{dp}{dx}=0.$$

Если $dp/dx = 0$, то $p = C$. Поэтому, с учетом (15.34), уравнение Клеро имеет общее решение $y = xC + \varphi(C)$.

Если $x + \psi'(p) = 0$, то получаем частное решение уравнения в параметрической форме:

$$x = -\psi'(\text{p}),\ y = xp + \psi(\text{p}).$$

Это решение – особое решение уравнения Клеро: оно не содержится в формуле общего решения уравнения.

Пример 15.18. Решить уравнение $y = xy'^2 + y'^2$.

Решение. Это – уравнение Лагранжа. Положив $y' = p$, имеем $y = xp^2 + p^2$. Продифференцируем последнее равенство: $dy = p^2dx + 2pxdp + 2pdp$. Производя замену $dy = pdx$, приходим к уравнению $pdx = p^2dx + 2pxdp + 2pdp$. Отсюда, сокращая на *p*, получаем уравнение с разделяющимися переменными $(1-p)dx = 2(x+1)dp$, или $\dfrac{dx}{x+1} = \dfrac{2dp}{1-p}$.

Интегрируя его, находим

$$\ln(x+1) = -2\ln|1-p| + \ln C;\ x+1 = C/(p-1)^2.$$

Используя данное уравнение $y = p^2(x+1)$, получим $y = Cp^2/(1-p^2)$.

Произведенное сокращение на *p* привило к потере особого решения, полагая $p = 0$, находим из данного уравнения $y = 0$: это – особое решение.

Итак, $\begin{cases} x+1 = C/(p-1)^2, \\ y = Cp^2/(p-1)^2, \end{cases}$ − общее решение; $y = 0$ − особое решение.

В общем решении параметр *p* можно исключить и привести к виду

$$\left(\sqrt{y} + \sqrt{x+1}\right)^2 = C.$$

15.11. Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка

Постановка задачи

Выше были рассмотрены некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка и способы их точного решения. При этом в подавляющем большинстве случаев точное решение рассматриваемой дифференциальной задачи обычно не удается выразить через элементарные функции. Приходится прибегать к помощи приближенных методов ее решения. Эти методы в зависимости от того, ищется ли решение в аналитическом виде или в виде таблицы чисел, подразделяют на аналитические и численные.

При построении метода приближенного решения данной дифференциальной задачи ее обычно заменяют более простой, например разностной задачей, решение которой найти легче. Осуществляя такую приближенную замену, стараются, как правило, достичь возможно более полного согласования обеих задач.

Численные методы не позволяют найти общее решение дифференциального уравнения; с их помощью можно определить какое-либо частное решение, например решение уравнения

$$y' = f(x, y), \qquad (15.35)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \qquad (15.36)$$

Для численного решения задачи Коши (15.35) - (15.36) отрезок $[x_0, b]$, на котором нужно найти решение, разбивают точками $x_0, x_1, ..., x_n = b$ на частичные отрезки и ищут каким-либо способом приближенные значения решения в точках

x_i, $i=\overline{1,n}$. При этом решение задачи получают в виде таблицы. Множество точек x_i, $i=\overline{0,n}$, называют сеткой, а точки x_i − узлами сетки. Приближенные значения решения в точках, отличных от узлов, можно найти, например, интерполированием.

Рассмотрим некоторые простейшие численные методы решения задачи (15.35)-(15.36).

Метод Эйлера

Пусть на отрезке $[x_0, b]$ требуется найти приближенное решение уравнения (15.35), удовлетворяющее начальному условию (15.36). Разобьем этот отрезок на n равных частей точками $x_0, x_1, ..., x_n = b$ (здесь $x_0 < x_1 < ... < x_n$). Обозначим длину частичного отрезка через h: $x_{i+1} - x_i = \Delta x = h$, следовательно $h = \frac{b - x_0}{n}$.

Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое приближенное решение уравнения (15.35) и $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, …, $y_n = \varphi(x_n)$.

Обозначим $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, …, $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$. В каждой из точек $x_0, x_1, ..., x_n$ в уравнении (15.35) производную заменим отношением конечных разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$,

$$\Delta y = f(x, y)\Delta x. \qquad (15.37)$$

При $x = x_0$ будем иметь $\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0)$, $\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\Delta x$ или $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$.

В этом равенстве x_0, y_0, h известны, следовательно, находим: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$.

При $x = x_1$ уравнение (15.37) примет вид $\Delta y_1 = f(x_1, y_1)h$ или $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h$, $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$.

Здесь известными являются x_1, y_1, h, а y_2 определяется. Аналогично находим $y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$,

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h. \qquad (15.38)$$

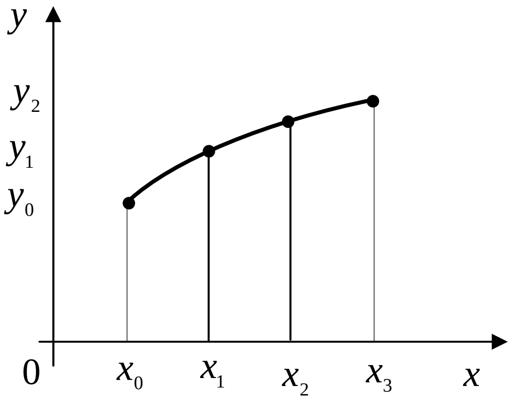


Рис.15.4

Таким образом, приближенные значения в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ найдены. Соединяя на координатной плоскости точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ отрезками прямой, получим ломаную – приближенное изображение интегральной кривой (рис. 15.4). Эта ломаная называется ломаной Эйлера.

По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычисленный h устанавливают с помощью неравенства $h^2 < \varepsilon$.

Рассмотрим геометрический смысл метода Эйлера. Для этого запишем уравнение касательной к интегральной кривой $y(x)$ в точке (x_k, y_k):

$$y - y_k = y'(x_k)(x - x_k).$$

Т. к.. $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$, то положив $x = x_{k+1}$ в последнем равенстве, получим

$$y(x_{k+1}) - y_k = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

При $h = x_{k+1} - x_k$ последнее соотношение совпадает с формулой (15.38). Это означает, что в методе Эйлера интегральная кривая на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ заменяется касательной к ней в точке $(x_k; y(x_k))$ (рис. 15.5), а на отрезке $[x_0, b]$ − ломаной, поскольку на каждом шаге касательная определяется заново.

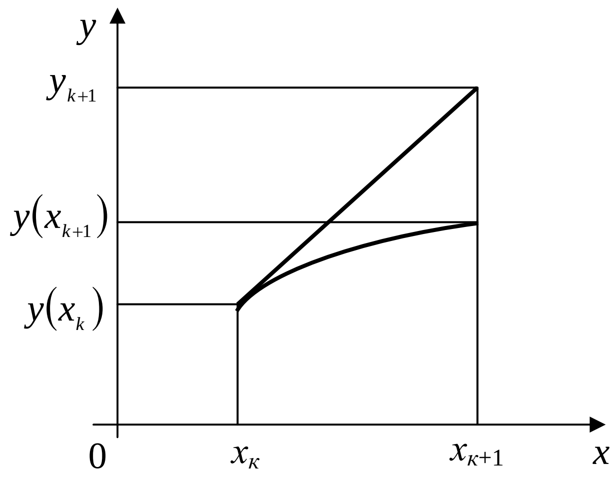


Рис. 15.5

Метод Рунге-Кутта

является одним из наиболее употребительных численных методов повышенной точности. Идея метода состоит в том представлении разности $\Delta y(x)$ в виде суммы поправок k_j с коэффициентами p_j:

$$\Delta y = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_r k_r,$$

где $k_1 = hf(x, y)$, $k_1 = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1), \ldots,$
$k_r = hf(x + \alpha_r h, y + \beta_{r1} k_1 + \beta_{r2} k_2 + \ldots | + \beta_{r\,r-1} k_{r-1})$.

Коэффициенты p_j, α_j, β_{j-i} находят сравнением разложений Δy и k_i по степеням h.

В случае $r = 4$ получаем: $k_1 = hf(x, y)$, $k_2 = hf(x + h/2, y + k_1/2)$, $k_3 = hf(x + h/2, y + k_2/2)$, $k_4 = hf(x + h, y + k_3)$. Если положить, что $y(x+h) = y(x) + \Delta y$, то можно сказать, что $\Delta y \approx \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

При $x = x_0$ приближенное значение y_k последовательно находят по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\ i = 0,1,\ldots,n-1,$$

где $\Delta y_i = \dfrac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$, $k_1^{(i)} = hf\left(x_i, y_i\right)$, $k_2^{(i)} = hf\left(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2\right)$, $k_3^{(i)} = hf\left(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2\right)$, $k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right)$.

По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливается с помощью неравенства $h^4 < \varepsilon$.

Апостериорная оценка точности выполняется по правилу Рунге-Ромберга.

Правило Рунге-Ромберга

Пусть $y_k^{(h)}$ и $y_k^{(2h)}$ − значения искомой функции, полученные одним из указанных выше методов при шагах вычислений h и $2h$ соответственно, а ε − заданная абсолютная предельная погрешность. Тогда считается, что достигнута заданная точность вычислений, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{2^s - 1}\left|y_k^{(h)} - y_k^{(2h)}\right| < \varepsilon \qquad (15.39)$$

при всех k и при $s = 2,4$ соответственно для методов Эйлера и Рунге-Кутта. Решением задачи является функция $\left\{y_k^{(h)}\right\}$.

Применяя указанное правило, последовательно вычисляют значения искомой функции с шагом $2h$ и с шагом h и сравнивают полученные результаты по формуле (15.39). вычисления заканчивают, когда неравенство (15.39) выполняется при всех k.

15.12. Дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия

Определение 15.15. Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0,$$

называется дифференциальным уравнением n-го порядка или, если его можно разрешить относительно n-й производной,

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{15.40}$$

Для этих уравнений справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения, аналогичная соответствующей теореме о решении уравнения первого порядка.

Теорема 15.3 (*Коши*). Если в уравнении $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ и ее частные производные по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в области $G \subset R^{n+1}$, содержащей точку $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$, то в некоторой окрестности точки x_0 существует и притом единственное решение уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{15.41}$$

Условия (15.41) называются начальными условиями, а задача отыскания решения уравнения (15.40), удовлетворяющего этим условиям, − задачей Коши для уравнения (15.40).

В частности, задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'') \tag{15.42}$$

формулируется следующим образом: найти решение дифференциального уравнения (15.42), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, где x_0, y_0, y_0' – заданные числа.

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$ дифференциального уравнения (15.42), проходящую через заданную точку плоскости (x_0, y_0) с угловым коэффициентом касательной этой кривой в точке x_0 равным y_0'. Если задавать различные значения y_0' при постоянных x_0 и y_0, то получим бесчисленное множество интегральных кривых с различными углами наклона, проходящих через заданную точку.

Определение 15.16. Общим решением дифференциального уравнения (15.40) называется *n*-раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящая от *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, удовлетворяющая условиям:

1) при любых значениях $C_1, C_2, ..., C_n$ она является решением данного уравнения, т. е. при подстановке этой функции и ее производных в уравнение (15.40) оно превращается в тождество;
2) каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, принадлежащие области $G \subset R^{n+1}$, существуют единственные значения постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ такие, что функция $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ является решением уравнения (15.40) и удовлетворяет этим начальным условиям.

Если решение дифференциального уравнения *n*-го порядка удается получить лишь в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, то оно называется *общим интегралом* данного уравнения.

Решение дифференциального уравнения, полученное из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется *частным решением* этого уравнения.

График всякого решения ДУ второго порядка называется интегральной кривой. Общее решение ДУ $y'' = f(x, y, y')$ представляет собой множество интегральных кривых; частное решение − одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0) = y'_0$.

Проинтегрировать (решить) ДУ n-го порядка означает найти его общее или частное решение (интеграл) в зависимости от того, заданы начальные условия или нет.

15.13. Уравнения, допускающие понижение порядка

Задача решения (интегрирования) дифференциальных уравнений высших порядков значительно сложнее задачи интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. В некоторых частных случаях такие уравнения можно решить методом понижения порядка. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже. Рассмотрим некоторые типы уравнений (для случая $n = 2$), допускающие понижение порядка.

1. Уравнение вида $y'' = f(x)$

Так как $y'' = (y')'$, то, интегрируя левую и правую части данного уравнения по x, получаем

$$y' = \int f(x)dx + C_1 .$$

Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим $y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2$ − общее решение данного уравнения. Здесь C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Если дано уравнение $y^{(n)} = f(x)$, то, проинтегрировав его последовательно n раз, найдем общее решение уравнения:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n .$$

Пример 15.19. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \sin(kx)$.

Решение. Интегрируя по x, имеем $y' = \int \sin(kx)dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C_1$.

Аналогично

$$y = -\frac{1}{k}\int \cos(kx)dx + C_1\int dx = -\frac{1}{k^2}\sin(kx) + C_1 x + C_2 .$$

2. Уравнение вида $y'' = f(x, y')$, не содержащее явно исходной функции y

Полагая $y' = z(x)$, и учитывая, что $y'' = z'$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка $z' = f(x, z)$, после интегрирования которого находим:

$$z(x) = \varphi(x, C_1),\; y' = \varphi(x, C_1).$$

Отсюда

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2 .$$

Частным случаем уравнения данного вида является уравнение

$$y'' = f(y'),$$

не содержащее также и независимую переменную x. Оно интегрируется тем же способом: $y' = z(x)$, $y'' = z'$. Получаем уравнение $z' = f(z)$ с разделяющимися переменными.

Если задано уравнение вида

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

которое также не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на k единиц, положив $y^{(k)} = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и исходное уравнение примет вид $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$.

Пример 15.20. Решить уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

Решение. Полагаем $y' = z$, где $z = z(x)$, $y'' = z'$. Тогда $z' - \dfrac{z}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x}$, $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, получаем $\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|$, $\ln|z| = \ln|C_1 x|$, $z = C_1 x$.

Возвращаясь к исходной переменной, получим $y' = C_1 x$, $y = C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2$ – общее решение уравнения.

3. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$, не содержащее явно независимой переменной x

Для понижения порядка введем новую функцию $p(y)$, положив $y' = p$. Учитывая, что $p = p(y(x))$, найдем $y'' = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dp(y)}{dx} = \dfrac{dp(y)}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp(y)}{dy} \cdot p$, т. е.

$y'' = p \cdot {p_y}'$. Подставляя значения y' и y'' в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение первого порядка $p \cdot p' = f(y, p)$, в котором y играет роль независимой переменной. Решив его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$. Подставив вместо p производную dy/dx, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $dy/dx = \varphi(y, C_1)$. Интегрируя его, находим общий интеграл данного уравнения: $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$.

Частным случаем уравнения данного вида является ДУ $y'' = f(y)$. Такое уравнение решается при помощи аналогичной подстановки $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot {p_y}'$.

Так же поступаем при решении уравнения $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$. Его порядок можно понизить на единицу, положив $y' = p$, где $p = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Затем найдем $y''' = \frac{d}{dx}\left(p \cdot p'_y\right) = \frac{d}{dy}\left(p \cdot p'_y\right) \cdot \frac{dy}{dx} = p\left(\left(p'_y\right)^2 + p \cdot p''_{yy}\right)$ и т. д.

Пример 15.21. Найти частное решение уравнения $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Решение. Уравнение имеет вид 3. Положив $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, получаем:

$$p\frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0.$$

Т. к. $p \neq 0$ (иначе $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y' = 2$), то $\frac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0$ − линейное ДУ первого порядка.

Проведя решение полученного линейного ДУ методом Бернулли (п. 15.7), получим $p = C_1 e^y + y$. Заменяя p на y', получаем: $y' = C_1 e^y + y$. Подставляя $y' = 2$ и $y = 2$ в это равенство, находим C_1:

$$2 = C_1 e^2 + 2,\ C_1 = 0.$$

Имеем $y' = y$. Отсюда $y = C_2 e^x$. Находим C_2 из начальных условий: $2 = C_2 e^0$, $C_2 = 2$. Таким образом, $y = 2e^x$ − частное решение данного ДУ.

Пример 15.22. (Задача о второй космической скорости). Определить наименьшую скорость, с какой нужно бросить тело вертикально вверх, чтобы оно не вернулось на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Обозначим массу Земли и массу брошенного тела соответственно через M и m. По закону тяготения Ньютона сила F притяжения действующая на тело m, будет

$$F = k\frac{M \cdot m}{r^2},$$

где r − расстояние между центром Земли и центром тяжести брошенного тела, k − гравитационная постоянная.

Дифференциальное уравнение движения тела с массой m будет:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -k\frac{M \cdot m}{r^2} \text{ или } \frac{d^2 r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}.$$

Знак “–” присутствует потому, что в задаче ускорение отрицательно. Полученное уравнение есть уравнение вида 3. Будем решать это уравнение при следующих начальных условиях: $r = R$, $\frac{dR}{dt} = v_0$ при $t = 0$.

Здесь R − радиус Земли, v_0 − скорость бросания. Обозначим

$$\frac{dr}{dt} = v\,,\ \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}\,,$$

где v − скорость движения. Подставляя в полученное уравнение, имеем:

$$v\frac{dv}{dr} = -k\frac{M}{r^2}\,.$$

Разделяя переменные, получаем: $vdv = -kM\dfrac{dr}{r^2}$.

Интегрируя это уравнение, находим: $\dfrac{v^2}{2} = kM\dfrac{1}{r} + C_1$.

Из условия, что $v = v_0$ на поверхности Земли (при $r = R$), определим C_1:

$$\frac{v_0^2}{2} = kM\frac{1}{r} + C_1\,,\ \text{или}\ C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}\,.$$

Подставим найденное значение C_1:

$$\frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}\ \text{или}\ \frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right).$$

По условию тело должно двигаться так, чтобы скорость всегда была положительной, следовательно, $v^2/2 > 0$. Так как величина км/ч при неограниченном возрастании r делается как угодно малой, то условие $v^2/2 > 0$ будет выполняться при любом r только в случае

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0\ \text{или}\ v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}\,.$$

Следовательно, наименьшая скорость будет определяться равенством

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}},$$

где $k = 6{,}66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2}$, $R = 63 \cdot 10^7\,\text{см}$.

На поверхности Земли при $r = R$ ускорение силы тяжести равно $g = 981\,{\text{см}}/{\text{с}^2}$. На основании этого получаем:

$$g = k\frac{M}{R^2} \text{ или } M = \frac{gR^2}{k}.$$

Подставляя значение M, получаем:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11{,}2 \cdot 10^5\,{\text{см}}/{\text{с}} = 11{,}2\,{\text{км}}/{\text{с}}.$$

15.14. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Определение 15.17. Уравнение вида

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_n(x)y = g(x), \tag{15.43}$$

где $b_0(x) \neq 0$, …, $b_n(x)$, $g(x)$ − заданные функции от x или постоянные, линейное относительно неизвестной функции y и ее производных y', y'', …, $y^{(n)}$, называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Функции $b_0(x)$, $b_1(x)$, …, $b_n(x)$ называются коэффициентами уравнения (15.43), а функция $g(x)$ − его свободным членом.

Разделив уравнение (15.43) на $b_0(x) \neq 0$ и обозначив $\frac{b_0(x)}{b_1(x)} = a_1(x)$, …, $\frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x)$, $\frac{g(x)}{b_0(x)} = f(x)$, запишем уравнение (15.43) в виде приведенного:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x). \tag{15.44}$$

Далее будем рассматривать линейные ДУ вида (15.44) и считать, что коэффициенты и свободный член этого уравнения являются непрерывными функциями на некотором интервале $(a;b)$. При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения ДУ (15.44) (см. теорему 15.3).

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (15.44) называется линейным неоднородным уравнением (или уравнением с правой частью).

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (15.44) имеет вид $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} ... + a_n y = 0$ и называется линейным однородным уравнением.

Рассмотрим некоторые свойства решений линейных однородных уравнений, ограничиваясь в доказательствах уравнениями второго порядка.

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0. \tag{15.45}$$

Сформулируем их в идее теорем.

Теорема 15.4. Если функция $y = y_1(x)$ является решением уравнения (15.45), то функция $C\,y_1$ также является решением этого уравнения.

Доказательство. Подставляя в уравнение (15.45) выражение $C\,y_1$, получим:

$$\left(C\,y_1\right)'' + a_1(x)\left(C\,y_1\right)' + a_2(x)\left(C\,y_1\right) = C\left(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) = C \cdot 0 = 0,$$

т. е. $C\,y_1$ − решение уравнения (15.45).

Теорема 15.5. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ − частные решения линейного однородного уравнения (15.45), то их линейная комбинация

$$\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{15.46}$$

также является решением этого уравнения.

Доказательство. Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − решения уравнения, то

$$\begin{cases} y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_2(x)\,y_1 = 0, \\ y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_2(x)\,y_1 = 0. \end{cases} \tag{15.47}$$

Подставив функцию $C_1 y_1 + C_2 y_2$ в уравнение (15.45) и принимая во внимание тождества (15.47), имеем:

$$\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)'' + a_1(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)' + a_2(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = C_1\left(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) +$$

$$+ C_2\left(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, функция $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением уравнения (15.45).

Это решение удовлетворяет уравнению (15.45) при любых значениях C_1 и C_2. Оно будет общим только в том случае, если при любых заданных начальных условиях $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0{}'$ постоянные C_1 и C_2 можно подобрать так, чтобы функция (15.46) удовлетворяла этим условиям. Решение $C_1y_1+C_2y_2$ уравнения (15.45) не всегда является общим. Прежде чем сформулировать условия, при которых эта функция будет общим решением, введем понятия линейной зависимости линейной независимости функций.

Определение 15.18. Функции $y_1(x)$, и $y_2(x)$ называются линейно зависимыми на интервале $(a;b)$, если существуют числа α_1 и α_2, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такие что $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=0 \ \ \forall x\in(a;b)$.

Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны. Действительно, если $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=0$ и, например, $\alpha_1\neq 0$, то $y_1=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2$ или $y_1=k\,y_2$, где $k=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Определение 15.19. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале $(a;b)$, если равенство $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=0$ имеет место только при $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Очевидно, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, то $y_1(x)/y_2(x)\neq\lambda$ $(\lambda - \text{const})$, т. е. функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не пропорциональны.

Например, функции $y_1(x)=3\mathrm{e}^x$ и $y_1(x)=\mathrm{e}^x$ линейно зависимы, т. к. $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=3=\text{const}$; $\forall x\in(a;b)$; функции $y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=\cos x$ являются линейно независимыми: равенство $\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=0$ выполняется для всех $x\in R$ лишь при $\alpha_1=\alpha_2=0$ (или $\dfrac{y_1}{y_2}=\operatorname{tg}x\neq\text{const}$).

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый определитель Вронского или вронскиан.

Определение 15.20. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ − две дифференцируемые функции, то определитель

$$W(x)=W(y_1;y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* или *вронскианом* этих функций.

Теорема 15.6. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на $(a;b)$, то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.

Доказательство. Так как функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то $y_2=\lambda y_1$, где $\lambda=\text{const}$ и $y_2'=\lambda y_1'$. Поэтому для любого $x\in(a;b)$ $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix}=0$.

Замечание 15.7. Из теоремы вытекает, что если $W(x)\neq 0$ хотя бы в одной точке $(a;b)$, то функции y_1, y_2 линейно независимы на $(a;b)$.

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ − частные решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Тогда справедлива

Теорема 15.7. Для того чтобы два частных решения уравнения (15.45) были линейно независимы на интервале $(a;b)$, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля на этом интервале.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми на $(a;b)$ решениям уравнения (15.45). Докажем, что $W(x)\neq 0$ всюду на $(a;b)$. Допустим противоположное, что существует точка $x=x_0\in(a;b)$, в которой $W(x_0)=0$. Выберем числа α_1 и α_2, одновременно не равные нулю, так, чтобы они были решениями системы

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{15.48}$$

Это можно сделать, так как определитель системы (15.48) есть вронскиан и $W(x_0) = 0$ (по предположению). Тогда в силу теоремы 15.5 функция $\bar{y} = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ будет решением уравнения (15.45) с нулевыми начальными условиями $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ (по (15.48)).

Но таким же условиям удовлетворяет и тривиальное решение $\bar{y} \equiv 0$. В силу теоремы существования и единственности решение, удовлетворяющее этим начальным условиям, может быть только одно, следовательно, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ на $(a;b)$, т. е. функции y_1, y_2 − линейно независимы на $(a;b)$, что противоречит условию теоремы. Значит, наше допущение неверно и $W(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$.

Достаточность. Пусть $W(x) \neq 0$ всюду на $(a;b)$. Докажем, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − линейно независимы на этом интервале.

Допустим противное, т. е. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно зависимыми функциями на $(a;b)$. Тогда по теореме (15.6) $W(x) \equiv 0$ $\forall x \in (a;b)$, т. е. не существует $x \in (a;b)$, где $W(x) \neq 0$, что противоречит условию. Следовательно, допущение неверно и функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − линейно независимы.

Пример 15.23. Можно непосредственно показать, что линейно независимые функции $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ являются решениями уравнения $y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = 0$ ($x \neq 0$). Эти решения линейно независимы, так как при $x \neq 0$ их определитель Вронского отличен от нуля: $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^4 \neq 0$ при $x \neq 0$.

Определение 15.21. Совокупность любых двух линейно независимых на интервале $(a;b)$ частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка определяет фундаментальную систему решений этого уравнения: любое произвольное решение может быть получено как комбинация $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$.

Пример 15.24. Частные решения $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$, $y_3 = 2\sin x$, $y_4 = 5\cos x$ (их бесчисленное множество) уравнения $y'' + y = 0$ образуют фундаментальную систему решений; решения же $y_1 = 0$ и $y_2 = \cos x$ − не образуют.

Теперь можно сказать, при каких условиях функция (15.46) будет общим решением уравнения (15.45).

Теорема 15.8 (*о структуре общего решения линейного однородного уравнения второго порядка*). Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (15.45) образуют на интервале $(a;b)$ фундаментальную систему, то функция (15.46), где C_1, C_2 − произвольные постоянные, является общим решением уравнения (15.45).

Доказательство. Достаточно доказать, что

1. функция (15.46) является решением уравнения (15.45) при любых C_1 и C_2;
2. Из этой функции можно получить частное решение, удовлетворяющее любым начальным условиям: $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a;b)$.

Первое утверждение вытекает из теоремы 15.5. Для доказательства второго утверждения запишем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

где C_1, C_2 − неизвестные числа; x_0, y_0, y_0' заданы начальными условиями $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$. Определитель этой системы $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$ равен значению вронскиана $W(x)$ при $x=x_0$.

Так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений на $(a;b)$ и $x_0\in(a;b)$, то, согласно теореме 15.7, $W(x_0)\neq 0$. Значит система уравнений имеет единственное решение: $C_1=C_1^0=\dfrac{1}{W(x_0)}\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$, $C_2=C_2^0=\dfrac{1}{W(x_0)}\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}$. Решение $y=C_1^0y_1(x)+C_2^0y_2(x)$ является частным решением (единственным, в силу теоремы единственности) уравнения (15.45) при любых y_0 и y_0'.

Пример 15.25. Найти общее решение уравнения $y''+y=0$.

Решение. Легко проверить, что функции $y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=\cos x$ являются решениями данного уравнения. Так как их определитель Вронского $W(x)=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-1\neq 0$ $\forall x\in R$, то они линейно независимы и функция $\bar{y}=C_1\mathrm{sinx}+C_2\cos x$ является общим решением исходного уравнения.

15.15. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 15.22. Уравнение вида

$$y''+py'+q=0, \qquad (15.49)$$

где p, q – действительные числа, называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (15.49) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему (см. теорему 15.8).

Будем искать частные решения уравнения (15.49) в виде $y = e^{\lambda x}$, (λ – некоторое число (предложено Л.Эйлером). Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ в уравнение (15.49), получаем $e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$. Т. к. $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{15.50}$$

Следовательно, $e^{\lambda x}$ будет решением дифференциального уравнения (15.49), если λ – корень квадратного уравнения (15.50).

Уравнение (15.50) называется *характеристическим уравнением* для (15.49).

При решении характеристического уравнения (15.50) возможны следующие три случая:

1) корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 действительны и различны: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\left(D = p^2/4 - q > 0\right)$.
2) λ_1 и λ_2 – действительные и равные: $\lambda_1 = \lambda_2$ $\left(D = p^2/4 - q = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}\right)$.
3) λ_1 и λ_2 – комплексно-сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$ $\left(D = p^2/4 - q < 0,\ \alpha = -\dfrac{p}{2},\quad \beta = \sqrt{q - p^2/4} > 0\right)$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Пусть λ_1, λ_2 – действительные и различные корни характеристического уравнения. В этом случае частными решениями уравнения (15.49) являются

функции $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. Они образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы), т. к. их вронскиан $W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ отличен от нуля для любого $x \in R$. Следовательно, общее решение уравнения (15.49) в этом случае имеет вид

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

Пример 15.26. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ действительны и различны. Им отвечают линейно независимые решения $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}$, где C_1 и C_2 − произвольные постоянные.

2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае имеется лишь одно частное решение $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$. Покажем, что наряду с y_1 функция $y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ также является решением уравнения (15.49).

Действительно, так как $y_2' = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x)$, а $y_2'' = \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(2 + \lambda_1 x)$, то, подставляя y_2, y_2', y_2'' в уравнение (15.49), имеем

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(2 + \lambda_1 x) + p\mathrm{e}^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x) + qx\mathrm{e}^{\lambda_1 x} =$$

$$= x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) + \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(2\lambda_1 + p) = 0.$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, равны нулю: $\lambda_1^2 + p\lambda_2 + q = 0$, т. к. λ_1 − корень уравнения (15.50); $2\lambda_1 + p = 0$, т. к. по условию $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2$.

Поэтому $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, т. е. функция $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ является решением уравнения (15.49).

Частные решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ образуют фундаментальную систему решений, так как их вронскиан $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (1+\lambda_1 x)e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0 \quad \forall x \in R$.

Следовательно, общее решение уравнения (15.49) в этом случае имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

Пример 15.27. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, а его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ − действительные и равные числа. Тогда $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = xe^{-3x}$ − линейно независимые частные решения. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

3. Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда комплексные функции действительного аргумента

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)$$

будут решениями дифференциального уравнения (15.49). В этом случае можно получить и действительные решения, если воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 15.9. Если комплексная функция $y = u(x) + iv(x)$ действительного аргумента x является решением уравнения (15.49), то действительные функции $u(x)$ и $v(x)$ тоже являются решениями этого уравнения.

Доказательство. Подставив значения y, y', y'' в уравнение (15.49), получим

$$u''(x) + iv''(x) + p\big(u'(x) + iv'(x)\big) + q\big(u(x) + iv(x)\big) = 0$$

или

$$\big(u''(x) + pu'(x) + qu(x)\big) + i\big(v''(x) + pv'(x) + qv(x)\big) = 0,$$

откуда

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0, \; v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0.$$

Последние равенства справедливы, так как комплексная функция равна нулю тогда и только тогда, когда равны нулю ее действительная и мнимая части.

Найдем два действительных частных решения уравнения (15.49). Для этого составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2: $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x = u(x)$ и $\dfrac{y_1 - y_2}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x = v(x)$. Эти решения $u(x)$ и $v(x)$ образуют фундаментальную систему решений, так как их вронскиан

$$W(u,v) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x\right) & \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x\right) \end{vmatrix} = \beta\mathrm{e}^{2\alpha x} \neq 0 \;\; \forall x \in R.$$

Следовательно, в этом случае общее решение уравнение (15.49) имеет вид

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x\right).$$

Пример 15.28. Найти решение уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Им соответствуют линейно независимые решения $y_1 = \mathrm{e}^x \sin 2x$, $y_2 = \mathrm{e}^x \cos 2x$. Общее решение уравнение имеет вид

$$y = \mathrm{e}^x \left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\right).$$

Определим произвольные постоянные C_1 и C_2 по заданным начальным условиям. Дифференцируя найденное решение, имеем

$$y' = \mathrm{e}^x \left(\left(C_1 - 2C_2\right)\sin 2x + \left(C_2 + 2C_1\right)\cos 2x\right).$$

Учитывая, что $y(0) = 1$, а $y'(0) = 0$, получаем $C_2 = 1$, $C_2 + 2C_1 = 0$, откуда $C_2 = 1$, $C_1 = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, функция

$$y = \mathrm{e}^x \left(\cos 2x - 1/2 \sin 2x\right)$$

является частным решением.

15.16. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (15.51)$$

где a_i, $i=\overline{1,n}$ – постоянные числа, называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Введем понятие линейной зависимости и линейной независимости системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$.

Определение 15.23. Система функций $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, называется линейно зависимой на интервале $(a;b)$, если существуют такие n чисел $\alpha_1,...,\alpha_n$, среди которых есть отличные от нуля, что для любого $x\in(a;b)$ выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+...+\alpha_n y_n(x)=0.$$

Если же это равенство выполняется для любого $x\in(a;b)$ только при $\alpha_i=0$, $i=\overline{1,n}$, то система функций $y_1(x),...,y_n(x)$ называется линейно независимой на интервале $(a;b)$.

Если функции $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, линейно зависимы на интервале $(a;b)$, то хотя бы одна из них линейно выражается через остальные. Пусть, например, $\alpha_1\neq 0$. Тогда $y_1(x)=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x)-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3(x)-...-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}y_n(x)$ или $y_1(x)=\sum\limits_{i=2}^{n}\beta_i y_i(x)$ $\forall x\in(a;b)$,

где $\beta_i=-\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}$, $i=\overline{2,n}$. Если же функции $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, линейно независимы на интервале $(a;b)$, то ни одну из них нельзя записать в виде линейной комбинации остальных функций.

Вопрос о линейной независимости частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ линейного однородного уравнения n-го порядка решается с помощью определителя Вронского (вронскиана) этих функций:

$$W(x)=W(y_1,y_2,...,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 15.10. Для того чтобы n частных решений линейного однородного уравнения n-го порядка были линейно независимы на интервале $(a;b)$, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля на этом интервале. Однородное линейное уравнение n-го порядка имеет ровно n линейно независимых частных решений.

Доказательство аналогично случаю линейного однородного уравнения 2-го порядка.

Теорема 15.11. (*о структуре общего решения линейного однородного уравнения*). Если $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,$ $y_n(x)$ − линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения n-го порядка, то функция

$$\overline{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x),$$

где $C_1,C_2,\ldots,C_n$ − произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Для линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами общее решение находится так же, как и для уравнения второго порядка.

Частные решения ищем в виде $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$, где λ − постоянное число. После подстановки функции y и ее производных $y^{(i)}=\lambda^{(i)}\mathrm{e}^{\lambda x}$ в уравнение (15.51) и сокращая полученное равенство на $\mathrm{e}^{\lambda x}\neq 0$ имеем следующие характеристическое уравнение

$$\lambda^{(n)}+a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Находим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения. При этом:

1) каждому действительному однократному корню λ соответствует частное решение

$$y = e^{\lambda x}$$

дифференциального уравнения (15.51);

2) каждой паре однократных комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ соответствуют два линейно независимых частных решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

3) каждому действительному корню λ кратности m соответствует m линейно независимых решений:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x};$$

4) каждой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ кратности m соответствует $2m$ линейно независимых решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения образуют фундаментальную систему решений на $(a;b)$, если ни в одной точке этого интервала вронскиан не обращается в нуль, т. е. $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$.

Пример 15.29. Показать, что функции $y_1 = \mathrm{e}^x$, $y_2 = x\mathrm{e}^x$, $y_3 = x^2\mathrm{e}^x$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка и составить это уравнение.

Решение. Найдем $W(x)$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x & x^2\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (x+1)\mathrm{e}^x & (x^2+2x)\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (x+2)\mathrm{e}^x & (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{3x}(4x+2-4x) = 2\mathrm{e}^{3x}.$$

Очевидно, что $W(x) \neq 0$ для всех $x \in R$. Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка, которое в общем виде выглядит следующим образом:

$$y''' + \alpha_1(x)y'' + \alpha_2(x)y' + \alpha_3(x)y = 0.$$

Подставив функции y_1, y_2, y_3 в это уравнение, получим систему из трех уравнений относительно функций $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$. Решая ее, получим уравнение

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$$

его общее решение $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + C_3x^2\mathrm{e}^x$.

Пример 15.30. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Следовательно, $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^x + C_3\mathrm{e}^{2x}$ − общее решение.

Пример 15.31. Решить уравнение $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^3 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 1$.

Следовательно, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x$ – общее решение уравнения.

Пример 15.32. Найти общее решение уравнения $y^V + 6y''' + 9y' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 6\lambda^6 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 + 3)^2 = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -3i$. Им соответствуют линейно независимые частные решения

$$y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = e^{0x}\cos 3x = \cos 3x,\ y_3 = \sin 3x,\ y_4 = x\cos 3x,\ y_5 = x\sin 3x.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 - C_2\cos 3x + C_3\sin 3x + x(C_4\cos 3x + C_5\sin 3x).$$

15.17. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Структура общего решения неоднородного уравнения

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{15.52}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ - заданные функции, причем $f(x) \neq 0$.

Справедлива следующая

Теорема 15.12. (*о структуре общего решения неоднородного уравнения*). Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Доказательство. Обозначим через $y^*(x)$ частное решение неоднородного уравнения, а через $\overline{y}(x)$ − общее решение соответствующего однородного уравнения. Покажем, что функция

$$y = \overline{y}(x) + y^*(x) \tag{15.53}$$

является решением неоднородного уравнения. Дважды дифференцируя выражение (15.53) и подставляя значения y, y' и y'' в уравнение (15.52), получаем

$$\overline{y}''(x) + y^{*\prime\prime}(x) + a_1(x)\left(\overline{y}'(x) + y^{*\prime}(x)\right) + a_2(x)\left(\overline{y}(x) + y^*(x)\right) =$$

$$= \left(\overline{y}''(x) + a_1(x)\overline{y}'(x) + a_2(x)\overline{y}(x)\right) + \left(y^{*\prime\prime}(x) + a_1(x)y^{*\prime}(x) + a_2(x)y^*(x)\right) =$$

$$= 0 + f(x) = f(x).$$

Это означает, что функция (15.53) – решение неоднородного уравнения (15.52).

Теперь докажем, что выражение (15.53) есть общее решение уравнения (15.52). Для этого нужно показать, что произвольные постоянные C_1 и C_2, входящие в общее решение $\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ однородного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'\quad \forall x_0 \in (a;b),\ \forall y_0,\ \forall y_0'.$$

С учетом того, что решение

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*(x)$$

неоднородного уравнения (15.52) должно удовлетворять начальным условиям, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + y^*(x_0) = y_0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + y^{*\prime}(x_0) = y_0' \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = y_0' - y^{*\prime}(x_0). \end{array}\right\} \qquad (15.54)$$

Так как частные решения однородного уравнения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на интервале $(a;b)$, определитель системы (15.54), являющийся определителем Вронского при $x = x_0 \in (a;b)$, отличен от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение при любых y_0, y_0', $y^*(x_0)$ и $y^{*\prime}(x_0)$.

Из теоремы 15.12 следует, что для отыскания общего решения неоднородного уравнения необходимо найти общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и какое-либо частное решение y^* неоднородного уравнения. Функцию y^* можно определить методом вариации произвольных постоянных.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ − фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

а общее решение этого уравнения

$$\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \qquad (15.55)$$

Частное решение $y^*(x)$ неоднородного уравнения (15.52) будем искать в виде (15.55), считая при этом C_1 и C_2 не постоянными, а неизвестными функциями переменной x, т. е.

$$y^*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \qquad (15.56)$$

Отсюда

$$y^{*\prime}(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Поскольку необходимо определить две функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, то одно соотношение между ними можно выбрать произвольно. Пусть $C_1(x)$ и $C_2(x)$ такие, что справедливо равенство

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \qquad (15.57)$$

Тогда

$$y^{*\prime}(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x),$$

а

$$y^{*\prime\prime}(x)=C_1'(x)\;y_1'(x)+C_1(x)\;y_1''(x)+C_2'(x)\;y_2'(x)+C_2(x)\;y_2''(x).$$

Подставив выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в уравнение (15.52), после преобразований получим

$$C_1(x)\left[y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)\right]+C_2(x)\left[y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)\right]+$$

$$+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − решения однородного уравнения, то выражения в квадратных скобках равны нулю, и, следовательно,

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Объединив последнее равенство с равенством (15.57), получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0,\\&C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{aligned}\right\}\tag{15.58}$$

с неизвестными функциями $C_1'(x)$, $C_2'(x)$.

Определителем этой системы является вронскиниан

$$W(x)=W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$$

линейно-независимых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Следовательно, $W(x) \neq 0$ на интервале определения и непрерывности функций $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$. Решив систему линейных уравнений (15.58), получим равенства $C_1'(x) = \varphi(x)$, $C_2'(x) = \psi(x)$, проинтегрировав которые, найдем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Подставив их в выражение (15.56), получим частное решение неоднородного уравнения (15.52).

Пример 15.33. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$.

Решение. Запишем общее решение однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения

$$\overline{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^* = C_1(x)\mathrm{e}^{x} + C_2(x)\mathrm{e}^{2x}.$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему уравнений вида (15.58):

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\mathrm{e}^{x} + C_2'(x)\mathrm{e}^{2x} = 0, \\ C_1'(x)\mathrm{e}^{x} + C_2'(x)2\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{3x} \end{array}\right\}.$$

Учтем, что $W[y_1, y_2] = \mathrm{e}^{3x} \neq 0$. Решив составленную систему, имеем $C_1'(x) = -\mathrm{e}^{2x}$, $C_2'(x) = \mathrm{e}^{x}$, откуда $C_1(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$, $C_2(x) = \mathrm{e}^{x}$.

Частное решение исходного неоднородного уравнения

$$y*(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} \cdot e^{x} + e^{x} \cdot e^{2x} = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = \overline{y}(x) + y*(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Теорема 15.13. Если функция $y_1(x)$ является решением линейного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x), \tag{15.59}$$

а функция $y_2(x)$ – решением уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x), \tag{15.60}$$

то функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x). \tag{15.61}$$

Доказательство. Подставляя значения y, y' и y'' в уравнение (15.61) и учитывая, что y_1, y_2 – решение уравнений (15.59), (15.60) соответственно, получаем

$$y_1'' + y_2'' + a_1(x)\left(y_1' + y_2'\right) + a_2(x)(y_1 + y_2) = \left(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) +$$

$$+\left(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right) = f_1(x) + f_2(x).$$

15.18. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \;\; p, \; q \in R. \tag{15.62}$$

Общее решения уравнения (15.62) есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Для отыскания частного решения неоднородного уравнения используется метод вариации произвольных постоянных, который является универсальным, поскольку применяется для любой правой части этого уравнения.

Для специального вида правых частей $f(x)$ уравнения (15.62) частное решение можно найти с помощью *метода неопределенных коэффициентов* (без применения операции интегрирования). Этот метод используется, если правая часть $f(x)$ уравнения (15.62) имеет вид

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{15.63}$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ − многочлены с действительными коэффициентами степеней n и m, а α и β − действительные числа.

Рассмотрим некоторые частные случаи выражения (15.63).

1. Правая часть уравнения (15.62) есть многочлен степени n:

$$f(x) = P_n(x). \tag{15.64}$$

Она получается из выражения (15.63) при $\alpha = \beta = 0$. Возможны три варианта частных решений:

1) число 0 не является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{15.65}$$

Тогда частное решение ищут в виде

$$y^* = R_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n, \tag{15.66}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ − подлежащие определению коэффициенты.

Подставляя значения y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в уравнение (15.62), имеем

$$R_n''(x) + pR_n''(x) + qR_n(x) = P_n(x). \tag{15.67}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений для определения $n+1$ неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$;

2) число 0 является простым (однократным) корнем характеристического уравнения (15.65). Это возможно только при $q = 0$. Если в этом случае $y^*(x)$ искать в виде (15.66), то левая часть равенства (15.67) – многочлен степени $n-1$, а правая – многочлен степени *n*. Значит, равенство (15.67) ни при каких $A_0, A_1, \ldots, A_n$ выполняться не может. Следовательно, частное решение нужно искать в виде многочлена $n+1$-й степени, но без свободного члена, исчезающего при дифференцировании, т. е.

$$y^* = xR_n(x);$$

3) число 0 является двукратным корнем характеристического уравнения, т. е. характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 = 0$. Если в этом случае $y^*(x)$ искать в виде многочлена степени n, то левая часть равенства (15.67) – многочлен $n+2$-й степени, а правая − многочлен степени n, и частное решение $y^*(x)$ нужно искать в виде многочлена $n+2$-й степени, у которого свободный член и член при x, исчезающие при двукратном дифференцировании, равны нулю, т. е.

$$y^*(x) = x^2 R_n(x).$$

Пример 15.34. Решить уравнение $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 - 4x - 14$.

Решение. Правая часть данного уравнения является полиномом второй степени $f(x) = ax^2 + bx + c$. Так как $q \neq 0$, то частное решение ищем в виде $y^*(x) = Ax^2 + Bx + C$. Подставляя выражения для $y^*(x)$, $y^{*\prime}(x) = 2Ax + B$, $y^{*\prime\prime}(x) = 2A$ в данное уравнение, получаем

$$2A + 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2 - 4x - 14$$

или

$$4Ax^2 + (10A + 4B)x + (2A + 5B + 4C) = 8x^2 - 4x - 14.$$

Поскольку $y^*(x)$ − решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x, т. е. является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие в разных частях последнего уравнения, равны между собой: $4A = 8,\ 10A + 4B = -4,\ 2A + 5B + 4C = -14$. Из полученной системы уравнений находим, что $A = 2,\ B = -6,\ C = 3$, поэтому $y^*(x) = 2x^2 - 6x + 3$.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 5y' + 4y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$. Число 0 не является корнем характеристического уравнения. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения определяется формулой

$$\overline{y} = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}.$$

Общее решение исходного уравнения есть функция

$$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x} + 2x^2 - 6x + 3.$$

2. Правая часть уравнения (15.62) имеет вид

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P_n(x), \tag{15.68}$$

т. е. в формуле (15.63) $\beta = 0$. Можно показать, что в этом случае частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} R_n(x), \tag{15.69}$$

если α не является корнем характеристического уравнения (15.65);
в виде

$$y^*(x) = x\mathrm{e}^{\alpha x} R_n(x), \tag{15.70}$$

если α − простой корень характеристического уравнения (15.65);
в виде

$$y^*(x) = x^2\mathrm{e}^{\alpha x} R_n(x), \tag{15.71}$$

если α − двукратный корень характеристического уравнения (15.65).

Пример 15.35. Решить задачу Коши $y'' + y' = 4x^2 e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Общим решением однородного уравнения $y'' + y' = 0$ является функция $\bar{y}(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$. Правая часть исходного уравнения есть функция $f(x) = 4x^2 e^x$ вида (15.68), где $P_2(x) = 4x^2$, $\alpha = 1$. Так как число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то согласно равенству исходного неоднородного уравнения ищем в виде $y^*(x) = (B_0 x^2 + B_1 x + B_2)e^x$. Отсюда

$$y^*(x)' = (2B_0 x + B_1)e^x + (B_0 x^2 + B_1 x + B_2)e^x = \left[B_0 x^2 + (2B_0 x + B_1)x + (B_1 + B_2)\right]e^x;$$

$$y^*(x)'' = \left[B_0 x^2 + (4B_0 + B_1)x + (2B_0 + 2B_1 + B_2)\right]e^x.$$

Подставляя $y^{*\prime}(x)$ и $y^{*\prime\prime}(x)$ в исходное уравнение и сокращая на e^x, получаем равенство

$$2B_0 x^2 + (6B_0 + 2B_1)x + (2B_0 + 3B_1 + 2B_2) = 4x^2,$$

откуда имеем систему

$$\begin{array}{l|c} x^2 & 2B_0 = 4; \\ x^1 & 6B_0 + 2B_1 = 0; \\ x^0 & 2B_0 + 3B_1 + 2B_2 = 0; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = 2; \\ B_1 = -6; \\ B_2 = 7. \end{cases}$$

Частное решение имеет вид

$$y^*(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x.$$

Общее решение исходного уравнения есть функция

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}+\left(2x^2-6x+7\right)\mathrm{e}^x.$$

Отсюда

$$y(x)'=-C_2\mathrm{e}^{-x}+\left(2x^2-2x+1\right)\mathrm{e}^x.$$

Используя начальные условия, находим

$$\left.\begin{array}{r} y(0)=C_1+C_2+7=4; \\ y'(0)=-C_2+1=0; \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=-4; \\ C_2=1. \end{array}\right.$$

Таким образом, искомым решением задачи Коши служит функция

$$y=\left(2x^2-6x+7\right)\mathrm{e}^x-4+\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Правая часть уравнения (15.62) имеет вид

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right).$$

В этом случае частное решение неоднородного уравнения необходимо искать в виде

$$y^*(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(R_\nu(x)\cos\beta x+S_\nu(x)\sin\beta x\right), \tag{15.72}$$

где $\nu=\max(n,m)$, если комплексные числа $\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения (15.65), и в виде

$$y^*(x)=x\mathrm{e}^{\alpha x}\left(R_\nu(x)\cos\beta x+S_\nu(x)\sin\beta x\right), \tag{15.73}$$

если $\alpha\pm i\beta$ − корни характеристического уравнения (15.65).

Замечание 15.8. Частное решение $y^*(x)$ ищут в виде (15.72) или (15.73) и в том случае, когда какой-либо из многочленов $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ тождественно равен нулю.

Пример 15.36. Найти решение $y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$ и общее решение соответствующего однородного уравнения $\overline{y}(x) = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Частное решение данного неоднородного уравнения будем искать согласно равенству (15.72) в виде $y^*(x) = e^x (A\cos x + B\sin x)$.

Найдем $y^*(x)'$, $y^*(x)''$ и подставим в исходное уравнение.

$$y^{*\prime}(x) = e^x (A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x)$$

$$y^{*\prime\prime}(x) = e^x (-2A\sin + 2B\cos x)$$

$$e^x [(16A + 8B)\cos x + (16B - 8A)\sin x] \equiv 80e^x \cos x .$$

Отсюда имеем систему

$$\left.\begin{aligned} 16A + 8B = 80, \\ 16B - 8A = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 4, \\ B = 2. \end{cases}$$

Частное решение $y^*(x) = e^x (4\cos x + 2\sin x)$.

Общее решение исходного уравнения

$$y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^x (2\cos x + C_2 \sin x).$$

Используя начальные условия, найдем постоянные C_1 и C_2.

$$y'(x) = \mathrm{e}^{-3x}\left(-3C_1\cos x - 3C_2\sin x - C_1\sin x + C_2\cos x\right) + 2\mathrm{e}^{x}\left(3\cos x - \sin x\right).$$

$$\left.\begin{array}{r} y(0) = C_1 + 4 = 4, \\ y'(0) = -3C_1 + C_2 + 6 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 4. \end{cases}$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$y = 4\mathrm{e}^{-3x}\sin x + 2\mathrm{e}^{x}\left(2\cos x + \sin x\right).$$

15.19. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{15.74}$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – заданные функции от x или постоянные числа. Предположим, что известно общее решение

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n$$

соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0.$$

Как и в случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка, для уравнения (15.74) справедлива

Теорема 15.14. (*о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения*). Общее решение линейного неоднородного уравнения (15.74) есть сумма его произвольного частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Зная общее решение линейного однородного уравнения *n*-го порядка, его частное решение можно найти методом вариации произвольных постоянных.

Для линейных неоднородных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами a_i, $i=\overline{1,n}$, и специальной правой частью вида

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (15.75)$$

частное решение неоднородного уравнения можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим частные случаи выражения (15.75).

1. Правая часть уравнения (15.74) имеет вид

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}P_n(x).$$

Если действительное число α не является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \qquad (15.76)$$

тогда частное решение неоднородного уравнения (15.74) можно искать в виде

$$y^*(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}R_n(x).$$

Если α − корень кратности k характеристического уравнения (15.76), где

$$R_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

то частное решение уравнения (15.74) ищут в виде

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x} R_n(x). \qquad (15.77)$$

Неопределенные коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$ выбираются так, чтобы при подстановке $y^*(x)$ в уравнение (15.74) последнее обращалось в тождество.

Пример 15.37. Найти общее решение уравнения $y''' + y'' - 5y' + 3y = (x^2 + 4)e^x$.

Решение. Однородному уравнению $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$. Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$.

Общее решение однородного уравнения

$$\overline{y} = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-3x}.$$

Правая часть исходного уравнения – произведение многочлена второй степени $P_2(x)$ на функцию e^x. В данном случае $P_2(x) = x^2 + 4$, а число 1 является корнем характеристического уравнения кратности $k = 2$, поэтому частное решение неоднородного уравнения, согласно (15.77), ищем в виде

$$y^*(x) = x^2 e^x (A_0 x^2 + A_1 x + A_2).$$

Найдем $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime\prime}$ и подставим их значения в исходное уравнение. После сокращения полученного равенства на e^x и приведения подобных членов имеем

$$48A_0 x^2 + 24(A_0 + A_1)x + (6A_1 + 8A_2) \equiv x^2 + 4.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, находим

$$\left.\begin{array}{l|c} x^2 & 48A_0 = 1 \\ x^1 & A_0 + A_1 = 0, \\ x^0 & 6A_1 + 8A_2 = 4, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1/48, \\ A_1 = -1/48, \\ A_2 = 33/64. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения

$$y^* = x^2 e^x \left(\frac{1}{48} x^2 - \frac{1}{48} x + \frac{33}{64} \right),$$

а его общее решение

$$y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-3x} + \frac{1}{48} x^2 e^x \left(x^2 - x + \frac{99}{4} \right).$$

2. Правая часть уравнения (15.74) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \left(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right).$$

В этом случае частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде

$$y^*(x) = e^{\alpha x} \left(R_\nu(x) \cos \beta x + S_\nu(x) \sin \beta x \right), \tag{15.78}$$

если комплексно-сопряженные числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения (15.76),
и в виде

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x} \left(R_\nu(x) \cos \beta x + S_\nu(x) \sin \beta x \right), \tag{15.79}$$

если числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями кратности k характеристического уравнения (15.76).

Коэффициенты многочленов $R_\nu(x)$ и $S_\nu(x)$ степени $\nu = \max(n, m)$ выбираются так, чтобы функция $y^*(x)$ вида (15.78) или (15.79) обращала уравнение (15.74) в тождество.

Пример 15.38. Решить уравнение $y'' + 2y' = 10e^x(\sin 2x + \cos 2x)$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение $y'' + 2y' = 0$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ с корнями $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -2$. Общее решение однородного уравнения $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

По виду правой части составляем числа $\lambda = \alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i$, которые не являются корнями характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде (15.78), где $v = 0$: $y^* = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

Отсюда находим

$$y^{*\prime} = e^x[(A + 2B)\cos 2x + (B - 2A)\sin 2x];$$

$$y^{*\prime\prime} = e^x[(4B - 3A)\cos 2x + (-4A - 3B)\sin 2x].$$

Подставляя $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и сокращая на $e^x \neq 0$, получаем равенство

$$(8B - A)\cos 2x + (-8A - B)\sin 2x = 10\cos 2x + 10\sin 2x.$$

Приравняв коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в обеих частях равенства соответственно, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 8B - A &= 10, \\ -8A - B &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{18}{7}, \\ B = \frac{13}{14}. \end{cases}$$

Частное решение исходного дифференциального уравнения есть

$$y^* = \mathrm{e}^{x}\left(-\frac{18}{7}\cos 2x + \frac{13}{14}\sin 2x\right),$$

а его общее решение

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{x}\left(-\frac{18}{7}\cos 2x + \frac{13}{14}\sin 2x\right).$$

Пример 15.39. Указать вид частного решения дифференциального уравнения

$$y^{V} + 4y^{IV} + 24y''' + 40y'' + 100y' = \mathrm{e}^{-x}\left[(x+3)\cos 3x + \left(2x^2 - 1\right)\sin 3x\right].$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 24\lambda^3 + 40\lambda^2 + 100\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 10\right)^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1 + 3i$, $\lambda_{4,5} = -1 - 3i$. В правой части дифференциального уравнения $\alpha = -1$, $\beta = 3$, т. е. $\lambda = \alpha \pm i\beta = -1 \pm 3i$ является двукратным корнем характеристического уравнения. $P_n(x) = x + 3$, $Q_m(x) = 2x^2 - 1$, $\mathrm{v} = \max\{1,2\} = 2$. Следовательно, искомое частное решение уравнения надо искать в виде

$$y^* = x^2\mathrm{e}^{-x}\left[\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos 3x + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin 3x\right].$$

Полученные выше результаты сведем в следующую таблицу.

Таблица видов частных решений для различных видов правых частей

№ п/п	Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
1.	$f(x)=P_n(x)=A_0x^n+$ $+A_1x^{n+1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$	Число $\lambda=0$ не является корнем характеристического уравнения	$y^*=B_0x^n+B_1x^{n-1}+$ $+\ldots+B_{n-1}x+B_nx$
		Число $\lambda=0$ является корнем кратности k характеристического уравнения	$y^*=x^k(B_0x^n+B_1x^{n-1}+$ $+\ldots+B_{n-1}x+B_nx)$
2.	$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}P_n(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}(A_0x^n+$ $+A_1x^{n+1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)$	Число $\lambda=\alpha$ не является корнем характеристического уравнения	$y^*=\mathrm{e}^{\alpha x}(B_0x^n+B_1x^{n-1}+$ $+\ldots+B_{n-1}x+B_nx)$
		Число $\lambda=\alpha$ является корнем кратности k характеристического уравнения	$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}(B_0x^n+B_1x^{n-1}+$ $+\ldots+B_{n-1}x+B_nx)$
3.	$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_n(n)\cos\beta x+$ $+Q_m(n)\sin\beta x]$	Числа $\lambda=\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$y^*=\mathrm{e}^{\alpha x}[R_v(x)\cos\beta x+$ $+S_v(x)\sin\beta x]$ $v=\max\{n,m\}$
		Числа $\lambda=\alpha\pm i\beta$ являются корнями кратности k характеристического уравнения	$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[R_v(x)\cos\beta x+$ $+S_v(x)\sin\beta x]$ $v=\max\{n,m\}$

Часто правая часть дифференциального уравнения содержит несколько слагаемых, каждое из которых принадлежит одному из трех приведенных в таблице видов. В этом случае частное решение ищется в соответствии с принципом суперпозиции.

Пример 15.40. Для уравнения $y^{IV}-y=\mathrm{e}^{\alpha x}+\mathrm{e}^{-\alpha x}+\cos\beta x$ указать вид частного решения.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^4-1=0$ имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$, поэтому $\bar{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

В соответствии с принципом суперпозиции ищем частное решение:

$$y^*=y_1^*+y_2^*+y_3^*,$$

где $y_1^*=A\mathrm{e}^{\alpha x}$, $y_2^*=B\mathrm{e}^{-\alpha x}$, $y_3^*=C\sin\beta x+D\cos\beta x$ соответственно частные решения уравнений $y^{IV}-y=\mathrm{e}^{\alpha x}$, $y^{IV}-y=\mathrm{e}^{-\alpha x}$, $y^{IV}-y=\cos\beta x$.

Пример 15.41. Для уравнения $y'''+y'=2x-3+\mathrm{e}^{2x}\left(x^2-1\right)+x^3\cos x$ указать вид частного решения.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3+\lambda=\lambda\left(\lambda^2+1\right)=0$ имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=\pm i$. Правая часть дифференциального уравнения состоит из трех слагаемых: $f_1=2x-3$, $f_2=\mathrm{e}^{2x}\left(x^2-1\right)$ и $f_3=x^3\cos x$.

По принципу суперпозиции частное решение ищется в виде $y^*=y_1^*+y_2^*+y_3^*$, где $y_1^*=x(Ax+B)$, $y_2^*=\left(Cx^2+Dx+E\right)\mathrm{e}^{2x}$, $y_3^*=x\left[\left(Fx^3+Gx^2+Kx+L\right)\cos x+\left(Mx^3+Nx^2+Px+Q\right)\sin x\right]$.

15.20. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений *n*-го порядка методом вариации произвольных постоянных

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{15.80}$$

где функция $a_1(x),\ i = \overline{1,n}$ и $f(x)$ непрерывны для $x \in (a;b)$. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) применяется для отыскания общего решения линейного неоднородного уравнения (15.80) как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Пусть известно общее решение $\overline{y}(x)$ однородного уравнения

$$\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $y_i(x),\ i = \overline{1,n}$, – частные решения однородного линейного уравнения, соответствующего уравнению (15.80). Тогда общее решение уравнения (15.80) ищут в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Функции $C_i(x),\ i = \overline{1,n}$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ . \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \qquad (15.81)$$

где $f(x)$ – правая часть данного уравнения.

Как было описано ранее, для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

система (15.81) имеет вид

$$\left.\begin{array}{r} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{array}\right\}$$

Ее решение находят по формулам:

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)dx}{W(y_1, y_2)} + C_1, \quad C_2(x) = -\int \frac{f(x)y_1(x)dx}{W(y_1, y_2)} + C_2, \qquad (15.82)$$

где $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ – определитель Вронского частных решений y_1 и y_2 однородного уравнения второго порядка.

Пример 15.42. Решить уравнение $y'' + 4y = 1/\sin 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x. \tag{15.83}$$

Так как $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, $y_1' = -2\sin 2x$, $y_2' = 2\cos 2x$, то имеем систему:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0,\\ &-2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = 1/\sin 2x,\end{aligned}\right\}$$

из которой находим определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2.$$

Тогда, согласно формулам (15.82), имеем

$$C_1'(x) = \frac{1}{W(y_1, y_2)}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\sin 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{W(y_1, y_2)}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\sin 2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{Ctg}\,2x.$$

После интегрирования последних двух равенств найдем значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int dx + C_1 = -\frac{x}{2} + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx + C_2 = \frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + C_2 .$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение (15.83), получаем общее решение исходного уравнения

$$y = \left(C_1 - \frac{1}{2}x\right)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{1}{4}\ln|\sin 2x|\right)\sin 2x$$

или

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln\sin 2x .$$

15.21. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Автономные системы

Определение 15.23. *Нормальной системой* n дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называется система

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ..., y_n), \end{aligned}\right\} \tag{15.84}$$

где функции f_i, $i = 1,2,...,n$, определены в некоторой $(n+1)$-мерной области D переменных $x, y_1, ..., y_n$.

Если правые части уравнений, входящих в систему (15.84), являются линейными функциями относительно $y_1,...,y_n$, то данная система называется линейной.

Определение 15.24. *Решением системы* (15.84) на интервале (a,b) называется совокупность n функций $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),...,y_n = y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a,b) и удовлетворяющих системе.

Задача Коши для системы (15.84) состоит в нахождении решения $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),...,y_n = y_n(x)$ этой системы, которое удовлетворяет начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,...,y_n(x_0) = y_n^0, \tag{15.85}$$

где $y_1^0,\ y_2^0,...,y_n^0$ – заданные числа.

Для нормальной системы (15.84) имеет место

Теорема 15.15. (*о существовании и единственности решения нормальной системы*). Пусть функции $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n)$, $i=\overline{1,n}$, определены в $(n+1)$-мерной области D изменения переменных $x,y_1,y_2,...,y_n$. Если они непрерывны в некоторой окрестности Δ внутренней точки $M_0(x_0,y_1^0,y_2^0,...,y_n^0)$ области D и имеют в этой окрестности непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $k=\overline{1,n}$, то найдется интервал $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, в котором существует единственное решение нормальной системы (15.84), удовлетворяющее условиям (15.85) (без доказательства).

Определение 15.25. Совокупность функций

$$y_i = y_i(x,C_1,C_2,...,C_n),\quad i=\overline{i,n},$$

зависящих от x и n произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$ называется *общим решением системы дифференциальных уравнений* (15.84), если:

1) она является решением этой системы при любых допустимых значениях $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) каковы бы ни были начальные условия (15.85) из области Δ, можно найти такие $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, \ldots,$ $C_n = C_n^0$, что функции $y_i = y_i\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$, $i = \overline{i, n}$, удовлетворяют этим начальным условиям, т. е.

$$y_i\left(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right) = y_i^0, \quad i = \overline{i, n}.$$

Замечание 15.9. Частным решением системы дифференциальных уравнений называется решение, которое получается из общего решения этой системы при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Введя векторы-столбцы

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

систему (15.84) можно записать в векторной форме

$$y' = f(x, y),$$

где $(x, y) = (x, y_1, y_2, ..., y_n) \in D$.

Пусть $y = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right)^T$ − решение системы (15.84) на интервале (a, b). Графиком этого решения служит множество точек из D, определяемое равенством

$$G_y = \{(x, y_1(x), ..., y_n(x)) | x \in (a;b)\}.$$

Множество G_y представляет собой параметрически заданную кривую параметра $x \in (a,b)$ в $(n+1)$-мерной области переменных $x, y_1, ..., y_n$. Эта кривая называется интегральной кривой системы (15.84). Начальные условия (15.85) определяют в области D точку $M_0 = (x_0, y_1^0, ..., y_n^0)$. Задача Коши состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых системы (15.84) найти ту, которая проходит через точку M_0. Если для системы (15.84) выполнены условия теоремы (15.15), то всякие две интегральные кривые этой системы, имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают. Т. е., интегральные кривые системы дифференциальных уравнений или совпадают, или не пересекаются.

Определение 15.26. Если время x не входит явно в правые части системы (15.84), то система $y' = f(y)$ называется *автономной* или *стационарной*.

15.22. Геометрический смысл решения системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство. Фазовая траектория

Решению $y=(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))^T$ системы (15.84) соответствует движение точки в n-мерном пространстве переменных $y_1, y_2,..., y_n$. Это пространство называется *фазовым* (при $n=2$ оно называется *фазовой плоскостью*), а кривая, описываемая в нем движущейся точкой, – фазовой траекторией.

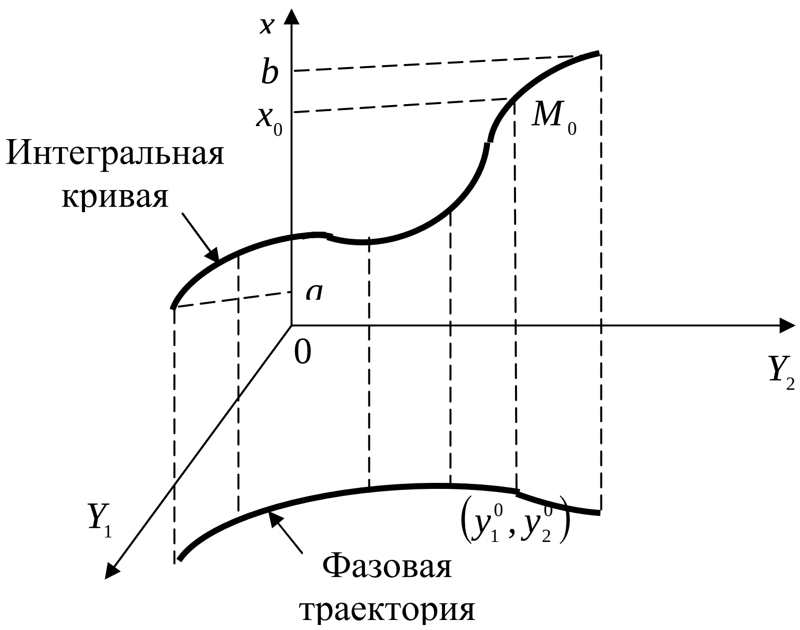


Рис. 15.6

Взаимосвязь между интегральной кривой системы и фазовой траекторией состоит в том, что траектория является проекцией интегральной кривой, расположенной в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x, y_1,..., y_n$ на n-мерное пространство переменных $y_1, y_2,..., y_n$ (рис. 15.6). Фазовая траектория $y=(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))^T$ обладает тем же свойством, что составляющие скорости $y_1'(x), y_2'(x),..., y_n'(x)$ в момент времени x равны значениям правых частей $f_1(x, y(x)), f_2(x, y(x)),..., f_n(x, y(x))$ системы (15.84) в точке $(x, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))$.

Геометрическая интерпретация автономной системы выглядит следующим образом. Говорят, что в области $G \in R^n$ определено векторное поле f, если каждой точке $y \in G$ поставлен в соответствие вектор $f = f(y)$. Тогда решение y автономной системы $y' = f(y)$ описывает траекторию движения точки в фазовом n-мерном пространстве переменных $y_1, y_2,..., y_n$. В каждой точке этой траектории вектор скорости движения y' совпадает со значением вектора поля f, т. е. касательная к траектории в каждой ее точке совпадает с направлением поля в этой точке.

15.23. Приложение к динамике системы материальных точек и теории управления

При изучении закона движения материальной точки с массой m удобно пользоваться векторной формой записи уравнений. Пусть $r = r(t)$ − закон движения материальной точки в пространстве R^3, где t – время. Это значит, что в момент времени t точка имеет координаты $\{x(t), y(t), z(t)\}$.

Если точка массы m движется под действием заданной силы (вектора) $F\left(t, r, \dot{r}\right)$, то по закону Ньютона и механическому смыслу второй производной функция $r(t)$ должна удовлетворять уравнению движения

$$m\ddot{r} = F\left(t, r, \dot{r}\right). \tag{15.86}$$

Векторное уравнение (15.86) эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$
\left.
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= X\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right),\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right),\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right),
\end{aligned}
\right\} \tag{15.87}
$$

где X, Y, Z − проекции вектора F на оси координат x, y, z.

Если считать неизвестными не только координаты точки x, y, z, но и проекции скорости

$$
\frac{dr}{dt} = \left\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right\},
$$

то получим систему из шести уравнений первого порядка.

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{x} = u,\ \ m\frac{du}{dt} &= X(t, x, y, z, u, v, w),\\
\dot{y} = v,\ \ m\frac{dv}{dt} &= Y(t, x, y, z, u, v, w),\\
\dot{z} = w,\ \ m\frac{dw}{dt} &= Z(t, x, y, z, u, v, w).
\end{aligned}
\right\} \tag{15.88}
$$

Векторное уравнение (15.86) можно также записать в виде системы двух векторных уравнений, если скорость $V = \dfrac{dr}{dt}$ считать неизвестной векторной функцией:

$$
\frac{dr}{dt} = V,\ \ m\frac{dV}{dt} = F(f, r, V),
$$

V – вектор с проекциями u, v, w.

Если ввести в рассмотрение вектор

$$R(t) = \left\{ x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t) \right\},$$

то уравнение (15.86) или система (15.88) эквивалентны одному векторному уравнению первого порядка

$$\frac{dR}{dt} = \Phi(t, x, y, z, u, v, w) \qquad (15.89)$$

в шестимерном пространстве, причем вектор

$$\Phi\left(u, v, w, \frac{1}{m} X, \frac{1}{m} Y, \frac{1}{m} Z \right).$$

Определение 15.27. Шестимерное пространство точек

$$\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \right) \equiv \left(r_x, r_y, r_z V_x, V_y, V_z \right)$$

в физике называют *фазовым,* а кривую $R(t)$ в шестимерном пространстве, являющуюся решением (15.89), называют *фазовой траекторией*.

Фазовое пространство – это пространство состояний движения точки по кривой.

Первые три координаты $R(t)$ характеризуют положение точки в трехмерном пространстве $(r(t))$, а остальные три координаты $R(t)$ характеризуют ее скорость $\dot{r}(t)$. Приведенная терминология дает так называемую *кинематическую интерпретацию системы уравнений*.

Систему (15.88), или, что то же самое, (15.89) называют *динамической системой*.

Для выделения одной траектории необходимо задать начальные условия: $R(t_0) = R_0 = \left(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \right)$, т. е. начальное положение точки и ее начальную скорость. Интегральная кривая $R(t)$ будет проходить через точку R_0 шестимерного пространства.

Таким образом, физические задачи приводят к необходимости рассмотрения систем дифференциальных уравнений.

15.24. Переход от дифференциального уравнения к системе дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение n–го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{15.90}$$

можно свести к системе дифференциальных уравнений.

Положим

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1; \\ y' &= y_1' = y_2; \\ y'' &= y_2' = y_3; \\ &\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= y_{n-1}' = y_n; \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y_1 &= y; \\ y_2 &= y'; \\ y_3 &= y''; \\ &\ldots\ldots \\ y_n &= y^{(n-1)}; \end{aligned}\right. \tag{15.91}$$

Следовательно, уравнение (15.90) примет вид

$$y^{(n)} = y_n' = f\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \tag{15.92}$$

Таким образом, уравнение (15.90) с учетом равенств (15.91) и (15.92) эквивалентно нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{r} y_1' = y_2; \\ y_2' = y_3; \\ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ y_{n-1}' = y_n; \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{array}\right\} \tag{15.93}$$

Решение систем (15.93), согласно равенствам (15.91), служит вектор

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \tag{15.94}$$

первая координатная функция $y_1 = y_1(x) = y(x)$ которого есть решение исходного дифференциального уравнения.

15.25. Методы интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений

Метод исключения неизвестных

Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является *метод исключения неизвестных*, который сводит систему уравнений к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом.

Пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений (15.84), где функции f_i, $i=1,2,...,n$, n-раз непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области D. Эту систему можно свести к одному дифференциальному уравнению n.

Из первого уравнения системы (15.84) дифференцированием по x находим

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1'}{\partial y_1} y_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n = F_2(x, y_1, \ldots, y_n),$$

поскольку $y_i' = f_i$, $i=1,2,...,n$.

Дифференцируя теперь это равенство, находим $y_1''' = F_3(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Продолжая этот процесс, получаем новую систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{array}\right\}$$

При определенных условиях из этой системы можно выразить производную $y_1^{(n)}$ в виде функции от $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$, т. е. получить дифференциальное уравнение $y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right)$.

Таким образом, нормальную систему n уравнений первого порядка можно свести к одному дифференциальному уравнению порядка n. На этом основан один из методов интегрирования систем дифференциальных уравнений – *метод исключения*.

Пример 15.43. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases}$

Решение. Это однородная система уравнений второго порядка. Продифференцируем дважды первое уравнение системы: $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^4y}{dt^4}$. Подставляя затем во второе уравнение системы выражение для $\frac{d^2x}{dt^2}$, получаем уравнение $\frac{d^4y}{dt^4}-y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4-1=0$ имеем корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$. Общее решение уравнения $y^{IV}-y=0$ $y(t)=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$.

По данному первому уравнению системы $x=\frac{d^2y}{dt^2}$ находим $x(t)$. Имеем

$$\frac{dy}{dt}=C_1\mathrm{e}^t-C_2\mathrm{e}^{-t}-C_3\sin t+C_4\cos t,$$

тогда

$$x=\frac{d^2y}{dt^2}=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.$$

Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t,$$

$$y(t)=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t.$$

Метод интегрируемых комбинаций

В некоторых случаях, комбинируя уравнения системы, после несложных преобразований удается получить легко интегрируемые уравнения, с помощью которых можно найти решение системы.

Определение 15.28. *Интегрируемой комбинацией* называется дифференциальное уравнение

$$F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n\right) = 0,$$

являющееся следствием уравнений системы (15.93) и интегрирующееся проще, чем входящие в нее уравнения. После интегрирования этого уравнения получают выражение $\Phi\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) = C$, называемое *первым интегралом* системы (15.93).

Найдя несколько интегрируемых комбинаций, можно с их помощью уменьшить число неизвестных функций и даже выполнить интегрирование до конца.

Пример 15.44. Найти общее решение системы методом интегрируемых комбинаций $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Решение. Решая первое уравнение системы, получаем $x\dfrac{dy}{dx} = y$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dx}{x}$, $\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|$. Отсюда имеем $y = C_1 x$ − первый интеграл системы. Преобразуем второе уравнение системы к виду $2zz' + 2x + 2\,y^2/x = 0$. Так как из первого уравнения данной системы имеем $y' = \dfrac{y}{x}$, то $2zz' + 2x + 2yy' = 0$, откуда $d\left(z^2 + x^2 + y^2\right) = 0$.

Следовательно $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$ также служит первым интегралом системы. Итак, совокупность $C_1 x = y$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$ является общим интегралом исходной системы.

15. 26 Линейные нормальные системы дифференциальных уравнений

Определение 15.29. Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y + \varphi_1(x), \\ &\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{15.95}$$

называется *линейной*.

Ее можно записать в векторно-матричной форме

$$\frac{dy}{dx} = Ay + \vec{\varphi}, \tag{15.96}$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Если функция $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1,n}$, то система (15.95) называется *однородной*, в противном случае – неоднородной.

Пусть функции $a_{ij}(x)$, называемые коэффициентами системы (15.95), и $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, определены и непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$. Тогда задача Коши для нормальной системы линейных уравнений (15.95) имеет единственное решение в достаточно малой окрестности каждой точки $M_0\left(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right)$, $x_0 \in [a;b]$.

Для линейных систем дифференциальных уравнений справедливы теоремы, аналогичные сформулированным ранее для линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка. Введем их без доказательств.

Теорема 15.16. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ − произвольные решения линейной однородной системы $\frac{dy}{dx} = Ay$, то их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ также будет решением этой системы.

Теорема 15.17. Если $y(x)$ является решением линейной однородной системы $\frac{dy}{dx} = Ay$, то $Cy(x)$ также будет решением этой системы при любом постоянном C.

Теорема 15.18. Если $\tilde{y}(x)$ − решение линейной неоднородной системы $\frac{dy}{dx} = Ay + \vec{\varphi}$, а $y(x)$ − решение соответствующей однородной системы $\frac{dy}{dx} = Ay$, то сумма $\tilde{y}(x) + y(x)$ будет решением неоднородной системы.

Определение 15.30. Система векторов $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называется линейно независимой на интервале $(a;b)$, если тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \qquad x \in (a;b), \tag{15.97}$$

выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Если же тождество (15.97) имеет место и при этом среди чисел α_i, $i = \overline{1,n}$ есть хотя бы одно отличное от нуля, то данная система векторов называется линейно зависимой.

Пусть вектор $y_k(x)$ имеет координаты $y_{1k}(x), y_{2k}(x), ..., y_{nk}(x)$, $k = \overline{1,n}$. Запишем тождество (15.97) в скалярном виде:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha_1 y_{11}(x)+\alpha_2 y_{12}(x)+\ldots+\alpha_n y_{1n}(x)\equiv 0,\\ \alpha_1 y_{21}(x)+\alpha_2 y_{22}(x)+\ldots+\alpha_n y_{2n}(x)\equiv 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_1 y_{n1}(x)+\alpha_2 y_{n2}(x)+\ldots+\alpha_n y_{nn}(x)\equiv 0,\end{array}\right\}.$$

Определитель Вронского (вронскиниан) системы векторов $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ имеет вид

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x)\\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

Теорема 15.19. Для того чтобы система векторов $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$, являющихся решениями линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{dy}{dx}=Ay$, была линейно-независимой на интервале $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы ее вронскиниан был отличен от нуля на $(a;b)$.

Теорема 15.20. (*о структуре общего решения однородной системы*). Линейная комбинация $C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\ldots+C_n y_n(x)$ линейно независимых на интервале $(a;b)$ решений $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{dy}{dx}=Ay$ является общим решением этой системы.

Теорема 15.21. (*о структуре общего решения неоднородной системы*). Общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и произвольного частного решения неоднородной системы.

Теорема 15.22. Если вектор $u(x)+iv(x)$ − решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами $a_{k_j}(x)$ и функциями $\varphi_k(x)$, $k, j=\overline{i,n}$, то действительная часть решения $u(x)$ и его мнимая часть $v(x)$ также будут решениями этой системы.

15.27. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение 15.31. Система

$$\left.\begin{array}{c} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n, \end{array}\right\} \qquad (15.98)$$

в которой коэффициенты a_{ij}, $i, j=\overline{i,n}$ − действительные числа, называется *нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*.

В матричной записи система (15.98) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\dfrac{dy}{dt}=\begin{pmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \\ \vdots \\ dy_n/dt \end{pmatrix}$.

Определение 15.32. *Фундаментальной системой решений системы* (15.98) называется совокупность ее n-линейно независимых решений вида

$$Y^{(i)}(t)=\begin{pmatrix} y_1^{(i)}(t) \\ y_2^{(i)}(t) \\ \vdots \\ y_n^{(i)}(t) \end{pmatrix}, \qquad i=\overline{1,n}.$$

Если $Y^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n}$ − фундаментальная система решений, то *общее решение* системы (15.98) имеет вид

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i Y^{(i)}(t),$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ − произвольные постоянные.

Для нахождения фундаментальной системы решений используют *метод Эйлера*, который состоит в следующем. Линейно независимые частные решения системы (15.98) ищут в виде $y_1=\gamma_1 e^{\lambda x}, y_2=\gamma_2 e^{\lambda x}, ..., y_n=\gamma_n e^{\lambda x}$. Подставляя значения $y_1, y_2, ..., y_n$ в систему (15.98) и сокращая на $e^{\lambda x}\neq 0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ &a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ &\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ &a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.99}$$

Для того, чтобы система (15.99) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\det(A-\lambda E)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{15.100}$$

Для определения λ из равенства (15.100) имеем уравнение n-й степени, которое является характеристическим уравнением матрицы A и называется *характеристическим уравнением системы* (15.98). Характеристическое уравнение матрицы А (15.100) имеет n корней с учетом их кратностей, т. е. корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ − собственные значения этой матрицы.

При решении характеристического уравнения возможны следующие случаи.

1. Корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ − *действительные* и *различные*. Подставляя их поочередно в систему (15.99) и решая ее, находим n линейно независимых собственных векторов матрицы А:

$$\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix}, \ \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix}, \ , \ \vec{\gamma}^n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (15.101)$$

Этим собственным векторам соответствует n векторов-решений системы (15.98):

$$y_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{21} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, \ y_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} e^{\lambda_2 x} \\ \gamma_{22} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \ \dots, \ y_n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}. \qquad (15.102)$$

Система (15.102) линейно независима. Ее определитель Вронского отличен от нуля для всех $x \in R$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \gamma_{11} e^{\lambda_1 x} & \gamma_{12} e^{\lambda_2 x} & \dots & \gamma_{1n} e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{21} e^{\lambda_1 x} & \gamma_{22} e^{\lambda_2 x} & \dots & \gamma_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} e^{\lambda_1 x} & \gamma_{n2} e^{\lambda_2 x} & \dots & \gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) x} \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель, стоящий в правой части последнего равенства, не равен нулю, так как он является определителем матрицы линейно-независимой системы векторов (15.101). Согласно теореме 15.20, общее решение системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами в случае действительных различных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1\gamma_{11}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{12}\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{1n}\mathrm{e}^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1\gamma_{21}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{22}\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{2n}\mathrm{e}^{\lambda_n x}, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ y_n = C_1\gamma_{n1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{n2}\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{nn}\mathrm{e}^{\lambda_n x}. \end{array}\right\}$$

П р и м е р 15.45. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} dx/dt = x - 2y - z, \\ dy/dt = -x + y + z, \\ dz/dt = x - z. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы имеет вид $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$. Отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. При $\lambda_1 = 0$ для определения собственного вектора получаем следующую систему: $\left.\begin{array}{l} \gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 \qquad\;\; - \gamma_3 = 0. \end{array}\right\}$ Отсюда $\gamma_3 = \gamma_1$, $\gamma_2 = 0$.

Пусть $\gamma_1 = 1$, тогда $(1{,}0{,}1)$ – собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_1 = 0$, т. е. $\vec{j}^1 = [1{,}0{,}1]^T$.

При $\lambda_2 = -1$ имеем систему $\left.\begin{array}{l} 2\gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 \qquad\qquad\quad = 0, \end{array}\right\}$ или $\left.\begin{array}{l} 2\gamma_1 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 \qquad\;\; = 0 \end{array}\right\}$. Отсюда $\gamma_3 = -2\gamma_2$, $\gamma_1 = 0$.

Пусть $\gamma_2 = 1$. Тогда $(0{,}1{,}-2)$ – собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_2 = -1$, т. е. $\vec{j}^2 = [0{,}1{,}-2]^T$.

При $\lambda_3 = 2$ имеем систему $\left.\begin{array}{l} -\gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 \qquad - 3\gamma_3 = 0. \end{array}\right\}$ одно из уравнений которой есть следствие двух других.

Полагая $\gamma_3 = 1$, имеем $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = \gamma_3 - \gamma_1 = 1 - 3 = -2$. Таким образом, $(3{,}-2{,}1)$ – собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_3 = 2$ и $\vec{j}^3 = [3{,}-2{,}1]^T$.

Координаты всех собственных векторов определяются с точностью до числового множителя. Итак, получена следующая фундаментальная система решений:

для $\lambda = 0$

$$x_1 = 1 \cdot e^{0 \cdot t} = 1, \quad y_1 = 0 \cdot e^{0 \cdot t} = 0, \quad z_1 = 1 \cdot e^{0 \cdot t} = 1;$$

для $\lambda = -1$

$$x_2 = 0 \cdot e^{-t} = 0, \quad y_2 = 1 \cdot e^{-t}, \quad z_2 = -2e^{-t};$$

для $\lambda = 2$

$$x_3 = 3e^{2t}, \quad y_3 = -2e^{2t}, \quad z_3 = 1 \cdot e^{2t}.$$

Общее решение исходной системы в векторной форме

$$(x, y, z) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{0t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$$

или в координатной форме

$$x_1 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = C_1 + 3C_3 \mathrm{e}^{2t},$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_2 \mathrm{e}^{-t} - 2C_3 \mathrm{e}^{2t},$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = C_1 - 2C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{2t}.$$

2. *Корни характеристического уравнения все различные, но среди них есть комплексные.*

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ − комплексный корень.

Так как коэффициенты системы – действительные числа, то сопряженное число $\lambda = \alpha - i\beta$ тоже будет корнем характеристического уравнения. Этим корням (комплексно-сопряженным собственным значениям матрицы A) будут отвечать собственные векторы с комплексно-сопряженными координатами:

$$p \pm iq = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, векторы

$$\begin{pmatrix} (p_1+iq_1)e^{(\alpha+i\beta)x} \\ (p_2+iq_2)e^{(\alpha+i\beta)x} \\ \vdots \\ (p_n+iq_n)e^{(\alpha+i\beta)x} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} (p_1-iq_1)e^{(\alpha-i\beta)x} \\ (p_2-iq_2)e^{(\alpha-i\beta)x} \\ \vdots \\ (p_n-iq_n)e^{(\alpha-i\beta)x} \end{pmatrix}$$

будут частными решениями системы (15.98).

Так как $(p_k+iq_k)e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(p_k\cos\beta x-q_k\sin\beta x)+ie^{\alpha x}(p_k\sin\beta x+q_k\cos\beta x)$, то по теореме 15.22 векторы

$$u(x)=\begin{pmatrix} e^{\alpha x}(p_1\cos\beta x-q_1\sin\beta x) \\ e^{\alpha x}(p_2\cos\beta x-q_2\sin\beta x) \\ \vdots \\ e^{\alpha x}(p_n\cos\beta x-q_n\sin\beta x) \end{pmatrix}, \quad v(x)=\begin{pmatrix} e^{\alpha x}(p_1\sin\beta x+q_1\cos\beta x) \\ e^{\alpha x}(p_2\sin\beta x+q_2\cos\beta x) \\ \vdots \\ e^{\alpha x}(p_n\sin\beta x+q_n\cos\beta x) \end{pmatrix}$$

будут частными решениями системы (15.98).

Пример 15.46. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} dx/dt=2x+y, \\ dy/dt=x+3y-z, \\ dz/dt=-x+2y+3z. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы имеет вид $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$, или $\lambda^3-8\lambda^2+22\lambda-20=0$. Так как целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена, то на основании этого находим, что число $\lambda_1=2$ − корень характеристического уравнения. Разделив левую часть уравнения на $(\lambda-2)$, получим уравнение $\lambda^2-6\lambda+10=0$, которое имеет комплексные корни $\lambda_2=3+i$, $\lambda_3=3-i$.

Определим собственные векторы.

При $\lambda_1 = 2$ имеем систему уравнений $\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 &= 0, \\ -\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ Отсюда $\gamma_1 = \gamma_3$.

Полагая $\gamma_3 = 1$, находим $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$. Таким образом, $(1,0,1)$ – собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_1 = 2$, т. е. $\vec{j}^1 = [1,0,1]^T$.

При $\lambda_2 = 3 + i$ имеем систему $\left.\begin{aligned} (-1 - i)\gamma_1 + \gamma_2 &= 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 - \gamma_3 &= 0, \\ -\gamma_1 + 2\gamma_2 - i\gamma_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ Так как одно из уравнений системы – следствие двух других ее уравнений, то, полагая $\gamma_1 = 1$, имеем $\gamma_2 = 1 + i$, $\gamma_3 = 2 - i$. Следовательно, $(1, 1+i, 2-i)$ – собственный вектор, соответствующий числу $\lambda_2 = 3 + i$, т. е. $\vec{j}^2 = [1, 1+i, 2-i]^T$.

При $\lambda_3 = 3 - i$ имеем систему $\left.\begin{aligned} (-1 + i)\gamma_1 + \gamma_2 &= 0, \\ \gamma_1 + i\gamma_2 - \gamma_3 &= 0, \\ -\gamma_1 + 2\gamma_2 + i\gamma_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем, что $(1, 1-i, 2+i)$ – собственный вектор, соответствующий числу $\lambda_3 = 3 - i$, т. е. $\vec{j}^3 = [1, 1-i, 2+i]^T$.

Координаты всех собственных векторов определяются с точностью до постоянного множителя.

Для $\lambda_1 = 2$ имеем частное решение

$$x_1 = \mathrm{e}^{2t}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \mathrm{e}^{2t}.$$

Для $\lambda_2 = 3 + i$ получаем частное решение

$$x_2 = \mathrm{e}^{(3+i)t} = \mathrm{e}^{3t}(\cos t + i \sin t),$$

$$y_2 = (1+i)\mathrm{e}^{(3+i)t} = (1+i)\mathrm{e}^{3t}(\cos t + i\sin t) = \mathrm{e}^{3t}(\cos t - \sin t + i(\sin t + \cos t)),$$

$$z_2 = (2-i)e^{(3+i)t} = (2-i)e^{3t}(\cos t + i\sin t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t + i(2\sin t - \cos t)).$$

Для $\lambda_3 = 3 - i$ частное решение имеем вид

$$x_3 = e^{(3-i)t} = e^{3t}(\cos t - i\sin t),$$

$$y_3 = (1-i)e^{(3-i)t} = e^{3t}(1-i)(\cos t - i\sin t) = e^{3t}(\cos t - \sin t - i(\sin t + \cos t)),$$

$$z_3 = (2+i)e^{(3-i)t} = e^{3t}(2+i)(\cos t - i\sin t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t + i(2\sin t - \cos t)).$$

Поскольку действительная и мнимая части комплексного решения исходной системы в отдельности будут решениями этой системы, а комплексным сопряженным корням соответствуют одни и те же решения, возьмем частное решение для $\lambda_2 = 3 + i$ и отделим в нем действительную и мнимую части. Тогда действительные части дадут одно частное решение, а мнимые – другое. Следовательно, для чисел $\lambda_2 = 3 + i$, $\lambda_3 = 3 - i$ получаем два линейно независимых частных решения:

$$x_2^{(1)} = e^{3t}\cos t, \quad y_2^{(1)} = e^{3t}(\cos t - \sin t), \quad z_2^{(1)} = e^{3t}(2\cos t + \sin t),$$

$$x_3^{(2)} = e^{3t}\sin t, \quad y_3^{(2)} = e^{3t}(\sin t + \cos t), \quad z_3^{(2)} = e^{3t}(2\sin t - \cos t).$$

Общее решение исходной системы примет вид

$$x = C_1x_1 + C_2x_2^{(1)} + C_3x_3^{(2)} = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2\cos t + C_3\sin t),$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2^{(1)} + C_3 y_3^{(2)} = C_1 \cdot 0 + \mathrm{e}^{3t}\left(C_2(\cos t - \sin t) + C_3(\sin t + \cos t)\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{3t}\left((C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t\right),$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2^{(1)} + C_3 z_3^{(2)} = C_1 \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t}\left(C_2(2\cos t + \sin t) + C_3(2\sin t - \cos t)\right) =$$

$$= C_1 \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t}\left((2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t\right).$$

3. *Среди корней характеристического уравнения есть кратные.*

Укажем вид частных решений, соответствующих кратным корням. Корню λ_m кратности S соответствует решение вида

$$y_1 = P_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_m x},\ y_2 = P_2(x)\mathrm{e}^{\lambda_m x}, \ldots,\ y_n = P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda_m x},$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ − многочлены от x степени не выше $S-1$ (они могут вырождаться в числа), причем среди коэффициентов всех этих многочленов S коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них. Полагая поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным постоянному числу, а остальные равными нулю, построим S линейно независимых частных решений, соответствующих λ_m. Если λ_m - действительное число, то эти частные решения также действительны. Если $\lambda_m = \alpha + i\beta$ − комплексный корень кратности S, то $\lambda_m = \alpha - i\beta$ также будет корнем характеристического уравнения той же кратности S. Найдя, указанным ранее методом, S линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих корню $\lambda_m = \alpha + i\beta$, и отделив в них действительные и мнимые части, получим $2S$ линейно независимых действительных частных решений. Решения, соответствующие корню $\alpha - i\beta$, будут линейно зависимыми с решениями, соответствующими $\alpha + i\beta$.

Если, кроме кратного корня λ_m, имеются другие корни, то, построив n линейно независимых действительных частных решений, соответствующих всем этим корням, и взяв их линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами, получим общее решение однородной системы.

П р и м е р 15.47. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} dx/dt = 4x - 5y + 2z, \\ dy/dt = 5x - 7y + 3z, \\ dz/dt = 6x - 9y + 4z. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение системы имеет вид $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$, откуда имеем $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Определим собственные векторы. Для $\lambda_1 = 1,$ получим систему уравнений $\left.\begin{array}{l} 3\gamma_1 - 5\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0, \\ 5\gamma_1 - 8\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ 6\gamma_1 - 9\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \end{array}\right\}$ одно из которых − следствие двух других.

Пусть $\gamma_3 = 1$, тогда имеем $\gamma_2 = \frac{1}{5}(3\gamma_1 + 2 \cdot 1)$.

Полагая $\gamma_1 = 1$, находим $\gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 1$. Таким образом, $(1, 1, 1)$ − собственный вектор, соответствующий числу $\lambda_1 = 1$. Координаты собственного вектора определяются с точностью до числового множителя. Соответствующее $\lambda_1 = 1$ частное решение имеем вид $x_1 = e^t,\ y_1 = e^t,\ z_1 = e^t$.

Если λ_2 − корень характеристического уравнения кратности S, то ему соответствует решение вида

$$x = P_1(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ y = P_2(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ z = P_3(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

где $P_1(\mathrm{t})$, $P_2(\mathrm{t})$, $P_3(\mathrm{t})$ − многочлены от t степени не выше $S-1$ (они могут вырождаться в постоянные числа), причем среди коэффициентов всех этих многочленов S коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них.

Таким образом, для двукратного корня $\lambda = 0$ частное решение находим в виде

$$\begin{aligned} x &= (a_1 t + a_2)\mathrm{e}^{0\cdot t} = a_1 t + a_2, \\ y &= (b_1 t + b_2)\mathrm{e}^{0\cdot t} = b_1 t + b_2, \\ z &= \qquad\qquad\quad = d_1 t + d_2. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для x, y, z исходную систему, имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= (4a_1 - 5b_1 + 2d_1)\,t + 4a_2 - 5b_2 + 2d_2, \\ b_1 &= (5a_1 - 7b_1 + 3d_1)\,t + 5a_2 - 7b_2 + 3d_2, \\ d_1 &= (6a_1 - 9b_1 + 4d_1)\,t + 6a_2 - 9b_2 + 4d_2. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 4a_1 - 5b_1 + 2d_1 = 0, \\ 5a_1 - 7b_1 + 3d_1 = 0, \\ 6a_1 - 9b_1 + 4d_1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 4a_2 - 5b_2 + 2d_2 = a_1, \\ 5a_2 - 7b_2 + 3d_2 = b_1, \\ 6a_2 - 9b_2 + 4d_2 = d_1. \end{aligned}\right\}$$

Так как ранг каждой из систем равен 2 и одно из уравнений каждой системы есть следствие двух других, то, решая первую систему, имеем:

$$\left.\begin{aligned} 4a_1 - 5b_1 = -2d_1, \\ 5a_1 - 7b_1 = -3d_1, \end{aligned}\right\}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -3,$$

$$a_1 = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -2d_1 & -5 \\ -3d_1 & -7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}d_1, \quad b_1 = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 4 & -2d_1 \\ 5 & -3d_1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}d_1 .$$

Подставляя $a_1 = \frac{1}{3}d_1$, $b_1 = \frac{2}{3}d_1$ во вторую систему, имеем

$$\left.\begin{aligned} 4a_2 - 5b_2 + 2d_2 &= \frac{1}{3}d_1, \\ 5a_2 - 7b_2 + 3d_2 &= \frac{2}{3}d_1, \\ 6a_2 - 9b_2 + 4d_2 &= d_1. \end{aligned}\right\}$$

С учетом того, что одно из уравнений последней системы есть следствие двух других, находим

$$\left.\begin{aligned} 4a_2 - 5b_2 &= \frac{1}{3}d_1 - 2d_2, \\ 5a_2 - 7b_2 &= \frac{2}{3}d_1 - 3d_2. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$a_2 = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3}d_1 - 2d_2 & -5 \\ \frac{2}{3}d_1 - 3d_2 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(d_2 - d_1),$$

$$b_1 = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 4 & \frac{1}{3}d_1 - 2d_2 \\ 5 & \frac{2}{3}d_1 - 3d_2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}d_2 - \frac{1}{3}d_1 .$$

Частное решение для двукратного корня $\lambda = 0$ принимает вид:

$$x = a_1 t + a_2 = \frac{1}{3} d_1 t + \frac{1}{3}(d_2 - d_1),$$

$$y = b_1 t + b_2 = \frac{2}{3} d_1 t + \frac{2}{3} d_2 - \frac{1}{3} d_1 = \frac{1}{3}(2d_1 t + 2d_2 - d_1),$$

$$z = d_1 t + d_2 .$$

Полагая $d_1 = 3, \quad d_2 = 0$, получаем частное решение $x_2 = t - 1$, $y_2 = 2t - 1$, $z_2 = 3t$. Полагая $d_1 = 0, \quad d_2 = 3$, находим еще одно частное решение $x_3 = 1$, $y_3 = 2$, $z_3 = 3$.

Все три полученных частных решения линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений:

$$x_1 = \mathrm{e}^t, \ y_1 = \mathrm{e}^t, \ z_1 = \mathrm{e}^t;$$

$$x_2 = t - 1, \ y_2 = 2t - 1, \ z_2 = 3t;$$

$$x_3 = 1, \ y_3 = 2, \ z_3 = 3.$$

Итак, общее решение исходной системы:

$$x = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 (t - 1) + C_3,$$

$$y = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 (2t - 1) + 2C_3,$$

$$z = C_1 \mathrm{e}^t + 3C_2 t + 3C_3.$$

15.28. Элементы теории устойчивости

При исследовании динамики физических систем происходящие в них процессы описываются дифференциальными уравнениями, причем возникают задачи, в которых нужно не только найти конкретное решение, соответствующее заданным начальным условиям, но и определить, как ведет себя решение при изменении начальных условий и при изменении аргумента. Такие вопросы изучаются в качественной теории дифференциальных уравнений, в разделе теория устойчивости движения (или устойчивости решения).

Механическая трактовка нормальной системы д. у. Фазовая плоскость. Фазовые траектории

Пусть точка массы m с координатами $x(t)$, $y(t)$ движется под действием силы $\vec{F}(X,Y)$, тогда уравнение движения этой точки в векторной форме имеет вид:

$$m\ddot{r}(t)=\vec{F}(t,\vec{r},\dot{\bar{r}}) \qquad (15.103)$$

или в координатной форме:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=X(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),\\ m\ddot{y}=Y(t,x,y,\dot{x},\dot{y}). \end{cases} \qquad (15.104)$$

Эту систему можно заменить равносильной системой д. у. 1-го порядка:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \\
\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \\
m\dfrac{d\dot{x}}{dt} = X(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\
m\dfrac{d\dot{y}}{dt} = Y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}).
\end{cases} \tag{15.105}
$$

Система (15.105) состоит из четырех д. у. 1-го порядка с четырьмя неизвестными функциями:

$x(t), y(t)$ − координаты движущейся точки;

$\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ − проекции ее скорости.

Движение голоморфных механических систем с конечным числом степеней свободы кинематически определяется заданием обобщенных координат и обобщенных скоростей как однозначных функций времени, при этом равновесному состоянию (состоянию покоя) соответствуют постоянные значения координат и нулевые скорости. В исследованиях устойчивости движения и покоя обобщенные координаты и скорости формально играют одинаковую роль, поэтому для них вводят общие обозначения, например, для системы (15.105):

$$
\begin{cases}
x = x_1, \\
y = x_2, \\
\dot{x} = x_3, \\
\dot{y} = x_4,
\end{cases} \tag{15.106}
$$

тогда пространство состояний движения (т. е. пространство обобщенных координат и скоростей) точки $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ называется фазовым пространством, а сама точка называется изображающей состояние движения рассматриваемой механической системы.

Система уравнений (15.105) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_4, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = X(t, x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \dfrac{dx_4}{dt} = Y(t, x_1, x_2, x_3, x_4). \end{cases} \tag{15.107}$$

В общем случае движение механической системы с конечным числом степеней свободы описывает система д. у.:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{15.108}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}). \tag{15.109}$$

Решения этой системы:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{15.110}$$

в фазовом пространстве представляют так называемые фазовые траектории – траектории движения изображающей точки, следовательно, уравнения (15.110) можно считать параметрическими уравнениями фазовых траекторий, а система д. у. (15.108) определяет в фазовом пространстве поле направлений, т. е. направление касательной к фазовой траектории, проходящей через каждую точку фазового пространства.

Замечание 15.10. Положение изображающей точки в данный момент времени в фазовом пространстве соответствует определенному состоянию движения механической системы. Состояние покоя системы (координаты системы постоянны, скорости равны нулю) соответствует положению равновесия изображающей точки, следовательно, устойчивость состояния равновесия системы (например, все $x_i = 0$) определяется устойчивостью положения изображающей точки в начале координат.

Замечание 15.11. Если правые части дифференциальных уравнений системы (15.108) явно зависят от *t*, то поле направлений в фазовом пространстве неустановившееся, меняется с течением времени. Если функции f_i не зависят явно от *t*, то поле направлений будет установившимся (стационарным), при этом движение системы, описываемое уравнениями (15.108) называют установившимся, а саму систему автономной.

Простейший пример фазовой трактовки движения автономной системы представляет гармонический осциллятор.

Пример 15.48. Уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 \tag{15.111}$$

с помощью замены $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ приводится к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -k^2 x_1, \end{cases} \tag{15.112}$$

из которой следует $\frac{dx_2}{dx_1} = -k^2 \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow x_2 dx_2 = -k^2 x_1 dx_1$, значит, $k^2 x_1^2 + x_2^2 = C$ – фазовые траектории – эллипсы в фазовой плоскости Ox_1x_2, а направление движения изображающей точки по эллипсу, проходящему через точку с координатами:

$$\left.\begin{array}{l} x_{10} = q_0 \text{ - начальное отклонение} \\ x_{20} = \dot{q}_0 \text{ - начальная скорость} \end{array}\right\}$$ всегда по часовой стрелке, т. к. в 1-й и 2-й четвертях $\frac{dx_1}{dt} = x_2 > 0$, т. е. x_1 возрастает, а в 3-й и 4-й четвертях $\frac{dx_1}{dt} < 0$, т. е. x_1 убывает.

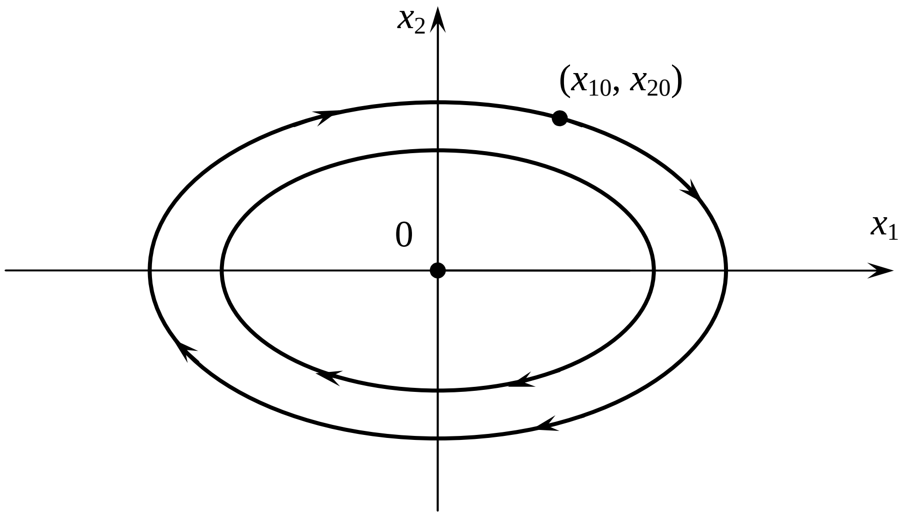


Рис. 15.7

Устойчивость решений дифференциальных систем по Ляпунову

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \text{..................................} \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{15.113}$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20}, ..., x_n(t_0) = x_{n0}. \tag{15.114}$$

Определение 15.33. Решение

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \tag{15.115}$$

дифференциальной системы, соответствующее начальным условиям (15.114), называется устойчивым по Ляпунову, если для любого решения

$$X^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), ..., x_n^*(t)), \tag{15.116}$$

соответствующего другим начальным условиям

$$x_1^*(t_0) = x_{10}^*,\ x_2^*(t_0) = x_{20}^*, ..., x_n^*(t_0) = x_{n_0}^* \tag{15.117}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из системы неравенств

$$\left|x_{i0}^* - x_{i0}\right| < \delta(\varepsilon), \quad (i = \overline{1,n}) \tag{15.118}$$

следует система неравенств

$$\left|x_i^*(t) - x_i(t)\right| < \varepsilon, \ (i = \overline{1,n}) \tag{15.119}$$

для всех $t \geq t_0$.

Определение 15.34. Решение (15.115) называется неустойчивым, если хотя бы для одного решения (15.116) при сколь угодно малом δ не выполняются неравенства (15.119).

Замечание 15.12. Если дифференциальная система (15.113) представляет закон движения, то решение (15.115) называют невозмущенным движением, а решение (15.116) – возмущенным, тогда приведенное выше определение устойчивости по Ляпунову означает следующее: в каждый момент времени $t \geq t_0$ точка траектории возмущенного движения лежит в достаточно малой окрестности соответствующей точки невозмущенного движения.

Теперь допустим, что аргумент t может принимать любое значение из интервала $\left[t_0, +\infty\right)$, тогда при $t \to +\infty$ вводится понятие асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Определение 15.35. Если решение (15.115) дифференциальной системы (15.113) устойчиво и, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty}\left|x_i(t) - x_i^*(t)\right| = 0 \tag{15.120}$$

то решение (15.115) называется асимптотически устойчивым.

Пример 15.49. Исследовать на устойчивость частное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \tag{15.121}$$

при начальных условиях

$$x_1(0)=1,\ \ x_2(0)=1. \tag{15.122}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$=0, его корни $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$, общее решение $\begin{cases} x_1=c_1\mathrm{e}^{-3t}+2c_2\mathrm{e}^{2t}, \\ x_2=-2c_1\mathrm{e}^{-3t}+c_2\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

Найдем частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям

$$\left.\begin{matrix} x_1(0)=1 & 1=c_1+2c_2 \\ x_2(0)=1 & 1=-2c_1+c_2 \end{matrix}\right\}.$$

Таким образом,

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}2\mathrm{e}^{-3t}+1{,}2\mathrm{e}^{2t} \\ 0{,}4\mathrm{e}^{-3t}+0{,}6\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}. \tag{15.123}$$

Слегка изменим начальные условия: $\begin{cases} x_1^*(0)=1+\varepsilon \\ x_2^*(0)=1-\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1+\varepsilon=c_1+2c_2 \\ 1-\varepsilon=-2c_1+c_2 \end{matrix}\right\}.$

Соответствующее частное решение:

$$X^*(t)=\begin{pmatrix} (-0{,}2+\varepsilon)\mathrm{e}^{-3t}+(1{,}2+0{,}4\varepsilon)\mathrm{e}^{2t} \\ (0{,}4-2\varepsilon)\mathrm{e}^{-3t}+(0{,}6+0{,}2\varepsilon)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}. \tag{15.124}$$

Рассмотрим разности найденных решений:

$$\begin{cases} x_1^*-x_1=\varepsilon\mathrm{e}^{-3t}+0{,}4\varepsilon\mathrm{e}^{2t}, \\ x_2^*-x_2=-2\varepsilon\mathrm{e}^{-3t}+0{,}2\varepsilon\mathrm{e}^{2t}. \end{cases} \tag{15.125}$$

Очевидно, даже при малых значениях ε неравенства (15.119) не выполнены, при $t\to\infty$ разности решений не стремятся к 0, следовательно, решение (15.123) неустойчиво.

Пример 15.50. Исследовать устойчивость решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_2, \end{cases} \tag{15.126}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1. \tag{15.127}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1,$ общее решение: $\begin{cases} x_1 = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ x_2 = c_1 e^{-3t}. \end{cases}$

Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 \end{matrix} \right\}$. Таким образом,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}. \tag{15.128}$$

Слегка изменим начальные условия и найдем соответствующее частное решение системы: $\begin{cases} x_1^*(0) = \varepsilon, \\ x_2^*(0) = 1 + \varepsilon, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = c_1 + c_2, \\ 1 + \varepsilon = c_1. \end{cases}$

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-t} \\ (1+\varepsilon)\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}. \tag{15.129}$$

Оценим разность найденных решений:

$$\begin{cases} x_1^* - x_1 = \varepsilon e^{-3t}, \\ x_2^* - x_2 = \varepsilon e^{-3t}. \end{cases} \qquad (15.130)$$

Очевидно, при любом $t > 0$ и малом ε они малы, т. е. решение (15.128) устойчиво, притом – асимптотически устойчиво, т. к. при $t \to +\infty$ $\left(x_1^* - x_1\right) \to 0$ $\left(x_2^* - x_2\right) \to 0$.

Замечание 15.13. Исследование на устойчивость любого решения $x_i(t) = \varphi_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ системы (15.113) можно с помощью замены

$$y_i(t) = x_i(t) - \varphi_i(t) \ (i = 1,...,n) \Rightarrow \frac{dx_i}{dt} = \frac{dy_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}, \qquad (15.129)$$

свести к исследованию на устойчивость тривиального решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{dx_i}{dt} - \dfrac{d\varphi_i}{dt} = f_1(t, y_1 + \varphi_1, ..., y_n + \varphi_n) - f_1(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1 + \varphi_1, ...) - f_2(t, \varphi_1, \varphi_2, ...), \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1 + \varphi_1, ..., y_n + \varphi_n) - f_n(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n), \end{cases} \qquad (15.130)$$

поэтому в основе исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений лежит устойчивость положения равновесия, т. е. точки покоя.

Устойчивость линейных дифференциальных систем. Основные теоремы

Определение 15.36. Линейная дифференциальная система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t) \quad (15.131)$$

называется устойчивой (или неустойчивой) по Ляпунову, если все ее решения

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (15.132)$$

устойчивы (или не устойчивы) по Ляпунову при $t \to \infty$.

Теорема 15.23. Для устойчивости линейной системы (15.131) необходима и достаточна устойчивость тривиального решения соответствующей однородной системы $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n. \end{cases} \qquad (15.133)$$

Теорема 15.24. Линейная дифференциальная система (15.131) асимптотически устойчива только тогда, когда асимптотически устойчиво тривиальное решение соответствующей однородной системы (15.133)

Обыкновенные и особые точки фазовой плоскости

Для простоты и возможности наглядной геометрической интерпретации будем рассматривать систему дифференциальных уравнений, соответствующую уравнениям движения механической системы с одной степенью свободы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{15.134}$$

Определение 15.37. Точка (x_1, x_2) фазовой плоскости системы (15.134) называется обыкновенной, если в этой точке функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ дифференцируемы и не обращаются в нуль одновременно. Через каждую обыкновенную точку проходит единственная фазовая траектория. Точка (x_{10}, x_{20}) наз. особой, если $f_1(x_{10}, x_{20}) = f_2(x_{10}, x_{20}) = 0$. Особые точки классифицируются по характеру фазовых траекторий в их окрестности. Физический смысл особых точек: это точки покоя (равновесия), допускающие устойчивые или неустойчивые положения равновесия.

Предварительные замечания. Качественная теория устойчивости основана на исследовании уравнений возмущенного движения без их интегрирования с помощью построения так называемых функций Ляпунова, однако, общих правил построения таких функций нет. В связи с этим в практических инженерных расчетах широко применяются приближенные методы, одним из основоположников которых является профессор Вышнеградский И.А. При исследовании устойчивости регуляторов прямого действия он допустил, что характер устойчивости установившегося движения системы проявляется уже в тех малых возмущенных движениях, какие возникают около невозмущенного движения в течение малого промежутка времени после достаточно малого начального возмущения. Поэтому при решении вопроса об устойчивости в уравнениях возмущенного движения отбрасывались все члены выше первого порядка относительно координат и скоростей, полученная при этом линеаризованная система исследовалась на устойчивость невозмущенного движения, что давало возможность приближенно судить об устойчивости возмущенного движения. Такие методы содержатся в теории “первого приближения”. Теория первого приближения не всегда приводит к правильным заключениям об устойчивости возмущенного движения. В конце данного параграфа будут приведены две теоремы Ляпунова, в которых формулируются условия, когда заключения об устойчивости линеаризованной системы справедливы и для исходной системы.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{15.135}$$

Как известно, решение такой системы определяется характером корней характеристического уравнения. Представим корни характеристического уравнения в комплексной форме: $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$.

Простейший случай для системы с одной степенью свободы: тогда системе (15.135) будет соответствовать система из двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_1 + dx_2. \end{cases} \tag{15.136}$$

Очевидно, особая точка – начало координат – изображает невозмущенное равновесное состояние системы. В зависимости от корней характеристического уравнения возможны четыре случая, в каждом из которых будет свой тип расположения фазовых траекторий около особой точки, что даст геометрическую иллюстрацию характера устойчивости невозмущенного состояния линейной системы с одной степенью свободы.

Ляпунов предложил предварительно привести систему к каноническому виду с помощью линейной подстановки:

$$\begin{cases} \xi_1 = Ax_1 + Bx_2, \\ \xi_2 = Cx_1 + Dx_2. \end{cases} \tag{15.137}$$

При условии

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{15.138}$$

которое представляет собой характеристическое уравнение системы (15.136), каноническая система уравнений имеет вид:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1 \xi_1, \ \frac{d\xi_2}{dt} = \lambda_2 \xi_2 \tag{15.139}$$

или

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda\xi_1, \ \frac{d\xi_2}{dt} = \xi_1 + \lambda\xi_2. \tag{15.140}$$

1-й случай. Корни характеристического уравнения действительные, разных знаков. Каноническая система уравнений и ее решения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1\xi_1 \Rightarrow \xi_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = \lambda_2\xi_2 \Rightarrow \xi_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{15.141}$$

Исключим t из уравнений системы: $\dfrac{d\xi_2}{d\xi_1} = \dfrac{\lambda_2\xi_2}{\lambda_1\xi_1}$, отсюда получим уравнения фазовых траекторий: $\ln|\xi_2| = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\ln|\xi_1| + \ln c \Rightarrow \xi_2 = \pm c\xi_1^a$, здесь c – константа, $a = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. Около точки 0 эти кривые похожи на гиперболы. Изображающая точка по этим кривым удаляется от начала координат, т. е. равновесное состояние неустойчиво. Особая точка такого типа называется седло.

Пример 15.51. Линейная система: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2. \end{cases}$, характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Фазовые траектории $x_2 = \pm c x_1^{-1}$ изображены на рисунке:

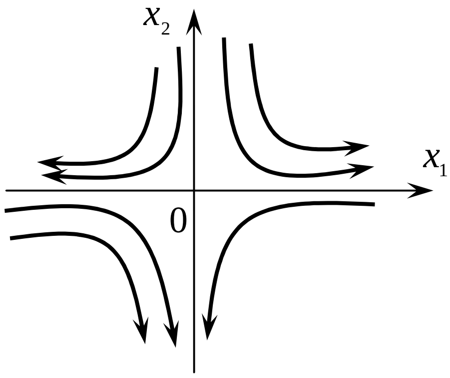


Рис. 15.8

2-й случай. Корни характеристического уравнения действительные, одного знака (например $\lambda_1 = -\mu_1^2,\ \lambda_2 = -\mu_2^2$). Каноническая система уравнений и ее решения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1\xi_1 \Rightarrow \xi_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = \lambda_2\xi_2 \Rightarrow \xi_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}. \end{cases} \qquad (15.142)$$

Исключив *t* из уравнений системы, получим уравнения фазовых траекторий: $\dfrac{d\xi_2}{d\xi_1} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\dfrac{\xi_2}{\xi_1}$, $\xi_2 = \pm c\xi_1^a$, $a = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$.

Эти траектории имеют форму полупарабол, касающихся оси $0\xi_1$. При λ_1 и $\lambda_2 < 0$ изображающая точка движется к началу координат, т. е. равновесное состояние асимптотически устойчиво, если λ_1 и $\lambda_2 > 0$ - неустойчиво. Особая точка такого типа называется узел.

Пример 15.52. Линейная система: $\begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = -6x_1 + 4x_2, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2, \end{cases}$ характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Фазовые траектории $\xi_2 = \pm c_1\xi_1^2$ изображены на рисунке:

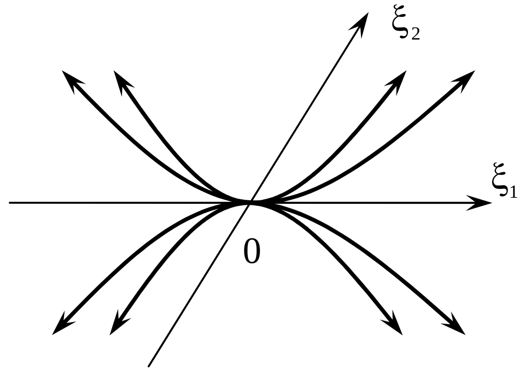


Рис. 15.9

Случай 2а. Линейная система имеет вид: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = ax_2, \end{cases}$ корни характеристического уравнения: $\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = a$. Из уравнений самой системы – она каноническая – находим фазовые траектории: $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow \ln x_2 = \ln x_1 + \ln c \Rightarrow x_2 = cx_1$ – прямые, заканчивающиеся или начинающиеся в начале координат, следовательно, особая точка – узел, устойчивый или неустойчивый.

П р и м е р 15.53. Линейная система: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2, \end{cases}$ ее характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$ $\begin{cases} x_1 = c_1 \mathrm{e}^t \\ x_2 = c_2 \mathrm{e}^t \Rightarrow x_2 = cx_1 \end{cases}$. Фазовые траектории изображены на рисунке 15.10, особая точка – неустойчивый узел.

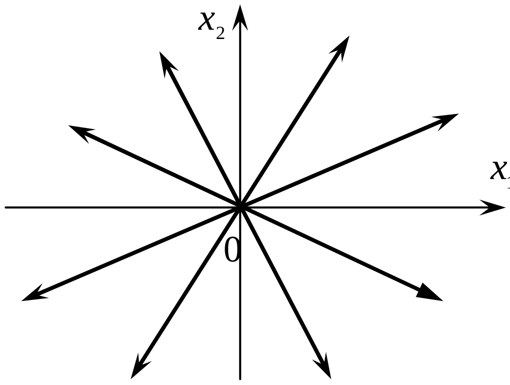


Рис. 15.10

Случай 3-й. Корни характеристического уравнения комплексные с ненулевой действительной частью: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. В этом случае каноническая система, полученная с помощью замены $\begin{cases} \xi_1 = Ax_1 + Bx_2, \\ \xi_2 = Ax_1 - Bx_2 = \overline{\xi}_1, \end{cases}$ имеет вид $\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1 \xi_1$, $\frac{d\overline{\xi_1}}{dt} = \lambda_2 \overline{\xi_1}$. В канонической системе сделаем замену $\begin{cases} \xi_1 = u + iv, \\ \overline{\xi}_1 = u - iv, \end{cases}$ получим уравнения: $\begin{cases} \dot{u} + i\dot{v} = \lambda(u + iv), \\ \dot{u} - i\dot{v} = \overline{\lambda}(u - iv) \end{cases}$ и приравняем действительные и мнимые части: $\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \alpha u - \beta v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \beta u + \alpha v. \end{cases}$ Теперь перейдем к полярным координатам на плоскости $u0v$: $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ – получим систему: $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{dt} = \alpha r\cos\varphi - \beta r\sin\varphi, \\ \dfrac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\dfrac{d\varphi}{dt} = \alpha r\sin\varphi + \beta r\cos\varphi. \end{cases}$ Приравняем коэффициенты при $\cos\varphi$ и при $\sin\varphi$: $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \alpha r, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \beta. \end{cases}$ Исключив t из этой системы, получим $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\alpha}{\beta} r$, $\frac{dr}{r} = \frac{\alpha}{\beta} d\varphi$,

$\ln r = \frac{\alpha}{\beta}\varphi + \ln c$. Следовательно, уравнения фазовых траекторий: $r = c e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$. Это логарифмические спирали. Точки покоя такого типа называются фокусы. При $\alpha > 0$ с возрастанием φ возрастает r, т. е. изображающая точка удаляется по спиралям от начала координат, значит, состояние равновесия неустойчиво. При $\alpha < 0$ с возрастанием φ убывает r, изображающая точка по фазовым траекториям асимптотически приближается к началу координат, следовательно, устойчивый фокус и устойчиво равновесное состояние системы.

4-й случай. Корни характеристического уравнения чисто мнимые $(\alpha = 0)$ $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Уравнения фазовых траекторий в полярных координатах: $\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta \Rightarrow r = r_0 = \text{const}, \quad \varphi = \beta t + \varphi_0$ т. е. фазовые траектории изображающей точки – окружности с центром в начале координат, описываемые с угловой скоростью β. Особая точка такого типа называется центр, соответственно равновесие является устойчивым.

Пример 15.54. Исследовать устойчивость состояния равновесия системы: $\dot{x}_1 = 2x_1 + 5x_2$, $\dot{x}_2 = -2x_1 - 4x_2$. Корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ − комплексные: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, с отрицательной действительной частью, следовательно, начало координат – точка покоя типа фокус, фазовые траектории – логарифмические спирали: $r = c e^{-\varphi}$. Т. к. действительная часть корней $\alpha = -1 < 0$, то состояние равновесия системы асимптотически устойчиво. Направление движения изображающей точки по спирали – к началу координат – это легко проверить с помощью уравнений исходной системы, т. к. в 1-й четверти $\frac{dx_1}{dt} > 0$ и $\frac{dx_2}{dt} < 0$, следовательно, $x_1(t)$ возрастающая функция времени, а $x_2(t)$ − убывающая. См. рис. 15.10.

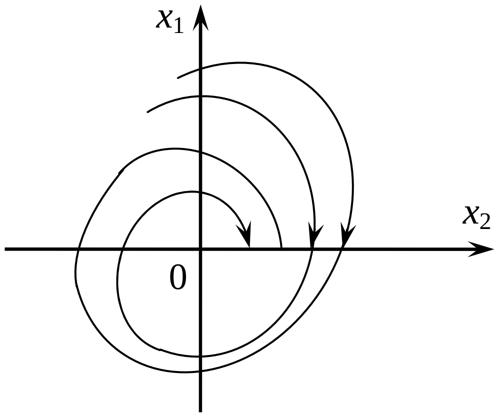


Рис. 15.11

Пример 15.55. Определить тип точки покоя системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1. \end{cases}$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет чисто мнимые корни: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Приведем три способа решения задачи:

1-й способ (см. решение примера 15.48).

Найдем фазовые траектории, исключив t из уравнений системы:

$\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{x_2}{-4x_1}$, $-4x_1 dx_1 = x_2 dx_2$, $-2x_1^2 = \dfrac{1}{2}x_2^2 - \dfrac{c}{2} \Rightarrow 4x_1^2 + x_2^2 = c$ – это эллипсы, значит, начало координат – особая точка типа центр.

2-й способ. Решим систему уравнений, тогда общее ее решение представит параметрические уравнения фазовых траекторий в окрестности точки покоя. Формула общего решения в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид:

$$X(t) = C_1 \operatorname{Re}(V e^{\lambda t}) + C_2 I_m (V e^{\lambda t}). \qquad (15.143)$$

Координаты собственного вектора V, соответствующего собственному значению $\lambda = 2i$, найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases}(0-2i)\alpha_1+1\cdot\alpha_2=0,\\ -4\alpha_1+(0-2i)\alpha_2=0,\end{cases}$$

имеющей кроме тривиального бесчисленное множество решений, т. к. $\Delta=0$, $\alpha_2=2i\alpha_1$. Например, при $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2i\Rightarrow V=\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}$.

$$V\mathrm{e}^{2it}=\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t)$$

$$\mathrm{Re}(V\mathrm{e}^{2it})=\begin{pmatrix}\cos 2t\\-2\sin 2t\end{pmatrix}$$

$$I_m(V\mathrm{e}^{2it})=\begin{pmatrix}\sin 2t\\2\cos 2t\end{pmatrix}$$

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix}\cos 2t\\-2\sin 2t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin 2t\\2\cos 2t\end{pmatrix}.$$

Следовательно, параметрические уравнения фазовых траекторий

$$\begin{cases}x_1(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t,\\ x_2(t)=-2C_1\sin 2t+2C_2\cos 2t.\end{cases}$$

Исключим из них t:

$$x_1^2+\left(\frac{x_2}{2}\right)^2=C_1^2+C_2^2\Rightarrow 4x_1^2+x_2^2=C^2.$$

3-й способ. Система представляет 4-й случай для определения типа особой точки, т. к. характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ чисто мнимые, следовательно, в полярных координатах для косоугольной системы фазовые траектории имеют уравнения $r = r_0$, $\varphi = 2t + \varphi_0$ это окружности, особая точка – начало координат – центр. На рис. 15.12 дан фазовый портрет системы

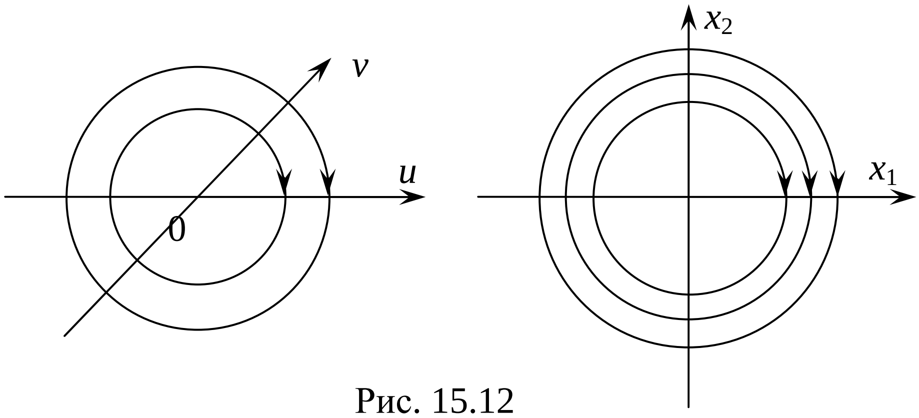


Рис. 15.12

Замечание 15.14. Если определитель матрицы системы (15.136) $\Delta = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a + d$, данная линейная система имеет бесчисленное множество точек покоя, при этом:

а) если $\lambda_2 < 0$, фазовые траектории образуют семейство параллельных прямых и все точки покоя, лежащие на них, устойчивы (рис. 15.13);

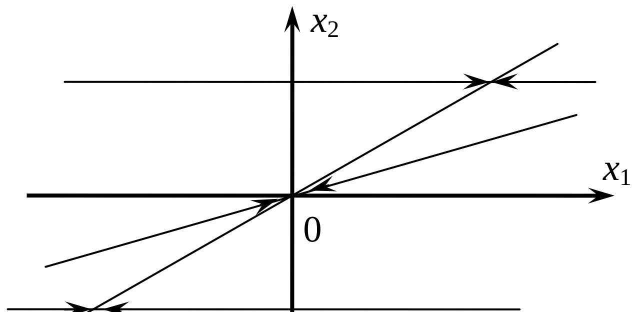


Рис. 15.13

б) если $\lambda_2 > 0$, начало координат – неустойчивая точка покоя;

в) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, матрица система нулевая, все точки плоскости устойчивые точки покоя;

г) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $d = -a$, $bc \le 0$, начало координат – неустойчивая точка покоя.

Мы рассмотрели исследование устойчивости линейных (линеаризованных) систем. Теория первого приближения позволяет судить об устойчивости состояния равновесия возмущенного движения, заданного системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + X_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + X_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{15.144}$$

где $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ − функции нелинейные, разложения которых по степеням начинаются с членов 2-го порядка; эти функции отбрасывают и исследуют линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{15.145}$$

Аналогично, при исследовании устойчивости решений автономных нелинейных систем более общего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{15.146}$$

используют метод первого приближения, заменяя правые части уравнений с помощью формулы Тейлора в окрестности точки покоя $(x_1 \to 0, x_2 \to 0, ...)$ суммами линейных членов, отбрасывая слагаемые высшего порядка малости. Тогда исследование состояния равновесия системы (15.146) заменяют приближенно исследованием линеаризованной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (f_1)'_{x1} x_1 + (f_1)'_{x2} x_2 + ... + (f_1)'_{xn} x_n, \\ \text{...} \\ \dfrac{dx_n}{dt} = (f_n)'_{x1} x_1 + (f_n)'_{x2} x_2 + ... + (f_n)'_{xn} x_n. \end{cases} \tag{15.147}$$

Ляпунов установил, при каких условиях заключения об устойчивости линеаризованной системы сохраняют силу для исходной, неупрощенной системы:

Теорема 15.25. Если действительные части всех корней $\lambda_S = \alpha_S + i\beta_S$ $(s = 1,2,...,n)$ характеристического уравнения системы (15.147) отрицательны, то невозмущенное движение исходной системы (15.146) устойчиво асимптотически, независимо от членов выше 1-го порядка.

Теорема 15.26. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво, независимо от членов высших порядков.

Пример 15.56. Исследовать методом первого приближения устойчивость состояния равновесия системы $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin 2y, \\ \dot{y} = -y - 2x. \end{cases}$

$$\sin 2y = 2y - \frac{(2y)^3}{3!} + ... \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} \approx -\dfrac{3}{2}x + y \\ \dot{y} \approx -y - 2x \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} -\dfrac{3}{2} - \lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4} i.$$

Т. к. $\alpha = -\frac{5}{4}$, то по теореме 15.25 Ляпунова состояние равновесия заданной и линеаризованной систем асимптотически устойчиво.

Замечание 15.15. В “критическом случае”, если все $\alpha_i < 0$ за исключением хотя бы одного $\alpha = 0$, надо применять другие методы исследования.

Пример 15.57.

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + 2y + \dfrac{(2y)^2}{2!}\ldots\right) - \left(1 - \dfrac{(3x)^2}{2!} + \dfrac{(3x)^4}{4!} + \ldots\right), \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y = 2\left(1 + \dfrac{\frac{1}{2}(2x)}{1!} + \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)(2x)^2}{2!}\ldots\right) - 2\left(1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \ldots\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} \approx x + 2y \\ \dot{y} \approx 2x - 2y \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \ \ \lambda_1 = 2, \ \ \lambda_2 = -3.$$

Т. к. $\lambda_1 > 0$, по теореме 15.26 Ляпунова состояние равновесия заданной и линеаризованной систем неустойчиво.

Критерии отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения

Из теорем Ляпунова следует, что для суждения об устойчивости положения равновесия линейной системы или движения нелинейных систем по теории первого приближения нужно знать, является ли устойчивым полином – развернутый определитель характеристического уравнения. Устойчивым называется полином, все корни которого $\alpha_k + i\,\beta_k$ лежат слева от мнимой оси, т. е. все $\alpha_k < 0$. Существуют специальные критерии, позволяющие без нахождения корней полинома, что особенно важно для полиномов степени ≥ 2, определить:

устойчив или неустойчив данный полином. Приведем краткое изложение некоторых критериев.

Критерий Рауса-Гурвица

Для устойчивости полинома $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ определитель Гурвица Δ_n и все его главные диагональные миноры были положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, ... \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 .....0 \\ a_0 & a_2 & a_4 .....0 \\ 0 & a_1 & a_3 .....0 \\ 0 & a_0 & a_2 .....0 \\ \multicolumn{3}{l}{.......................} \\ 0 & 0 & 0 .....a_n \end{vmatrix} > 0.$$

Критерий Льенара-Шипара

Для уравнения $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + ... + a_1 k + a_0 = 0$ с положительными коэффициентами все корни имеют отрицательную действительную часть $(\alpha_k < 0)$, если положительны все Δ_i с четными индексами, т. е. $\Delta_2, \Delta_4, ...$ или положительны все Δ_i с нечетными индексами.

П р и м е р 15.58. Проверить устойчивость некоторой системы, характеристический полином которой $1{,}25\lambda^3 + 50{,}6\lambda^2 + 675\lambda + 3000$.

Вычислим определители Гурвица

$$a_0 = 1{,}25 > 0\,;$$

$$\Delta_1 = a_1 = 50{,}6 > 0\,;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50{,}6 & 3000 \\ 1{,}25 & 675 \end{vmatrix} = 30405 > 0\,;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50{,}6 & 3000 & 0 \\ 1{,}25 & 675 & 0 \\ 0 & 50{,}6 & 3000 \end{vmatrix} = 3000\Delta_2 > 0\,.$$

По критерию Рауса−Гурвица характеристический полином устойчив, т. е. все действительные части его корней $\alpha_k \pm i\beta_k - \alpha_k < 0$ следовательно, положение равновесия системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пример 15.59. Проверить устойчивость состояния равновесия некоторой системы по Ляпунову, если ее характеристическое уравнение $\lambda^4 + 12\lambda^3 + 98\lambda^2 + 150\lambda + 1600 = 0$.

$$a_0 = 1 > 0\,,\quad a_1 = 12\,,\quad a_2 = 98\,,\quad a_3 = 150\,,\quad a_4 = 1600\,,$$

$$\Delta_1 = a_1 = 12 > 0\,,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 150 \\ 1 & 98 \end{vmatrix} = 1026 > 0\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & 150 & 0 \\ 1 & 98 & 1600 \\ 0 & 12 & 150 \end{vmatrix} = -76500 < 0\,,\quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 12 & 150 & 0 & 0 \\ 1 & 98 & 1600 & 0 \\ 0 & 12 & 150 & 0 \\ 0 & 1 & 98 & 1600 \end{vmatrix} = 1600\Delta_3 < 0\,.$$

Характеристический полином неустойчив по обоим критериям, следовательно, состояние равновесия соответствующей системы неустойчиво.

16. РЯДЫ

16.1. Числовые ряды. Основные понятия

Определение 16.1. Пусть $(a_n) = a_1; a_2; ...; a_n; ...$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{16.1}$$

называется числовым рядом, числа $a_1, a_2, ..., a_n$ – членами ряда, а число a_n – n-ым или общим членом ряда.

Примеры числовых рядов:

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n-1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Определение 16.2. Сумма конечного числа n первых членов ряда (16.1)

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-ой частичной суммой данного ряда. Таким образом,

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Определение 16.3. Если для последовательности (S_n) частичных сумм ряда (16.1) существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд (16.1) называется сходящимся, а число S – суммой данного ряда

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если предел последовательности (S_n) не существует или равен бесконечности, то ряд называют расходящимся.

Пример 16.1. Рассмотрим, например, ряд

$$a - a + a - a + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a (a \in R,\ a \neq 0) . \qquad (16.2)$$

Последовательность частичных сумм

$$S_1 = a,$$
$$S_2 = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$S_{2n-1} = a,$$
$$S_{2n} = 0, \ldots$$

Теперь исследуем вопрос о сходимости ряда, составленного из элементов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{n} aq^{n-1} \quad (a \neq 0) \tag{16.3}$$

Сумма *n* первых членов этого ряда имеет вид:

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |q| < 1, \\ \infty, & \text{если} \quad |q| > 1, \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{если} \quad |q| < 1, \\ \infty, & \text{если} \quad |q| > 1. \end{cases}$$

При $q = -1$ ряд (16.3) совпадает с рядом (16.2), при $q = 1$, $S_n = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Следовательно, ряд (16.3) сходится при $|q| < 1$ и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$, при $|q| \geq 1$ он расходится.

Выражение вида

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k ,$$

представляющее собой числовой ряд, называется *n*-ым остатком ряда (16.1).

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=S_n+r_n.$$

Очевидно, что если числовой ряд (16.1) сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то

$$\lim_{n\to\infty}r_n=0 \tag{16.4}$$

Можно доказать, что условия (16.4) является не только необходимым, но и достаточным для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, т. е. из его выполнения следует сходимость указанного ряда.

16.2. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 16.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{16.5}$$

Доказательство. Пусть $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Так как $S_n=S_{n-1}+a_n$, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

Итак, если ряд (16.1) сходится, то выполняется условие (16.5). Отсюда вытекает достаточный признак расходимости ряда, сформулированный в виде следствия из теоремы 16.1.

Следствие 16.1. Если условие (16.5) не выполнено, т. е. предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Подчеркнем, что из выполнения условия (16.5) не обязательно следует сходимость ряда (16.1), т. е. оно не является достаточным признакам сходимости ряда.

Пример 16.2. Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}. \qquad (16.6)$$

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, однако гармонический ряд расходится. Действительно, предположим, что ряд (16.6) сходится и его сумма равна S , тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

Из неравенства

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}, \quad n\in N$$

предельным переходом по n получаем противоречие $0\geq\frac{1}{2}$.

16.3. Простейшие свойства числовых рядов. Линейные операции над сходящимися рядами

1°. Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).

Доказательство. Действительно, указанные операции изменят на одну и ту же постоянную величину все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, а это не влияет на сходимость или расходимость последовательности частичных сумм ряда.

2°. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ также сходится и $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = S_a + S_b$.

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = S_a + S_b.$$

Отметим, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ в общем случае не следует сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Например, ряд (1–1)+(1–1)+… сходится, а ряды $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)$ – расходятся. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ называется суммой рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

3°. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ также сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha S$.

Доказательство. Действительно, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \lim \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha S$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ называется произведением ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ на число α.

Операции суммирования рядов и умножение ряда на число называются линейными операциями над рядами.

Из данных определений вытекает, что линейные операции над рядами реализуются с помощью линейных операций над их членами.

16.4. Ряды с неотрицательными членами

Если задан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами a_n, то последовательность его частичных сумм является неубывающей. Необходимым и достаточным условием сходимости такой последовательности является ее ограниченность. Отсюда следует

Теорема 16.2. Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

Теорема 16.3 (*интегральный признак Коши*). Если неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ монотонно убывает и члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют вид $a_n = f(n)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)d(x)$ сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1. \tag{16.7}$$

Доказательство. В силу монотонности функции $f(x)$ для $k \le x \le k+1$ справедливо неравенство $f(k) \ge f(x) \ge f(k+1)$. Интегрируя его в пределах от k до $k+1$ имеем $\int_k^{k+1} f(k)dx \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)dx$ или $a_k \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge a_{k+1}$, так как $f(k) = a_k$. Запишем полученные неравенства для $k = \overline{1,n}$

$$a_1 \ge \int_1^2 f(x)dx \ge a_2,$$
$$a_2 \ge \int_2^3 f(x)dx \ge a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge a_{n+1}.$$

Просуммировав их, найдем

$$S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge S_{n+1} - a_1. \qquad (16.8)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится и равен I, тогда $\int_1^{n+1} f(x)dx \le \overset{1}{I}$ и $S_{n+1} \le I + a_1 = C$ или $S_n \le C,\ \forall n \in N$. Итак, монотонно возрастающая последовательность частичных сумм (S_n) ограничена сверху и, следовательно, сходится, т. е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Наоборот, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то его последовательность частичных сумм (S_n) ограничена, а тем более ограничена и сходится монотонно возрастающая последовательность $I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)dx$, т. е. сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

2. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, тогда в силу неравенства $S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx$ последовательность частичных сумм (S_n) неограничена, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то последовательность его

частичных сумм неограничена, тем более неограничена последовательность $I_{n+1} = \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$, т.е. интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится.

В случае сходимости ряда, переходя в неравенстве (16.8) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$S \geq \int\limits_1^{\infty} f(x)dx \geq S - a_1,$$

откуда следует

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx \leq S \leq \int\limits_1^{\infty} f(x)dx + a_1.$$

Из интегрального признака Коши следует, что сходимость (расходимость) интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ является необходимым и достаточным условием сходимости (расходимости) соответствующего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 16.3. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in R. \tag{16.9}$$

Решение. При $p = 1$ ряд (16.9) совпадает с гармоническим рядом (16.6) и расходится. Если $p \leq 0$, то $\frac{1}{n^p} \geq 1,\ \forall n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$. В этом случае ряд расходится, так как нарушается необходимое условие сходимости ряда. Пусть $p > 0$ и $p \neq 1$. Положим $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$. Рассмотрим не собственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p}-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{если} \quad p>1,\\ \infty, & \text{если} \quad 0<p<1.\end{cases}$$

Следовательно, обобщенный гармонический ряд (16.9) сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Теорема 16.4 (*признак сравнения*). Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ справедливо неравенство

$$0\le a_n\le b_n, \quad \forall n\ge n_0\in N,$$

то

1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$;

2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Доказательство. Предположим сначала, что $n_0=1$.

1. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится. Обозначим через S_n и S'_n n-ые частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ соответственно. Заметим, что $S_n\le S'_n, \quad \forall n\in N$. Тогда, согласно теореме 16.2, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ следует ограниченность последовательности (S'_n), а значит, и последовательности (S_n). Из ограниченности последовательности (S_n) вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Тогда последовательность (S_n) неограничена, следовательно, неограничена и последовательность (S'_n), а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится.

Если $n_0 > 1$, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Доказанный признак является достаточным для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 16.5 (*предельный признак сравнения*). Пусть для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, $0 < L < \infty$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из определения предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ для любого положительного ε, например, $0 < \varepsilon < L$, найдется номер n_0, такой, что $L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ или, так как $b_n > 0$

$$(L-\varepsilon)b_n < a_n < (L+\varepsilon)b_n, \ \forall n \geq n_0$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, согласно свойству 3 числовых рядов (см. §16.3), следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (L+\varepsilon)b_n$, а значит, по теореме 16.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (L-\varepsilon)b_n$ и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Аналогично доказывается, что их сходимости (расходимости) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Из предельного признака сравнения следует, что сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ является необходимым и достаточным условием сходимости (расходимости) соответствующего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и наоборот.

Теорема 16.6 (*признак Д´Аламбера*). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L. \tag{16.10}$$

Тогда:

1) при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $L > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. По определению предела из равенства (16.10) следует, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n_0, выполняются неравенства

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon,\ \forall n \ge n_0 \tag{16.11}$$

1. Если $L < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что число $q = L + \varepsilon < 1$. Тогда из неравенства $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, $\forall n \ge n_0$ следует, что

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} q;$$

$$a_{n_0+2} < a_{n_0+1}q < a_{n_0}q^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n_0+\kappa} < a_{n_0+k-1}q < a_{n_0}q^k.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0}q^k$ при $|q|<1$ сходится, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$, а следовательно и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Если $L>1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $q=L-\varepsilon>1$. Тогда из соотношений (16.11) следует неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}>q$, $\forall n \geq n_0$ или $a_{n+1}>qa_n, \forall n \geq n_0$.

Это означает, что, начиная с номера n_0, члены ряда возрастают, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится.

Теорема 16.7 (*признак Коши*). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n>0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L. \tag{16.12}$$

Тогда:

1) при $L<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $L>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. По определению предела из равенства (16.12) следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер n_0, что выполняются неравенства

$$L-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon,\ \forall n \geq n_0. \tag{16.13}$$

1. Если $L<1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $q=L+\varepsilon<1$. Тогда из соотношения (16.13) имеем $a_n<q^n$, $\forall n\geq n_0$ и, согласно признаку сравнения, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ при $0<q<1$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

2. Если $L>1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $L-\varepsilon=q>1$. Тогда из соотношения (16.13) имеем $a_n>q^n$, $\forall n\geq n_0$. Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$, $q>1$, согласно признаку сравнения, следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

16.5. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимся называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots,$$

где a_n, $n=1,2,\ldots,$ – числа одного знака. Такой ряд удобно записывать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n>0. \qquad (16.14)$$

Для знакочередующихся рядов имеет место следующая

Теорема 16.8 (*признак Лейбница*). Если члены знакочередующегося ряда (16.14) удовлетворяют условиям:

$$1)\ a_n\geq a_{n+1},\ \forall n\in N;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, т. е. $S \le a_1$.

Доказательство. Рассмотрим четную частичную сумму ряда (16.14)

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Так как все выражения в круглых скобках неотрицательны, то последовательность четных частичных сумм (S_{2n}) ряда неубывающая.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1. \tag{16.15}$$

Таким образом, последовательность (S_{2n}) не убывает и ограничена сверху, а следовательно, она сходится.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S$$

следует, что и сумма ряда (16.14) равна S. Из неравенства (16.15) заключаем, что $S \le a_1$. Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 16.8, называют рядом Лейбница.

Следствие 16.2. Остаток $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$ ряда Лейбница удовлетворяет неравенству $|r_n| \le a_{n+1}$.

Доказательство. Действительно, ряд Лейбница

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-n-1}a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots$$

только знаком отличается от остатка r_n ряда (16.14) и не превосходит своего первого члена a_{n+1}.

Пример 16.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$.

Так как

1) $\frac{1}{n^4} > \frac{1}{(n+1)^4}$, $\forall n \in N$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} = 0$, то данный ряд сходится.

16.6. Знакопеременные ряды

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются знакопеременными.

Примеры знакопеременных рядов:

$$1)\ \sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in N;$$

$$2)\ 1-1-1+1+1-1-1+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Очевидно, что знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов. Выясним, существует ли связь между сходимостями этих рядов.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема 16.9. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ по свойству 3 линейных операций над рядами (см. §16.3) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2|a_n|$.

Далее, поскольку $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$, $\forall n \in N$, то из признака сравнения (см. теорему 16.4) вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right)$. А так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ представим в виде разности сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right) - \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то он сходится.

В теореме 16.9 сформулирован достаточный признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Обратное утверждение в общем случае не имеет места, т. е. приведенный признак не является необходимым. В связи с этим сформулируем следующее

Определение 16.4. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется абсолютно сходящимся. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется условно сходящимся.

Пример 16.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходящийся гармонический. Исходный ряд сходится по признаку Лейбница, следовательно, он сходится условно.

Следует отметить, что абсолютно и условно сходящиеся ряды обладают качественно различными свойствами.

16.7. Ряды с комплексными членами

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (16.16)$$

члены которого $z_n = a_n + ib_n, \quad (a_n, b_n \in R)$ – комплексные числа, называется рядом с комплексными членами. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется действительной частью ряда (16.16), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – его мнимой частью.

Составим конечную сумму *n* первых членов ряда (16.16):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k \ .$$

Предел $\lim_{n\to\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k$. Но существование последних пределов означает сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Следовательно, ряд (16.16) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды из действительной и мнимой частей членов ряда (16.16), причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Теорема 16.10. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то сходится и ряд (16.16).

Доказательство. Так как $\left|a_n\right| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \left|z_n\right|$ и $\left|b_n\right| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \left|z_n\right|$, то по признаку сравнения (см. теорему 16.4) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right|$ следует абсолютная сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а значит, и сходимость ряда (16.16).

Теорема 16.10 позволяет для исследования сходимости рядов с комплексными членами применять доказанные ранее признаки сходимости рядов с положительными членами.

Пример 16.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2+i}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2}{n^4+1} - i\frac{1}{n^4+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}.$$

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Так как $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}}{\frac{1}{n^2}}\right) = 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то, согласно предельному признаку сравнения (см. теорему 16.5), сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$, а, следовательно, и исходный ряд.

16.8. Функциональные ряды. Основные понятия

Пусть $u_1(x); u_2(x); \ldots; u_n(x); \ldots$ – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Определение 16.5. Ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (16.17)$$

членами которого являются функции $u_n(x)$, называется функциональным.

Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ сходится, то x_0 называется точкой сходимости функционального ряда (16.17). Множества всех точек сходимости функционального ряда называется его областью сходимости. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D \subset X$. Если множество D пусто, то ряд (16.17) расходится в каждой точке множества X.

Конечная сумма

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

называется n–й частичной суммой ряда (16.17), а функция $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$, определенная в области D, суммой ряда (16.17).

Функция $r_n(x)$, определенная в области D и задаваемая формулой

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$$

называется n–ым остатком ряда. Очевидно, что $r_n(x)\to 0\ \forall x\in D$, если $n\to\infty$.

Сходимость функционально ряда в каждой точке $x\in D$ называется поточечной сходимостью.

Функциональный ряд (16.17) называется абсолютно сходящимся на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $D_1 \subset D$.

Пример 16.7. Найти область абсолютной сходимости ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} . \qquad (16.18)$$

Решение. Применим признак Д´Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^4}{x^{n-1}}\right| = |x| .$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^{n-1}$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Таким образом, областью абсолютной сходимости функционального ряда (16.18) является интервал $(-1;+1)$.

16.9. Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение 16.6. Функциональный ряд (16.17.) называется равномерно сходящимся в области D к функции $S(x)$, если для любого $E > 0$ существует номер $n_0(E)$, не зависящий от x, такой, что

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < E,\ \forall_n > n_0(E),\ \forall_x \in D$$

Отметим, что различие определений поточечной и равномерной сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер n_0 зависит от E и $x \in D$, т. е. $n_0 = n_0(E, x)$, а во втором – только от E, т. е. $n_0 = n_0(E)$.Поточечную сходимость называют также неравномерной.

Теорема 16.11 (*признак Вейерштрасса*). Если члены ряда (16.17) удовлетворяют неравенствам

$$|u_n(x)| \le a_n \quad \forall n \in N, \ \forall x \in D \tag{16.19}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$, сходится, то функциональный ряд (16.17) сходится равномерно в области D.

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его остаток $r_n \to 0$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : |r_n| < \varepsilon \ \forall n \ge n_0(\varepsilon).$$

Согласно неравенству (16.19),

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n < \varepsilon \ \forall n \ge n_0(\varepsilon), \ \ \forall x \in D. \tag{16.20}$$

По определению это и означает равномерную сходимость ряда (16.17) в области D.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого удовлетворяют неравенствам (16.19), называется мажорантным рядом или мажорантой для функционального ряда (16.17), а функциональный ряд (16.17) в этом случае называется мажорируемым на множестве D.

Пример 16.6. Найти область равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^5}$.

Решение. Так как $\left|\frac{\cos nx}{n^5}\right| \le \frac{1}{n^5}$, $\forall n \in N$, $\forall x \in R$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ сходится, то на основании признака Вейерштрасса заключаем, что областью равномерной сходимости заданного ряда является вся числовая ось.

16.10. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Теорема 16.12 (*о непрерывности суммы функционального ряда*).Если на множестве D функциональный ряд (16.17) с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма $S(x)$ непрерывна на D.

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (16.17) на области D для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \ge n_0(\varepsilon)$, в частности при фиксированном $n = n_0(\varepsilon)$,

$$\left|r_{n_0}(x)\right| = \left|S(x) - S_{n_0}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in D. \tag{16.21}$$

Поскольку функция $S_{n_0}(x) = \sum_{n=1}^{n_0} u_n(x)$ непрерывна на D, то для любого $x_0 \in D$ и выбранного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $\left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\left|x - x_0\right| < \delta$, $\forall x \in D$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\left|S(x) - S(x_0)\right| = \left|S_{n_0}(x) + r_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0) - r_{n_0}(x_0)\right| \le$$

$$\le \left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| + \left|r_{n_0}(x)\right| + \left|r_{n_0}(x_0)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

при $|x - x_0| < \delta$, что и означает непрерывность функции $S(x)$ в произвольной точке $x_0 \in D$.

Из теоремы (16.12) следует, что если сумма $S(x)$ функционального ряда с непрерывными членами разрывна в области D, то сходимость этого ряда заведомо неравномерная в области D.

Следствие 16.3. В равномерно сходящемся ряде возможен почленный переход к пределу, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1=}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),\ \ \forall x_0 \in D.$$

Доказательство. Действительно, в силу непрерывности суммы $S(x)$

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

Теорема 16.13 (*о почленном интегрировании функционального ряда*). Если функциональный ряд (16.17) с непрерывными членами сходится к функции $S(x)$ равномерно на отрезке $[a;b]$, то его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x] \subset [a;b]$ и справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt, \tag{16.22}$$

причем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$.

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (16.17)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon):\left|S(x)-S_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad \forall x\in[a;b],\ \forall n>n_0(\varepsilon).$$

Оценим величину

$$\left|\int_{x_0}^{x}S(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}u_k(t)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\left(S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)dt\right)\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|S(t)-S_n(t)\right|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{b-a}\left|x-x_0\right|<\varepsilon,$$

$$\forall x\in[a;b],\ \forall n>n_0(\varepsilon).$$

А это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_k(t)dt$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$ к функции $\int_{x_0}^{x}S(t)dt,$ т. е. справедливо равенство (16.22).

Пример 16.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+x^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}. \tag{16.23}$$

Так как $\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2}\quad\forall x\in R,$ а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд (16.23) сходится равномерно по всей числовой оси. Интегрируя его почленно на отрезке $[0,x]$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{x}\frac{1}{n^2+t^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}.$$

На основании теоремы 16.13. заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ сходится равномерно по всей числовой оси.

Теорема 16.14 (*о почленном дифференцировании функционального ряда*) Если ряд (16.17) с непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a;b]$ членами сходится к функции $S(x)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то исходный ряд (16.17) сходится равномерно $[a;b]$, его сумма $S(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция и справедливо равенство

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x). \tag{16.24}$$

Доказательство. Обозначим через $\delta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$. Интегрируя это равенство на отрезке $[x_0;x]\subset[a;b]$, получаем

$$\int_{x_0}^{x}\delta(t)dt=\int_{x_0}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\big(u_n(x)-u_n(x_0)\big)=S(x)-S(x_0).$$

Левая часть полученного равенства дифференцируема по x. Следовательно, дифференцируема по x и правая его часть, а $S'(x)=\delta(x)$, т. е. справедливо равенство (16.24). Равномерная сходимость на $[a;b]$ ряда (16.17) следует из теоремы 16.13.

Теоремы 16.12-16.14 являются достаточными условиями для непрерывности суммы функционального ряда, почленной интегрируемости и дифференцируемости функциональных рядов соответственно.

16.11. Степенные ряды

Определение 16.7. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-\alpha) + \ldots + a_n(x-\alpha)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n, \qquad (16.25)$$

где a_n, x, α – действительные числа, членами которого являются степенные функции, называется степенным рядом по степени $x-\alpha$.

При $\alpha = 0$ получаем степенной ряд по степеням x

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (16.26)$$

Поскольку заменой $x-\alpha = X$ ряд (16.25) можно свести к ряду (16.26), то ограничимся рассмотрением рядов (16.26).

Степенной ряд (16.26) всегда сходится в точке $x=0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для степенных рядов справедлива

Теорема 16.15 (*Абеля*). Если степенной ряд (16.26) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интервале $-|x_0| < x < |x_0|$ и сходится равномерно на отрезке $-q \le x \le q$, где $0 < q < |x_0|$.

Доказательство. Так как по условию теоремы числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ и, следовательно, существует такое число $M > 0$, что $|a_n x_0^n| < M \;\; \forall n \in N.$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, и поэтому данный ряд сходится. Следовательно, ряд (16.26) в точке $x \ne 0$ сходится абсолютно.

Если $|x| \le q \le |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| \le \frac{q}{|x_0|} < 1$. Отсюда следует, что ряд (16.26) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{q}{|x_0|}\right)^n$, и, значит, по признаку Вейерштрасса, он сходится равномерно на отрезке $[-q;q]$.

Следствие 16.4. Если в точке $x_1 \ne 0$ степенной ряд (16.26) расходится, то он расходится во всех точках x, таких, что $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Действительно, если бы ряд (16.26) сходился в точке x, то по теореме Абеля он сходился бы абсолютно в точке x_1, что противоречит условию.

Из теоремы Абеля и следствия вытекает, что если степенной ряд (16.26) сходится хотя бы в одной точке $x \ne 0$, то всегда существует число $R > 0$ такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для $\forall x \in (-R;R)$ и расходится для $\forall x \in (-\infty;R) \cup (R;+\infty)$. При $x = \pm R$ ряд (16.26) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Неотрицательное число R, такое, что степенной ряд (16.26) сходится в $(-R;R)$ и расходится при $|x| > R$, называют радиусом сходимости, а интервал $(-R;R)$ − интервалом сходимости степенного ряда (16.26).

Если ряд (16.26) сходится только в точке $x=0$, то $R=0$; если же он сходится для $\forall x \in R$, то $R=\infty$.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда используют признаки Д'Аламбера и Коши (см. теоремы 16.6, 16.7). Предположим, например, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L.$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=L|x|$ и по признаку Коши при $L|x|<1$ ряд сходится абсолютно, а при $L|x|>1$ расходится.

Следовательно,

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{16.27}$$

Аналогично, если существует передел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|=L,$$

то, применив признак Д'Аламбера, получим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{16.28}$$

Как отмечалось ранее, степенной ряд общего вида (16.25) заменой $x-\alpha=X$ сводится к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n X^n$. Если R − радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n X^n$, то он сходится абсолютно при $|X|<R$ и расходится при $|X|>R$. Тогда ряд (16.25) сходится абсолютно при $|x-\alpha|<R$ и расходится при $|x-\alpha|>R$. По аналогии с предыдущим случаем неотрицательное число R называют радиусом сходимости, а интервал $(\alpha-R;\alpha+R)$ − интервалом сходимости степенного ряда (16.25).

Пример 16.9. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

Решение. По формуле (16.28) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n\cdot 5^n)}}{\frac{1}{((n+1)\cdot 5^{n+1})}} = 5,$$

т. е. интервал сходимости $-5 < x-3 < 5$ или $-2 < x < 8$. В точке $x=-2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, а в точке $x=8$ − расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2;8)$.

16.12. Свойства степенных рядов

Ограничимся изучением свойств степенного ряда (16.26).

Теорема 16.16. Если радиус сходимости степенно ряда (16.26) отличен от нуля, то его сумма $S(x)$ непрерывна на интервале сходимости $(-R;R)$.

Доказательство. Пусть x − произвольная точка интервала сходимости. Всегда существует такое число $q>0$, что $|x|<q<R$. По теореме 16.15 степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[-q;q]\subset(-R;R)$. Тогда, согласно теореме 16.12 (о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда), $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-q;q]$, а следовательно, и в точке x. В силу произвольности выбора точки $x\in(-R;R)$ получаем непрерывность функции $S(x)$ на $(-R;R)$.

Теорема 16.17. Операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0; x] \subset (-R; R)$ степенного ряда (16.26) не изменяют его радиуса сходимости.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Обозначим через R_1 радиус сходимости почленно продифференцированного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$R_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

Аналогично, пусть R_2 – радиус сходимости ряда, полученного почленным интегрированием ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} - \frac{a_n}{n+1}x_0^{\,n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}$ сходится абсолютно по признаку сравнения (см. теорему 16.4) в силу неравенства $\left|\dfrac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\right| \le \left|a_n x_0^{n+1}\right|$, $n = 0,1,\ldots$, и сходимости ряда $|x_0|\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|$, так как $x_0 \in (-R; R)$. Значит,

$$R_2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n(n+2)}{(n+1)a_{n+1}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

Теорема 16.18. Если радиус сходимости степенного ряда (16.26) отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости и для его суммы $S(x)$ справедливо равенство

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} . \qquad (16.29)$$

Доказательство. Пусть x − произвольная точка интервала сходимости $(-R;R)$, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Выберем такое число q, что $|x| < q < R$. На отрезке $[-q;q] \subset (-R;R)$ ряд (16.29), согласно теореме 16.17, сходится равномерно. Следовательно, на указанном отрезке, а значит и в точке x ряд (16.26) сложно почленно дифференцировать, и справедливо равенство (16.29).

Следствие 16.5. Степенной ряд на интервале сходимости $(-R;R)$, $R \neq 0$, можно почленно дифференцировать любое число раз.

Доказательство. Действительно, так как результатом почленного дифференцирования степенного ряда является степенной ряд с тем же радиусом сходимости, то к нему применима теорема 16.18 и т. д.

Теорема 16.19. Степенной ряд (16.26) можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0; x]$, принадлежащем интервалу сходимости.

Доказательство теоремы следует из равномерной сходимости степенного ряда (16.26) на отрезке $[x_0; x] \subset (-R;R)$ и теоремы 16.13 о почленном интегрировании функционального ряда.

Следствие 16.6. Степенной ряд (16.26) можно почленно интегрировать любое число раз на отрезке $[x_0; x] \subset (-R;R)$.

16.13. Ряды Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Поставим ей в соответствие степенной ряд

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$
$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{16.30}$$

Он называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$. Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{16.31}$$

и называется рядом Маклорена.

Радиус сходимости R степенного ряда (16.30) может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$ ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Если $S(x) = f(x)$ на $(x_0 - R; x_0 + R)$, то говорят, что функция $f(x)$ разложена в ряд Тейлора в окрестности точки x_0.

Легко видеть, что частичные суммы ряда (16.30)

$$S_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x - x_0)^k$$

представляют собой многочлены Тейлора $P_n(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0. Если ряд сходится к функции $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = S_n(x) + R_n(x). \qquad (16.32)$$

Из равенства (16.32) следует

Теорема 16.20. Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R). \qquad (16.33)$$

Подчеркнем, что в равенство (16.33) входит остаточный член не ряда, а формулы Тейлора, которые в общем случае различны.

В самом деле, если ряд Тейлора сходится к $S(x) \neq f(x)$, то из равенств

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - S_n(x), \; r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

следует, что $R_n(x) \neq r_n(x)$. Если $S(x) = f(x)$, то очевидно, что $R_n(x) = r_n(x)$.

Напомним, что остаток $R_n(x)$ формулы Тейлора может быть представлен в одном из следующих видов

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \; c \in (x_0; x) \text{ − форма Лагранжа;}$$

$$R_n(x) = 0((x - x_0)^n), \; x \to x_0 \text{ − форма Пеано.}$$

На практике часто используется следующий достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 16.21. Если для любых $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора (16.30) сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x - x_0| < R.$

Доказательство. Согласно представлению остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, имеем

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \le M \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}, \ \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Д' Аламбера. Тогда на основании необходимого признака сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, а следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Решим теперь следующую задачу. Известно, что в окрестности точки x_0 некоторый степенной ряд по степеням $x - x_0$ сходится к бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, т. е.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...; \ \forall x \in 0(x_0). \qquad (16.34)$$

Является ли ряд (16.34) рядом Тейлора функции $f(x)$?

После последовательного почленного дифференцирования степенного ряда (16.34), что допустимо, согласно теореме (16.18) и следствию из нее, имеем:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots;$$

……………………………………………………………………..

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n\ldots 2a_{n+1}(x - x_0) + \ldots;$$

При $x = x_0$ получаем

$$a_0 = f(x_0);\ a_1 = f'(x_0);\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};\ldots;a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!};\ldots$$

Отсюда следует

Теорема 16.22. Если степенной ряд по степеням $x - x_0$ сходится к функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, то он является рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности этой точки.

16.14. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

Получим разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Так как $f^{(n)}x) = \mathrm{e}^x$ и $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\mathrm{e}^x\right| < \mathrm{e}^A$ при $|x| < A$, где A − сколь угодно большое положительное число, то на основании теоремы 16.21 заключаем, что функция e^x разложима в ряд Маклорена, сходящейся к ней при $\forall x \in R$. При этом

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad (16.35)$$

поскольку $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$.

2. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

Используя разложение (16.35), определение функции $y = \operatorname{ch} x$ и свойство суммы сходящихся рядов, имеем

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\bigl(1 + (-1)^n\bigr)\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

т. е.

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in R. \qquad (16.36)$$

3. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Так как $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) = (\operatorname{ch} x)'$, то на основании теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда, используя формулу (16.36), получаем разложение

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in R.$$

4. $f(x) = \sin x$.

Так как $f^{(n)}(x) = \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}n\right)$ и $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1 \ \forall x \in R,$ то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in R. \quad (16.37)$$

5. $f(x) = \cos x$.

Из равенства $\cos x = (\sin x)'$, используя формулу (16.37), получаем искомое разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in R.$$

6. $f(x) = \ln(1+x)$.

На основании теоремы 16.19 о почленном интегрировании степенного ряда с учетом выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

т. е.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in (-1;1) \qquad (16.38)$$

Можно показать, что равенство (16.38) верно и при $x = 1$, т. е. для всех $x \in (-1;1]$.

7. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

В данном случае оценка производных $f^{(n)}(x)$ затруднительна, поэтому воспользуемся другим, более общим приемом. Функция $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ удовлетворяет равенству

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x) \tag{16.39}$$

и условию $f(0)=1$.

Так как решение задачи Коши для дифференциального уравнения (16.39) единственно, то если найдется степенной ряд $1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$, удовлетворяющий уравнению (16.39), то он будет искомым разложением заданной функции. Итак

$$(1+x)\cdot(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)=\alpha(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)$$

или

$$a_1+(a_1+2a_2)x+(2a_2+3a_3)x^2+\ldots+(na_n+(n+1)a_{n+1})x^n=$$

$$=\alpha+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2+\ldots+\alpha a_nx^n+\ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\alpha=\dfrac{\alpha}{1!} \\ a_1+2a_2=\alpha a_1 \Rightarrow a_2=\dfrac{a_1(\alpha-1)}{2}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \\ 2a_2+3a_3=\alpha a_2 \Rightarrow a_3=\dfrac{a_2(\alpha-2)}{3}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},\ n\in N.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+...+=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ \forall x\in(-1;1) \tag{16.40}$$

поскольку радиус сходимости полученного ряда равен 1, что несложно проверить, использовав признак Д'Аламбера. Ряд, стоящий в правой части формулы (16.40), называется биномиальным.

При $\alpha=n\in N$ все коэффициенты ряда (16.40), начиная с номера $n+1$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона.

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{n!}x^2+...+x^4=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\ .$$

16.15. Приложение степенных рядов

Приближенное вычисление значений функций

Для нахождения приближенного значения функций $f(x)$ в точке x_0 с заданной точностью поступим следующим образом. Разложим функцию $f(x)$ в ряд по степеням $x-x_1$ с интервалом сходимости, содержащим точку x_0, где x_1 – точка, в которой значение функции и ее производных легко вычисляются точно. Переменной x придадим значение x_0 и в полученном числовом ряду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0-x_1)^n$ оставим только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определим из соответствующей оценки либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

Пример 16.10. Вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ число e.

Решение. Так как

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < c < x,\ \forall x \in R,$$

то из оценки $|R_n(1)| = \dfrac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} \le 0{,}01$ следует, что $n \ge 5$, т. е. $n_0 = 5$. Итак,

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2 + 0{,}500 + 0{,}167 + 0{,}042 + 0{,}008 = 2{,}717$$

или

$$\mathrm{e} \approx 2{,}72\ \ (\varepsilon = 0{,}01).$$

Приближенное вычисление интегралов

Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов

Пример 16.11. Вычислить $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Используя разложение (16.37) для $\sin x$, получаем

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},\ \forall x \in R \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \quad \Rightarrow$$

$$|r_n| \le \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)} \le 0{,}01 \Rightarrow n > 2 \Leftrightarrow n_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 1 - 0{,}0555 + 0{,}0016 = 0{,}9461$$

или

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \approx 0{,}946 \ \ (\varepsilon = 0{,}001).$$

Вычисление сумм числовых рядов

Используя известные разложения в степенные ряды, сумму заданного числового ряда иногда удается выразить через значение некоторой функции в определенной точке.

Пример 16.12. Найти сумму сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}. \tag{16.41}$$

Решение. Рассмотрим степенной ряд

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}, \ \ S(0) = 0,$$

сходящийся (равномерно) при $x \in [-1;1]$. Ряд

$$S'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x\operatorname{arctg} x$$

сходится равномерно на $[0;1]$, поскольку в этом случае он является рядом Лейбница и

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1}.$$

Тогда ряд $S(x)$ можно дифференцировать почленно на $[0;1]$. Решая дифференциальное уравнение $S'(x) = x\operatorname{arctg}x$ с начальным условием $S(0) = 0$, находим

$$S(x) = \int_0^x t\operatorname{arctg} t dt = \frac{1}{2}\left(\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x - x\right), \ \forall x \in [0;1].$$

Так как сумма числового ряда (16.41) равна $S(1)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}(2\operatorname{arctg}1 - 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений

Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решение не удается найти в элементарных функциях.

Пример 16.13. Найти решение

$$yy' = \sin y, \tag{16.42}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение (16.42) допускает разделение переменных:

$$\frac{ydy}{\sin y}=dx, \tag{16.43}$$

однако интеграл от левой части уравнения (16.43) не выражается в элементарных функциях. Будем искать решение в виде ряда Маклорена

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Так как $y(0)=\frac{\pi}{2}$, а

$$y'=\frac{\sin y}{y}, \tag{16.44}$$

то $y'(0)=\frac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части равенства (16.44), находим

$$y''=\frac{(y'\cos y)y-y'\sin y}{y^2}=\frac{y'(y\cos y-\sin y)}{y^2}, \tag{16.45}$$

откуда $y''(0)=\frac{-y'(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\left(-\frac{2}{\pi}\right)^3$.

Дифференцируя обе части равенства (16.45), находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y=y(x)$:

$$y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}x - \frac{2^2}{\pi^3}x^2 + \ldots$$

Заметим, что применение степенных рядов для решения дифференциальных уравнений не ограничивается случаем их решения в квадратурах.

РЯДЫ ФУРЬЕ

16.16. Периодические процессы и периодические функции

Ряды Фурье используются для описания периодических процессов, решения дифференциальных уравнений, приближения периодических и непериодических функций. В этих случаях, функцию, описывающую периодический процесс, представляют как сумму конечного и бесконечного числа периодических функций вида $A\sin(\omega x + \varphi_0)$, где A, ω, φ_0 – постоянные. Эти функции описывают простейшее колебательное движение и называются гармониками. $A > 0$ называется амплитудой, ω – частотой колебания, $\omega x + \varphi_0$ – фазой колебания, φ_0 – начальной фазой.

Используя формулы тригонометрии, можно записать

$$A\sin(\omega x + \varphi_0) = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

где $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$.

Более сложные периодические процессы описываются в виде конечного или бесконечного числа простых гармоник, т. е. функций вида

$$\sum_n (a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_u x)$$

Во всех этих случаях имеем дело с периодическими функциями. Напомним свойства этих функций.

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода *T* есть периодические функции периода *T*.

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ ($a \neq 0$) имеет период $T/|a|$.

3. Определенный интеграл от периодической функции $f(x)$ с периодом T по любому отрезку длиной T имеет одно и то же значение, т. е. для любых x справедлива формула

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt. \qquad (16.46)$$

Действительно, т. к. производная от интеграла

$$\left(\int_x^{x+T} f(t)dt\right)' = f(x+T) - f(x) = 0$$

т. е. не зависит от x.

16.17. Ортогональные системы функций

Определение 16.8. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на $[a,b]$ функция и $x_0 \in [a,b]$ – точка разрыва первого рода. Тогда в этой точке существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, поэтому на каждом участке непрерывности существуют определенные интегралы Римана $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$. В этом случае функция $f(x)$ называется функцией с интегрируемым квадратом.

Так как на множестве кусочно-непрерывных функций определены линейные операции, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства, то это множество образует линейное пространство. Введем в нем операцию скалярного произведения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Определение 16.9. Скалярным произведением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется число

$$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx \tag{16.47}$$

Скалярное произведение функций обладает следующими свойствами:

1) $(\varphi,\psi) = (\psi,\varphi)$;

2) $(\varphi_1 + \varphi_2,\psi) = (\varphi_1,\psi) + (\varphi_2,\psi)$;

3) $(\alpha\varphi,\psi) = \alpha(\varphi,\psi) \forall \alpha \in R$;

4) $(\varphi,\varphi) \geq 0$, $(\varphi,\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$, т. е. удовлетворяет аксиомам евклидова пространства.

Множество всех кусочно-непрерывных функций на $[a,b]$ со скалярным произведением, введенным по формуле (16.47), обозначают $L_2[a,b]$ и называют пространством L_2, которое бесконечномерное.

Определение 16.10. Неотрицательное число $\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}$ называется нормой функции $\varphi(x)$ в $L_2[a,b]$. Учитывая, что $\int_a^b \varphi^2(x)dx = (\varphi,\varphi)$, можно записать

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)}\,. \qquad (16.48)$$

Функция $\varphi(x)$ называется нормированной, если ее норма равна единице.

Определение 16.11. Две функции $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ и $\psi(x) \in L_2[a,b]$ называются ортогональными на $[a,b]$, если их скалярное произведение на $[a,b]$ равно нулю, т. е. $(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$.

Определение 16.12. Система функций $(\varphi_n(x)) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)\ldots)$ (конечная или бесконечная) называется ортогональной на отрезке $[a,b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на $[a,b]$, т. е.

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0 \quad \forall m \neq n,\, m,\, n \in N\,.$$

Определение 16.13. Ортогональная система функций $(\varphi_n(x))$ на отрезке $[a,b]$ называется ортонормированной, если $\|\varphi\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \forall n \in N$.

Любую ортогональную на $[a,b]$ систему функций $(\varphi_n(x))$ с $\|\varphi_n\| \neq 0$ можно нормировать. Для этого достаточно разделить каждую функцию системы на ее норму. Получим ортогональную систему функций $\left(\varphi_n(x)/\|\varphi_n\|\right)$.

В качестве примера ортогональной системы функций рассмотрим основную тригонометрическую систему

$$\left(1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots\right) \tag{16.49}$$

Сформулируем свойства этой системы в виде теоремы.

Теорема 16.23. Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$, например на $[-l, l]$, причем норма первого члена системы равна $\sqrt{2l}$, а любого другого $\sqrt{l}$.

Для доказательства ортогональности системы функций (16.49) нужно показать, что определенный интеграл в пределах от $-l$ до l произведения любых двух функций этой системы равен нулю.

Докажем, например, что $\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad \forall m, n \in N, \; m \neq n$.

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\pi(m-n)}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l} + \frac{l}{\pi(m+n)}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad \forall n \in N,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall n\in N,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall m,n\in N, \quad m\neq n,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad \forall m,n\in N, \quad m\neq n.$$

Найдем норму первого члена системы (16.49)

$$\|1\|^2=\int_{-l}^{l}1^2\,dx=x\Big|_{-l}^{l}=2l, \text{ т. е. } \|1\|=\sqrt{2l}.$$

Найдем норму члена системы, содержащего косинусы:

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=$$

$$=l\Rightarrow\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l} \quad \forall n\in N.$$

Аналогично доказывается, что $\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l} \quad \forall n\in N$.

Примером ортогональной нетригонометрической системы функций является система многочленов Лежандра, определяемая равенством:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1 \right)^n, \quad n = 0,1,\ldots$$

Можно показать, что эта система ортогональна на отрезке $\left[-1,1\right]$.

16.18. Ряды Фурье по ортогональным системам функций

Пусть $(\varphi_n(x))$ − ортогональная система функций в $L_2\left[a,b\right]$.

Выражение

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \qquad (16.50)$$

называется обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций $(\varphi_n(x))$. Если $(\varphi_n(x))$ − основная тригонометрическая система функций, то ряд (16.50) называется тригонометрическим рядом Фурье.

Пусть функция $f(x) \in L_2\left[a,b\right]$. Требуется выяснить, при каких условиях и для каких $x \in \left[a,b\right]$ функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по ортогональной системе функций $(\varphi_n(x))$, т. е. представить $f(x)$ в виде:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \qquad (16.51)$$

где c_n – числовые коэффициенты.

Найдем коэффициенты c_n. Предположим, что формула (16.51) имеет место и существуют интегралы от $f(x)$ и от членов ряда. Умножим обе части разложения (16.51) на $\varphi_n(x)$ и почленно проинтегрируем результат на отрезке $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int_a^b c_0\varphi_0(x)\varphi_n(x)dx + \int_a^b c_1\varphi_1(x)\varphi_n(x)dx + \ldots + \int_a^b c_n\varphi_n^2(x)dx + \ldots$$

В силу ортогональности системы $(\varphi_n(x))$, все интегралы в правой части равенства, кроме интеграла с коэффициентом c_n, равны нулю.

Имеем:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)dx, \quad n = 0,1,\ldots$$

Используя понятия скалярного произведения и нормы функции, запишем полученное равенство в виде: $(f,\varphi_n) = c_n\|\varphi_n\|^2$, или

$$c_n = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{16.52}$$

Тогда ряд (16.51) можно записать в виде:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n(x). \tag{16.53}$$

Числа c_n называются коэффициентами Фурье. Для любой функции $f(x)\in L_2[a,b]$ можно формально составить обобщенный ряд Фурье по ортогональной системе функций $(\varphi_n(x))$, определив его коэффициенты по формулам (16.52). Однако вопрос о сходимости ряда Фурье не решен. В частности, неизвестно, является ли сумма полученного ряда равной $f(x)$, даже в случае сходимости ряда, его сумма может не совпасть с $f(x)$.

До выяснения этих вопросов будем говорить, что обобщенный ряд Фурье порожден функцией $f(x)$ и эту формальную связь записывают в виде

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

16.19. Приближение функции в среднем

В математике используются различные понятия близости функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ на $[a,b]$.

За меру отклонения $f(x)$ от $\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ часто принимается число ρ, определяемое соотношением $\rho = \rho(f,\varphi) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx}$ и называемое средним квадратичным уклонением.

Число $\rho \geq 0$ имеет смысл для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ из $L_2[a,b]$, поэтому его называют метрикой или расстоянием в L_2 и говорят, что оно характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в среднем квадратичном. Используя определение нормы функции, можно записать

$$\rho = \rho(f,\varphi) = \| f(x) - \varphi(x) \|.$$

Предположим, что обобщенный ряд Фурье (16.53) сходится в некотором смысле в точке $x \in [a,b]$ (или для всех $x \in [a,b]$) к функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ с любой степенью точности может быть приближенно представлена его частичной суммой, называемой ортогональным многочленом Фурье:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x). \tag{16.54}$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы функция $f(x) \in L_2[a,b]$, ортонормированная на $[a,b]$ система функций $(\varphi_n(x))$ и порядок n многочлена $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$.

Требуется подобрать коэффициенты α_k таким образом, чтобы среднее квадратичное уклонение $\rho(f, S_n)$ было минимальным.

В этом случае говорят, что обобщенный многочлен $S_n(x)$ аппроксимирует функцию $f(x)$ на $[a,b]$ наилучшим образом в смысле минимума среднего квадратичного уклонения или $S_n(x)$ аппроксимирует $f(x)$ в среднем (в смысле метода наименьших квадратов).

Теорема 16.24 (*об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье*). Среди всех обобщенных многочленов вида $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \quad \alpha_k \in R$, наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является многочлен Фурье, т. е. такой многочлен, коэффициенты которого находятся по формулам $\alpha_k = c_k = (f, \varphi_k)$.

Будем так подбирать α_k ортонормированного многочлена $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$, чтобы $\rho(f,S_n)=\left\| f(x)-S_n(x)\right\| = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x)-S_n(x))^2 dx} = \min\limits_{\alpha_k}$, т. е. норма разности функций $f(x)$ и $S_n(x)$ принимала наименьшее значение.

Для нахождения α_k, запишем

$$\rho^2(f,S_n)=\left\| f(x)-S_n(x)\right\|^2=\int\limits_a^b (f(x)-S_n(x))^2dx=$$

$$=\int\limits_a^b f^2(x)dx-2\int\limits_a^b f(x)S_n(x)dx+\int\limits_a^b S_n^2(x)dx=$$

$$=\int\limits_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx+\int\limits_a^b\left(\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\varphi_k(x))\right)^2dx=$$

$$=\int\limits_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k c_k+\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\left\|\varphi_k\right\|^2=\int\limits_a^b f^2(x)dx+\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k-c_k)^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2 .$$

Очевидно, что квадратичная аппроксимация будет наилучшей, когда $\alpha_k=c_k$, т. е. когда аппроксимирующий многочлен является *n*-ой частичной суммой ряда Фурье. Тогда $\min\rho^2(f,S_n)=\int\limits_a^b f^2(x)dx-\sum\limits_{k=0}^{n}c_k^2$. Учитывая, что $\min\rho^2\ge 0$, имеем $\int\limits_a^b f^2(x)dx-\sum\limits_{k=0}^{n}c_k^2\ge 0$ или $\sum\limits_{k=0}^{n}c_k^2\le\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Из последнего неравенства, справедливого при любом $n\in N$, следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k^2$. Действительно, *n*–ые частичные суммы этого ряда образуют неубывающую и ограниченную сверху последовательность. Как известно, такая последовательность сходится, т. е. существует предел ее частичных сумм.

Найдем ее предел при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^2(x)dx \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k^2 ,$$

имеем,

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 . \qquad (16.55)$$

Неравенство (16.55) называется неравенством Бесселя.

В случае ортогональной (но не нормированной) системы функций неравенство Бесселя принимает вид $\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$.

С неравенством Бесселя связан ответ на вопрос о сходимости рядов Фурье. Различают сходимость в среднем квадратичном и равномерную сходимость.

Определение 16.14. Ряд Фурье называется равномерно сходящимся к функции $f(x) \in L_2[a,b]$ на отрезке $[a,b]$, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$ сходится к функции $f(x)$ равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n > n_0$ выполняется соотношение $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$.

Из определения равномерной сходимости следует, что при $n \to \infty$ $\max|f(x) - S_n(x)| \to 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

Определение 16.15. Ряд Фурье называется сходящимся в среднем квадратичном к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$ сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = 0.$$

Теорема 16.25. Если обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ функции $f(x)$ сходится на $[a,b]$ равномерно к функции $f(x)\in L_2[a,b]$, то он сходится к функции $f(x)$ на $[a,b]$ и в среднем квадратичном.

Доказательство. Пусть ряд Фурье функции $f(x)\in L_2[a,b]$ сходится к ней на $[a,b]$ равномерно. Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое число $n_0(\varepsilon)$, что при всех $n>n_0$ будет выполняться неравенство

$$\left|f(x)-S_n(x)\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} \quad \forall x\in[a,b].$$

Тогда для всех $n>n_0$

$$\left|\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2 dx\right| = \int_a^b (f(x)-S_n(x))^2 dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon,$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 16.26. Для того, чтобы обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ функции $f(x) \in L_2[a,b]$ сходился к $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы неравенство Бесселя обращалось в равенство, т. е. чтобы выполнялось равенство Парсеваля-Стеклова:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \|\varphi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx . \qquad (16.56)$$

Доказательство. Необходимость. Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ в среднем квадратичном к $f(x)$ на $[a,b]$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho^2(f, S_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f(x) - S_n(x)\right)^2 dx = 0 ,$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \right) = 0$$

или

$$\lim_{n\to 0} \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx ,$$

т. е. выполняется равенство (16.56).

Достаточность. Пусть выполняется равенство (16.56), тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\right) = 0$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\right) = \lim_{n\to\infty}\rho^2(f, S_n) = 0 \quad \forall x \in [a,b],$$

т. е. ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ среднем квадратичном и теорема доказана.

Ортогональная система функций $(\varphi_k(x))$, для которой выполняется равенство Парсеваля-Стеклова, называется замкнутой в $L_2[a,b]$, а само равенство – уравнением замкнутости.

Из теоремы 16.26 следует, что любая функция $f(x) \in L_2[a,b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a,b]$ системе функций, если эта система является замкнутой в $L_2[a,b]$.

16.20. Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для функции с периодом $T = 2l$

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с периодом $T = 2l$.

Рассмотрим основную тригонометрическую систему функций, ортогональную на любом интервале длиной $2l$, в частности на $[-l,l]$:

$$\left(\varphi_n(x)\right)=\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},...,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},...\right). \qquad (16.57)$$

Выше были найдены нормы функций

$$\|1\|=\sqrt{2l}\ ;\ \|\sin nx\|=\|\cos nx\|=\sqrt{l}\ .$$

Можно показать, что основная тригонометрическая система функций обладает полнотой, т.е. для любой $f(x)$, интегрируемой с квадратом, выполняется равенство Парсеваля-Стеклова.

Поэтому периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2l$ можно разложить в ряд Фурье, который будет сходиться к $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)=c_0+c_1\cos\frac{\pi x}{l}+c_2\sin\frac{\pi x}{l}+c_3\sin\frac{2\pi x}{l}+c_4\cos\frac{2\pi x}{l}+...$$

Коэффициенты при косинусах принято обозначать буквой a, при синусах – буквой b, поэтому ряд Фурье примет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\text{ где}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{(1,f)}{\|1^2\|} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\\
a_n &= \frac{\left(f,\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right\|} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in N\\
b_n &= \frac{\left(f,\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\|} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in N
\end{aligned}\right\} \tag{16.58}$$

Определение 16.16. Тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{16.59}$$

коэффициенты которого определяются по формулам (16.58), называется тригонометрическим рядом Фурье для периодической функции $f(x)\in L_2[a,b]$.

Преобразуем равенство Парсеваля-Стеклова с учетом обозначений коэффициентов ряда Фурье:

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\|\varphi_n\|^2 = \frac{a_0^2}{4}\cdot 2l + l\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2 = \left|\begin{aligned} c_{2n-1} &= a_n\\ c_{2n} &= b_n\end{aligned}\right| = \frac{a_0^2}{2}l + l\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Отсюда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\|f\|^2. \tag{16.60}$$

Пример 16.14. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[-1,0); \\ 0, & x\in[0,3) \end{cases}$, имеющую период $T=4$.

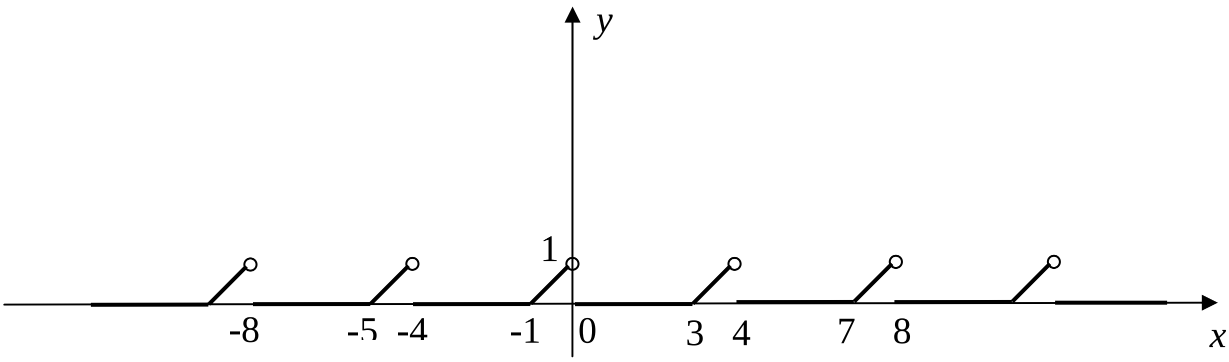


Рис. 16.1

Длина отрезка $[-1,3]$ равна периоду, то при нахождении коэффициентов Фурье можно интегрировать по этому отрезку:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{3}0dx\right)=\frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{4};$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(x)\frac{\cos n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{2(x+1)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{2}{(n\pi)^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2(x+1)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right).$$

При вычислении интегралов применено интегрирование по частям. Искомое разложение имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Ряд Фурье периодической функции с периодом $T=2\pi$

Ряд Фурье для такой функции получается из ряда (16.59) при $l=\pi$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{16.61}$$

где
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \quad n\in N,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, \quad n\in N.$$

Пример 16.15. Разложить в ряд Фурье периодическую периода 2π функцию $f(x)=\begin{cases}+1 & \text{при} \quad -\pi\le x<0,\\ -1 & \text{при} \quad 0\le x<\pi.\end{cases}$

Решение. Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)dx = 0\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = 0 - 0 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx = -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi n}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

16.21. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье

Определение 16.17. Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на $[a,b]$, если ее производная $f'(x)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода.

Теорема 16.27. Если $f(x) \in L_2[-l,l]$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-l,l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда Фурье справедливы соотношения:

1) $S(x) = f(x),$ если x - точка непрерывности функции $f(x)$;

2) $S(x)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, если x_0 − точка разрыва первого рода функции $f(x)$;

3) $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

Теорема 16.*28*. Если $f(x)\in L_2[a,b]$ является кусочно-гладкой и непрерывной на отрезке $[-l,l]$ и удовлетворяет условию $f(-l)=f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье на $[-l,l]$ сходится к $f(x)$ равномерно.

16.22. Тригонометрический ряды Фурье для четных и нечетных функций

Пусть в ряд Фурье разлагается четная функция, т. е. такая, что $f(-x)=f(x)\quad \forall x\in[-l,l]$. График четной функции симметричен относительно оси Oy. Так как определенный интеграл можно рассматривать как площадь криволинейной трапеции, то для четной функции имеем

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Для нечетных функций, т. е. таких, что $f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in[-l,l]$, имеем

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{-l}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{l} f(x)dx=-S+S=0.$$

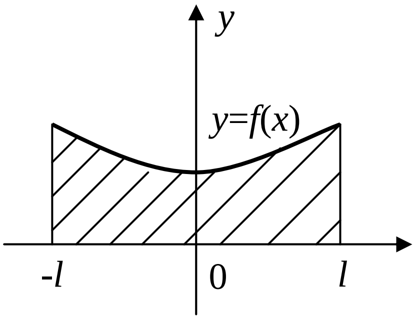


Рис. 16.2

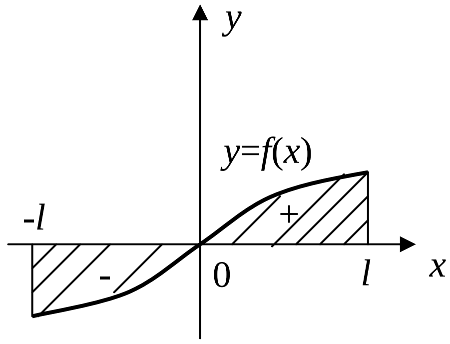


Рис. 16.3

Из определения четных и нечетных функций следует, что:

1) произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная;

2) произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция.

Следовательно, если в ряд Фурье на $[-l,l]$ разлагается четная функция, то произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ − нечетной функцией.

Поэтому коэффициенты ряда Фурье для четной функции находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = 0, \quad n \in N,$$

а сам ряд Фурье четной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Если в ряд Фурье на отрезке $[-l,l]$ разлагается нечетная функция, то произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ − нечетная функция, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ − четная функция. Следовательно, коэффициенты ряда Фурье нечетной функции находятся по формулам:

$$a_0 = a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in N,$$

а сам ряд Фурье для нечетной функции имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

16.23. Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье

В тригонометрический ряд Фурье могут разлагаться только периодические функции с периодом $T=2l$ или $T=2\pi$. Действительно, если $f(x)$ разлагается в ряд, сходящийся к $f(x)$, то сумма этого ряда должна быть периодической $T=2\pi$ или $T=2l$, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ или $\cos\frac{n\pi x}{l}$ и $\sin\frac{n\pi x}{l}$ являются периодическими функциями с периодом $T=2\pi$ и $T=2l$.

Если функция $f(x)$ не является периодической, то для того, чтобы представить ее рядом Фурье поступают следующим образом:

1. Если $f(x)$ задана на отрезке $[-l,l]$, то строят вспомогательную функцию $f^*(x)$ с периодом $2l$, которая на $[-l,l]$ совпадает с $f(x)$, а на остальной части $f(x)$ является ее периодическим продолжением.
2. Если $f(x)$ задана на отрезке $[a,a+2l]$, то строят вспомогательную периодическую функцию $f^*(x)$ с периодом $2l$, которая на отрезке $[a,a+2l]$ совпадает с $f(x)$, а на остальной части числовой оси является ее периодическим продолжением. Ряд Фурье в этом случае определяется формулой (16.44.), а его коэффициент находится по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

3. Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам, либо и по косинусам, и по синусам.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по косинусам ее продолжают на отрезок $[-l,0]$ четным образом, т. е. строят вспомогательную функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-x) & \forall x \in [-l,0) \\ f(x) & \forall x \in [0,l] \end{cases}.$$

Затем $f^*(x)$ периодически продолжают на всю числовую ось. В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0,l]$ содержит только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in N.$$

Для разложения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0,l]$ в ряд по синусам ее продолжают на отрезок $[-l,0]$ нечетным образом, т. е. строят вспомогательную функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} -f(-x) & \forall x \in [-l,0], \\ f(x) & \forall x \in [0,l]. \end{cases}$$

Ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0,l]$ содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Пример 16.16. Разложить в ряд Фурье а) по косинусам; б) по синусам функцию $f(x)=\begin{cases} x & \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\pi}{2} & \forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]. \end{cases}$

а)

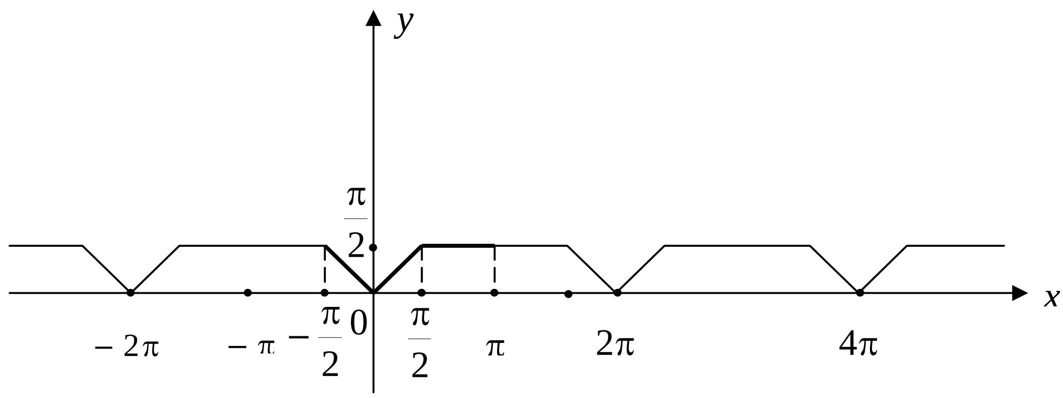


Рис. 16.4

Продолжим $f(x)$ на отрезок $[-\pi,0]$ четным образом, затем периодически продолжим ее с периодом 2π на всю ось Ox. Для полученной функции имеем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,dx\right)=\frac{3}{4}\pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right);\ b_n = 0$$

Так как периодически продленная функция является непрерывной, то для $\forall x \in [0, \pi]$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\cos nx.$$

б)

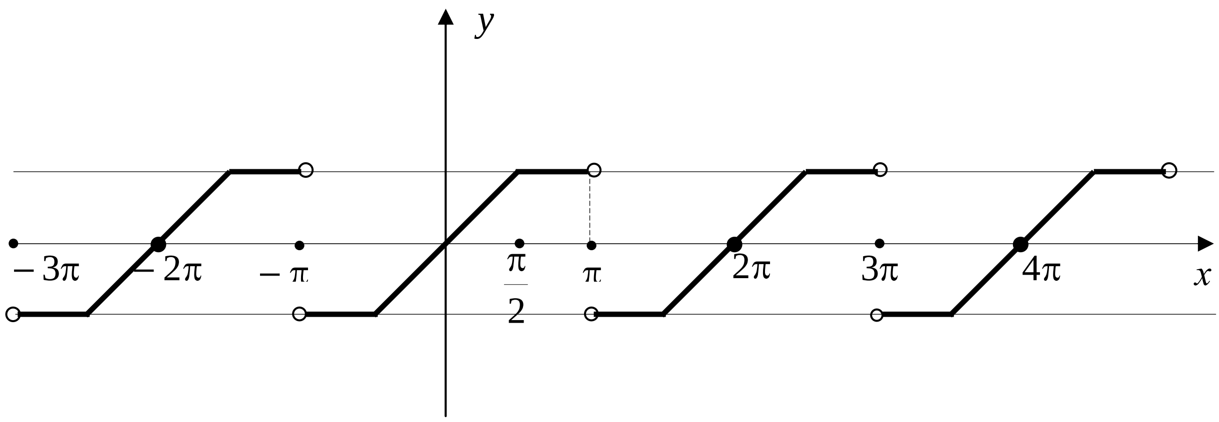


Рис. 16.5

График функций с нечетным продолжением на отрезок $[-\pi, 0]$ продлен периодически с периодом 2π на всю ось Ox (рис. 16.5). Для этой функции

$$a_n = 0 \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\pi n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Так как полученная функция непрерывна в точке $x = 0$ и разрывна в точке $x = \pi$, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin nx \quad \forall x \in [0, \pi)$$

В точке $x = \pi$ $S(x) = 0$.

16.24. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Пусть $f(x) \in L_2[-l, l]$ − периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Известно, что если эта функция представима сходящимся тригонометрическим рядом (16.59), то коэффициенты этого ряда определяются формулами (16.58).

Воспользовавшись формулами Эйлера,

$$\cos\alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}, \quad \sin\alpha x = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2},$$

можно получить другую форму записи тригонометрического ряда Фурье.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2} + b_n\frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2}\right) = \qquad (16.62)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2}\mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{l}}\right)$$

Введем обозначения:

$$c_0 = \frac{a}{2},\ c_2 = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \qquad (16.63)$$

Тогда ряд (16.62) можно записать

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{l}} + c_{-n}\mathrm{e}^{\frac{-in\pi x}{l}}\right)$$

или

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{l}}\ . \qquad (16.64)$$

Ряд (16.64) называется комплексным рядом Фурье. Найдем коэффициенты этого ряда, использовав формулы (16.58) и (16.63):

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{\frac{-in\pi x}{l}}dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{l}}dx \quad \forall n \in N\ .$$

Выражения для c_{-n} и c_n можно записать одной формулой:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{\frac{-in\pi x}{l}}dx \quad \forall n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{16.65}$$

В рядах Фурье в комплексной форме принята терминология: $\mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{l}}$ называются гармониками, числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 0, \pm1, \ldots$ − волновыми числами функции $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{i\alpha_n x}$, множество всех волновых чисел – спектром, коэффициенты c_n − комплексными амплитудами.

16.25. Интеграл Фурье

Рассмотрим множество кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых на R функций, т. е. функций, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ существует. Это множество обозначают L'. На любом отрезке $[-l, l]$ функция $f(x) \in L'$ разложима в ряд Фурье. Запишем ряд Фурье в комплексной форме для $k \in Z$.

$$f(x) = \frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi t}{l}}dt \cdot \mathrm{e}^{\frac{ik\pi x}{l}}. \tag{16.66}$$

Полагая $u_k = \frac{k\pi}{l}$, имеем $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k = \frac{\pi}{l}$, $\quad k \in Z$.

Выражение (16.66) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-iu_k t}dt \cdot \mathrm{e}^{iu_k x}\Delta u_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{e}^{iu_k(x-t)}dt \cdot \Delta u_k. \tag{16.67}$$

Выражение (16.67) можно рассматривать как интегральную сумму для функции $g(u)=\int\limits_{-l}^{l} f(t)\mathrm{e}^{iu(x-t)}dt$ на R. Так как $f\in L'$, то l можно взять сколь угодно большим. Переходя к пределу в (16.67), получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}du\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{i(x-t)u}dt,\quad x\in R. \tag{16.68}$$

Формулу (16.68) называют интегралом Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме.

Преобразуем (16.68) к виду

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-iut}dt\right)\mathrm{e}^{iux}dx,$$

получим соотношения:

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-iut}dt, \tag{16.69}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u)\mathrm{e}^{iux}dx, \tag{16.70}$$

которые называют преобразованиями Фурье, где $F(u)$ − прямое преобразование Фурье, а $f(x)$ − обратное преобразование Фурье. $F(u)$ называют также спектральной функций интеграла Фурье.

В интеграле Фурье (16.68) запишем

$$e^{iu(x-t)} = \cos(x-t)u + i\sin(x-t)u\,.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos u(x-t) + i\sin u(x-t)\big)dt\,. \qquad (16.71)$$

Формулу (16.71) называют тригонометрической формой интеграла Фурье.

С учетом свойств четности и нечетности функций, интегрируемых по симметричному промежутку, имеем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt\,. \qquad (16.72)$$

Формулу (16.72) называют интегралом Фурье в вещественной форме.

Так как,

$$e^{-iut} = \cos ut - i\sin ut, \quad e^{ixu} = \cos ux + i\sin ux\,,$$

то формулы (16.69) и (16.70) примут вид:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos utdt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin utdt,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos uxdt + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\sin uxdx\,.$$

Если $f(x)$ − нечетная, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos utdt = 0.$$

Тогда

$$F(u) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin utdt,$$

$$f(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\sin uxdx,$$

или, введя обозначения,

$$F_s(u) = iF(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin utdt \tag{16.73}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} iF(u)\sin uxdu = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_s(u)\sin uxdu\,. \tag{16.74}$$

Формулы (16.73) и (16.74) называют синус − преобразованиями Фурье.

Если функция $f(x)$ − четная, то

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos utdt,$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\cos uxdu$$

или

$$F_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos utdt, \tag{16.75}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_c(u)\cos uxdu\,. \tag{16.76}$$

Формулы (16.75) и (16.76) называют косинус – преобразованиями Фурье.

17. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

17.1. Функции комплексного переменного

Понятие функции комплексного переменного является частным случаем общего понятия функции.

Пусть даны две комплексные переменные $z = x + iy$ и $w = u + iv$, принадлежащие множествам D и E соответственно.

Определение 17.1. Комплексная переменная w называется функцией от комплексной переменной z, принадлежащей множеству D, если по некоторому правилу или закону каждому значению $z \in D$ ставится в соответствие одно или некоторая совокупность значений $w \in E$.

Функция называется однозначной, если каждому $z \in D$ ставится в соответствие только одно число $w \in E$, и многозначной, если ставится в соответствие несколько значений $w \in E$.

Функциональную зависимость между переменными z и w обозначают, например, $w = f(z)$. Говорят, что функция $f(z)$ определена на множестве D и принимает значения $w = f(z)$ из множества E.

\Функция $w = f(z)$ преобразует комплексные числа $z = x + iy$ в комплексные числа $w = u + iv$. Для каждого $z \in D$

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Таким образом, комплекснозначную функцию комплексной переменной $z = x + iy$ можно рассматривать как пару действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ двух действительных переменных x и y. Функция $u = u(x, y)$ называется действительной частью функции $w = f(z)$ и обозначается $\operatorname{Re} f(z)$, а функция $v = v(x, y)$ называется мнимой частью функции $w = f(z)$ и обозначается $\operatorname{Im} f(z)$.

Однозначную функцию $w = f(z)$ комплексной переменной z геометрически можно интерпретировать следующим образом. Пусть D есть некоторое множество точек на комплексной плоскости C_z. Функция $w = f(z)$, определенная на D, ставит каждой точке $z \in D$ в соответствие комплексное число $w = u + iv$, которое изображается точкой на другой комплексной плоскости C_w, и тем самым выполняет отображение множества точек $z \in D$ на множество точек $w \in E$ (рис. 17.1).

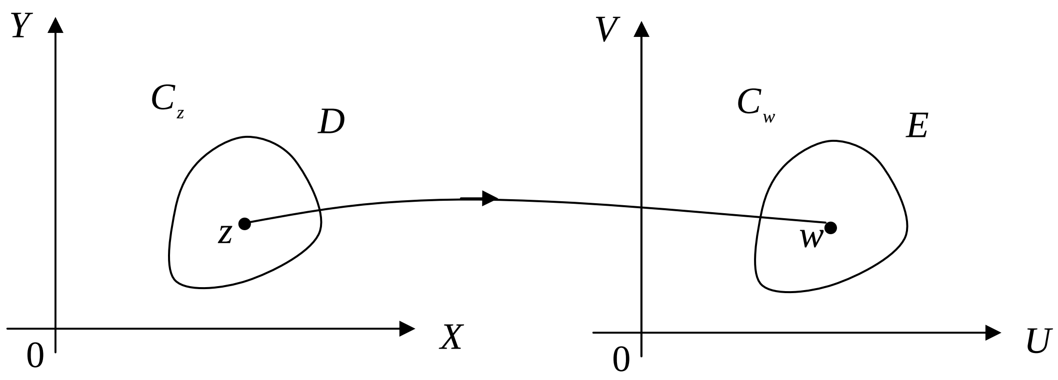


Рис. 17.1

Образ множества D при отображении f на плоскости C_w образует некоторое множество $E = f(D)$. Многозначную функцию $w = f(z)$ геометрически нельзя истолковать как отображение одной плоской фигуры на другую. В этом случае функцию можно рассматривать как отображение на более сложных геометрических образах – римановых поверхностях. Многозначную функцию исследуют, например, выделяя ее отдельные ветви, одна из которых называется главным значением функции.

В комплексном анализе за некоторое множество точек обычно принимают область плоскости, определение которой приведем ниже.

Пусть D есть множество точек расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$. При любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ множество всех точек $z \in C$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$, образует на *C* внутреннюю часть круга радиусом ε с центром в точке z_0. Это множество называют ε-окрестностью точки z_0 и обозначают $U_\varepsilon(z_0)$. Исключив из окрестности $U_\varepsilon(z_0)$ точку z_0, получим проколотую окрестность $\dot{U}_\varepsilon(z_0) = U_\varepsilon(z_0) \setminus z_0$ точки z_0. За окрестность бесконечно удаленной точки $z = \infty$ принимают множество точек $|z| > \varepsilon$. Точка $z_1 \in D$ называется внутренней точкой множества *D*, если существует ε-окрестность $U_\varepsilon(z_1)$ этой точки, целиком содержащаяся в *D*. Точка z_2 называется граничной точкой множества *D*, если в любой ее окрестности $U_\delta(z_2)$ имеются точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству *D* (рис. 17.2).

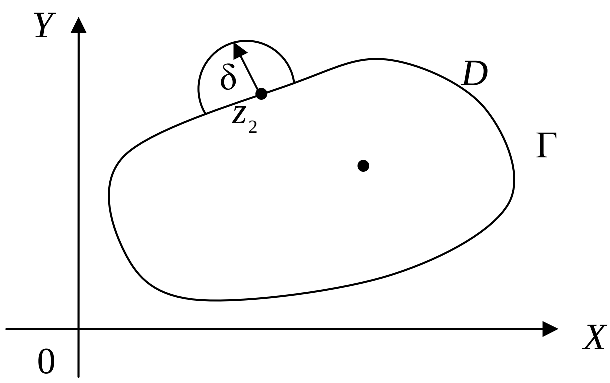


Рис. 17.2

Совокупность граничных точек множества *D* называется его границей *Г*. Множество *D* с присоединенной к нему границей *Г* называется замкнутым и обозначается $\overline{D}$, а множество *D*, состоящее только из внутренних точек, называется открытым. Множество *D* называется связным, если две любые его точки *A* и *B* можно соединить непрерывной кривой (или ломаной), полностью расположенной в *D* (рис. 17.2).

Определение 17.2. Областью называется множество *D* точек плоскости, удовлетворяющее условиям:

1) *D* состоит только из внутренних точек;

2) любые две точки множества можно соединить ломаной с достаточно большим числом звеньев так, чтобы все точки этой линии принадлежали самому множеству.

Таким образом, область есть открытое, связное множество.

Область *D* с присоединенной к ней границей *Г* является замкнутой и обозначается $\overline{D}$. Область *D* называется *n*-связной, если ее граница состоит из *n* связных, непересекающихся множеств. Например, круг $|z| < R$ есть односвязная область, кольца $0 < |z| < R$, $r < |z| < R$ – двухсвязные области. Единственным примером области без границы служит расширенная комплексная плоскость $\overline{C}$.

Введем понятия предела и непрерывности функции комплексной переменной.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в проколотой окрестности $\dot{U}_{\varepsilon}(z_0)$ точки z_0.

Определение 17.3. Число $A = a + ib$ называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $z \in \dot{U}_{\delta}(z_0)$ выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел функции $f(z)$ в точке z_0 записывается в виде $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ или $f(z) \to A$, $z \to z_0$.

При определении предела функции $f(z)$ в точке z_0 сама точка z_0 из рассмотрения исключается.

Определение 17.4. Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется непрерывной в точке z_0, если существует

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции u и v непрерывны в точке (x_0, y_0).

Функция $f(z)$ называется непрерывной на множестве *D*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

На функцию комплексного переменного $f(z)$ распространяются многие определения, утверждения, связанные с понятием предела и непрерывности функции действительного переменного $f(x)$.

Рассмотрим кратко основные элементарные функции комплексного переменного.

Степенная функция $w = z^n$, $n > 0$ − целое, есть однозначная функция, определенная и непрерывная на всей расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$.

Целая рациональная функция или многочлен $w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, где коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ в общем случае комплексные числа, также однозначная функция, определенная и непрерывная при всех $z \in \bar{C}$.

Дробно-рациональная функция

$$w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0},$$

где коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_m$ в общем случае комплексные числа, однозначна, определена и непрерывна на всей плоскости $\bar{C}$, за исключением тех точек , где знаменатель обращается в нуль.

Показательная функция $w = \mathrm{e}^z$ комплексной переменной $z = x + iy$ определяется равенством

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x (\cos y + i \sin y).$$

Тогда, если $w = u + iv$, то $u = \mathrm{e}^x \cos y$, $v = \mathrm{e}^x \sin y$. Функция e^z определена и непрерывна при всех $z \in \bar{C}$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$, $\arg \mathrm{e}^z = y$, периодическая с периодом $2\pi i$, действительно,

$$e^{z+2\pi i}=e^{x+(y+2\pi)i}=e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi))=e^x(\cos y+i\sin y)=e^{x+iy}=e^z.$$

Тригонометрические функции $w=\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $w=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ однозначны, определены и непрерывны во всех точках плоскости $\bar{C}$, периодические с периодом 2π, $\sin z$ – нечетная, а $\cos z$ – четная функция. Может оказаться, что $|\sin z|>1$ или $|\cos z|>1$. Функции $w=\operatorname{tg} z$ и $w=\operatorname{ctg} z$ определяются соотношениями $\operatorname{tg} z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $z\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$, $z\neq k\pi$, $k\in Z$.

Гиперболические функции

$$w=\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad w=\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

связаны с тригонометрическими равенствами $\operatorname{sh} z=-i\sin iz,\quad \operatorname{ch} z=\cos iz$, откуда следует, что $\operatorname{sh} z=0$ при $z=k\pi i,\quad \operatorname{ch} z=0$ при $z=\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)i,\quad k\in Z$.

$$w=\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ z\neq\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)i,\ w=\operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},\ z\neq k\pi i.$$

Логарифмическая функция $w=\operatorname{Ln} z$ определяется как обратная для показательной функция $z=e^{iw}$. Полагая $w=u+iw$, $z=|z|e^{i\varphi}$, $\varphi=\arg z$, получим

$$z=|z|e^{i\varphi}=e^{u+iv}=e^u\cdot e^{iv}.$$

При $z \neq 0$ $|z| = e^u$, отсюда $u = \ln|z|$, где $\ln|z|$ − действительное значение натурального логарифма от положительного числа $|z|$. Поскольку функция $e^{i\varphi}$ периодична, имеем

$$e^{i\nu} = e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + 2\pi k)};\ \nu = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Тогда

$$w = \mathrm{Ln}\, z = u + iv = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in Z$$

При $k = 0$ получим главное значение логарифма

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Таким образом,

$$w = \mathrm{Ln}\ z = \ln z + 2k\pi i,\ k \in Z$$

есть многозначная функция, определенная для всех $z \neq 0$. Если z действительное положительное число, $\arg z = 0$ и главное значение логарифма совпадает с логарифмической функцией $\ln x$ действительного переменного.

С помощью логарифмической функции можно определить степенную функцию $w = z^\alpha$ с любым показателем α (α − комплексное число)

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = e^{\alpha(\mathrm{Ln}\, z + 2k\pi i)},$$

т. е. степень комплексного числа, вообще говоря, является многозначной функцией, значение $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ при $k = 0$ называется главным значением степени.

Показательная функция $w = a^z$, $a \neq 0$ − комплексное число, определяется через e^z и $\mathrm{Ln}\, a$ следующим образом

$$w = a^z = e^{z \mathrm{Ln}\, a}.$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции также выражаются через логарифмическую функцию и являются многозначными

$$w=\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz\pm\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$w=\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$w=\operatorname{Arctg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

$$w=\operatorname{Arcctg} z=-\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{iz+1}{iz-1}=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}.$$

$$w=\operatorname{Arcsh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$$

$$w=\operatorname{Arcch} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$w=\operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z},$$

$$w=\operatorname{Arccth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

Приведем пример отображения области с помощью однозначной функции комплексного переменного.

Пример 17.1. Найти образ $f(D)$ области D, где D − четверть круга

$$\begin{cases} |z| \le 1, \\ \operatorname{Re} z \ge 0, \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$$

при отображении $w = z^2$.

Решение. Представим z и w в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, причем $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, тогда $w = z^2 = \rho e^{i\theta}$, $\rho = |w| = r^2$, $\theta = \arg w = 2\varphi$. Установим вначале во что переходит граница области D при отображении. Отрезок действительной оси $0 \le r \le 1$, $\varphi = 0$ преобразуется в отрезок $0 \le \rho \le 1$, $\theta = 0$, четверть окружности $r = 1$, $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ переходит в полуокружность $\rho = 1$, $0 < \theta < \pi$, а отрезок мнимой оси $0 \le r \le 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ – в отрезок $0 \le \rho \le 1$, $\theta = \pi$ на действительной оси. Каждая внутренняя точка $z \in D$ переходит во внутреннюю точку w полукруга $|w| < 1$, $0 < \arg w < \pi$.

Таким образом, функция $w = z^2$ отображает четверть круга на полукруг (рис. 17.3).

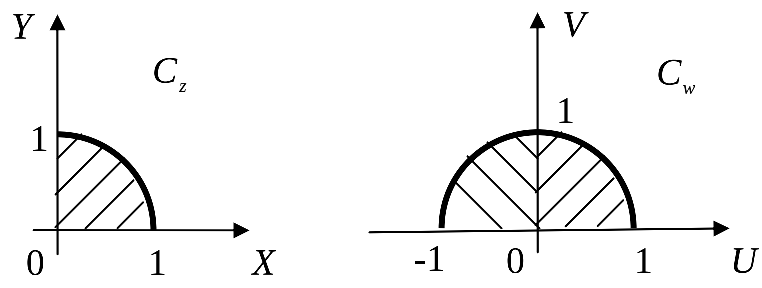


Рис. 17.3

17.2. Дифференцирование функций комплексного переменного. Аналитические функции. Условия Коши-Римана

Пусть $f(z)$ есть функция комплексного переменного, определенная и однозначная на некотором множестве D и z_0 – предельная точка этого множества, т. е. в каждой окрестности этой точки содержится бесконечное множество точек, принадлежащих D.

Определение 17.5. Производной функции $f(z)$ в точке z_0 называется число, которое обозначают $f'(z_0)$, равное пределу отношения $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ при $z \to z_0$, если этот предел существует, т. е.

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Определение 17.6. Функция $w=f(z)$, имеющая в точке z_0 производную, называется дифференцируемой или моногенной в этой точке. Функция называется дифференцируемой в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Дифференцируемость функции $w=f(z)$ в точке z_0 означает, что ее приращение в точке z_0 представляется в виде

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\Delta f(z_0)=A\Delta z+o(|\Delta z|), \tag{17.1}$$

где A − некоторое комплексное число, $\Delta z=z-z_0$, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}=0$.

Если выполнено соотношение (17.1), то разделив его на $\Delta z\neq 0$ и перейдя к пределу при $\Delta z\to 0$, получим $f'(z_0)=A$. Равенство (17.1) является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $w=f(z)$ в точке z_0. Так как $A=f'(z_0)$, то

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|).$$

Отсюда, в частности следует, что функция $f(z)$, дифференцируемая в точке z_0, непрерывна в этой точке.

Из определения производной и свойств пределов функций комплексного переменного вытекает, что основные правила, известные из дифференциального исчисления функций действительных переменных, распространяются и на производные по множеству от функций комплексных переменных.

В определении производной функции $f(z)$ в точке z_0 предполагается, что $z \to z_0$ различными путями, при этом предел отношения $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ для дифференцируемой функции $f(z)$ должен быть один и тот же.

Теорема 17.1. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, определенная в некоторой области D, была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ этой области как функция комплексного переменного, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывно дифференцируемы в той же точке (как функции двух действительных переменных) и выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{17.2}$$

При выполнении условий теоремы производная $f'(z)$ может быть представлена в одной из форм

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{17.3}$$

Условия (17.2) имеют основное значение в теории функций комплексного переменного и в приложениях к задачам механики и физики. Они называются условиями Коши-Римана или условиями Д’Аламбера-Эйлера. Если представить $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, то уравнения (17.2) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r}, \; r>0 .$$

Определение 17.7. Функция $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема как в самой точке z_0, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической (голоморфной, регулярной) в области D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Точка z_0, в которой функция $f(z)$ аналитична, называется правильной точкой функции. Если же $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки z_0 и не аналитична в самой точке z_0 или не определена в ней, то z_0 называется особой точкой функции $f(z)$.

Теорема 17.1. является также необходимым и достаточным условием и для аналитичности функции в точке z_0.

Произвольная комплекснозначная функция $f(z)$, вообще говоря, не является дифференцируемой (аналитической) в смысле определения 17.5, даже если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы. Они должны быть связаны между собой условиями Коши-Римана. Например, пусть $f(z)=\bar{z}=x-i\,y$. $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$, т. е.условия (17.2) не выполняются ни в одной точке (x,y). Следовательно, функция $f(z)=\bar{z}$ не дифференцируема (не аналитична) ни в одной точке комплексной плоскости.

Производные аналитических функций находят, используя определение элементарных функций комплексного переменного, определение производной и правила дифференцирования, а также соотношения (17.3). Производная аналитической функции также является аналитической функцией. Таким образом, аналитическая функция имеет производные любого порядка.

При необходимости исследовать функцию $f(z)$ в точке $z=\infty$ исследуют функцию $f\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке $z=0$. Так, например, $f(z)$ есть аналитическая функция в точке $z=\infty$, если $f\left(\frac{1}{z}\right)$ − аналитическая в точке $z=0$.

Пусть функция $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ − аналитическая в области D, причем функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Так как в D выполнены условия (17.2), то дифференцируя первое по x, а второе − по y, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

отсюда $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Аналогично $\Delta u=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. Таким образом, действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части аналитической функции $f(z)$ удовлетворяют в D уравнению Лапласа $\Delta u=0$ или $\Delta v=0$, т. е. являются гармоническими в области D функциями, а так как для них выполняются условия Коши-Римана, то u и v сопряженные гармонические функции.

Всякая гармоническая в односвязной области D функция служит действительной или мнимой частью аналитической в этой области функции. По известной действительной $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ аналитической функции (предварительно убедившись, что u или v есть гармоническая функция), используя условия Коши-Римана, можно определить сопряженную гармоническую функцию $v(x,y)$ или $u(x,y)$ соответственно, и тем самым восстановить саму аналитическую функцию $f(z)$. Пусть, например, дана функция

$u(x, y)$. Проверяем, является ли она гармонической, и , если $u(x, y)$ – гармоническая, то из первого равенства (17.2) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ получаем

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} d\,y + \varphi(x) = \int \frac{\partial u}{\partial x} d\,y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция. Чтобы найти $\varphi(x)$, полученную функцию $v(x, y)$ подставим во второе уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \Rightarrow \ ,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} d\,y - \varphi'(x).$$

Отсюда, с точностью до константы, находим $\varphi(x)$ и тем самым функцию $v(x, y)$.

Аналогично, если известна функция $v(x, y)$, то

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} d\,x + \psi(y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} d\,x + \psi(y),$$

где $\psi(x)$ – неизвестная функция. Из второго условия (17.2) получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial v}{\partial y} d\,x + \varphi'(y) \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Найденную из этого соотношения с точностью до константы функцию $\psi(x)$ представляем в выражении для $u(x, y)$.

17.3. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Конформное отображение

Выясним геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции $f(z)$. Из определения производной получим

$$k = |f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Числа $|z - z_0|$ и $|f(z) - f(z_0)|$ представляют собой соответственно расстояния между точками z и z_0 плоскости C_z и между их образами $f(z)$ и $f(z_0)$ в плоскости C_n. Если отношение $\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$ рассматривать как растяжение вектора $z - z_0$ в результате отображения $f(z)$ (а это растяжение может быть меньше, равно или больше единицы), то модуль производной $k = |f'(z_0)|$ можно рассматривать как растяжение в точке z_0 при отображении функцией $w = f(z)$. Величина этого растяжения в точке z_0 не зависит от направления и величины вектора $z - z_0$, не совпадает с растяжением вектора $z - z_0$, а представляет собой предел этого растяжения при условии $z \to z_0$. Таким образом, геометрический смысл модуля производной $|f'(z_0)|$ состоит в том, что он равен коэффициенту растяжения бесконечно малых векторов в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ и не зависит от вида и направления кривой, по которой перемещается точка z в плоскости C_z.

Пусть l гладкая кривая $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ вдоль которой перемещается точка z на плоскости C_z, $z_0 = z(t_0) \in l$, φ – угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением оси OX (рис. 17.4), тогда $\varphi = \arg z'(t_0)$. Пусть L – образ кривой l на плоскости C_w при отображении

$w = f(z)$, т. е. для точек кривой L $w = f(z(t))$, $t \in [\alpha, \beta)$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0)$. Предположим $f'(z_0) \neq 0$ (при $f'(z_0) = 0$ аргумент $f'(z_0)$ не определен). Тогда

$$\varphi_1 = \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0) + \varphi, \tag{17.4}$$

поскольку $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

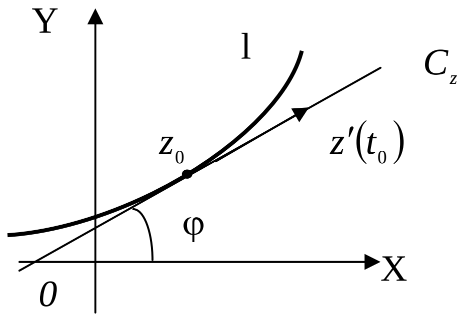


Рис. 17.4

Величина $\arg f'(z_0) = \varphi_1 - \varphi$ называется углом поворота кривой l в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Из равенства 17.4 следует, что, если $f'(z_0) \neq 0$, то угол поворота в точке z_0 не зависит от кривой и равен $\arg f'(z_0)$, т. е. все кривые, проходящие через точку z_0 на плоскости C_z, поворачиваются при отображении $w = f(z)$ на один и тот же угол $\arg f'(z_0)$. В этом и состоит геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.

Итак, отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ обладает в каждой точке z_0, где $f'(z_0) \neq 0$, свойствами постоянства растяжений и сохранения (консерватизма) углов, другими словами, есть отображение подобия в бесконечно малом.

Определение 17.8. Отображение одной плоской области на другую плоскую область, осуществляемое однозначной непрерывной функцией $w = f(z)$ называется конформным в точке z, если все бесконечно малые дуги, выходящие из этой точки, при отображении поворачиваются на один и тот же угол и получают одно и то же растяжение.

Если при этом сохраняются не только величины углов, но и направления их отсчета, то говорят о конформном отображении первого рода, если же направления отсчета углов изменяются на противоположные, то отображение называют конформным второго рода.

Следовательно, отображение, устанавливаемое с помощью аналитической функции $w = f(z)$ есть конформное во всех точках, где $f'(z) \neq 0$. И обратно, если однозначная функция $w = f(z)$ дает конформное отображение, то $f(z)$ есть аналитическая функция с производной, не равной нулю.

17.4. Интегрирование функций комплексного переменного

Наиболее часто применяются интегралы от функций комплексного переменного вдоль линий на комплексной плоскости.

Пусть в области D комплексной плоскости определена однозначная и непрерывная функция $f(z) = u(x, y) + i\nu(x, y)$ и l – кусочно-гладкая или гладкая ориентированная кривая в D с начальной точкой A и конечной точкой B (рис. 17.5).

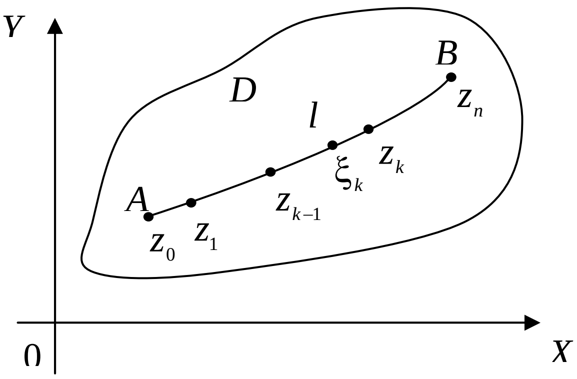


Рис. 17.5

Кривую l разобьем на части l_k точками $z_0, z_1, ..., z_n$, взятыми в порядке следования по l от $z_0 = A$ до $z_n = B$. Пусть Δl_k длина части дуги l_k с началом в точке z_{k-1} и концом в точке z_k, $\Delta = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$. На каждой части l_k выберем произвольную точку ξ_k, вычислим $f(\xi_k)$ и составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \,, \tag{17.5}$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ – приращение переменной z при переходе от z_{k-1} к z_k.

Определение 17.9. Интегралом от функции $f(z)$ по кривой l называется предел интегральных сумм (17.5) при $\Delta \to 0$, если этот предел существует, конечный и не зависит ни от способа разбиения кривой l на части l_k, ни от выбора точек $\xi_k \in l_k$, $k = \overline{1,n}$ и обозначается $\int\limits_l f(z)dz$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_l f(z)dz = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \,. \tag{17.6}$$

Подставляя в интегральную сумму (17.5) действительные и мнимые части выражений $f(\xi_k) = u(\xi_k) + i\,v(\xi_k)$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\,\Delta y_k$ переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим равенство

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l u(x,y)dx - v(x,y)dx + i\int\limits_l v(x,y)dx + u(x,y)dy \,. \tag{17.7}$$

Отсюда следует, что существование интеграла (17.6) равносильно существованию криволинейных интегралов

$$\int\limits_l u\,dx - v\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_l v\,dx + u\,dy \,.$$

Тем самым вычисление интеграла от функции $f(z) = u + i\,v$ комплексного переменного по кривой l сводится к вычислению криволинейных интегралов от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ действительных переменных x и y.

Если гладкая кривая l задана уравнением $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, то

$$\int_l f(z)dz = \int_l u\,dx - v\,dy + i\int_l v\,dx + u\,dy = \int_\alpha^\beta \big(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\big)dt +$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \big(v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\big)dt \tag{17.8}$$

или

$$\int_l f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\cdot z'(t)\big)\,dt\,. \tag{17.9}$$

Свойства интеграла от функции комплексного переменного следуют из соответствующих свойств криволинейных интегралов второго рода.

1. Линейность.

$$\int_l \big(af_1(z) + bf_2(z)\big)dz = a\int_l f_1(z)dz + b\int_l f_2(z)dz\,,$$

где a и b – любые комплексные числа.

2. При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_{l^+} f(z)dz = -\int_{l^-} f(z)dz\,.$$

3. Аддитивность интеграла. Если дуга $l = l_1 + l_2$ (в том смысле, что конец l_1 совпадает с началом l_2), то

$$\int_l f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz\,.$$

4. Оценка модуля интеграла. Если $|f(z)| \le M$ на l и длина дуги l равна L, то

$$\left|\int_l f(z)dz\right| \le \int_l |f(z)||dz| \le M\int_l |dz| = ML.$$

Интеграл $\int_l f(z)dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования. Однако, если $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D и $l \subset D$, то значение интеграла не зависит от линии интегрирования l, а только от начальной и конечной точки этой линии. Тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_l f(z)dz = \int_A^B f(z)dz = F(z)\Big|_A^B = F(B) - F(A), \qquad (17.10)$$

где A и B начальная и конечная точки линии l (рис. 17.5), $F(z)$ – первообразная для $f(z)$, аналитическая в области D функция, $F''(z) = f(z)$. Методы вычисления интегралов от аналитических функций в комплексном анализе те же, что и в действительном (замена переменных, интегрирование по частям и т. д.). В частности, если путь интегрирования является лучом, исходящим из точки $z_0 = A$ или окружностью с центром в точке z_0, то целесообразна подстановка $z - z_0 = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

Пусть теперь Γ есть замкнутый контур в области D. Одним из важнейших результатов теории функций комплексного переменного является теорема Коши.

Теорема 17.2. Если $f(z)$ есть функция, аналитическая в односвязной области D, то $\oint_\Gamma f(z)dz$, взятый вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ, целиком принадлежащего области D, равен нулю

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0. \qquad (17.11)$$

Для многосвязной области теорема Коши формулируется следующим образом:

Теорема 17.3. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой многосвязной области D с границей $\Gamma \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$, где Γ – внешний контур области D, γ_k, $k = \overline{1,n}$ – замкнутые непересекающиеся контуры, расположенные внутри D. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz. \qquad (17.12)$$

Замечание 17.1. Здесь и далее интегрирование по внешнему и внутреннему контурам совершается в положительном направлении, т. е. так, что область D при движении по контуру остается слева.

Доказательство. Рассмотрим частный случай трехсвязной области D с внешним контуром Γ и внутренними γ_1 и γ_2 (рис. 17.6)

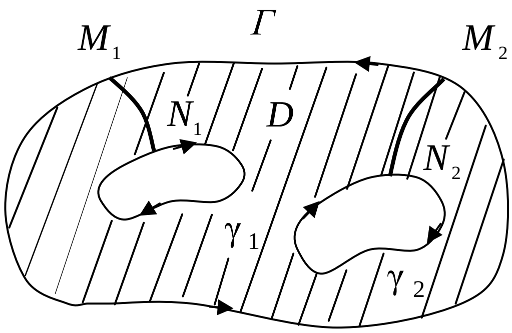


Рис. 17.6

Выполним два разреза M_1N_1 и M_2N_2 и добавим к границе области D линии M_1N_1, N_1M_1, M_2N_2, N_2M_2. В результате область D превратим в односвязную. По теореме (17.2) Коши

$$\oint_{\Gamma} + \int_{M_1N_1} + \oint_{\gamma_1^-} + \int_{N_1M_1} + \int_{M_2N_2} + \oint_{\gamma_2^-} + \int_{N_2M_2} = 0, \qquad (17.13)$$

где γ_1^-, γ_2^-, контуры, ориентированные по часовой стрелке, т. е. противоположно контуру Γ. Так как

$$\int_{M_1N_1} = -\int_{N_1M_1}, \qquad \int_{M_2N_2} = -\int_{N_2M_2}, \qquad \oint_{\gamma_k^-} = -\oint_{\gamma_k}, \quad k = \overline{1,2},$$

то из равенства (17.13) получим (17.12).

Из теоремы Коши следуют формулы, связывающие значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке $z \in D$ со значениями этой функции в граничных точках области D.

Теорема 17.4. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой односвязной ориентированной области D с границей Γ. Тогда для любой внутренней точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \qquad (17.14)$$

Формула (17.14) называется интегральной формулой Коши.

Теорема 17.5. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой многосвязной области D с внешним контуром Γ и внутренними непересекающимися между собой контурами γ_k, $k = \overline{1,n}$. Тогда для любой внутренней точки $z \in D$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi. \qquad (17.15)$$

Формула (17.15) называется интегральной формулой Коши для многосвязной области.

Так как аналитическая функция имеет производные любого порядка, то, дифференцируя (17.14), найдем

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi. \qquad (17.16)$$

Формулы (17.14 – 17.16) дают возможность вычислять интегралы

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i\, f(z), \qquad (17.17)$$

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z),\quad \xi\in\Gamma,\quad z\in D. \qquad (17.18)$$

Таким образом, если $f(z)$ – аналитическая в области D функция (выполняются условия Коши-Римана (17.2)), то $\oint_{l} f(z)dz$ вычисляется по формулам (17.10), (17.11), если $f(z)$ не является аналитическая в области D, то интеграл вычисляют по формулам (17.7), (17.8), (17.9), (17.12), (17.17), (17.18) соответственно.

Замечание 17.2. Если $f(z)$ аналитическая функция, то интеграл можно считать и по формулам (17.7), (17.8), (17.9).

Пример 17.2. Вычислить $\int\limits_l \operatorname{Im} z dz$, где l – прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_A = (0;0)$ и $z_B = (2;1)$.

Решение. Подынтегральная функция $w = u + iv = \operatorname{Im} z = y$ не является аналитической в комплексной плоскости. Здесь $z = x + iy$, $dz = dx + idy$, $u = y$, $v = 0$. Уравнение линии l: $y = \frac{x}{2}$, тогда $dy = \frac{1}{2}dx$. По формулам (17.7), (17.8) получим $\int\limits_l \operatorname{Im} z dz = \int\limits_l ydx - 0dy + i\int\limits_l 0dx + ydy = \int\limits_0^2 \frac{x}{2}dx + i\int\limits_0^1 ydy = \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 + i\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 1 + \frac{i}{2}$.

Пример 17.3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$, где Γ – любой замкнутый контур, который не проходит через точку $z = 0$.

Решение. Если точка $z = 0$ находится вне контура Γ, то функция $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ аналитическая на контуре Γ и в области D, ограниченной этим контуром. Тогда по теореме Коши $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = 0.$

Если же точка $z = 0$, где $f(z)$ не определена, принадлежит области D, ограниченной контуром Γ, то по формуле (17.18)

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} (\sin z)' \Big|_{z=0} = 2\pi\, i \cos 0 = 2\pi\, i\,.$$

17.5. Ряды аналитических функций

Пусть $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность аналитических функций.

Определение 17.10. Ряд вида

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{17.19}$$

членами которого являются функции $f_n(z)$, называется функциональным рядом.

Пусть $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ – его n-ая частичная сумма, $n=1,2,\ldots$. Ряд (17.19) сходится к сумме $f(z)$, если $\lim_{n\to\infty} S_n(z)=f(z)$.

Определение 17.11. Функциональный ряд (17.19) называется сходящимся к функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать номер $N=N(\varepsilon,z)$ такой, что при всех $n\geq N$ выполняется неравенство

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon.$$

Множество D точек z, в которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда. Если ряд (17.19) сходится к сумме $f(z)$, то

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=S_n(z)+r_n(z),$$

где $r_n(z)=f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\ldots=f(z)-S_n(z)$ есть остаток ряда.

Ряд (17.19) сходится в точке z тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} r_n(z)=0$.

Определение 17.12. Функциональный ряд (17.19) называется равномерно сходящимся в области D к сумме $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при всех $n\geq N$

$$|f(z)-S_n(z)|=|r_n(z)|<\varepsilon$$

для любого $z\in D$.

Теорема 17.6 (*признак Вейерштрасса*). Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ удовлетворяют неравенствам $|f_n(z)| \le a_n$ для любого $z \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, где $a_n \ge 0$, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в области D.

Приведем некоторые свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

1. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются в области D аналитическими функциями и этот ряд сходится равномерно в D к сумме $f(z)$, то $f(z)$ есть аналитическая в D функция.

2. Пусть члены равномерно сходящегося в области D ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими функциями в D и этот ряд сходится к $f(z)$ в D равномерно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно почленно интегрировать вдоль любой кривой l, расположенной в D, причем

$$\int_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(z) dz.$$

3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ аналитических в D функций сходится в каждой точке области D, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ сходится в D равномерно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно почленно дифференцировать в D, причем $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$.

При определении области сходимости комплексных функциональных рядов можно пользоваться, например, признаками Коши или Д’Аламбера. Именно, если существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|}=L(z) \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=L(z),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится абсолютно при $L(z)<1$ и расходится при $L(z)>1$.

Справедлива

Теорема 17.7 (*Вейерштрасса*). Пусть $f_n(z)$, $n=1, 2,...$ есть аналитические в замкнутой области D функции и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в D к сумме $f(z)$. Тогда $f(z)$ аналитична в области D.

Рассмотрим частный случай функциональных рядов – степенные ряды.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{17.20}$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in R$, $z = x + i\,y$, $z_0 = x_0 + i\,y_0$, называется комплексным степенным рядом по степеням $z - z_0$. При $z_0 = 0$ имеем степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{17.21}$$

Теорема 17.8 (*Абеля*). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится при $z = z^*$, то он сходится, и притом абсолютно, при всяком z, для которого $|z| < |z^*|$, т. е., если данный ряд сходится в точке z^*, то он абсолютно сходится во всякой точке, лежащей внутри окружности с центром в нулевой точке, проходящей через точку z^*.

Таким образом, для каждого степенного ряда (17.20) существует круг сходимости ряда $|z - z_0| < R$ с центром в точке $z = z_0$ и радиусом $R \ge 0$.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, если этот ряд сходится при $|z-z_0|<R$ и расходится при $|z-z_0|>R$. Если $R=0$, степенной ряд сходится в единственной точке $z=z_0$. Если $R=\infty$, то ряд сходится на всей комплексной плоскости.

В соответствии с признаками Д'Аламбера и Коши

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \text{ или } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\right|,$$

если эти пределы существуют.

Теорема 17.9. Пусть $R>0$ – радиус сходимости степенного ряда (17.20). Тогда этот ряд можно почленно дифференцировать в круге $|z-z_0|<R$ любое число раз. Получаемые при дифференцировании ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд. Ряд (17.20) можно почленно интегрировать вдоль любой гладкой кривой, расположенной в круге $|z-z_0|<R$.

Аналитическую функцию в каждой внутренней точке области аналитичности можно разложить в степенной ряд вида (17.20)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \tag{17.22}$$

Теорема 17.10. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в замкнутой односвязной области D с границей Γ и z_0 – внутренняя точка области D. Тогда имеет место разложение в ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+..., \tag{17.23}$$

причем ряд сходится в круге $|z-z_0|<r$, где r – расстояние от точки z_0 до контура Γ.

Ряд (17.23) называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки z_0. При $z_0=0$ ряд называют рядом Маклорена

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n. \qquad (17.24)$$

Итак, всякая функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0|<r$, раскладывается в сходящийся в этом круге степенной ряд (17.22), коэффициенты c_n которого определяются формулами

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}, \qquad (17.25)$$

где γ – окружность $|z-z_0|=\rho<r$, r расстояние от центра разложения $z=z_0$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$ в области D.

На окружности круга сходимости степенного ряда всегда имеется по крайней мере одна точка, в которой функция перестает быть аналитической. Эта точка называется особой точкой функции. Например, точка разрыва функции является ее особой точкой. Следовательно, радиус сходимости ряда Тэйлора равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Обобщением ряда Тэйлора является ряд Лорана, содержащий положительные и отрицательные степени $z-z_0$, в который раскладывается аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ функция.

Теорема 17.11. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$, раскладывается внутри этого кольца в сходящийся ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \qquad (17.26)$$

Коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)(z-z_0)^{n-1}dz, \qquad (17.27)$$

где γ – окружность $|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$.

Разложение (17.26) единственно.

Ряд (17.26) называют рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=z_0$. Ряд Лорана состоит из двух частей: степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, сходящегося в круге $|z-z_0|<R$, который называют правильной или регулярной частью ряда Лорана, и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, сходящегося при $|z-z_0|>r$, называемого главной частью ряда Лорана.

Область сходимости ряда (17.26) есть кольцо $r<|z-z_0|<R$, $r<R$. Если $r>R$, то ряд всюду расходится. Кольцо может вырождаться в области $0<|z-z_0|<R$, $r<|z-z_0|<\infty$, $0<|z-z_0|<\infty$.

При помощи ряда Лорана аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ функция может быть представлена в виде $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, где $f_1(z)$ аналитическая в круге $|z-z_0|<R$ и раскладывается по положительным степеням $z-z_0$, $f_2(z)$ – аналитическая вне круга $|z-z_0|>r$ функция, раскладывающаяся по отрицательным степеням $z-z_0$. Это представление используют при разложении функции в ряд Лорана.

Разложение в ряд Тэйлора или Лорана выполняют либо по формулам (17.23) – (17.27) соответственно, либо используя известные разложения для e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $(1+z)^m$, $\ln(1\pm z)$ и других функций.

Ряд Тэйлора для аналитической в окрестности точки z_0 функции $f(z)$ является частным случаем ряда Лорана, когда коэффициенты $c_{-n}=0$, $n=\overline{1,\infty}$.

Пример 17.4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z-1}$ в окрестности точки $z_0=1$. Указать область сходимости ряда.

Решение. Разложение в ряд в окрестности точки $z_0=1$ есть разложение по степеням $z-1$. Воспользуемся известным разложением $\cos z^*=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (z^*)^{2n}}{(2n)!}$, $|z^*|<\infty$, взяв $z^*=\dfrac{1}{z-1}$. Представим

$$f(z)=[(z-1)+1]\cdot\cos\frac{1}{z-1}=[(z-1)+1]\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^4}-...\right)=$$

$$=(z-1)+1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^3}+\dots.$$

Получили ряд по степеням $z-1$. Так как ряд $\cos z^*$ сходится при всех $|z^*|<\infty$, то полученный ряд сходится при $\left|\dfrac{1}{z-1}\right|<\infty$, т. е. при $0<|z-1|<\infty$.

17.6. Нули и изолированные особые точки аналитических функций

Пусть $f(z)$ есть однозначная аналитическая в области D функция. Нулем функции $f(z)$ называется комплексное число z_0, для которого $f(z_0)=0$.

Из представления (17.22) аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки z_0

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

следует, что, если $z=z_0$ – нуль функции $f(z)$, то $c_0=0$.

Говорят, что точка $z=z_0$ является нулем порядка k функции $f(z)$, если коэффициенты $c_0, c_1,..., c_{k-1}$ ряда (17.22) равны нулю, а $c_k \neq 0$. При $k=1$ нуль $z=z_0$ называется простым. Если z_0 есть нуль порядка k функции $f(z)$, то можно представить

$$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z),\ \varphi(z_0)\neq 0,$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в окрестности точки $z=z_0$ функция

$$\varphi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_{k+m}(z-z_0)^m$$

Теорема 17.12. Для того чтобы точка $z=z_0$ была нулем порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно выполнения соотношений:

$$f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,\quad f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

Точки называют изолированными, если их можно окружить непересекающимися окрестностями, сколько малыми бы они не были. Нули аналитической функции $f(z) \neq 0$ изолированы.

Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, кроме самой этой точки, то z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$.

Разложение Лорана (17.26)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

в этом случае сходится во всякой точке z, лежащей внутри этой окрестности, кроме точки $z = z_0$ и изображает функцию $f(z)$ всюду внутри окрестности, кроме точки z_0.

В основу классификации изолированных особых точек однозначной функции $f(z)$ положен способ ее разложения в окрестности таких точек.

Возможны три случая:

1. Разложение Лорана (17.26) не содержит отрицательных степеней $z - z_0$. Тогда z_0 называют устранимой особой точкой функции $f(z)$.

2. Главная часть ряда (17.26) состоит из конечного числа k слагаемых, т. е. ряд имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \ldots + \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^n}, \quad c_{-k} \neq 0.$$

Тогда z_0 называется полюсом порядка k функции $f(z)$. Если $k = 1$, то z_0 есть полюс первого порядка или простой полюс.

3. Разложение (17.26) содержит бесконечное множество отрицательных степеней. В этом случае точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$.

Таким образом по виду ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 можно определить тип особой точки z_0.

Классифицируем особые точки по характеру поведения функции $f(z)$ в их окрестности.

Определение 17.13. Особую точку z_0 называют устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует предел этой функции в данной точке

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c, \quad c = \text{const}.$$

Чтобы устранить особенность $f(z)$ в точке z_0, достаточно положить

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) = c.$$

В окрестности устранимой особой точки функция $f(z)$ ограничена.

Определение 17.14. Особую точку z_0 называют полюсом функции $f(z)$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем функции $f^*(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Тогда точка z_0 есть полюс порядка k функции $f(z)$, если она является нулем порядка k для функции $f^*(z)$.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка k, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$, где $\varphi(z)$ – функция аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Определение 17.15. Особая точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Рассмотрим поведение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z_0 = \infty$. Ее окрестностью является внешность круга с центром в начале координат произвольного, достаточно большого радиуса R. Введем подстановку $w = \dfrac{1}{z}$, тогда окрестность точки $z = \infty$ на плоскости C_z прейдет в окрестность точки $w = 0$ на C_w. Так изучение поведения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ сводится к изучению поведения функции $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ в окрестности точки $z = 0$. Следовательно, функция $f(z)$ аналитическая или имеет особенность в точке $z = \infty$, если $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ обладает аналогичным свойством в точке $z = 0$.

Критерии типа бесконечно удаленной особой точки, связанные с рядом Лорана, изменяются в сравнении с критериями для конечных особых точек. Если $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то ее лорановское разложение в окрестности этой точки не содержит положительных степеней z, если $z = \infty$ – полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней z, а когда $z = \infty$ – существенно особая точка, то разложение включает бесконечное множество положительных степеней z.

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{-n}}{z^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, где $a_{-n} = c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{-n}}{z^n}$ – правильная, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – главная часть ряда.

Пример 17.5. Найти особые точки функций и определить их тип:

а) $f(z) = \dfrac{z}{\sin^3 z}$; б) $f(z) = \cos \dfrac{1}{z-1}$.

Решение. а) $f(z)=\dfrac{z}{\sin^3 z}$. Особые точки $z_0=k\pi$, $k=0,\pm1,\ldots$, где $\sin z=0$. В этих точках $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. При $k=0$ $z_0=0$ есть полюс второго порядка, так как $z_0=0$ есть нуль первого порядка для числителя и нуль третьего порядка для знаменателя:

$$f(z)=\frac{z}{\sin z}\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Точки $z_0=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$ являются нулями третьего порядка для $\sin^3 z$, а для дроби есть полюсы третьего порядка.

б) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$. Предел $\lim\limits_{z\to1}\cos\dfrac{1}{z-1}$ не существует, следовательно, точка $z_0=1$ есть существенно особая точка функции $\cos\dfrac{1}{z-1}$. Других особых точек нет. Тот факт, что $z_0=1$ – существенно особая точка данной функции, подтверждает ее разложение в ряд Лорана (пр. 17.4), которое содержит бесконечное число отрицательных степеней $z-1$.

17.7. Вычеты и их приложения

1. *Вычет аналитической функции относительно изолированной особой точки*.

Если функция $f(z)$ есть аналитическая в точке z_0, то по теореме Коши

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=0,$$

где путем интегрирования Γ служит произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точку z_0 и малый настолько, что функция $f(z)$ остается аналитической всюду внутри этого контура, включая точки самого контура. Если же z_0 будет изолированной особой точкой функции $f(z)$ и замкнутый контур Γ

целиком лежит в окрестности этой точки z_0, то значение $\oint_\Gamma f(z)\,dz$ будет, вообще говоря, отличным от нуля. Это значение, как следует из теоремы Коши, не зависит от формы контура *Г* и легко может быть вычислено. В самом деле, в окрестности точки z_0 $\left(0<|z-z_0|<r\right)$ функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана (17.26)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

который будет равномерно сходиться на линии *Г*, так как контур *Г* лежит в окрестности точки z_0. Интегрируя почленно ряд (17.26) вдоль линии *Г*, получим:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=c_{-1}\cdot 2\pi i, \qquad (17.28),$$

так как

$$\oint_\Gamma (z-z_0)^n\,dz=0,\ \ (n=0,1,2,\ldots),$$

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{(z-z_0)}=2\pi\, i,$$

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}=0,\ \ (n=2,3,\ldots).$$

Определение 17.16. Пусть z_0 есть изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$, то есть пусть функция $f(z)$ аналитическая в проколотой окрестности точки z_0 $\left(0<|z-z_0|<r\right)$. Вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)dz$$

и обозначается $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$, где Γ – контур в круге $|z-z_0|<r$, ориентированный положительно и содержащий в себе точку z_0.

Согласно равенству (17.28) вычет функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 равен c_{-1}, то есть коэффициенту при первой отрицательной степени разложения Лорана:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \tag{17.29}$$

2. *Вычисление вычетов*.

Если известно разложение функции в ряд Лорана, то вычет легко находится в случае любой особой точки по формуле (17.29). В частности, если z_0 – устранимая особая точка, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Если точка z_0 является полюсом функции, можно дать простой способ вычисления вычетов, не требующий разложения Лорана. Пусть сначала z_0 есть простой полюс функции $f(z)$. В этом случае главная часть разложения Лорана содержит лишь одну первую отрицательную степень $(z-z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)}$$

Умножая обе части разложения на $(z-z_0)$, получаем:

$$(z-z_0) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+1} + c_{-1}.$$

Так как правая часть последнего равенства есть степенной ряд, то его сумма будет непрерывной функцией в точке z_0. Тогда, переходя к пределу при z, стремящемся к z_0, получим:

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z),$$

то есть

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z). \tag{17.30}$$

Пусть, в частности, функция $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда из (17.30) получим:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{17.31}$$

Пусть теперь функция $f(z)$ имеет в точке $z = z_0$ полюс порядка k. Тогда ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}.$$

Умножив обе части равенства на $(z - z_0)^k$, дифференцируя полученное равенство $(k-1)$ раз и переходя к пределу при $z \to z_0$, получим формулу для вычисления вычета функции $f(z)$ в полюсе порядка k:

$$\operatorname*{Res}_{z-z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)). \tag{17.32}$$

В случае, когда $z = z_0$ – существенно особая точка функции $f(z)$, то для отыскания вычета $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ надо найти коэффициент c_{-1} разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

3. *Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки.*

Понятие вычета можно распространить на случай бесконечно удаленной точки. Предположим, что бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является изолированной особенностью функции $f(z)$, и обозначим через *Г* произвольный замкнутый контур, лежащий целиком в окрестности этой точки, например, за *Г* можно взять окружность достаточно большого радиуса. По-прежнему, условимся называть вычетом функции $f(z)$ относительно $z = \infty$ значение интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-} f(z)dz$ с той лишь разницей, что интегрирование совершается теперь по контуру *Г* в отрицательном направлении, так как контур *Г* нужно проходить по часовой стрелке, чтобы бесконечно удаленная точка оставалась все время с левой стороны. В окрестности точки $z = \infty$ разложение Лорана имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c-n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n .$$

Вычет функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки равен коэффициенту при первой отрицательной степени $1/z$ разложения Лорана, взятому с противоположным знаком.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-} f(z)dz = -c_{-1} .$$

Слагаемое $\frac{c_{-1}}{z}$ принадлежит правильной части ряда Лорана. Если функция $f(z)$ в точке $z=\infty$ имеет устранимую особенность, то не всегда вычет равен нулю, например, для функции $1/z$ вычет

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{1}{z}=-1.$$

4. *Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов.*

Определяющей в теории вычетов является:

Теорема 17.13 (основная теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ есть аналитическая в односвязной области *D*, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$ и Γ – произвольный кусочно-гладкий замкнутый положительно ориентированный контур, содержащий внутри себя точки $z_1, z_2, ..., z_n$ и целиком лежащий в области *D*. Тогда интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz$ равен сумме вычетов функции $f(z)$ относительно точек $z_1, z_2, ..., z_n$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z). \qquad (17.33)$$

Доказательство. Окружим каждую особую точку z_k окружностью γ_k, $k=\overline{1,n}$, так, чтобы эти окружности не пересекались (рис. 17.7) и целиком лежали внутри контура Γ. По теореме Коши для многосвязной области:

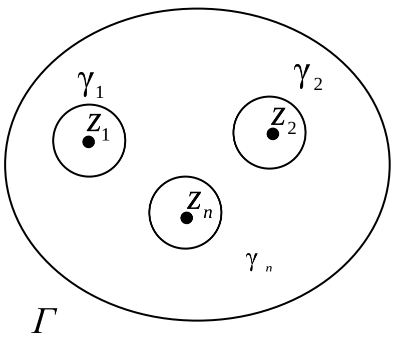


Рис. 17.7

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)dz .$$

Отсюда и из формулы (17.28) получаем:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (17.34)$$

Из теоремы следует, что если функция $f(z)$ есть аналитическая на всей расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$. то сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая и вычет в точке $z=\infty$, равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0 .$$

Особые точки аналитических функций и вычеты в них играют важную роль в комплексном анализе. С помощью вычетов можно вычислять различные интегралы, не прибегая к предельному переходу или не находя первообразных. Вычеты применяются при решении задач методами операционного исчисления, методами теории аналитических функций.

Теорема 17.13 и следствие из нее позволяют вычислять интегралы по замкнутым кривым, когда подынтегральная функция в области, ограниченной такой кривой, имеет особые точки.

С помощью вычетов можно вычислять некоторые определенные интегралы. Интеграл вида $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt$, где $R(\sin t, \cos t)$ – дробно-рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$, заменой $e^{it} = z$, $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos t = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$, $dz = i e^{it} dt = i z\, dt$ приводится к интегралу

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz},$$

который вычисляется с помощью основной теоремы о вычетах. В самом деле, так как $z = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ – уравнение окружности $|z| = 1$, то функция $z = \mathrm{e}^{it}$ отображает отрезок $[0, 2\pi]$ на окружность $|z| = 1$, ориентированную положительно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \quad \operatorname{Im} z_k > 0,$$

если функция $f(z)$ аналитична в области $\operatorname{Im} z > 0$ (верхняя полуплоскость), за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ этой области и непрерывна вплоть до оси X, несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится и

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0,$$

где Γ_R – верхняя полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 17.8).

Ошибка!

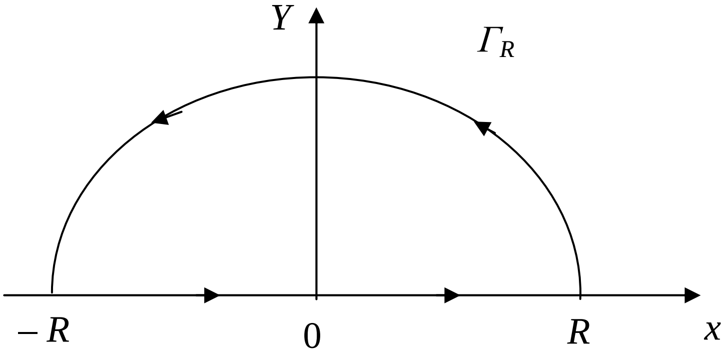


Рис. 17.8

Аналогично можно получить

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \quad \operatorname{Im} z_k < 0,$$

если особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ располагаются в нижней полуплоскости.

Приведем еще несколько примеров вычисления интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{itx}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\mathrm{e}^{itz}),\ \ \operatorname{Im}z_k>0,\ \ t>0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{itx}dx = -2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\mathrm{e}^{itz}),\quad \operatorname{Im}z_k<0,\ \ t<0,$$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(x)\mathrm{e}^{tz}dt = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\mathrm{e}^{tz}),\quad \operatorname{Re}z_k<\sigma,\ \ t>0,$$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(x)\mathrm{e}^{tz}dt = -2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\mathrm{e}^{tz}),\quad \operatorname{Re}z_k>\sigma,\quad t<0.$$

Здесь интегрирование ведется по прямой $\operatorname{Re}z=\sigma$ параллельной мнимой оси Y, z_k, $k=\overline{1,n}$ – особые точки функции $f(z)$, лежащие в левой полуплоскости $\operatorname{Re}z<\sigma$ при $t>0$ и в правой полуплоскости $\operatorname{Re}z>\sigma$ при $t<0$.

Пример 17.6. Вычислить вычет функции $f(z)=\dfrac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$ относительно точек $z_0=3$, $z_0=-2$.

Решение. Точка $z_0=3$ является полюсом первого порядка данной функции. По формуле (17.31) $\operatorname*{Res}_{z=3}\dfrac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}=\operatorname*{Res}_{z=3}\dfrac{\frac{z^3+1}{(z+2)^2}}{z-3}=\left.\dfrac{\frac{z^3+1}{(z+2)^2}}{(z-3)'}\right|_{z=3}=\dfrac{\frac{28}{25}}{1}=\dfrac{28}{25}.$

Точка $z_0=-2$ есть полюс второго порядка. По формуле (17.32)

$$\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-2}\left[\frac{(z^3+1)(z+2)^2}{(z+2)^2(z-3)}\right]^{/}=\lim_{z\to-2}\frac{3z^2(z-3)-(z^3+1)}{(z-3)^2}=\frac{-53}{25}.$$

Пример 17.7. Найти вычет функции $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z-1}$ в особой точке.

Решение. Точка $z_0 = 1$ является существенно особой точкой данной функции. Тогда вычет равен коэффициенту c_{-1} ряда Лорана для данной функции в окрестности точки $z_0 = 1$.

$$\operatorname*{Res}_{z=1} z\cos\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}$$

(см. пример 17.4).

Пример 17.8. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{dz}{\mathrm{e}^z - 1}$.

Решение. Так как подынтегральная функция $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z - 1}$ имеет внутри круга $|z-1| \le 2$ одну особую точку $z = 0$ (полюс первого порядка), то имеем

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{\mathrm{e}^z - 1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \left.\frac{1}{\left(\mathrm{e}^z - 1\right)'}\right|_{z=0} = 2\pi i \left.\frac{1}{\mathrm{e}^z}\right|_{z=0} = 2\pi i\,.$$

Методы теории функции комплексного переменного широко применяются при решение многих задач электротехники, гидродинамики, теории теплопроводности, фильтрации, различных областей физики, механики и т. п.

18. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

18.1 Оригинал и изображение

Пусть $f(t)$ действительная функция действительного аргумента *t*.

Определение 18.1. Оригиналом называется функция $f(t)$, определенная на всей числовой оси t и удовлетворяющая условиям:

1. $f(t)$ непрерывна во всей области определения, за исключением, возможно, конечного числа точек разрыва первого рода на любом отрезке конечной длины;
2. $f(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$;
3. $f(t)$ при $t \to +\infty$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $M > 0$ и $s \geq 0$, что

$$\left| f(t) \right| \leq M\,\mathrm{e}^{st} \quad \forall\, t \geq 0 \qquad (18.1)$$

Определение 18.2. Точная нижняя грань s_{o} всех чисел *s*, для которых выполняется неравенство (18.1) называется показателем роста оригинала $f(t)$, т. е. $s_{\text{o}} = \inf s$.

Замечание 18.1. Оригинал $f(t)$ может быть и комплексной функцией

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$$

действительного аргумента *t*. Каждая из функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в этом случае, должна удовлетворять условиям 1-3, наложенным на оригинал.

Простейшим оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 18.1.

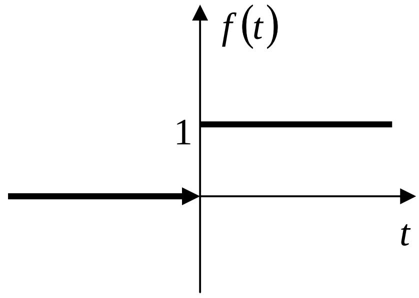


Рис. 18.1

Очевидно, что для этой функции выполняются условия 1–2. Проверим выполнение условия 3.

Из неравенства

$$|\ (t)| = 1 \le \mathrm{e}^{st} \quad \forall s \ge 0\,,\ \forall t \ge 0$$

следует, что при M=1 и $\forall s \ge 0,$ условие 3 выполняется. Показатель роста $s_{о}$ =0.

Любую функцию $f(t)$, определенную на R, с помощью единичной функции Хевасайда можно записать в виде:

$$f(t)\ \ (t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ f(t), & t\ge 0,\end{cases}$$

Поэтому, если $f(t)$ – оригинал, то можно всякий раз не оговаривать, что $f(t)=0$ $\forall\, t<0$, а пользоваться указанным произведением. Но так как в дальнейшем будут рассматриваться только функции-оригиналы, то для упрощения записи множитель $\ (t)$ будем опускать и, как правило, писать $f(t)$ вместо $f(t)\ \ (t)$.

Пример 18.1. Предполагая, что $f(t)=f(t)\,(t)$, установить, какие из функций являются оригиналами: а) $f(t)=\mathrm{e}^{at}$; б) $f(t)=t^k,\ k>0$; в) $f(t)=\cos t$; г) $f(t)=\dfrac{1}{t}$.

Решение. а) Функция e^{at} является оригиналом, так как она непрерывная на R; $f(t)=0\ \forall t<0$, т. е. условия 1-2 выполняются. $|f(t)|=|\mathrm{e}^{at}|=\mathrm{e}^{at}\le \mathrm{e}^{st}\quad \forall s\ge a$, $\forall t\ge 0$. Из последнего соотношения следует выполнение условия 3 при $M=1$ и $s\ge a$. Показатель роста оригинала $s_o=a$.

б) Степенная функция $t^k\ (k>0)$ удовлетворяет условиям 1–2. Кроме того, любая степенная функция $t^k\ (k>0)$ растет медленнее, чем показательная функция e^{st}, $\forall s>0$. Применяя правило Лопиталя, легко проверить, что $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^k}{\mathrm{e}^{st}}=0\ \ \forall s>0$. Следовательно, $\exists M>0$ такое, что $\left|\dfrac{t^k}{\mathrm{e}^{st}}\right|\le M\quad \forall t\ge 0$ или $|t^k|\le M\mathrm{e}^{st}\quad \forall s\ge 0,\ \forall t\ge 0$, т. е. $t^k\ (k>0)$ является оригиналом с показателем роста $s_o=0$.

в) Функция cost является оригиналом, так как для ее выполняются условия 1-2. Кроме того, $|\cos t|\le 1\le \mathrm{e}^{st}\quad \forall s>0, \forall t\ge 0$, т. е. условие 3 выполняется при $M=1$ и $s\ge 0$. Показатель роста $s_o=0$.

г). Функция $\dfrac{1}{t}$ не является оригиналом, также $\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{1}{t}=+\infty$, т. е. $t=0$ точка разрыва II рода; условие 1 не выполняется.

Каждому оригиналу $f(t)$ (комплексному или действительному) поставим в соответствие функцию $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\omega$, определенную как интеграл

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt \tag{18.2}$$

Определение 18.3. Интеграл, стоящий в правой части равенства (18.2) называется интегралом или преобразованием Лапласа функции $f(t)$. Функция $F(p)$ называется изображением оригинала $f(t)$.

Интегральное преобразование Лапласа (18.2) лежит в основе операционного исчисления, начало которому положил английский инженер-электрик О.Хевисайд (1850–1925). Разработав операционное исчисление, Хевисайд не дал ему обоснования. В двадцатых годах прошлого столетия операционное исчисление получило обоснование в работах ряда математиков.

Тот факт, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, условно записывают равенствами $F(p) = Lf(t)$ или $f(t) = L^{-1}F(p)$, либо обозначают символически

$$f(t) \div F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \div f(t)$$

и называют операционными соотношениями.

Пример 18.2. Найти изображения оригиналов:

а) $f(t) = \ (t)$; б) $f(t) = \mathrm{e}^{at}$, $a \in C$.

Решение. По формуле (18.2)

а) $F(p) = \int\limits_0^{\infty} \ (t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \left.\dfrac{\mathrm{e}^{-pt}}{-p}\right|_0^b = -\dfrac{1}{p}\lim\limits_{b\to+\infty}(\mathrm{e}^{-pb} - 1) = \dfrac{1}{p}$ при $\operatorname{Re} p > 0$.

Итак,

$$(t) \div \frac{1}{p}, \ \operatorname{Re} p > 0 \tag{18.3}$$

б) $F(p) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-pt}dt = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(p-a)t}dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \left. -\dfrac{1}{p-a}\mathrm{e}^{-(p-a)t}\right|_0^b = -\dfrac{1}{p-a}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-(p-a)b} - 1\right) =$

$= \dfrac{1}{p-a}$ при $\operatorname{Re}(p-a) = \operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a > 0$.

Итак,

$$e^{at} \div \frac{1}{p-a}, \ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a. \tag{18.4}$$

Естественно встает вопрос, для всякого ли оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$? Ответ на этот вопрос дает теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 18.1 (*существования и аналитичности изображения*). Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ представляет собой функцию комплексного переменного $p = s + i\omega$, определенную в полуплоскости $\mathrm{Re} p = s > s_o$, где s_o – показатель роста оригинала, и аналитическую в указанной полуплоскости (рис. 18.2).

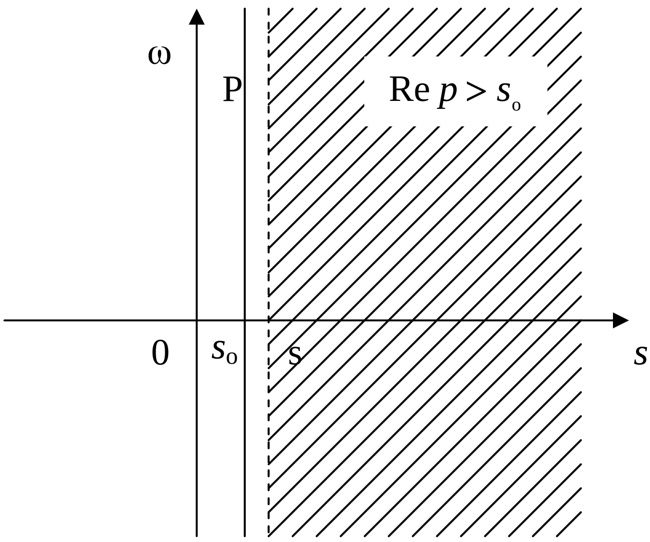


Рис 18.2

Теорема 18.2 (*поведение изображения на бесконечности*). Если $F(p)$ изображение некоторого оригинала, то

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p \to +\infty} F(p) = 0. \tag{18.5}$$

Доказательство. Пусть $F(p)$ изображение оригинала $f(t)$. Тогда при $\operatorname{Re} p = s > s_o$ для интеграла Лапласа справедлива оценка

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|\left|\mathrm{e}^{-(s+i\omega)t}\right|dt = \int_0^\infty |f(t)|\mathrm{e}^{-st} \le M\int_0^\infty \mathrm{e}^{s_o t}\mathrm{e}^{-st}dt =$$

$$= M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-s_o)t}dt = -\frac{M}{s-s_o}\mathrm{e}^{-(s-s_o)t}\Big|_0^\infty = \frac{M}{s-s_o},\ \operatorname{Re} p = s > s_o. \qquad (18.6)$$

Переходя в (18.6) к пределу при $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$, получим

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = 0.$$

Из теоремы 18.1 и 18.2 следует, что не всякая функция $F(p)$, комплексного переменного p, может быть изображением некоторого оригинала $f(t)$. Например, функция $F(p)=\operatorname{ctg} p$ имеет бесчисленное множество полюсов $p_k = k\overline{n}$, $k \in z$. Поэтому нет такой полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_o$, в которой $\operatorname{ctg} p$ является аналитической функцией. Функция $F(p) = \dfrac{p}{p-1}$ также не является изображением, так как

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = \lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} \frac{p}{p-1} = 1 \ne 0.$$

Теорема 18.3 (*единственности оригинала*). Если две непрерывные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то они тождественно равны (без доказательства).

18.2 Основные теоремы преобразования Лапласа

Теорема 18.4 (*линейность преобразования Лапласа*). Если $f_1(t) \div F_1(p)$ и $f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p), \quad c_1, c_2 \in C. \tag{18.7}$$

Доказательство. Действительно,

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div \int_0^\infty \left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right) \mathrm{e}^{-pt} dt = c_1 \int_0^\infty f_1(t) \mathrm{e}^{-pt} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) \mathrm{e}^{-pt} dt =$$

$$= c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p).$$

Из теоремы 18.4 вытекает два следствия.

Следствие 1. Если $f(t) \div F(p)$, то при $c \in C$

$$cf(t) \div cF(p), \tag{18.8}$$

т. е. обе части операционного соотношения можно умножать на один и тот же постоянный множитель.

Следствие 2. Если $f_1(t) \div F_1(p)$ и $f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$f_1(t) \pm f_2(t) \div F_1(p) \pm F_2(p), \tag{18.9}$$

т. е. операционные соотношения можно почленно складывать и вычитать.

Пример 18.3. Найти изображения оригиналов: а) $\sin \omega t$, $\omega > 0$; б) $\cos \omega t$; в) $\mathrm{sh}\omega t$, $\omega > 0$; г) $\mathrm{ch}\omega t$.

Решение.

а) Так как $\sin\omega\, t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$ и $e^{at} \div \frac{1}{p-a}$, то согласно формуле (18.7)

$$\sin\omega\, t \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

б) $\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0$

Итак,

$$\sin\omega\, t \div \frac{\omega}{p^2+\omega^2};\ \cos\omega\, t \div \frac{p}{p^2+w^2},\ \operatorname{Re} p > 0. \qquad (18.10)$$

в) $\operatorname{sh}\omega\, t = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2},\ \operatorname{Re} p > \omega.$

г) $\operatorname{ch}\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2-\omega^2},\ \operatorname{Re} p > \omega.$

Таким образом,

$$\operatorname{sh}\omega\, t \div \frac{\omega}{p^2-\omega^2};\ \operatorname{ch}\omega\, t \div \frac{p}{p^2-\omega^2},\ \operatorname{Re} p > \omega. \qquad (18.11)$$

Теорема 18.5 (*подобия*). Если $f(t) \div F(p)$ и $\alpha > 0$, то

$$f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),\ \operatorname{Re} p > \alpha s_{o}. \qquad (18.12)$$

Доказательство. Положим $\alpha t = \theta$, тогда в силу (18.2)

$$f(\alpha t) \div \int_0^\infty f(\alpha t)\,\mathrm{e}^{-pt}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\theta)\,\mathrm{e}^{-\frac{p}{\alpha}\theta}d\theta = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \frac{p}{\alpha} > s_{\text{o}}.$$

Следовательно, умножение аргумента оригинала на положительное число α приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

Теорема 18.6 (*смещения*). Если $f(t) \div F(p)$, то для любого $\lambda \in C$

$$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \div F(p-\lambda), \quad \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\lambda + s_{\text{o}}. \tag{18.13}$$

Доказательство. В силу формулы (18.2)

$$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \div \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(p-\lambda)t}dt = F(p-\lambda), \quad \mathrm{Re}(p-\lambda) > s_{\text{o}},$$

т. е. умножению оригинала на $\mathrm{e}^{\lambda t}$ соответствует замена аргумента p на $(p-\lambda)$ (смещение изображения на величину λ).

Пример 18.4. Найти изображения оригиналов: а) $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t$; б) $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t$.

Решение. Используя операционные соотношения (18.10) и теорему смещения, получим

а) $$\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t \div \frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}, \quad \mathrm{Re}\,p > \lambda,$$

б) $$\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}, \quad \mathrm{Re}\,p > \lambda.$$

Теорема 18.7 (*запаздывания*). Если $f(t) \div F(p)$ и $b > 0$, то

$$f(t-b) \div \mathrm{e}^{-bp}F(p), \quad \mathrm{Re}\,p > s_{\text{o}}. \qquad (18.14)$$

Доказательство. Из соотношения $f(t)=f(t)\ (t)$ следует, что $f(t-b)=f(t-b)\ (t-b)$, т. е. $f(t-b)=0$ при $t<b$ (рис. 18.3).

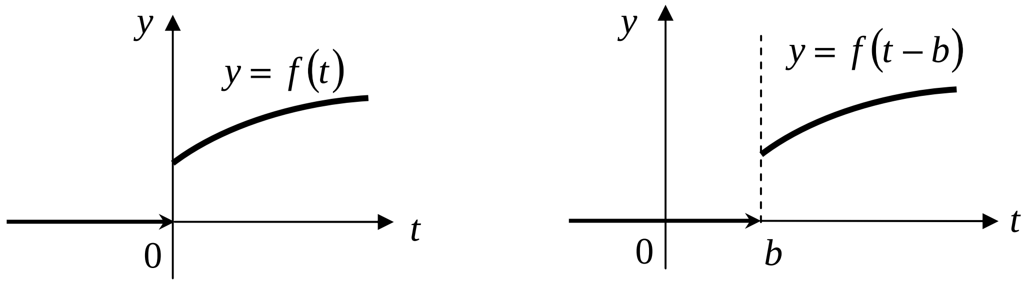


Рис. 18.3

Положив $t-b=\theta$, находим

$$f(t-b)\ (t-b) \div \int_0^{\infty} f(t-b)\mathrm{e}^{-pt}dt = \int_b^{\infty} f(t-b)\mathrm{e}^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(\theta)\mathrm{e}^{-p(b+\theta)}d\theta =$$

$$= \mathrm{e}^{-pb}\int_0^{\infty} f(\theta)\mathrm{e}^{-p\theta}d\theta = \mathrm{e}^{-pb}F(p).$$

Таким образом, запаздывание аргумента оригинала на положительную величину b приводит к умножению изображения на функцию e^{-bp}.

П р и м е р 18.5. Найти изображения оригиналов: а) $f(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\ \left(t-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\ (t)$.

Решение. а) $\cos t\ (t) \div \frac{p}{p^2+1}$, тогда по формуле (18.14) $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\ \left(t-\frac{\pi}{2}\right) \div \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}p}\ \frac{p}{p^2+1}$.

б) По формулам приведения $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t$, $\sin t\ \ (t)\div\frac{1}{p^2+1}$. Следовательно,

$$\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\ (t)=\sin t\ \ (t)\div\frac{1}{p^2+1}.$$

Замечание 18.2. Из рассмотренных примеров следует, что, применяя теорему запаздывания, оригинал следует записывать в виде произведения функции $f(t)$ и соответствующей единичной функции Хевисайда.

Теорема 18.8 (*изображение периодического оригинала*). Если $f(t)$ – оригинал периода *T*, то

$$f(t)\div\frac{\int\limits_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt}{1-\mathrm{e}^{-pT}}. \qquad (18.15)$$

Доказательство. Так как $f(t)=f(t+T)$, то

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt=\int\limits_o^\infty f(t+T)\mathrm{e}^{-pt}dt=\left|t+T=\tau\right|=\int\limits_T^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-p(\tau-T)}d\tau=$$

$$=\int\limits_T^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{e}^{pT}d\tau=\mathrm{e}^{pT}\int\limits_T^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}d\tau=\mathrm{e}^{pT}\left(\int\limits_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}d\tau-\int\limits_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}d\tau\right),$$

т. е. $F(p)=\mathrm{e}^{pT}\left(F(p)-\int\limits_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}d\tau\right)$.

Решая это уравнение относительно $F(p)$, получим

$$F(p)=\frac{\mathrm{e}^{pT}\int\limits_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}d\tau}{\mathrm{e}^{pT}-1}=\frac{\int\limits_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}d\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}},$$

что равносильно соотношению (18.15).

Пример 18.6. Найти изображение оригинала $|\sin \omega t|$.

Решение. Функция $|\sin \omega t|$ имеет период $T = \frac{\pi}{\omega}$. По формуле (18.15) получаем

$$|\sin \omega t| \div \frac{\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} |\sin \omega t| e^{-pt} dt}{1 - e^{-p\frac{\pi}{\omega}}}.$$

Известно, что

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx).$$

Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t e^{-pt} dt = \frac{\omega e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{p^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\left(1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right),$$

$$|\sin \omega t| \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}}} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}.$$

18.3. Дифференцирование и интегрирование оригинала и изображения

Теорема 18.9 (*дифференцирование оригинала*). Если $f(t) \div F(p)$ и существует функция $f'(t)$, являющаяся оригиналом, то

$$f'(t) = pF(p) - f(0), \tag{18.16}$$

где $f(0) = \lim_{t \to 0+0} f(t) = f(0+0)$.

Доказательство. В силу (18.2) и интегрируя по частям, находим при $\operatorname{Re} p > s_{\text{o}}$ $\quad f'(t) \div \int\limits_0^{\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = f(t)\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = -f(0) + pF(p)$, так как в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_{\text{o}}$

$$\left|\mathrm{e}^{-pt} f(t)\right| \le M\,\mathrm{e}^{s_{\text{o}}t}\mathrm{e}^{-\operatorname{Re} pt} = M\,\mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} p - s_{\text{o}})t} \to 0 \ \text{ при } \ t \to \infty .$$

В частном случае, когда $f(0) = 0$ формула (18.16) примет вид

$$f'(t) \div pF(p) \tag{18.17}$$

т. е., если начальное значение оригинала $f(t)$ равно нулю, то дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на p.

Применяя формулу (18.16) ко второй производной $f''(t)$, получим

$$f''(t) \div p\big(pF(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Точно так же

$$f'''(t) \div p(p^2F(p) - pf(0) - f'(0)) - f''(0) = p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

Применяя формулу (18.16) (n-1) раз, получим общую формулу вычисления изображения для $f^{(n)}(t)$.

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{17.18}$$

В частности, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то из (17.18) получим

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p). \tag{18.19}$$

Пример 18.7. Найти изображения оригиналов: а) $f(t)=\sin\omega t$; б) $f(t)=\mathrm{sh}\,\omega t,\ \omega>0$.

Решение. Используя полученные ранее операционные соотношения

$$\cos\omega t \div \frac{p}{p^2+\omega^2};\quad \mathrm{ch}\,\omega t \div \frac{p}{p^2-\omega^2},$$

и правило дифференцирования оригинала, будем иметь:

$$\text{а) } \sin\omega t = -\frac{1}{\omega}(\cos\omega t)' \div -\frac{1}{\omega}\left(p\frac{p}{p^2+\omega^2}-\cos(0)\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\text{б) } \mathrm{sh}\,\omega t = \frac{1}{\omega}(\mathrm{ch}\,\omega t)' \div \frac{1}{\omega}\left(p\frac{p}{p^2-\omega^2}-\mathrm{ch}(0)\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,p>\omega.$$

Теорема 18.10 (*интегрирование оригинала*). Если $f(t)\div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p},\quad \mathrm{Re}\,p>\max\{0,s_0\},\qquad (18.20)$$

т. е. интегрированию оригинала соответствует деление изображения на p.

Доказательство. Функция $\int_0^t f(\tau)d\tau = f_1(t)$ является оригиналом. Пусть $f_1(t)\div F_1(p)$. Так как $f_1(0)=0$, то по формуле (18.17)

$$f_1'(t)=\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)' = f(t)\div pF_1(p)=F(p),$$

откуда получаем

$$F_1(p) = \frac{F(p)}{p} \div f_1(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

т. е.

$$\frac{F(p)}{p} \div \int_0^t f(\tau)d\tau .$$

П р и м е р 18.8. Найти изображение оригинала $f(t) = t^n, \quad n \in N$.

Решение. $(t) \div \frac{1}{p}$;

$$\int_0^t d\tau \div \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2};$$

$$t \div \frac{1}{p^2};$$

$$\int_0^t \tau d\tau \div \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^3};$$

$$\frac{t^2}{2!} \div \frac{1}{p^3};$$

$$\int_0^t \frac{\tau^2}{2} d\tau \div \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^3} = \frac{1}{p^4};$$

$$\frac{t^3}{3!} \div \frac{1}{p^4};$$

……………..

$$\frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^{n+1}} .$$

Отсюда

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}} . \tag{18.21}$$

Теорема 18.11 (*дифференцирование изображения*). Если $f(t) \div F(p)$, то

$$-tf(t) \div F'(p), \tag{18.22}$$

т. е. дифференцированию изображения соответствует умножение оригинала на $(-t)$.

Доказательство. По определению имеем

$$\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = F(p).$$

Продифференцируем это равенство по параметру *p*, получим

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp}\left(f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right)dt = \int_0^{\infty} (-t\, f(t))\mathrm{e}^{-pt}dt\,.$$

Отсюда следует, что

$$-t\, f(t) \div F'(p).$$

Следствие. Если $f(t) \div F(p)$, то

$$(-t)^n\, f(t) \div F^{(n)}(p) \text{ или } t^n f(t) \div (-1)^n F^{(n)}(p). \tag{18.23}$$

Примеры 18.9. 1) Найти изображение оригинала $t\sin\omega t$.

Решение. Так как $\sin\omega t \div \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то на основании формулы (18.22) получим

$$t\sin\omega t \div -\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

2) Найти оригинал изображения $F(p) = \dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$.

Решение. Так как $\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2} = -\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)'$ и $\dfrac{p}{p^2+1} \div \cos t$, то по формуле (18.22) имеем

$$\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} = -\left(\frac{p}{p+1}\right)' \div t\cos t.$$

Теорема 18.12 (*интегрирование изображения*). Если $f(t) \div F(p)$ и $\dfrac{f(t)}{t}$ - оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{\infty} F(p)dp, \tag{18.24}$$

т. е. операции интегрирования изображения по бесконечному контуру, принадлежащему правовой полуплоскости, соответствует операция деления оригинала на t.

Доказательство. Положим $f_1(t) = \dfrac{f(t)}{t}$; $f_1(t) \div F_1(p)$. По правилу дифференцирования изображения и $F_1(\infty) = 0$, получим

$$f(t) = t\left(\frac{f(t)}{t}\right) = t\, f_1(t) \div F(p) = -F_1'(p).$$

Интегрируем последнее равенство в пределах от p до $+\infty$.

$$\int_p^\infty F(p)dp = -\int_p^\infty F_1'(p)dp = F_1(\infty) + F_1(p) = F_1(p).$$

Отсюда следует

$$F_1(p) = \int_p^\infty F(p)dp \text{, но } F_1(p) \div \frac{f(t)}{t}.$$

Следовательно,

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(p)dp.$$

Пример 18.10. Найти изображение оригинала $\frac{\operatorname{sh} t}{t}$.

Решение. Так как $\operatorname{sh} t \div \frac{1}{p^2 - 1}$, то применяя формулу (18.24), находим $\frac{\operatorname{sh} t}{t} \div \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}$.

18.4. Свертка функций

Определение 18.4. Сверткой двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция, обозначаемая $f_1(t) * f_2(t)$ и определяемая равенством

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \qquad (18.25)$$

Свертка (18.25) также является оригиналом с показателем роста $s_0 = \max(s_1, s_2)$, где s_1, s_2 – показатели роста оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно.

Свертка оригиналов обладает следующими свойствами, присущими операции обычного умножения:

1. $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ (коммутативность).

2. $(f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t))$ (ассоциативность).

3. $(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) * f_3(t) = c_1(f_1(t) * f_3(t)) + c_2(f_2(t) * f_3(t))$ (линейность).

Пример 18.11. Найти свертку оригиналов $f_1(t) = t$ и $f_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$.

Решение.

$$f_1(t) * f_2(t) = t * \mathrm{e}^{2t} = \int_0^t \tau \mathrm{e}^{2(t-\tau)} d\tau = -\frac{1}{2}\tau \mathrm{e}^{2(t-\tau)}\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{2(t-\tau)} d\tau = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}.$$

18.5. Теорема умножения изображений

Теорема 18.13 (*Бореля*). Если $f_1(t) \div F_1(p)$ и $f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) \div F_1(p) \cdot F_2(p), \tag{18.26}$$

т. е. свертке оригиналов соответствует произведение изображений.

Доказательство. По определению

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \div \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right) dt = \int_0^\infty dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{e}^{-pt} d\tau.$$

В полученном повторном интеграле изменим порядок интегрирования по бесконечной области D (рис. 18.4).

$$f_1(t) * f_2(t) \div \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty f_2(t-\tau) \mathrm{e}^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} t-\tau = z \\ dt = dz \end{matrix} \right| = \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty f_2(z) \mathrm{e}^{-p(z+\tau)} dz =$$

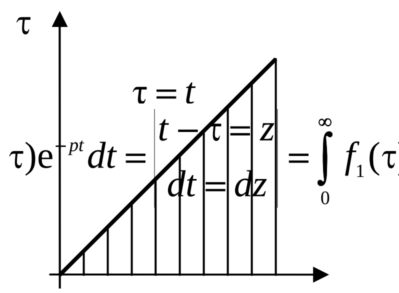


Рис. 18.4

$$=\int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^{\infty} f_2(z)e^{-pz}dz = F_1(p)\cdot F_2(p).$$

Пример 18.12. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

Решение. Так как $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}$ и $\dfrac{p}{p^2+4}\div\cos 2t$, $\dfrac{p}{p^2+9}\div\cos 3t$, то по теореме Бореля

$$f(t)=\cos 2t * \cos 3t.$$

Найдем эту свертку:

$$\cos 2t * \cos 3t = \int_0^t \cos 2\tau\cos 3(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(3t-\tau)+\cos(5\tau-3t)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(3t-\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{10}\sin(5\tau-3t)\Big|_0^t = -\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin 3t + \frac{1}{10}\sin 2t + \frac{1}{10}\sin 3t =$$

$$= \frac{3}{5}\sin 3t - \frac{2}{5}\sin 2t.$$

Итак, $f(t)=\dfrac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$.

Для удобства пользования операционными методами полученные ранее результаты сведем в таблицы.

Таблица 18.1

Основные операционные соотношения

№ п/п	Оригинал	**Изображение**	Примечание
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
2	c	$\frac{c}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0, \vdots c \in C$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a, \quad a \in C$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0, \omega \in R$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0, \omega \in R$
7	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\omega\rvert, \omega \in R$
8	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\omega\rvert, \ \omega \in R$

Таблица 18.2

Основные операционные правила

№ п/п	Оригинал	Изображение	Примечание
1	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$	Линейность преобразования Лапласа
2	$f(\alpha t),\ \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$	Теорема подобия
3	$e^{\lambda t} f(t),\ \lambda \in C$	$F(p-\lambda)$	Теорема смещения (изображения)
4	$f(t-b),\ b > 0$	$e^{-bp} F(p)$	Теорема запаздывания (оригинала)
5	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots -$ $- pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	Правило дифференцирования оригинала
6	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$	Правило интегрирования оригинала
7	$-tf(t)$	$F'(p)$	Правило дифференцирования изображения
8	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p) dp$	Правило интегрирования изображения
9	$f(t) = f(t+T)$	$\frac{\int_0^T f(t) e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}$	Вычисление изображения периодического оригинала
10	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$	Теорема Бореля

18.6. Интеграл Дюамеля

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы, непрерывные и дифференцируемые на $[0, \infty]$.

Пусть $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$ и $f_1'(t), f_2'(t)$ существуют и являются оригиналами.

По теореме о дифференцировании оригинала $f_2'(t) \div pF_2(p) - f_2(0)$.

Рассмотрим свертку

$$f_1(t) * f_2'(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau.$$

По теореме Бореля

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau \div F_1(p)\big(pF_2(p) - f_2(0)\big).$$

или

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau \div pF_1(p)F_2(p) - F_1(p) f_2(0).$$

Так как $f_2(0) = \mathrm{const}$, то в силу свойства линейности

$$f_1(t) f_2(0) \div F_1(p) f_2(0).$$

Сложим почленно два последние операционные соотношения:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau + f_1(t) f_2(0) \div pF_1(p)F_2(p). \qquad (18.27)$$

Эта формула называется формулой Дюамеля. Если $f_2(0) = 0$, то формула принимает вид

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau \div pF_1(p)F_2(p). \qquad (18.28)$$

Интеграл $\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau$ называется интегралом Дюамеля.

Формуле Дюамеля можно придать другую форму, используя свойства коммутативности свертки.

Пример 18.13. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\dfrac{p}{p^2-1}$.

Решение. $F(p)=p\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p+1}$. Учитывая, что $F_1(p)=\dfrac{1}{p-1}$, $f_1(t)=\mathrm{e}^t$, $F_2(p)=\dfrac{1}{p+1}$, $f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$, $f_2(0)=1$, $f_2'(t)=-\mathrm{e}^{-t}$, по формуле Дюамеля получим

$$p\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p+1}\div-\int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}d\tau+\mathrm{e}^t\cdot 1=-\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^{2\tau}d\tau+\mathrm{e}^t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{2\tau}\Big|_0^t+\mathrm{e}^t=$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t\right)=\mathrm{ch}t.$$

Формула Дюамеля широко применяется, например, в электротехнике при решении дифференциальных уравнений специального вида.

18.7. Методы нахождения оригинала по изображению

Табличный метод

Суть этого метода заключается в том, что по заданному изображению $F(p)$ в простейших случаях, в таблицах операционных соотношений находят соответствующий данному изображению оригинал. Если изображение $F(p)$ в таблицах отсутствует, то его выражают через табличные функции, используя при этом известные операционные правила.

В целом ряде задач приходится находить оригиналы по изображениям, которые являются правильными рациональными дробями. Так как всякая правильная рациональная дробь разлагается на простейшие, то очень важно уметь находить оригиналы для простейших дробей.

Известны четыре вида простейших дробей:

$$\frac{A}{p-a},\quad \frac{A}{(p-a)^n},\quad \frac{Ap+B}{p^2+bp+c},\quad \frac{Ap+B}{\left(p^2+bp+c\right)^n},$$

причем p^2+bp+c не имеет вещественных корней, $n=1{,}2...$

Напишем для них оригиналы.

1. $\dfrac{A}{p-a} \div A\mathrm{e}^{at}$.

2. $\dfrac{A}{(p-a)^n} \div A\mathrm{e}^{at}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$. При получении этой формулы было использовано известное операционное соотношение $\dfrac{t^n}{n!} \div \dfrac{1}{p^{n+1}}$ и теорема смещения $F(p-a) \div \mathrm{e}^{at} f(t)$.

3. Выделим полный квадрат в знаменателе третьей дроби, получим

$$\frac{Ap+B}{p^2+bp+c} = \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)} = \frac{A\left(p+\frac{b}{2}\right)+\left(B-A\frac{b}{2}\right)}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{B_1}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$$

где $-\dfrac{b}{2}=\alpha,\ c-\dfrac{b^2}{4}=\beta^2,\ B-A\dfrac{b}{2}=B_1$.

Применим теорему смещения к операционными соотношениям

$$\cos\beta t \div \frac{p}{p^2+\beta^2} \text{ и } \frac{\sin\beta t}{\beta} \div \frac{1}{p^2+\beta^2}.$$

Тогда соответственно получим:

$$\frac{A(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \div A e^{\alpha t}\cos\beta t; \quad \frac{B_1}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \div B_1 e^{\alpha t}\frac{\sin\beta t}{\beta}.$$

Следовательно,

$$\frac{Ap+B}{p^2+bp+c} \div A e^{2t}\cos\beta t + B_1 e^{\alpha t}\frac{\sin\beta t}{\beta},$$

где $\alpha = -\frac{b}{2}, \quad \beta = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}, \quad B_1 = B - \frac{Ab}{2}.$

4. $\frac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^n} = \frac{A(p-\alpha)+B_1}{\left((p-\alpha)+\beta^2\right)^n}.$

Для нахождения оригинала четвертой дроби необходимо рассмотреть дроби $\frac{p}{\left(p^2+\beta^2\right)^n}$ и $\frac{1}{\left(p^2+\beta^2\right)^n}$.

Например, при $n = 2$, воспользовавшись теоремой Бореля, получим

$$\frac{p}{\left(p^2+\beta^2\right)^2} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{p}{p^2+\beta^2}\cdot\frac{\beta}{p^2+\beta^2} \div \frac{1}{\beta}\cos\beta t * \sin\beta t = \frac{1}{\beta}\int_0^t \cos\beta\tau\sin\beta(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\int_0^t (\sin\beta t + \sin\beta(t-2\tau))d\tau = \frac{1}{2\beta}\left(\tau\sin\beta t + \frac{1}{2\beta}\cos\beta(t-2\tau)\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left(t\sin\beta t + \frac{1}{2\beta}\cos\beta t - \frac{1}{2\beta}\cos\beta t\right) = \frac{1}{2\beta}t\sin\beta t.$$

$$\frac{1}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}=\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{\beta}{p^2+\beta^2}\cdot\frac{\beta}{\rho^2+\beta^2}\div\frac{1}{\beta^2}\sin\beta t*\sin\beta t=\frac{1}{\beta^2}\int_0^t\sin\beta\tau\sin\beta(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\beta^2}\int_0^t\left(\cos\beta\left(2\tau-t\right)-\cos\beta t\right)d\tau=\frac{1}{2\beta^2}\left(\frac{1}{2\beta}\sin\beta\left(2\tau-t\right)-\tau\cos\rho t\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{1}{2\beta^2}\left(\frac{1}{2\beta}\sin\beta t-\mathrm{t}\cos\beta t+\frac{1}{2\beta}\sin\beta t\right)=\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t-\beta\, t\cos t).$$

Затем, применяя теорему смещения и свойство линейности операционного соотношения, можно получить оригинал, соответствующий изображению $\dfrac{Ap+B}{\left(p^2+bp+c\right)^2}$.

Пример 18.4. Найти оригинал, соответствующий изображению $F(p)=\dfrac{2p+1}{\left(p^2-4p+5\right)^2}$.

Решение.

$$\frac{2p+1}{\left(p^2-4p+5\right)^2}=\frac{2p+1}{\left((p-2)^2+1\right)^2}=\frac{2(p-2)+5}{\left((p-2)^2+1\right)^2}=2\frac{p-2}{\left((p-2)^2+1\right)^2}+5\frac{1}{\left((p-2)^2+1\right)^2};$$

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\div\cos t*\sin t=\frac{1}{2}t\sin t;$$

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\div\sin t*\sin t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

На основании теоремы смещения и линейности преобразования Лапласа, получим:

$$\frac{2p+1}{\left(p^2-4p+5\right)^2}=2\frac{(p-2)}{\left((p-2)^2+1\right)^2}+5\frac{1}{\left((p-2)^2+1\right)^2}\div \mathrm{e}^{2t}t\sin t+\frac{5}{2}\mathrm{e}^{2t}(\sin t-t\cos t)=$$

$$=\mathrm{e}^{2t}\left(t\sin t+\frac{5}{2}\sin t-\frac{5}{2}t\cos t\right).$$

Табличный метод предоставляет широкие возможности для нахождения оригинала по данному изображению и не ограничивается рамками предложенной выше схемы для рациональных изображений. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пример 18.5. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p^2+p-6}$.

Решение. 1) Разложим $F(p)$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p^2+p-6}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+3}\right)\div\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-3t}\right).$$

2) Выделим полный квадрат в знаменателе $F(p)$:

$$\frac{1}{p^2+p-6}=\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\frac{5}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)-\frac{25}{4}}\div\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{sh}\frac{5}{2}t=$$

$$\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t}}{2}=\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-3t}\right).$$

3) Представим $F(p)$ в виде произведения

$$\frac{1}{p^2+p-6}=\frac{1}{p-2}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

По теореме Бореля

$$\frac{1}{p-2}\cdot\frac{1}{p+3}\div \mathrm{e}^{2t}*\mathrm{e}^{-3t}=\int_0^t \mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}d\tau=\int_0^t \mathrm{e}^{5\tau-3t}d\tau=\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5t}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-3t}\right).$$

Однако решение некоторых задач приводит к изображениям, оригиналы для которых нельзя найти табличными методом.

Метод обратного преобразования Лапласа

Оригинал $f(t)$ может быть найден по известному изображению $F(p)$ с помощью так называемом формулы Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}dp. \tag{18.29}$$

Здесь интегрирование производится по любой вертикальной прямой, лежащей в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_{\text{o}}$, где s_{o} – показатель роста оригинала $f(t)$.

Метод, основанный на применении формулы (18.29), решает общую задачу обращения преобразования Лапласа, однако, в силу своей сложности, в инженерной практике не применяется.

Теоремы разложения

Оригинал, соответствующий рациональному изображению, можно также находить, пользуясь известными в операционном исчислении теоремами разложения.

Прежде чем перейти к изучению теорем разложения, сформулируем без доказательства лемму Жордана.

Лемма Жордана. Пусть функция $F(p)$ стремиться к нулю при $|p| \to \infty$ и $\operatorname{Re} p < s$, то при $t > 0$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{c_R} F(p) \mathrm{e}^{pt} dt = 0, \qquad (18.30)$$

где c_R дуга окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 18.5).

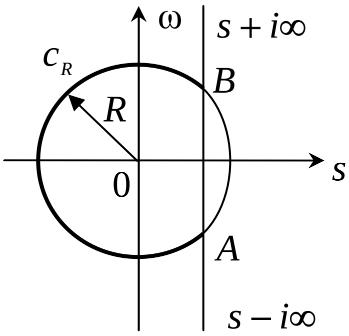
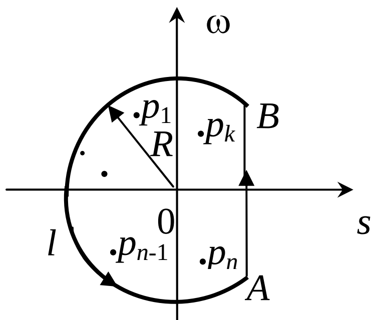


Рис. 18.5

Теорема 18.14 (*основная теорем разложения*). Если изображение $F(p)$ аналитично во всей комплексной плоскости за исключением особых точек p_k, $k = \overline{1, n}$ и $\lim_{|p| \to \infty} F(p) = 0$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p_k} \left(F(p) \mathrm{e}^{pt} \right). \qquad (18.31)$$

Доказательство. Обозначим через l замкнутый ориентированный контур, изображенный на рис. 18.6:



По теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{AB} F(p)\mathrm{e}^{pt}dp + \int_{BA} F(p)\mathrm{e}^{pt}dp\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l} F(p)\mathrm{e}^{pt}dp = \sum_{k=1}^{n} \underset{p_k}{\mathrm{res}}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right). \qquad (18.32)$$

Пусть $R \to \infty$, тогда по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} \int_{BA} F(p)\mathrm{e}^{pt}dt = 0.$$

Из (18.32) следует

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}dp = \sum_{k=1}^{n} \underset{p_k}{\mathrm{res}}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right).$$

На основании формулы Римана-Мелина (18.29)

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p_k}{\mathrm{res}}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right).$$

Пример 18.16. Используя основную теорему разложения, найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2 - 3p + 2}$.

Решение. Функция $F(p)$ удовлетворяет условиям теоремы 18.14. Корни знаменателя p^2-3p+2 есть простые полюсы $p_1=1,\ p_2=2$. По известной формуле $\operatorname*{res}_{p_k}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right)=\lim_{p\to p_k}(p-p_k)\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right)$, находим вычеты в указанных точках.

$$\operatorname*{res}_{p=1}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right)=\lim_{p\to 1}\frac{(p+1)(p-1)}{(p-1)(p-2)}\mathrm{e}^{pt}=-2\mathrm{e}^{t};$$

$$\operatorname*{res}_{p=2}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right)=\lim_{p\to 1}\frac{(p+1)(p-2)}{(p-1)(p-2)}\mathrm{e}^{pt}=3\mathrm{e}^{t};$$

По формуле (18.31) окончательно получим

$$f(t)=-2\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{2t}.$$

Если изображение есть правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет только простые корни, то теорема разложения примет следующий вид.

Теорема 18.15 (*теорема разложения*). Если изображение является правильной рациональной дробью $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$ и знаменатель $Q_n(p)$ имеет только простые (кратности 1) корни $p_1,\ p_2,\ldots p_n$ то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\mathrm{e}^{p_k t}.$$

Доказательство. Так как в этом случае

$$\underset{p_k}{\operatorname{res}}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right)=\lim_{p\to p_k}\left(p-p_k\right)\frac{P_m(p)}{Q_n(p)}\mathrm{e}^{pt}=\lim_{p\to p_k}\frac{P_m(p)\mathrm{e}^{pt}}{\dfrac{Q_n(p)-Q_n(p_k)}{p-p_k}}=\frac{P_m(p_k)\mathrm{e}^{p_k t}}{Q_m'(p_k)},$$

то по формуле (18.31)

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p_k}{\operatorname{res}}\left(F(p)\mathrm{e}^{pt}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)\mathrm{e}^{p_k t}}{Q_n'(p_k)}.$$

Пример 18.17. По теореме разложения найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2-3p+2}$, рассмотренному в предыдущем примере.

Решение. $P_m(p)=p+1,$ $Q_n(p)=p^2-3p+2,$ $Q_n'(p)=2p-3,$ корни знаменателя $p_1=1,$ $p_2=2$.

$$\frac{p+1}{p^2-3p+2}\div\frac{1+1}{2-3}\mathrm{e}^t+\frac{2+1}{4-3}\mathrm{e}^{2t},$$

т. е. $f(t)=-2\mathrm{e}^t+3\mathrm{e}^{2t}$, что совпадает с результатом, полученным ранее.

18.8. Приложения операционного исчисления

Решение дифференциальных уравнений

Применим рассмотренные ранее правила и теоремы операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Операционный метод решения дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями заключается в следующем:

1. К обеим частям заданного дифференциального уравнения применяем преобразование Лапласа с учетом его линейности и правила дифференцирования оригинала. Получаем новое, так называемое операторное уравнение, которое является линейным алгебраическим уравнением относительно изображения $Y(p)$ неизвестного решения $y(t)$.

2. Решаем операторное уравнение относительно изображения $Y(p)$.

3. От изображения $Y(p)$ переходим к оригиналу $y(t)$, который является решением исходного уравнения.

Преимущество операционного метода состоит в том, что решение задачи Коши не требует нахождения общего и выделения из него частного решения, как это делается в теории дифференциальных уравнений и связано с трудностями вычислительного характера.

Пример 18.18. Найти частное решение уравнения $y''(t)-5y'(t)+4y(t)=\mathrm{e}^{-t}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=-1$.

Решение. Преобразуем уравнение по Лапласу. Пусть $y(t)\div Y(p)$, тогда

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p)-1.$$

$$y''(t)\div p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p+1.$$

$$\mathrm{e}^{-t}\div\frac{1}{p+1}.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$p^2Y(p)-p+1-5pY(p)+5+4Y(p)=\frac{1}{p+1},$$

$$Y(p)(p^2-5p+4)=\frac{1}{p+1}+p-6.$$

$$Y(p)=\frac{p^2-5p-5}{(p+1)\left(p^2-5p+4\right)}$$

или

$$Y(p)=\frac{p^2-5p-5}{(p+1)(p-1)(p-4))}.$$

Найдем оригинал, соответствующий данному изображению по теореме разложения. Корни знаменателя простые: $p_1=-1,\ \ p_2=1,\ \ p_3=4$.

$$P_2(p)=p^2-5p-5,$$

$$Q_3(p)=(p+1)\left(p^2-5p+4\right),$$

$$Q_3'(p)=p^2-5p+4+(p+1)(2p-5)=3p^2-8p-1,$$

$$y(t)=\sum_{k=1}^{3}\frac{P_2(p_k)}{Q_3'(p_k)}\mathrm{e}^{p_k t}.$$

$$y(t)=\frac{1+5-5}{3+8-1}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1-5-5}{3-8-1}\mathrm{e}^{t}+\frac{16-20-5}{48-32-1}\mathrm{e}^{4t},$$

$$y(t)=\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{t}-\frac{3}{5}\mathrm{e}^{4t}.$$

Если начальные условия заданы в произвольной точке $t_0\neq 0$, то сделав замену $t-t_0=\tau$, решение сведем к задаче Коши при $\tau=0$.

Пример 18.19. Найти решение уравнения $y'' + 2y' + y = 2e^{1-t}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

Решение. Положим $\tau = t - 1$, тогда $\tau = 0$ при $t = 1$. Исходное уравнение и начальные условия примут вид

$$y''(\tau) + 2y'(\tau) + y(\tau) = 2e^{-\tau},$$

$$y(0) = 1, \ \ y'(0) = -1.$$

Переходя к операторному уравнению, получим

$$p^2 Y(p) - p + 1 + 2pY(p) - 2 + Y(p) = \frac{2}{p+1},$$

$$Y(p)\left(p^2 + 2p + 1\right) = \frac{2}{p+1} + p + 1,$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{1}{p+1},$$

$$\frac{2}{p^3} \div \tau^2; \quad \frac{2}{(p+1)^3} \div \tau^2 e^{-\tau},$$

$$y(\tau) = \tau^2 e^{-\tau} + e^{-\tau} = e^{-\tau}\left(\tau^2 + 1\right).$$

Возвращаясь к старой переменной по формуле $\tau = t - 1$, получим

$$y(t) = e^{1-t}((t-1)^2 + 1) = e^{1-t}\left(t^2 - 2t + 2\right).$$

Решение систем дифференциальных уравнений

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами решаются так же, как и отдельные дифференциальные уравнения. Каждое из уравнений системы преобразуется по Лапласу, а затем полученная система линейных алгебраических уравнений решается относительно изображений решения.

Проиллюстрируем метод на конкретном примере.

Пример 18.20. Найти частное решение системы $\begin{cases} x'(t) - 3x(t) - 5y(t) = 0, \\ y'(t) + 2x(t) + 8y(t) = 0, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2$, $y(0) = 5$.

Решение. Пусть $x(t) \div X(p)$ и $y(t) \div Y(p)$, $x'(t) \div pX(p) - 2$, $y(t) \div pY(p) - 5$.

Преобразованная система будет иметь вид

$$\begin{cases} X(p)(p-3) - 5Y(p) = 2, \\ 2X(p) + Y(p)(p+8) = 5. \end{cases}$$

Решим ее по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-3 & -5 \\ 2 & p+8 \end{vmatrix} = p^2 + 5p - 14,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & p+8 \end{vmatrix} = 2p + 41,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} p-3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5p - 19.$$

$$X(p) = \frac{2p+41}{p \ \ + 5p - 14} = \frac{2p+41}{(p-2)(p+7)} = \frac{5}{p-2} - \frac{3}{p+7},$$

$$Y(p) = \frac{5p-19}{(p-2)(p+7)} = -\frac{1}{p-2} + \frac{6}{p+7}.$$

Искомое решение равно

$$x(t) = 5e^{2t} - 3e^{-7t};$$
$$y(t) = -e^{2t} + 6e^{-7t}.$$