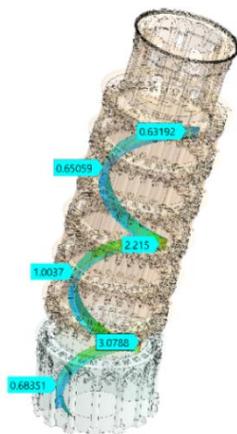


а



б

Рисунок 7 – Испытание силой тяжести САЕ-модели башни с наклоном $5,5^\circ$ башни: а – картина минимального главного напряжения σ_3 (МПа) на колоннаде С1 ($\times 2500$); б – картина эквивалентного напряжения σ_e (МПа) на стенках винтового хода ($\times 4000$)

УДК 621.9.011

**МКЭ-АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ПИЗАНСКОЙ БАШНИ В ПРОЕКТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ.
СЕРИЯ «МКЭ ДЛЯ ПИЗЫ». ЧАСТЬ В**

Студенты гр.10305220 Роденя А.В., Шведова Д.Н.,
Научные руководители – Довнар С.С., Лапука А.Д.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В работе рассматривается виртуальная ситуация, когда известная Пизанская башня (рисунок 1) не стала бы наклоняться в XII-ом веке, а осталась стоять вертикально. Это была бы её проектная конфигурация. Тогда основным вариантом нагружения конструкции является вертикальное нагружение силой тяжести (центрально сжатый стержень). Интересно сделать МКЭ-анализ и выявить проектное (интуитивно предполагавшееся средневековым

архитектором) напряженное состояние этой сложной и выразительной башни.

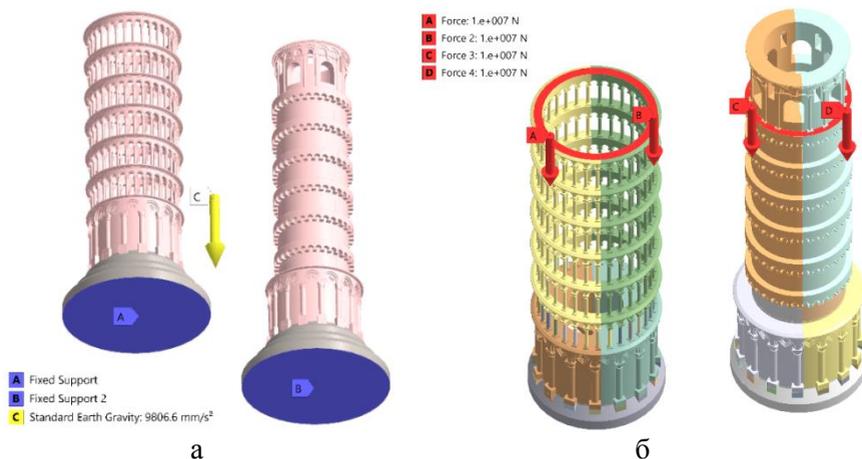


Рисунок 1 – Варианты вертикального нагружения башни:
 а – силой тяжести C при фиксации фундамента (A, B);
 б – тестовыми силами (слева система НСБ, справа – НСТ)

Механические свойства материалов (прежде всего, мрамора для башни) даны в таблице 1. В толще стен может находиться кладка из более дешевых, чем мрамор, материалов. Однако, точная информация о таком наполнителе не обнаружена. Свойства исторических наполнителей, распространенных в Италии в то время, тоже даны в таблице 1.

В результате, было решено ввести модельную кладку – виртуальный обобщенный материал, представляющий совокупность мраморной кладки и неопределенных наполнителей стен. Достоинством данного материала является соответствие его экспериментальным данным по собственным частотам башни. Первые два резонанса башни являются изгибными и находятся в диапазоне 0,95 – 1.1 Гц. Назначение башне модельной кладки дает в МКЭ-расчете собственные частоты, равные ~1,05 Гц. Следовательно, данный материал может анализироваться далее.

Таблица 1. Механические свойства материалов, учитываемых в МКЭ-моделях

Материал	Модуль упругости E , МПа	Кэф. Пуассона, μ	Удельная плотность ρ , кг/м ³	Допустимое сжатие $[\sigma_{comp}]$, МПа
Мрамор (<i>marble</i>)	59200	0,175	2780	58-153
Модельная кладка (<i>masonry</i>)	5920	0,175	2780	5-10
Кирпичная кладка (<i>brick masonry</i>)	4000	0,2	1700	4,0
Селенитовая кладка (<i>selenite</i>)	4000	0,2	2200	6,0
Наполнитель (~бетон) (<i>stucco</i>)	3000	0,2	1600	4,0
Сталь (<i>steel</i>)	210000	0,3	7850	>220

Прочность цельного мрамора на сжатие весьма высока. Однако, в составе исторической кладки он, вероятно, покажет большую склонность к повреждениям. Исходя из свойств материалов – аналогов, следует считать опасными напряжения сжатия уже на уровне 5 – 10 МПа. Более точные оценки возможны только после дополнительных натурных исследований.

На рисунок 2 представлено нагружение башни равномерным давлением $p = 10$ МПа сверху (*LC «Press-comp»*). В этом режиме постоянного по сечениям усилия сооружение подобно стержню, подвергающемуся центральному сжатию (рисунок 2, а). Рисунок 2, б иллюстрирует превращение давления в минимальное главное напряжение σ_3 , направленное, в основном, вертикально. Всплеск сжатия в проемах окон верхушки (-27,382 МПа) обусловлен относительно небольшой их площадью в горизонтальном сечении. Невысокий уровень σ_3 в базе (-5,8043 МПа) также естественен. Здесь весьма велика площадь поперечного сечения.

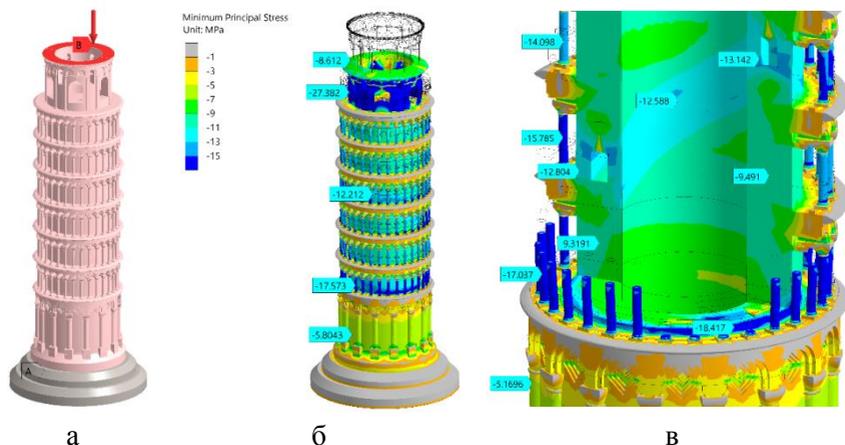


Рисунок 2 – Нагрузка башни давлением 10 МПа по LC «Press-comp» (а), картина минимального главного напряжения σ_3 (б) и ситуация в районе колоннады С1 (в); $\times 500$.

Неочевидным эффектом сжатия по LC «Press-comp» является нарастание сжатия в колоннах по мере спуска постоянного усилия вниз по ярусам. На 4-ом ярусе напряжение сжатия в колонне составило -12,212 МПа, а на 1-ом ярусе увеличилось по абсолютной величине до -17,573 МПа. С большими подробностями эффект описывает рисунок 2, в. Напряжения ствола примерно постоянны по высоте. Они циклически изменяются согласно трассе винтового хода. Ход хорошо виден на картине минимального главного напряжения (-12,804 МПа, -12,588 МПа, -13,142 МПа). Боковые стенки хода перегружены в $\sim 1,3$ раза. Вдали от хода стена ствола сжата только до -9,491 МПа или -9,3191 МПа. Колонны с 3-го по 1-ый ярус подвергаются сжатию всё сильнее: -14,098 МПа; -15,785 МПа; -17,037 МПа. Попутно обратим внимание на сильный дуговой концентратор сжатия ДСК, отмеченный маркером -18,417 МПа.

Нарастание сжатия в колоннах книзу может быть объяснено только несовместностью деформирования несущих систем НСБ и НСТ. Ствол (НСТ) проседает на базе глубже, чем колонны, так как несет основную нагрузку ввиду своей жесткости. С помощью ярусных навесов тянет за собой вниз барабан колонн (НСБ). Эта

несущая систему гораздо податливее. Она не может «сопротивляться» стволу. Её вдавливают в базис, сжимая колонны.

Вертикальное усилие передается в барабан колонн через ярусные навесы S_6 , S_5 и т.д. Поэтому самое большое усилие приходится на колонны $C1$, лежащие ниже $S1$. В результате нижняя колоннада перегружена в смысле напряжений сжатия σ_3 , но основное усилие передается на базис через ствол (точнее, через опорное кольцо).

На рисунок 3 две отдельные виртуальные башни НСБ и НСТ испытываются силой тяжести. Сила и оси башен вертикальны (вариант нагружения LC «*Self-up*»). Фундаменты выполнены из бетона, а башни – из мрамора. Барабан колонн и ствол башни проседают под собственным весом почти одинаково (рисунок 3, а). Вертикальные перемещения составили 0,97171 мм и 0,83397. В целом, системы НСБ и НСТ вполне совместимы для несения нагрузки от гравитации.

Напряженное состояние обеих систем предсказуемо. Напряжения нарастают при движении сверху вниз. Колонны нагружены на нижней колоннаде существенно (3,2096 МПа). В смысле допустимых напряжений (5 – 10 МПа) колонны с трудом несут сами себя. Ствол на уровне первого яруса нагружен умеренно (1,6315 МПа) и имеет большой запас прочности.

Проектное нагружение вертикальной башни собственным весом при соединенных системах НСБ и НСТ (вариант LC «*Self-up*») отражено на рисунок 3. Оно было бы реализовано на практике, если бы не возник наклон конструкции.

На рисунок 3, а показаны вертикальные перемещения башни (деформационная осадка). На верхушке она составляет 0,88014 мм. К низу осадка башни убывает, составляя только 0,30692 мм над базисом. Под фундаментом задано нулевое перемещение.

Картина перемещений указывает на сильное сжатие нижних ярусов. Так, различие осадок между двумя верхними навесами $S4$ (0,77058 мм) и $S6$ (0,85125 мм) составляет только 0,08067 мм. Между двумя нижними ярусами разница равна $0,60364 - 0,30692 = 0,29672$ мм (в 3,67 раз больше).

Это подтверждает картина эквивалентных напряжений σ_e (рисунок 3, б). Колонны колоннады $C1$ визуальнo выпучены наружу. Маркер указывает на достижение здесь существенного

уровня напряжения в 2,5721 МПа. На третьем ярусе, в колоннаде С3 напряжение σ_e составило только 1,2905 МПа (в 1,99 раз меньше). Следовательно, колонны семейства С1 являются в башне самыми нагруженными объектами.

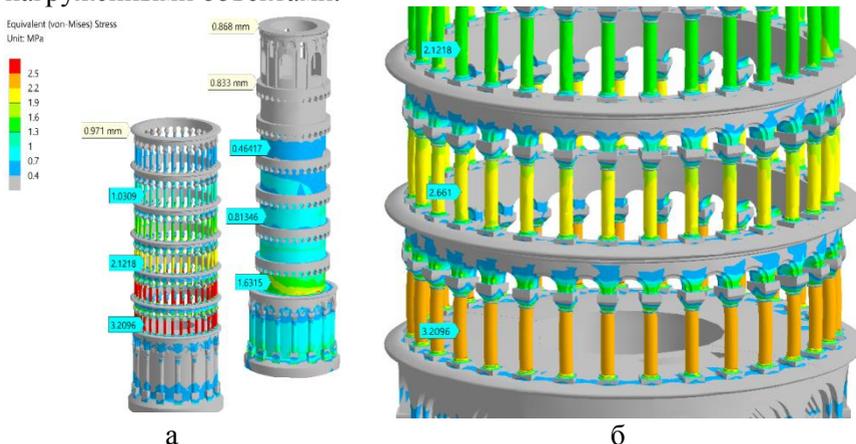


Рисунок 3 – Осадка (маркеры в мм) в барабане колонн НСБ и стволе НСТ (а) и картины напряжений σ_e (а, б; МПа) под силой тяжести (LC «Self-up»; $\times 4500$)

Распределение эквивалентных напряжений σ_e создается в данном расчетном случае почти полностью картиной минимального главного напряжения σ_3 , отражающего распределение сжимающих усилий (рисунок 4). В вертикальном сечении башни (рисунок 4, а) видно, что колонны со 6-го по 2-ой ярус нагружены умеренно. Сжимающее осевое напряжение в них увеличивается плавно с -0,42215 до -1,791 МПа. Такие уровни не угрожают прочности башни. На первом ярусе колоннада С1 сжата сильнее (-2,3647 и -2,3712 МПа). Однако, здесь достигается только половина минимального допустимого напряжения на сжатие мрамора $[\sigma_{comp}^{marble}] = 5$ МПа.

Напряжения в стене ствола (правая часть рисунок 4, а) растут по абсолютной величине сверху вниз (от -0,32158 до -1.1282 МПа), но они всегда меньше, чем напряжения сжатия в соответствующих по ярусу колоннах. Например, на 2-ом ярусе сжатие в колонне -1,79 МПа отвечает сжатие в стене -1.1282 МПа (меньше в 1,58 раза).

Итак, при совместной работе несущих систем НСБ (колонны) и НСТ (ствол) стена ствола оказывается нагружена примерно в полтора раза меньше, чем окружающие колонны. Следовательно, барабан колонн несколько перегружен. Равномерного распределение веса между двумя несущими конструкциями не достигается.

Подробное рассмотрение стыка ствола и базиса в четвертном разрезе (рисунок 4, б) подтверждает сделанные выводы. Видно выпучивание колонн первого яруса. В одной из них напряжение σ_3 достигает -2,3785 МПа, в то время как рядом, в глубине стены, оно составляет только -1,2871 МПа (почти двукратное различие).

На рисунок 4, б хорошо видна концентрация напряжений в винтовом ходе (около угла разреза ход открывается дважды – маркеры -1,982 и -1,5076 МПа). Сжимаются именно стенки по обоим сторонам хода. Об этом говорит, например, маркер -1,982 МПа. Вдали от винтового хода (но на той же высоте) стена сжата в полтора раза слабее – маркер -1,2871 МПа.

Маркер -1,5076 МПа указывает на винтовую полосу концентрации σ_3 , поворачивающую вверх и направо по внутренней поверхности ствола. Итак, винтовой ход сопровождается винтовой концентрацией напряжений по обоим сторонам от него.

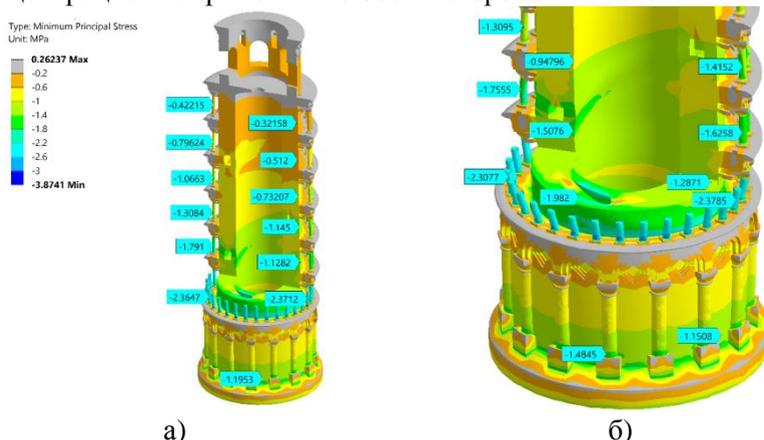


Рисунок 4 – Картины минимального главного напряжения σ_3 (МПа) на секционной модели башины (а) и в четвертном разрезе на стыке базиса и ствола (б): LC1 «Self-up»; $\times 16000$