

УДК 629.7.08

**ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ
В РАСЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТЕРЖНЯ
НА ПРОЧНОСТЬ**

**THE PHYSICAL MEANING OF THE STIFFNESS MATRIX
IN THE CALCULATION OF THE SPATIAL ROD
FOR STRENGTH**

Холяров К. Х., магистрант,
Хакимзянов Р. Р., канд. техн. наук, доц.,
Ташкентский государственный транспортный университет,
г. Ташкент, Узбекистан
K. Kholiyarov, Master's student,
R. Khakimzyanov, Ph.D. in Engineering, Associate Professor,
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

В данной статье рассматривается матрица жесткости пространственного стержня, которая используется при расчете пространственных моделей методом конечных элементов.

This article discusses the stiffness matrix of the spatial rod, which is used in the calculation of spatial models by the finite element method.

Ключевые слова: изгиб, матрица жесткости, пространственный стержень, нагрузка, изгибающий момент, модуль упругости, перемещения.

Keywords: bending, stiffness matrix, spatial rod, load, bending moment, modulus of elasticity, displacement.

ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов широко используется для расчета пространственных элементов во многих инженерных программах. Данный метод содержит в себе элементы векторной алгебры – матриц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим матрицы жесткости на примере расчета пространственного стержня (рисунок 1), как объединение элементов, описывающих [1]:

- 1) изгиб в плоскости xu ;
- 2) изгиб в плоскости xz .

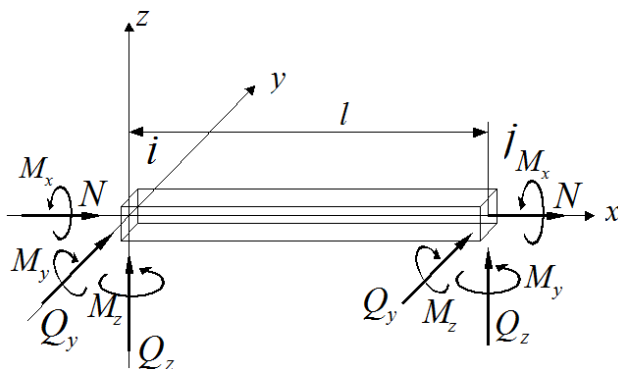


Рисунок 1 – Стержневой элемент под действием поперечных сил и изгибающих моментов.

Рассмотрим вклад каждого элемента в матрицу жесткости пространственного элемента (таблицы 1, 2, 3):

Таблица 1 – Матрица жесткости пространственного стержня

	u_1	v_1	w_1	Φ_{1x}	Φ_{1y}	Φ_{1z}	u_2	v_2	w_2	Φ_{2x}	Φ_{2y}	Φ_{2z}
N_1	$\frac{EF}{l}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EF}{l}$	0	0	0	0	0
Q_{1y}	0	$\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$
Q_{1z}	0	0	$\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0
M_{1x}	0	0	0	$\frac{GI_K}{l}$	0	0	0	0	0	$-\frac{GI_K}{l}$	0	0
M_{1y}	0	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{4EI_y}{l}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{2EI_y}{l}$	0
M_{1z}	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{l}$	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{l}$
N_2	$-\frac{EF}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{EF}{l}$	0	0	0	0	0
Q_{2y}	0	$-\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	$\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$
Q_{2z}	0	0	$-\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0
M_{2x}	0	0	0	$-\frac{GI_K}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_K}{l}$	0	0
M_{2y}	0	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{2EI_y}{l}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{4EI_y}{l}$	0
M_{2z}	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{l}$	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{l}$

1. Изгиб в плоскости xu .

Таблица 2 – Компоненты матрицы жесткости, описывающие изгиб в плоскости xu

	0	v_1	0	0	0	Φ_{1z}	0	v_2	0	0	0	Φ_{2z}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_{1y}	0	$\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_{1z}	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{l}$	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{l}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_{2y}	0	$-\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	$\frac{12EI_z}{l^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_{2z}	0	$\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{l}$	0	$-\frac{6EI_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{l}$

2. Изгиб в плоскости xz .

Изгиб в плоскости xz отличается от изгиба в плоскости xu направлением знаков моментов и углов поворота. Для того чтобы привести матрицу жесткости, составленную для плоскости xu в соответствие с направлениями изгибающих моментов и углов поворота для плоскости xz надо

$$Q_{1y}, M_{1z}, Q_{2y}, M_{2z}, v_1, \phi_{1z}, v_2, \phi_{2z}$$

поменять на

$$Q_{1z}, -M_{1y}, Q_{2z}, -M_{2y}, w_1, -\phi_{1y}, w_2, -\phi_{2y}$$

Для ясности запишем зависимость между узловыми силами и узловыми перемещениями в плоскости xu в развернутом виде и сделаем преобразования:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Q_{1y} \\ M_{1z} \\ Q_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} &= \frac{EJ_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_{1z} \\ v_2 \\ \phi_{2z} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
Q_{1y} &= \frac{EJ_z}{l^3} (12v_1 + 6l\phi_{1z} - 12v_2 + 6l\phi_{2z}) \\
M_{1z} &= \frac{EJ_z}{l^3} (6lv_1 + 4l^2\phi_{1z} - 6lv_2 + 2l^2\phi_{2z}) \\
\Rightarrow Q_{2y} &= \frac{EJ_z}{l^3} (-12v_1 - 6l\phi_{1z} + 12v_2 - 6l\phi_{2z}) \\
M_{2z} &= \frac{EJ_z}{l^3} (6lv_1 + 2l^2\phi_{1z} - 6lv_2 + 4l^2\phi_{2z}) \\
Q_{1z} &= \frac{EJ_y}{l^3} (12w_1 + 6l(-\phi_{1y}) - 12w_2 + 6l(-\phi_{2y})) \\
-M_{1y} &= \frac{EJ_y}{l^3} (6lw_1 + 4l^2(-\phi_{1y}) - 6lw_2 + 2l^2(-\phi_{2y})) \\
\Rightarrow Q_{2z} &= \frac{EJ_y}{l^3} (-12w_1 - 6l(-\phi_{1y}) + 12w_2 - 6l(-\phi_{2y})) \\
-M_{2y} &= \frac{EJ_y}{l^3} (6lw_1 + 2l^2(-\phi_{1y}) - 6lw_2 + 4l^2(-\phi_{2y})) \\
Q_{1z} &= \frac{EJ_y}{l^3} (12w_1 - 6l\phi_{1y} - 12w_2 - 6l\phi_{2y}) \\
M_{1y} &= \frac{EJ_y}{l^3} (-6lw_1 + 4l^2\phi_{1y} + 6lw_2 + 2l^2\phi_{2y}) \\
\Rightarrow Q_{2z} &= \frac{EJ_y}{l^3} (-12w_1 + 6l\phi_{1y} + 12w_2 + 6l\phi_{2y}) \\
M_{2y} &= \frac{EJ_y}{l^3} (-6lw_1 + 2l^2\phi_{1y} + 6lw_2 + 4l^2\phi_{2y})
\end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} Q_{1z} \\ M_{1y} \\ Q_{2z} \\ M_{2y} \end{bmatrix} = \frac{EJ_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \phi_{1y} \\ w_2 \\ \phi_{2y} \end{bmatrix}$$

где Q_{1y} , Q_{2y} – перемещения в начале и в конце балки соответственно;

M_{1y} , M_{2y} – изгибающие моменты в начале и в конце балки соответственно.

Подставив коэффициенты матрицы жесткости, в общую матрицу на свои места получим:

Таблица 3 – Компоненты матрицы жесткости, описывающих изгиб в плоскости xz

	0	0	w_1	0	ϕ_{1y}	0	0	0	w_2	0	ϕ_{2y}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_{1z}	0	0	$\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_{1y}	0	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{4EI_y}{l}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{2EI_y}{l}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_{2z}	0	0	$-\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{l^3}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_{2y}	0	0	$-\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{2EI_y}{l}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{l^2}$	0	$\frac{4EI_y}{l}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Хахимзянов, Р. Р. Обоснование прочностных параметров каркаса кабины трактора класса 1,4. Кандидатская диссертация / Р. Р. Хахимзянов. Т.: ТАДИ, 2011. – 118 с.

Представлено 14.04.2022