МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная математика»

И. В. Прусова
Н. К. Прихач

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие
для студентов специальностей
1-36 01 05 «Машины и обработка металлов давлением»,
1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства»

В 2 частях

Часть 1

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области металлургического оборудования и технологий

Под редакцией М. А. Князева

Минск
БНТУ
2022

УДК 51(076.5)(076.1)
ББК 22.1я7
П85

Р е ц е н з е н т ы:
первый проректор Белорусского государственного университета,
профессор, д-р пед. наук *Д. Г. Медведев*;
кафедра информационных технологий и математики
учреждения образования «БИП – университет права
и социально-информационных технологий»
(зав. каф. *Л. В. Серебряная*)

Прусова, И. В.

П85 Сборник вопросов и задач для практических занятий и контрольных работ по математике : пособие для студентов специальностей 1-36 01 05 «Машины и обработка металлов давлением», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства» : в 2 ч. / И. В. Прусова, Н. К. Прихач ; под ред. М. А. Князева. – Минск : БНТУ, 2022. – Ч. 1. – 86 с.

ISBN 978-985-583-787-0 (Ч. 1).

Данное пособие предназначено для студентов механико-технологического факультета очной или заочной формы обучения. Содержит задачи и вопросы по следующим разделам курса «Математика»: «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Основы математического анализа». Приведены примеры решения задач и необходимые справочные данные.

УДК 51(076.5)(076.1)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-787-0 (Ч. 1)
ISBN 978-985-583-786-3

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА»

В процессе изучения курса математики студент должен выполнить в каждом семестре одну контрольную работу. Контрольная работа за первый семестр состоит из 30 вариантов, в каждом из которых по 13 заданий. Номер варианта, который требуется выполнить студенту, определяется по последней цифре номера его студенческого билета или зачетной книжки.

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) приводить решения задач в порядке, указанном в задании;

3) указывать перед каждым решением полный номер задачи (например, 1.2.17 – первая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) приводить решения и необходимые пояснения крупным и разборчивым почерком;

5) оставлять место для возможных замечаний рецензента после каждого решения;

6) приводить исправленные решения задач в конце работы. Незачтенные работы заново не оформляются (если на необходимость этого не указано рецензентом).

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Решения задач должны содержать пояснения и необходимые рисунки. Все решения и рисунки выполняются от руки. Использование онлайн-калькуляторов разрешается только для проверки правильности решения. В случае прямого копирования работы онлайн-калькулятора решение задачи не засчитывается.

После получения проверенной работы студент должен исправить отмеченные преподавателем недочеты, а также выполнить все его рекомендации. Исправления нужно записывать в этой же тетради после всех решенных задач контрольной работы. Вносить исправления в тексты решения задач после рецензирования запрещается.

Незачтенную контрольную работу с последующими соответствующими исправлениями следует направить на повторную рецензию.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» ЗА ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Рабочая программа предназначена для специальностей инженерно-технического профиля.

Программа по математике за первый семестр включает три раздела:

1) элементы линейной алгебры;

2) векторная алгебра и аналитическая геометрия;

3) основы математического анализа.

Элементы линейной алгебры.

Понятие «матрица». Частные виды матрицы. Понятие определителя квадратной матрицы. Свойства определителей. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.

Линейные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Понятие обратной матрицы, условие ее существования. Решение матричных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

Система линейных уравнений: понятие ее решения, матричная форма записи. Решение линейной системы с квадратной невырожденной матрицей по формулам Крамера. Решение линейной системы методом Гаусса.

Однородная система линейных уравнений и ее решение. Применение метода Гаусса для отыскания обратной матрицы.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Векторы в трехмерном пространстве: линейные операции, базис, координаты, условие коллинеарности. Проекция вектора на ось.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов в трехмерном пространстве: определения, свойства, формулы вычисления через координаты векторов в ортонормированном базисе.

Общее уравнение плоскости в трехмерном пространстве; уравнение плоскости, проходящей через данную точку и имеющей данный нормальный вектор; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Определение угла между двумя плоскостями, вычисление расстояния от точки до плоскости.

Уравнения прямой на плоскости и в пространстве: канонические уравнения, параметрические уравнения; общие уравнения прямой. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости и в пространстве, прямой и плоскости. Определение угла между двумя прямыми на плоскости, угла между прямой и плоскостью в пространстве.

Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола и их канонические уравнения. Построение кривых второго порядка по данному каноническому уравнению.

Основы математического анализа.

Определение предела функции в точке, в бесконечности. Предел последовательности как частный случай предела функции. Односторонние пределы функции. Основные теоремы о пределе функции.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства; связь бесконечно больших функций с бесконечно малыми. Сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые функции.

Отыскание предела отношения двух многочленов при $x \to x_0$, где x_0 – конечное число, и при $x \to \infty$. Первый и второй замечательный предел.

Функции, непрерывные в точке, и их свойства. Точки разрыва функции и их классификация. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.

Определение производной. Дифференцируемая функция и ее дифференциал.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Правило дифференцирования суммы, произведения, частного. Таблица производных.

Дифференцирование сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование обратной и параметрически заданной функции.

Производные и дифференциалы высших порядков. Инвариантность формулы первого дифференциала.

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Использование правила Лопиталя при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей вида $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$; $\left[1^{\infty}\right]$; $\left[\infty^{0}\right]$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Формула Маклорена для основных элементарных функций.

Признаки возрастания и убывания функции на промежутке. Локальный экстремум функции. Необходимое условие экстремума, достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Определение выпуклой кривой, вогнутой кривой, точки перегиба. Условия выпуклости и вогнутости кривой. Понятие асимптоты кривой, отыскание вертикальных и невертикальных асимптот. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Основные понятия и формулы

Таблица чисел a_{ij} вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right),$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размерности $m \times n$. Числа a_{ij} называются ее элементами. Если $m = 1$, $n > 1$, имеем однострочную матрицу, которую называют матрицей-строкой. Если же $m > 1$, а $n = 1$, то имеем одностолбцевую матрицу.

Если в матрице число строк равно числу столбцов $(m = n)$, то такую матрицу называют квадратной, причем число ее строк или столбцов называется порядком матрицы.

Две матрицы A и B называются равными $(A = B)$, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны.

Операции над матрицами.

1. Суммой двух матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

2. Произведением матрицы A на число λ называется матрица B, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A.

3. Произведением $A \cdot B$ матрицы A $(m \times n)$ на матрицу B $(n \times k)$ называется матрица C $(m \times k)$, элемент которой, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Единичной матрицей E называется такая матрица, при умножении которой слева или справа на матрицу A получается матрица A.

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой столбцов строками с теми же номерами, называется транспонированной по отношению к A.

Каждой квадратной матрице A можно сопоставить число $|A|$, которое вычисляется по определенному правилу. Это число называется определителем матрицы A.

Например:

1) определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

2) определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Обратная матрица. Ранг матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n. Минором M_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием из матрицы i-ой строки и j-го столбца.

Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица порядка n.

Способ определения обратной матрицы:

1) каждый элемент матрицы A заменяется его алгебраическим дополнением $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;

2) полученная матрица транспонируется (строки заменяются на столбцы);

3) все элементы делятся на определитель матрицы A.

Рангом матрицы называется наибольший из ее определителей, отличных от нуля. Обозначается r или r_A.

Системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (1.1)$$

где x_i – неизвестные;

a_{ij} – коэффициенты системы;

b_i – свободные члены.

Система чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется решением системы уравнений (1.1), если эти числа при подстановке в систему превращают ее в тождество. Если система (1.1):

а) не имеет ни одного решения, то она называется несовместной;

б) имеет решение – совместной;

в) если совместная система имеет бесконечное множество решений, то она называется неопределенной;

г) если совместная система имеет единственное решение, то она называется определенной.

Правило Крамера. Если определитель матрицы системы (1.1) не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам: $x_i = \Delta_i / \Delta$, где $\Delta = |A|$, а Δ_i – определитель, получаемый из матрицы системы путем замены столбца i столбцом свободных членов b_i.

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он основан на том, что к системе линейных уравнений, равносильной исходной, приводят следующие две операции:

1. Умножение одного из уравнений на число.

2. Замена одного из уравнений системы на его сумму с другим, умноженным на какое-либо число.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

Первый этап (прямой ход метода) – система с помощью этих операций приводится к ступенчатому (треугольному) виду путем последовательного исключения неизвестных.

Второй этап (обратный ход) – последовательно определяются неизвестные из этой ступенчатой системы, начиная с последнего и заканчивая первым.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&1&2\\1&5&3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&0&3\\-1&3&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

Найти $A\cdot C,A^2,A^2+5B.$

Решение.

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы C, поэтому можно умножить матрицу A на матрицу C. Находим:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&1&2\\1&5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+4(-2)+1\cdot3\\3\cdot2+1(-2)+2\cdot3\\1\cdot2+5(-2)+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\10\\1\end{pmatrix}.$$

Возведем матрицу A в квадрат – умножим ее саму на себя. Получаем:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&1&2\\1&5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4&1\\3&1&2\\1&5&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+4\cdot3+1\cdot1&2\cdot4+4\cdot1+1\cdot5&2\cdot1+4\cdot2+1\cdot3\\3\cdot2+1\cdot3+2\cdot1&3\cdot4+1\cdot1+2\cdot5&3\cdot1+1\cdot2+2\cdot3\\1\cdot2+5\cdot3+3\cdot1&1\cdot4+5\cdot1+3\cdot5&1\cdot1+5\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4+12+1&8+4+5&2+4+3\\6+3+2&12+1+10&3+2+6\\2+15+3&4+5+15&1+10+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&17&13\\11&23&11\\20&24&20\end{pmatrix}.$$

По определению операций суммы матриц и произведения матрицы на число:

$$A^2+5B=\begin{pmatrix}17&17&13\\11&23&11\\20&24&20\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&0&3\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&17&13\\11&23&11\\20&24&20\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}5&-10&0\\-5&0&15\\-5&15&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&7&13\\6&23&26\\15&39&25\end{pmatrix}.$$

Задача 2. Исследовать уравнение матричным способом:

$$X\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\3&7&2\\5&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&3&3\end{pmatrix}.$$

Решение. Уравнение имеет вид $X\cdot A=B$, где A и B – известные матрицы. Выразим X:

$$X\cdot A=B\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1};\ A\cdot A^{-1}=E,$$

где E – единичная матрица порядка 3. Получим $X=B\cdot A^{-1}$.

Находим обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&7&2\\5&4&2\end{pmatrix}$.

Вычислим ее определитель:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&7&2\\5&4&2\end{vmatrix}=2\cdot7\cdot2+3\cdot4\cdot1+3\cdot2\cdot5-1\cdot7\cdot5-2\cdot4\cdot2-$$

$$-3\cdot3\cdot2=28+12+30-35-16-18=1.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -23; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5.$$

Тогда: $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -23 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -23 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$

Находим матрицу X:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -23 & 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 60 + 12 - 69 & -20 - 3 + 21 & -10 - 3 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Решить системы линейных уравнений:

1) по формулам Крамера;

2) методом Гаусса (найти общее и какое-либо из частных решений системы уравнений).

1) $\begin{cases} x + 2y = 10; \\ 3x + 2y + z = 23; \\ y + 2z = 13. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 4y - 3z = 1; \\ 2x + 3y + 4z = 1; \\ 5x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$

Решение.

1. Найдем определитель основной матрицы данной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 12 = -9.$$

По формулам Крамера $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 23 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 40 + 26 - 10 - 92 = -36;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 1 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 46 - 13 - 60 = -27;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 26 + 30 - 23 - 78 = -45.$$

Отсюда: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-36}{-9} = 4$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-27}{-9} = 3$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-45}{-9} = 5$.

2. Умножаем первую строку на 2 и вычитаем из второй, далее – умножаем первую строку на 5 и вычитаем из третьей; из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & 10 & -1 \\ 0 & 22 & 20 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует следующая система уравнений, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x - 4y - 3z = 1; \\ 11y + 10z = -1. \end{cases}$$

Найдем общее решение через свободную переменную z. Для этого перепишем полученную систему в виде:

$$\begin{cases} x-4y=1+3z; \\ 11y=-1-10z; \end{cases}$$

откуда:

$$\begin{cases} x=1+3z+4y \\ y=\dfrac{-1-10z}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+3z+4\dfrac{-1-10z}{11}=\dfrac{7-7z}{11}; \\ y=\dfrac{-1-10z}{11}. \end{cases}$$

Пусть $z=c$. Множество решений системы имеет вид:

$$\left\{\left(\frac{7-7c}{11},\ \frac{-1-10c}{11},\ c\right)\middle|\ \forall c\in R\right\}.$$

Если взять $c=1$, то получим частное решение системы: $x=0$; $y=-1$; $z=1$.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Основные понятия и формулы

Определение вектора. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора в данном базисе.

Направленным вектором называется отрезок прямой, одна из граничных точек которого принята за начало, а другая – за конец.

Два ненулевых направленных отрезка называются эквивалентными, если их длины равны и они сонаправлены. Нулевые направленные отрезки считаются эквивалентными.

Вектором называется множество всех направленных отрезков, эквивалентных между собой. Каждый направленный отрезок этого множества называется представителем вектора.

Длиной направленного отрезка $\overline{AB}$ называется расстояние между точками A и B.

Длина вектора, обозначаемая $\left|\overline{AB}\right|$, AB или $\left|\overline{a}\right|$, называется также модулем вектора.

Два вектора называются ортогональными, если угол между ними $\dfrac{\pi}{2}$. Два вектора называются коллинеарными, если их направления совпадают или противоположны, т. е. если образующие их направленные отрезки параллельные некоторой прямой: $a \parallel b.$ Векторы называются компланарными, если представляющие их направленные отрезки лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Единичным вектором (ортом) вектора $\overline{a}$ называют вектор $\overline{a}^0 = \dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}$, который имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением вектора $\overline{a}$.

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение вектора на число.

Суммой конечного числа векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называется вектор $\overline{d}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}_1$, а конец – с концом вектора $\overline{a}_n$, при условии, что точка приложения каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего. В случае суммы двух векторов применяют правило параллелограмма.

Произведением вектора $\overline{a}$ и числа λ называется вектор, обозначаемый $\lambda \cdot \overline{a}$ (или $\overline{a} \cdot \lambda$), модуль которого равен $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Проекцией вектора $\overline{a}$ на ось l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l \overline{a}$ и равное $|\overline{a}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$ – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора $\overline{a}$, т. е. $\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$.

Координатами вектора $\overline{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Запись $\overline{a} = (x,\, y,\, z)$ означает, что вектор $\overline{a}$ имеет координаты x, y, z.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называется вектор $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – числа. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называются линейно-зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, такие, что:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = 0.$$

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называются линейно-независимыми, если равенство $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a}_i = 0$ верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов этой плоскости. Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$.

Базис называется ортонормированным, если базисные векторы ортогональны и каждый базисный вектор является единичным. Совокупность точки O (начало координат) и ортонормированного базиса $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси) называется декартовой прямоугольной системой координат в пространстве.

Свободный вектор $\overline{a}$, заданный в координатном пространстве Oxy, может быть представлен в виде $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$. Такое разложение вектора $\overline{a}$ называется его разложением по осям координат или разложением по ортам $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Длина или модуль вектора $\overline{a} = \left(a_x,\ a_y,\ a_z\right)$ определяется по формуле $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими прямоугольными координатами $\overline{a} = \left(a_x,\ a_y,\ a_z\right)$ и $b = \left(b_x,\ b_y,\ b_z\right)$, то:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = \left(a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z\right) \text{ и } \lambda a = \left(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\right).$$

Радиус-вектором точки M относительно декартовой прямоугольной системы координат $\left(O,\ \overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right)$ называется вектор $\overline{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке $M\left(x,\ y,\ z\right)$. Его обозначают $\overline{r}\left(M\right)$ или $\overline{r}$. Радиус-вектор $\overline{r}$ имеет следующее разложение по ортам: $\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$.

Вектор $\overline{AB}$, имеющий начало в точке $A\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ и конец в точке $B\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$, может быть записан в виде $\overline{AB} = \overline{r_2} - \overline{r_1}$, где $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ – радиус-векторы точек A и B соответственно. Следовательно, разложение вектора $\overline{AB}$ по ортам имеет вид: $\overline{AB} = \left(x_2 - x_1\right)\overline{i} + {}$ $+\left(y_2 - y_1\right)\overline{j} + \left(z_2 - z_1\right)\overline{k}$. Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B:

$$\overline{AB} = d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}.$$

Числа $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{\left|\overline{a}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}$ называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$; α, β, γ – углы между вектором $\overline{a}$ и координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно. Единичный вектор $\overline{a}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ – орт вектора $\overline{a}$. Для любого вектора справедливо: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Деление отрезка в данном отношении. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их приложения.

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overline{M_1M} = \overline{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задается равенствами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет внутренним, если $\lambda > 0$, и внешним, если $\lambda < 0$.

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними: $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$.

Если в прямоугольной системе координат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.1}$$

Если $\overline{b} = \overline{a}$, то $\overline{a}\cdot\overline{a} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$. Поскольку $\overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2$, то $|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Из определения скалярного произведения следует, что:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{2.2}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ наблюдается из конца вектора $\overline{c}$ происходящим против движения часовой стрелки.

Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке, то данная тройка векторов называется левой.

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, обозначаемый $\overline{c} = \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ или $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) длина вектора $\overline{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т. е. $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$;

2) вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярен к плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т. е. $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

3) упорядоченная тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$.

Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ в координатной форме выражается следующим образом:

$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, определяется формулой $S = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$.

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, обозначаемое $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ и определяемое как скалярное произведение вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ и вектора $\overline{c}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}.$$

Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ заданы своими координатами, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},$ взятому со знаком плюс, когда векторы $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ и $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ имеют одинаковую ориентацию, и со знаком минус – противном случае.

Объем треугольной пирамиды, построенный на этих векторах, равен $V = \frac{1}{6}\left|\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right|$. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения.

Прямая линия на плоскости.

В декартовой прямоугольной системе координат *Oxy* любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первой степени относительно *x* и *y*:

$$Ax + By + Cz = 0, \tag{2.3}$$

где A, B, C – некоторые действительные числа, причем $A^2 + B^2 \neq 0.$

Уравнение (2.3) называется общим уравнением прямой. Всякий ненулевой вектор $\overline{n} = \left(A, B\right)$, перпендикулярный к прямой (2.3), называется нормальным вектором прямой.

Если прямая l проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\overline{n} = (A, B)$, то уравнение прямой будет иметь вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$

Другие виды уравнения прямой на плоскости:

1) $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь b – ордината пересечения точки с прямой Oy, k – тангенс угла, образованного прямой с осью Ox;

2) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ – уравнение прямой в отрезках. Здесь a и b – отрезки, отсекаемые прямой от осей Ox и Oy соответственно;

4) уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. При этом угловой коэффициент данной прямой равен: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Угол между прямыми $y_1 = k_1 x + b_1$, $y_2 = k_2 x + b_2$ определяется через тангенс: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$. Отсюда, в частности, следуют признаки параллельности и перпендикулярности прямых: если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны; если $k_1 \cdot k_2 = -1$, то прямые перпендикулярны.

Расстояние от данной точки $M_0(x_0, y_0)$ до данной прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Линии второго порядка.

Кривой второго порядка называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx +$

$+2Ey+F=0,$ где A, B, C, D, E, F – вещественные числа. Данное уравнение в зависимости от коэффициентов может задавать распространенные типы кривых: окружность, эллипс, гиперболу и параболу.

Классификация кривых второго порядка:

1) эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

2) гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$

3) парабола: $y^2=2px;$

4) окружность: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2;$

5) мнимый эллипс (пустое множество): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$

Уравнение второй степени $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$ где числа A и C не равны одновременно нулю, преобразуется к каноническому виду методом выделения полных квадратов и последующим параллельным переносом.

Плоскость и прямая в пространстве.

Плоскость P определена единственным образом, если задана точка $M_0\in P$ и вектор $\overline{n}\perp P.$ Вектор $\overline{n}$ называют нормальным вектором.

Основные уравнения плоскости:

1) общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0;$

2) уравнение плоскости в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

3) уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad (2.4)$$

4) уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях отрезки a, b, c:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Расстояние d от точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до плоскости с уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (2.5)$$

Величина угла φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется на основании формулы:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{\left|\overline{n}_1\right|\cdot\left|\overline{n}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

где $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ – нормальные векторы данных плоскостей.

Прямую в пространстве можно однозначно определить пересечением двух плоскостей:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;\end{cases} \qquad (2.6)$$

нормальные векторы $\overline{n}_1=(A_1,\ B_1,\ C_1)$ и $\overline{n}_2=(A_2,\ B_2,\ C_2)$ которых непараллельны. Уравнения (2.6) называются общими уравнениями прямой в пространстве.

Прямая L однозначно может быть задана точкой $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и вектором $\overline{s}=(m,\ n,\ p)$, который называется направляющим вектором. Возьмем на прямой точку $M(x,\ y,\ z)$. Так как векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{s}$ – коллинеарные, то: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ – канонические уравнения прямой.

От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к каноническим уравнениям:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+mt;\\ y=y_0+nt;\\ z=z_0+pt.\end{cases}$$

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость. В качестве угла между прямой и плоскостью выбирается острый угол.

Угол между прямой L, выраженной уравнением $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=$ $=\frac{z-z_0}{p}$, и плоскостью P, выраженной уравнением $Ax+By+$ $+Cz+D=0$, можно вычислить по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

2.2. Примеры решения задач

Задача 1. Даны три вектора: $\bar{a}=(0,-1,3)$; $\bar{b}=(3,-2,1)$; $\bar{c}=$ $=(4,\,0,\,-4)$. Требуется найти: 1) вектор $\bar{d}=2\bar{a}-\bar{b}+\frac{\bar{c}}{4}$, его длину и направляющие косинусы; записать орт вектора $\bar{d}^0$; 2) скалярное и векторное произведения векторов $\bar{d}_1=\bar{a}+\bar{c}$ и $\bar{d}_2=\bar{b}-\bar{a}$; 3) косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а также $\text{пр}_{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}\bar{d}$; 4) смешанное произведение векторов $\bar{a},\,\bar{b},\,\bar{c}$.

Решение.

1. По правилам выполнения арифметических операций над векторами:

$$\bar{d} = 2(0,\,-1,\,3) - (3,\,-2,\,1) + \frac{1}{4}(4,\,0,\,-4) = (0,\,-2,\,6) - (3,\,-2,\,1) +$$
$$+ (1,\,0,\,-1) = (0-3+1,\,-2+2+0,\,6-1-1) = (-2,\,0,\,4).$$

Координаты орта вектора (направляющие косинусы) равны отношению координат данного вектора к его модулю:

$$\left|\bar{d}\right| = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \bar{d}^{\,0} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Значит: $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$; $\cos\beta = 0$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Сначала выполним операцию сложения и вычитания векторов:

$$\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{c} = (0,\,-1,\,3) + (4,\,0,\,-4) = (4,\,-1,\,-1);$$

$$\bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a} = (3,\,-2,\,1) - (0,\,-1,\,3) = (3,\,-1,\,-2).$$

Согласно формуле (2.1):

$$\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2 = (4,\,-1,\,-1)\cdot(3,\,-1,\,-2) = 4\cdot 3 + (-1)(-1) + (-1)(-2) =$$
$$= 12 + 1 + 2 = 15.$$

Векторное произведение находится по правилу:

$$\bar{d}_1 \times \bar{d}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2-1)\cdot\bar{i} - (-8+3)\cdot\bar{j} + (-4+3)\cdot\bar{k} = \bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k} = (1,\ 5,\ -1).$$

3. Косинус угла между двумя ненулевыми векторами найдем по формуле (2.2):

$$\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\frac{0\cdot 3+(-1)(-2)+3\cdot 1}{\sqrt{0+1+9}\cdot\sqrt{9+4+1}}=\frac{5}{\sqrt{140}}=\frac{5}{2\sqrt{35}}.$$

Проекция вектора $\overline{l}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ на ненулевой вектор $\overline{d}$ находится по следующей формуле: $np_{\overline{l}}\overline{d}=\dfrac{\overline{l}\cdot\overline{d}}{|\overline{l}|}$.

Найдем координаты вектора $\overline{l}$ и его длину:

$$\overline{l}=(0,\,-1,\,3)+(3,\,-2,\,1)+(4,\,0,\,-4)=(7,\,-3,\,0);$$

$$|\overline{l}|=\sqrt{49+9+0}=\sqrt{58}.$$

Тогда:

$$np_{\overline{l}}\overline{d}=\frac{\overline{l}\cdot\overline{d}}{|\overline{l}|}=\frac{7(-2)-3\cdot 0+0\cdot 4}{\sqrt{58}}=-\frac{14}{\sqrt{58}}=-\frac{7\sqrt{58}}{29}.$$

4. Смешанное произведение векторов, заданных координатами, вычисляется с помощью определителя:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & -4\end{vmatrix}=0(-2)(-4)+3\cdot 0\cdot 3+4\cdot 1(-1)-$$

$$-3(-2)4-0\cdot 0\cdot 1-3(-1)(-4)=-4+24-12=8.$$

Задача 2. Даны вершины треугольника ABC: $A(1,\ 3)$; $B(–2,\ 0)$; $C(4,\ –1)$. Требуется: 1) найти длину стороны AB; 2) составить уравнения сторон треугольника и найти их угловые коэффициенты; 3) составить уравнение высоты CD и найти ее длину; 4) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC; 5) вычислить косинус угла при вершине A; 6) составить уравнение медианы, проведенной из вершины B.

Решение.

1. Длину сторона AB треугольника ABC вычислим по формуле расстояния между двумя точками: $d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

Тогда:

$$\left|AB\right|=\sqrt{\left(-2-1\right)^2+\left(0-3\right)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

2. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, получим уравнения сторон треугольника:

Уравнение стороны AB: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{-2-1}=\dfrac{y-3}{0-3}$.

Или: $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-3}{-3}\Rightarrow -3\left(x-1\right)=-3\left(y-3\right)\Leftrightarrow x-y+2=0.$

Уравнение стороны AC: $\dfrac{x-1}{4-1}=\dfrac{y-3}{-1-3}\Leftrightarrow 4x+3y-7=0.$

Уравнение стороны BC: $\dfrac{x-(-2)}{4-(-2)}=\dfrac{y-0}{-1-0}\Leftrightarrow x+6y+2=0.$

Найдем угловые коэффициенты сторон треугольника:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{-2-1}=1;$$

$$k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-1-0}{4-(-2)}=\frac{-1}{6};$$

$$k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-1-3}{4-1}=-\frac{4}{3}.$$

3. Высота CD перпендикулярна стороне AB, значит, угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением:

$$k_{AB}\cdot k_{CD}=-1\Rightarrow k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}.$$

Так как $k_{AB} = 1,$ то $k_{CD} = -1.$ Зная точку и угловой коэффициент, выписываем искомое уравнение по формуле $y - y_C = k_{CD}\left(x - x_C\right)$:

$$y + 1 = -1\left(x - 4\right) \Leftrightarrow y + 1 = -x + 4 \Rightarrow x + y - 3 = 0.$$

Вычислим длину высоты CD как расстояние от точки C до прямой AB.

$$d = \frac{\left|1 \cdot 4 - 1(-1) + 2\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-1\right)^2}} = \frac{4 + 1 + 2}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

4. В силу параллельности искомая прямая и прямая BC имеют общий угловой коэффициент k. Так как $k_{BC} = -\frac{1}{6},$ то и угловой коэффициент искомой прямой тоже равен $-\frac{1}{6}.$

Запишем уравнение этой прямой: $y - y_A = k\left(x - x_A\right).$

Подставим координаты точки A и значение углового коэффициента в это уравнение. Получим:

$$y - 3 = -\frac{1}{6}\left(x - 1\right) \Leftrightarrow 6\left(y - 3\right) = -x + 1 \Rightarrow x + 6y - 19 = 0.$$

5. Косинус угла при вершине A найдем по формуле нахождения угла между направляющими векторами прямых $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Так как $\overline{AB} = \left(-2 - 1, 0 - 3\right) = \left(-3, -3\right)$; $\overline{AC} = \left(4 - 1, -1 - 3\right) = \left(3, -4\right)$, то:

$$\cos \hat{A} = \frac{-3 \cdot 3 - 3(-4)}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2\sqrt{3^2 + (-4)^2}}} = \frac{3}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{25}} = \frac{3}{3\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

6. Медиана BM точкой M делит отрезок AC пополам, значит:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

Уравнение медианы BM найдем, используя формулу для уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Медиана BM проходит через точки $B(-2,\ 0)$ и $M\left(\frac{5}{2},\ 1\right)$, поэтому:

$$\frac{x-(-2)}{\frac{5}{2}-(-2)}=\frac{y-0}{1-0}\Leftrightarrow\frac{x+2}{\frac{9}{2}}=y\Rightarrow 2x-9y+4=0.$$

Задача 3. Привести уравнение второго порядка к каноническому виду. Определить вид кривой, которую оно задает.

1) $x^2+4y+2x+16y+1=0;$

2) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0.$

Решение.

1) преобразуем данное уравнение кривой. Так как:

$$\left(x^2+2x+1\right)+4\left(y^2+4y+4-4\right)=(x+1)^2+4(y+1)^2-16,$$

то уравнение можно представить в виде $(x+1)^2+4(y+2)^2=16,$ т. е.:

$$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Получаем уравнение эллипса, центр симметрии которого находится в точке $(-1,-2)$. Из уравнения получим $a=4;\ b=2.$

2) выделим полные квадраты относительно каждой переменной в левой части уравнения, а свободные члены перенесем в правую часть:

$$\left(x^2+2x\right)-9\left(y^2-4y\right)=44;$$

$$\left(x^2+2x+1\right)-1-9\left(y^2-4y+4-4\right)=44;$$

$$(x+1)^2-1-9(y-2)^2+36=44;$$

$$\left(x+1\right)^2-9\left(y-2\right)^2=9;$$

$$\frac{\left(x+1\right)^2}{9}-\frac{\left(y-2\right)^2}{1}=1.$$

Получаем каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C\left(-1,2\right)$, действительной полуосью $a=3$ и мнимой полуосью $b=1$.

Задача 4. Даны координаты точек: $A(3, 5, 3)$; $B(–2, 15, –2)$; $C(1, –1, 4)$; $D(0, 6, 4)$. Требуется: 1) написать уравнение плоскости ABC; 2) найти площадь треугольника ABC; 3) найти двумя способами длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC (используя формулы векторной алгебры и формулу расстояния от точки до плоскости); 4) найти угол между ребром AD и гранью ABC.

Решение.

1. Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -2-3 & 15-5 & -2-3 \\ 1-3 & -1-5 & 4-3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим определитель, стоящий в левой части равенства:

$$\left(x-3\right)\cdot\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}-\left(y-5\right)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+\left(z-3\right)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}=0.$$

$$-20x+15y+50z-165=0.$$

Сокращая последнее равенство на –5, получим уравнение плоскости ABC: $4x-3y-10z+33=0$.

2. Площадь треугольника ABC можно найти с помощью приложений векторного произведения: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Находим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=\left(-2-3,15-5,-2-3\right)=\left(-5,10,-5\right);$$

$$\overline{AC} = \left(1-3,\ \ -1-5,\ 4-3\right) = \left(-2, -6,\ 1\right).$$

Векторное произведение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -5 & 10 & -5 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\overline{k} \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = \overline{i}\left(10-30\right) - \overline{j}\left(-5-10\right) + \overline{k}\left(30+20\right) =$$

$$= -20\,\overline{i} + 15\,\overline{j} + 50\,\overline{k}.$$

Тогда: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{20^2 + 15^2 + 50^2} = \dfrac{\sqrt{3125}}{2} = \dfrac{25\sqrt{5}}{2}$ (ед^2).

3. *1 способ*. Объем тетраэдра, с одной стороны, равен $\dfrac{1}{6}$ модуля смешанного произведения векторов, на которых он построен:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\right|.$$

С другой стороны, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_D \Rightarrow h_D = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$.

Получим, что $h_D = \dfrac{V_{ABCD}}{2S_{ABC}} = \dfrac{\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\right|}{\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|}$.

Найдем координаты вектора $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \left(0-3, 6-5, 4-3\right) = \left(-3,\ 1,\ 1\right).$$

Координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ вычислены в предыдущем пункте. Далее получим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-5 & 10 & -5\\ -2 & -6 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=30+10-30+90+5+20=125.$$

Найдем длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D:

$$h_D=\frac{125}{\sqrt{3125}}=\frac{125}{25\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

2 *способ.* Длина высоты тетраэдра равна расстоянию от точки $D(0,\ 6,\ 4)$ до плоскости ABC: $d\left(D,\ ABC\right)=\dfrac{\left|Ax_D+By_D+Cz_D+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Подставив исходные данные, получим:

$$h_D=\frac{\left|4\cdot 0-3\cdot 6-10\cdot 4+33\right|}{\sqrt{4^2+3^2+10^2}}=\frac{25}{\sqrt{125}}=\frac{25}{5\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

4. найдем угол φ между ребром AD и гранью ABC. Угол φ между прямой с направляющим вектором $\overline{s}$ и плоскостью с нормальным вектором $\overline{n}$ вычисляется по формуле: $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overline{s}\times\overline{n}\right|}{\left|\overline{s}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|}$.

Подставим в указанную формулу координаты направляющего вектора $\overline{AD}=\left(-3,\ 1,\ 1\right)$ прямой AD и нормального вектора $\overline{n}=\left(4,\ -3,\ -10\right)$ плоскости ABC:

$$\sin\varphi=\frac{\left|-3\cdot 4+1\left(-3\right)+1\left(-10\right)\right|}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+10^2}}=\frac{25}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{125}}=\frac{5}{\sqrt{55}},$$

откуда найдем угол: $\varphi=\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{55}}$.

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Основные понятия и формулы

Функция. Основные понятия. Предел функции в точке.

Переменная величина y называется функцией переменной x, определенной в некоторой области, если каждому значению x из этой области соответствует одно значение y.

Обозначение функции: $y = f(x)$, $y = y(x)$. Наглядным представлением функции служит ее график – множество всех точек плоскости Oxy с координатами (x, y), где $y = f(x)$.

Основными элементарными функциями называются степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть самой точки x_0.

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого числа ε найдется такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$:

$$\begin{gathered}\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) : \forall x; \\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Если в выражении (3.1) рассматривать только $x < x_0$ $(x > x_0)$, то имеем понятие левого (правого) предела функции в точке x_0, который обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \right)$.

С помощью логических символов определение предела функции при $x \to +\infty$ записывается так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Определение и обозначение предела при $x \to -\infty$ аналогичны.

Если в выражениях (3.1) и (3.2) $b=0,$ то $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (БМФ). Записывается это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0.$

Функция $f(x)$ называются бесконечно большой функцией (ББФ) в точке x_0, если $\forall M\in R,\ \exists\delta(M):\forall x\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$ и записывается это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

Связь между БМФ и ББФ следующая. Если $f(x)$ – БМФ, то $\dfrac{A}{f(x)}$ – ББФ, где A – действительное число, не равное нулю. Если $f(x)$ – ББФ, то $\dfrac{A}{f(x)}$ – БМФ, где $0<A<\infty.$

Свойства функций, имеющих пределы при $x\to x_0$, $x\to x_0\pm 0,$ $x\to\pm\infty,$ выражаются следующей теоремой.

Теорема 3.1. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ то:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0).$

Если условия теоремы 3.1 не выполняются, то возникают так называемые неопределенные выражения (неопределенности) вида:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ \left(\frac{0}{0}\right),\ (\infty-\infty),\ (0\cdot\infty),\ \left(1^{\infty}\right),\ \left(0^{\infty}\right),\ \left(\infty^{0}\right).$$

В простейших случаях эти неопределенности раскрываются с помощью алгебраических преобразований данного выражения.

Кроме того, для всех элементарных функций в области их определения имеет место равенство: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0}\right) = f(x_0)$.

При нахождении некоторых пределов полезно иметь в виду следующие свойства функций:

1) $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{a}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{a}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a}{x} = 0$, где $a > 0$, $a \in R$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 < a < 1; \\ +\infty, \text{ если } a > 1; \end{cases}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, \text{ если } 0 < a < 1; \\ 0, \text{ если } a > 1. \end{cases}$

В дальнейшем будут использоваться первый и второй замечательный пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1;$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \lim_{x \to 0} \left(1 + f(x)\right)^{1/f(x)} = e.$$

Здесь $e \approx 2{,}71828...$ – основание натурального логарифма $\ln x$.

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x \to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)}$ необходимо иметь в виду, что если $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)} = a^b$.

Сравнение бесконечно малых функций.

1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

2. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой одного порядка с функцией $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$.

3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными БМФ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Теорема 3.2. Предел отношения двух эквивалентных БМФ не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

При раскрытии неопределенности $\dfrac{0}{0}$ используют теорему о замене БМФ эквивалентными им, пользуясь таблицей эквивалентности при $x \to x_0$:

$\sin(ax) \sim ax;$	$\operatorname{tg}(ax) \sim ax;$	$\arcsin(ax) \sim ax;$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2};$	$\operatorname{arctg}(ax) \sim ax;$	$a^x - 1 \sim x \ln a;$
$e^{ax} - 1 \sim ax;$	$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a};$	$\ln(1+ax) \sim ax.$
$x^a - 1 \sim a(x-1);$	$(1+x)^k - 1 \sim kx;$	

Непрерывность и точки разрыва функции.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого множества, то она непрерывна на этом множестве.

Точку x_0 называют точкой разрыва функции $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ не определена в этой точке;

2) $f(x)$ определена в точке x_0, но не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Различают следующие случаи точек разрыва функции:

1) если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и при этом $x_0 \notin D(f)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва;

2) если не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но существуют конечные односторонние пределы, причем $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется разрывом первого рода, а разность $f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$ – скачком функции $f(x)$ в точке x_0;

3) если хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$, $-\infty$ или не существует, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Производная функции. Дифференцирование сложных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой δ – окрестности точки x_0 – и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Предел отношения $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Этот предел обозначается $f'(x_0)$; $y'(x_0)$; $f'(x)\big|_{x = x_0}$. Другие обозначения производной в точке x: $f'(x)$; $\dfrac{d}{dx} f(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$.

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в некоторой точке x_0, то основные правила дифференцирования выражаются формулами:

1) $(cu)' = cu'$, где $c - \text{const}$;

2) $(uv)' = u'v + uv'$;

3) $(u + v)' = u' + v'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Таблица производных основных элементарных функций
(будем считать, что функция $u = u(x)$)

1) $C' = 0$; $C - \text{const}$;

2) $x' = 1$;

3) $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$; $\alpha \in R$;

4) $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$;

5) $\left(e^{u}\right)' = e^{u} u'$;

6) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$;

7) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{\ln u}$;

8) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;

9) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;

10) $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

11) $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

12) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

14) $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

15) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$;

16) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

Производная сложной функции.

Пусть на множестве T задана сложная функция $y = f\left(\varphi(t)\right)$, причем функция $x = \varphi(t)$ (x – промежуточный аргумент) имеет в некоторой точке $t \in T$ производную $x' = \varphi'(t)$, а функция $y = f(x)$ – в соответствующей точке $x \in X$, где X – множество значений функции $x = \varphi(t)$, производную $y' = f'(x)$. Тогда $y'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t)$, т. е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

Логарифмическое дифференцирование. Производная неявных функций и функций, заданных параметрически.

Логарифмическое дифференцирование заключается в том, что сначала логарифмируют данную функцию, а затем уже приступают к дифференцированию. Производную от логарифма функции $y = f(x)$, которая положительна и имеет производную в рассматриваемой точке $x \in X$, называют логарифмической производной в точке x и находят по формуле:

$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ или } \left(\ln y\right) = \frac{y'}{y}.$$

Если уравнение $F(x,\, y) = 0$ задает y как неявную функцию, т. е. $y = y(x)$, то при нахождении производной этой функции предполагают, что в данное уравнение вместо y подставлено соответствующее выражение $y(x)$ и получено тождество $F\left(x, y(x)\right) = 0.$ Затем дифференцируют по x это тождество (не забывая, что y есть функция аргумента x) и решают полученное уравнение относительно искомой производной. Как правило, она зависит от x и y.

Производную функции, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ находят по формуле $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}.$

Дифференциал функции.

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x \in X$, если ее приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке, может быть представлено в виде:

$$\Delta y = A\, \Delta x + \alpha(\Delta x), \qquad (3.3)$$

где $A = \text{const}$; $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Если приращение функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ может быть представлено в виде (3.3), то главная часть этого приращения, линейная относительно Δx, называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}f(x)$, $\mathrm{d}f$.

Обычно дифференциал функции находят, пользуясь его аналитическим выражением:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\ \Delta x. \tag{3.4}$$

Дифференциал независимой переменной равен ее приращению, т. е. $\mathrm{d}x = \Delta x.$ Поэтому:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Из формул (3.4) и (3.5) следует, что задача нахождения дифференциала функции $f(x)$ равносильна нахождению ее производной. Поэтому большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняет свою силу и для дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x).$ Вторая производная обозначается одним из символов: $f''(x);\ y''.$

Производные высших порядков (третья, четвертая и т. д.), находятся последовательным дифференцированием функции:

$$y''' = \left(f''(x)\right)'; \quad y^{(4)} = \left(f'''(x)\right)'; \ \ldots; \ y^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Если функция $y = y(x)$ задана системой уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то производные $y'_x,\ y''_x,\ y'''_x$ и т. д. находятся по формулам:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}; \ y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'(t)}; \ y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'(t)}; \ldots$$

Дифференциал от дифференциала от функции $y = f(x)$ в данной точке x называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) в точке x. Обозначается второй дифференциал символом $\mathrm{d}^2 y$ или $\mathrm{d}^2 f(x)$. Таким образом, $\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y)$.

Аналогично определяются и обозначаются дифференциалы любого порядка.

В случае, когда аргумент x является независимой переменной, для дифференциалов второго, третьего и n-го порядка справедливы соответственно представления:

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)\mathrm{d}x^2; \qquad \mathrm{d}^3 y = f'''(x)\mathrm{d}x^3; \qquad \mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

Применения производной.

1. *Правило Лопиталя*. Правило Лопиталя дает простой и эффективный способ раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при вычислении пределов.

Пусть в некоторой окрестности точки $x = a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки $x = a$ и пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ совместно стремятся к нулю или к бесконечности и существует предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ этих производных при $x \to a$, тогда существует также и предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ самих функций, и этот предел равен пределу отношения производных.

Замечание. Правило применяется и в случае $a = \infty$.

При необходимости правило Лопиталя можно применить повторно или несколько раз при соответствующих условиях на $f'(x)$ и $g'(x)$, $f''(x)$ и $g''(x)$.

В случае неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$ или $(\infty - \infty)$ выражение под знаком предела следует преобразовать алгебраически так, чтобы получить неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенностей вида $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^\infty\right)$ следует воспользоваться тождеством $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\cdot\ln a}$ и свойством $\lim\limits_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

2. *Исследования функций и построение графиков.*

Под исследованием функций понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента. На основании исследования функции строят ее график.

Исследование функции можно проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции, определить точки разрыва, вертикальные асимптоты, если они существуют, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию, четность, нечетность;

2) исследовать функцию на монотонность и экстремум;

3) определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба;

4) изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутка области определения. Найти наклонные асимптоты графика функции, если они существуют;

5) по результатам исследования построить график функции.

3.2. Примеры решения задач

Задача 1. Найти следующие пределы, не применяя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2+x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 4x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7}$.

Решение.

1. Многочлен x^3+x-2 при $x=1$ равен нулю, следовательно, он нацело разделится на $x-1$, т. е. $x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$, $x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)\left(x^2+1\right)$, поэтому:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+2}{x^2+1}=\frac{4}{2}=2.$$

2. Вычислим этот предел с помощью замены переменной. Пусть $x+4=t^2$, тогда $x=t^2-4$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\lim_{t\to2}\frac{t^2-4}{2-t}=$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(t+2)}{2-t}=-\lim_{t\to2}(t+2)=-4.$$

Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональные выражения. В этом случае иррациональность переводится из числителя в знаменатель или наоборот.

3. Воспользуемся формулой $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Тогда:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin8x-\sin4x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{8x-4x}{2}\cdot\cos\frac{8x+4x}{2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x\cdot\cos6x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}2\cos6x=2\cdot2=4.$$

4. Выражение в скобках преобразуем к сумме единицы и бесконечно малой функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x-3}-1\right)^{2x+7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5-(x-3)}{x-3}\right)^{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{2x+7}.$$

Вводим новую переменную $t=x-3$; $t\to\infty$. Тогда $x=t+3$; $2x+7=2(t+3)+7=2t+13$ и:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{2x+7}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{8}{t}\right)^{2t+13}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{8}{t}\right)^{2t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{8}{t}\right)^{13}=e^{8\cdot 2}\cdot 1=e^{16}.$$

Замечание. В данном примере была применена более общая версия второго замечательного предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta\cdot x}=e^{\alpha\cdot\beta}$.

Задача 2. Найти производные следующих функций:

1) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

2) $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$;

3) $x^3+\ln y-x^2\cdot e^y=0$.

Решение.

1. Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных, находим:

$$y'=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{4(1+x)}\cdot\frac{1-x+1+x}{1-x}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{2\left(1-x^2\right)}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}=$$

$$=\frac{1+x^2+1-x^2}{2\left(1-x^4\right)}=\frac{1}{1-x^4}.$$

2. Логарифмируя функцию, получим:

$$\ln y=\ln(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\ \text{ или }\ \ln y=\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x).$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x, причем в левой части используем производную сложной функции, а в правой – производную произведения:

$$\frac{y'}{y}=(\cos x)'\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\cos x\cdot(\ln(\operatorname{tg}x))'=$$

$$=-\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\cos x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тогда:

$$y'=y\left(-\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\frac{1}{\sin x}\right)=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\frac{1-\sin^2 x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)}{\sin x}.$$

3. Берем производную по переменной x от обеих частей уравнения, получим: $3x^2+\frac{y'}{y}-\left(2xe^y+x^2e^y y'\right)=0.$

Слагаемое, содержащее y', оставим в левой части уравнения, остальные перенесем вправо: $y'\left(\frac{1}{y}-x^2y\right)=2xe^y-3x^2.$

Отсюда следует, что производная равна:

$$y' = \frac{2xe^y - 3x^2}{\dfrac{1}{y} - x^2e^y} = \frac{\left(2xe^y - 3x^2\right)}{1 - x^2e^y y}.$$

Задача 3. Найти первую и вторую производные от заданной параметрически функции $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

Решение.

Первая производная заданной параметрической функции рассчитывается по формуле: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Здесь $x'_t = \left(\sin^3 t\right)' = 3\sin^2 t \cdot \cos t$;

$y'_t = \left(\cos^3 t\right)' = -3\cos^2 t \cdot \sin t$, откуда:

$$y'_x = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{-3\sin^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t; \;\; (y'_x)'_t = \left(-\operatorname{tg} t\right)' = -\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Тогда $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3\cos^2 t \cdot \sin t} = \dfrac{1}{3\sin t \cdot \cos^4 t}$.

Задача 4. Найти y'' и $\mathrm{d}^2 y$, если $y = \operatorname{arctg} 2x$.

Решение.

Найдем первую производную: $y' = \dfrac{(2x)'}{1+4x^2} = \dfrac{2}{1+4x^2}$.

Теперь найдем вторую производную:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{2}{1+4x^2}\right)' = \frac{2'\left(1+4x^2\right) - 2\left(1+4x^2\right)'}{\left(1+4x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 8x}{\left(1+4x^2\right)^2} = -\frac{16}{\left(1+4x^2\right)^2}.$$

Следовательно, $\mathrm{d}^2 y = y''\mathrm{d}x^2 = -\dfrac{16}{\left(1+4x^2\right)^2}\mathrm{d}x^2$.

Задача 5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{1/x^2}$.

Решение.

1. Имеем неопределенность $(\infty-\infty)$. Сведем ее к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x\sin x-\pi\right)'}{\left(2\cos x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x}=\frac{2}{-2}=-1.$$

2. Имеем неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$. Обозначим $y=$ $=\left(\cos 2x\right)^{1/x^2}$. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln\left(\cos 2x\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos 2x\right)}{x^2}.$$

Применим правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos 2x\right)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(\cos 2x\right)\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos 2x}2\sin 2x}{2x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin 2x}{x\cos 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 0} \frac{(\sin 2x)'}{(x\cos 2x)'} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\cos 2x - 2x\sin 2x} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Таким образом, $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = -2,$ откуда $\lim\limits_{x\to 0} y = e^{-2}.$

Задача 6. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2.$

Решение.

Необходимые для решения данной и последующих задач теоретические сведения находятся в книгах «Конспект лекций по высшей математике» Д. Т. Письменного [1] и «Элементы математического анализа» [4].

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3).$$

Если $x < 1$ и $x > 3,$ то $f'(x) > 0,$ следовательно, функция возрастает в промежутках $(-\infty,\ 1),$ $(3,\ +\infty).$ При $1 < x < 3,$ где $f'(x) < 0,$ функция убывает.

Задача 7. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = 4x - x^2.$

Решение.

Функция определена, непрерывна и дифференцируема при всех $x \in R.$

$f'(x) = 4 - 2x,$ $4 - 2x = 0,$ $x = 2$ есть стационарная точка функции.

$f''(x) = -2 < 0$ при всех $x,$ в том числе и при $x = 2,$ следовательно, $x = 2$ является точкой локального максимума $f_{\max} = f(2) = 4.$

Задача 8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$

Решение.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9,$ $f''(x) = 6x - 12,$ $f''(x) = 0$ при $x = 2,$ $f''(x) < 0$ при $x < 2,$ $f''(x) > 0$ при $x > 2.$

График функции является выпуклым в интервале $(-\infty,\ 2)$ и вогнутым в интервале $(2,\ +\infty)$. Так как при переходе через точку $x=2$ $f''(x)$ меняет знак и $f''(2)=0$, то $x=2$ – абсциссы точки перегиба, а точка $M(2,\ 3)$ есть точка перегиба.

Задача 9. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$.

Решение.

Функция определена при всех *x*, кроме $x=\pm 2$. В этих точках функция имеет разрыв второго рода. Следовательно, прямые $x=\pm 2$ являются вертикальными асимптотами.

Горизонтальных асимптот график функции не имеет, так как:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=-\infty;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\infty.$$

Наклонная асимптота $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\left(4-x^2\right)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}-(-1)x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x\left(4-x^2\right)}{4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0.$$

При вычислении пределов применили правило Лопиталя.

Следовательно, прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой.

Контрольная работа

Задание 1. Даны матрицы A, B, C, D. Найти матрицы $\alpha A+\beta B$; A^2; $A\cdot C$; $D\cdot C$.

1. $\alpha=2$; $\beta=-1$; $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 8 & -7 & 6\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}1\\ 7\\ 9\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

2. $\alpha=3$; $\beta=1$; $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 5 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ -1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}5\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

3. $\alpha=1$; $\beta=2$; $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

4. $\alpha=1$; $\beta=-2$; $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ -2 & 1 & -4\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 19\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

5. $\alpha=-1;\ \beta=2;\ A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix};$

$C=\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}.$

6. $\alpha=2;\ \beta=-1;\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -4\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix};$

$C=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 3\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5 & 3 & 8\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$

7. $\alpha=-2;\ \beta=3;\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -3 & -1\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 5 & 3 & 7\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix};$

$C=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 6 & -4 & -1\end{pmatrix}.$

8. $\alpha=2;\ \beta=3;\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -4 & -3\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -4 & -1 & 1\\ -6 & 0 & 0\end{pmatrix};$

$C=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$

9. $\alpha=3;\ \beta=2;\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -3 & -1\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & -3 & 4\\ 7 & 8 & 5\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

10. $\alpha=2;\ \beta=-2;\ A=\begin{pmatrix}5&3&2\\4&1&0\\-2&2&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5&-3&4\\3&2&-1\\8&-1&3\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&2&-4\\-3&4&-2\end{pmatrix}.$$

11. $\alpha=3;\ \beta=-1;\ A=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}1\\1\\-7\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}8&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

12. $\alpha=2;\ \beta=-3;\ A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&4\\5&2&6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-4&2\\-1&3&1\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&3&-2\end{pmatrix}.$$

13. $\alpha=3;\ \beta=1;\ A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\4&-7&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&4&6\\-3&5&6\\8&-6&2\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}-3&4&2\\-4&0&33\end{pmatrix}.$$

14. $\alpha = 2;\ \beta = 1;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$

15. $\alpha = 1;\ \beta = 3;\ A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

16. $\alpha = 3;\ \beta = -2;\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

17. $\alpha = -2;\ \beta = 1;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

18. $\alpha = 3;\ \beta = 1;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}7&-4&1\\5&7&-4\end{pmatrix}.$$

19. $\alpha=3;\ \beta=1;\ A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\1&4&-5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5&2&4\\-4&1&3\\1&4&-6\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}-3&1&-4\\1&-2&-3\end{pmatrix}.$$

20. $\alpha=3;\ \beta=-2;\ A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\2&3&0\\1&1&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&2&6\\4&-4&-3\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}.$$

21. $\alpha=2;\ \beta=1;\ A=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\4&-1&3\\5&3&-4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&1&8\\2&4&3\\7&3&4\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&-1&-3\end{pmatrix}.$$

22. $\alpha=5;\ \beta=-1;\ A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&0\\1&2&-1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&4&-3\\1&-3&2\\3&1&-1\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}3&1&0\\3&6&2\end{pmatrix}.$$

23. $\alpha = 3;\ \beta = -2;\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

24. $\alpha = 2;\ \beta = -2;\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

25. $\alpha = 3;\ \beta = -1;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

26. $\alpha = 1;\ \beta = -2;\ A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

27. $\alpha = 2;\ \beta = -3;\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&-1&10\\8&1&0\end{pmatrix}.$$

28. $\alpha=1;\ \beta=-1;\ A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&2\\-4&1&7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\1&3&-4\\0&2&1\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5&6&-1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

29. $\alpha=1;\ \beta=-2;\ A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&1&4\\1&1&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

30. $\alpha=1;\ \beta=-3;\ A=\begin{pmatrix}2&1&5\\-4&3&-4\\1&-1&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\-4&-2&1\\2&1&0\end{pmatrix};$

$$C=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Исследовать уравнение матричным способом.

1. $X\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\-2&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&-4&8\\1&6&-2\end{pmatrix}.$

2. $X\cdot\begin{pmatrix}1&-1&-3\\1&0&-3\\-2&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-7\\-1&-2&5\\1&0&-4\end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ -1 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -4 \\ -23 & -2 & 7 \\ -13 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

5. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$

6. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ -1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & -15 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -7 & 40 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 1 & -12 & -5 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 17 & -20 \\ -13 & 23 & -32 \\ 7 & -14 & 22 \end{pmatrix}.$

10. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -8 & -6 & -1 \\ -4 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ 12 & -9 & 16 \end{pmatrix}.$

12. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$

13. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}.$

15. $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 9 & 7\\ 1 & 11 & 7\\ 7 & 5 & 7\end{pmatrix}.$

18. $X\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix}6 & -3 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ -10 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 0 & -5\\ -4 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 5 & 3 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 2\\ 5 & 3 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$

21. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

23. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ -1 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

28. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

29. $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

30. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

Задание 3. Решить системы линейных уравнений: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса (найти общее и какое-либо из частных решений системы уравнений).

1. а) $\begin{cases}x-2y+2z=-4;\\ x-3y+z=-5;\\ 2x+y+8z=-2.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y+z=4;\\ 2x-y-2z=2;\\ 3x+y-z=6.\end{cases}$

2. а) $\begin{cases}x+2y-3z=-5;\\ 7x-3y+2z=-6;\\ 5x+6y-8z=-15.\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x+7y+9z=1;\\ x+2y+3z=2;\\ 7x+8y+9z=-6.\end{cases}$

3. а) $\begin{cases}x-y+3z=5;\\ x+2y-z=3;\\ 2x+y+4z=12.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-5y+z=1;\\ x+y-z=2;\\ x-13y+5z=-4.\end{cases}$

4. а) $\begin{cases}x-y+3z=0;\\ x+y-4z=7;\\ 3x+2y+5z=4.\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+y-z=1;\\ 2x+3y-2z=2;\\ x-2y+z=-1.\end{cases}$

5. а) $\begin{cases}x+5y-6z=-15;\\ 3x+y+4z=7;\\ 3x-3y+z=-4.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-3y=-5;\\ 2x-y-4z=-3;\\ 6x-5y-8z=-11.\end{cases}$

6. а) $\begin{cases}x+y-4z=-6;\\ 2x+2y+z=-3;\\ x-3y+2z=4.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y-2z=1;\\ 2x+4z=-2;\\ 7x+2y+10z=-5.\end{cases}$

7. а) $\begin{cases}4x+2y-4z=-4;\\ x+3z=4;\\ 2x-3y+z=9.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y+3z=2;\\ x+3y+z=-1;\\ x+7y+5z=0.\end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x+3y+3z=1; \\ 3x+y+4z=2; \\ 2x-y-2z=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y+2z=3; \\ x+3z=4; \\ 4x+3y=1. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 5x+8y+z=2; \\ 3x-2y+6z=-7; \\ 2x+y-z=-5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y=-9; \\ x-y-z=-4; \\ -4x+7y-2z=19. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} 2x-3y+z=-7; \\ x+4y+2z=-1; \\ x-4y=-5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y+8z=-6; \\ 2x+4z=-6; \\ x+9y-16z=6. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x+2y+3z=2; \\ 2x+3y-4z=-5; \\ 3x+y+z=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-3z=4; \\ 2x+5y-7z=1; \\ 3x+7y-10z=5. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} x+y+z=6; \\ 3x-y+2z=7; \\ 5x-3y-z=-4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y+2z=1; \\ 2x-5y+3z=6; \\ 3x-8y+5z=7. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} 3x+4y+2z=8; \\ 2x-y-3z=-4; \\ x+5y+z=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+3z=4; \\ 4x-3y+6z=3; \\ 5x-4y+9z=7. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} 5x-6y+2z=10; \\ x+4y-z=3; \\ 2x+22y-z=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-2y-3z=6; \\ -3x+y-2z=2; \\ 2x-y-5z=8. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} x+y-z=0; \\ 8x+3y-6z=9; \\ 4x+y-3z=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y+z=2; \\ 3x+y-3z=2; \\ 5x-2y-2z=4. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} 2x+5y+z=-1; \\ 2x+4y+z=0; \\ 3x+2y+2z=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=2; \\ 2x-3y+4z=3; \\ 4x-y+6z=7. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} 4x + y - z = 10; \\ 5x - 3y - 7z = 1; \\ x + 2y - z = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x + y + 2z = 3; \\ 5x + y - 2z = 2; \\ -2x - 2y + z = 1. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} x - 2y + z = 0; \\ x + y + z = 6; \\ 2x + y - 2z = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0; \\ 7x + 6y + 5z = 4; \\ 5x + 4y + 3z = 2. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} x - y + 3z = 2; \\ 5x - 3y + 2z = 1; \\ 6x + 5y - 3z = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 0; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} x + 2y - z = 6; \\ 5x - 3y + z = 10; \\ 3x + 4y - 2z = 15. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + 2z = 1; \\ -x - 2z = 1; \\ -x + y = 2. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} x + 5y - 4z = -5; \\ 3x - 3y + z = 6; \\ 2x + 5y - 3z = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0; \\ 3x + y + 2z = 1; \\ x - 3y - 4z = 1. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} x + 5y - 4z = -5; \\ 3x - 3y + z = 6; \\ 2x + 5y - 3z = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0; \\ 3x + y + 2z = 1; \\ x - 3y - 4z = 1. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 15; \\ 3x - y + z = 8; \\ -2x + y + z = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y - 3z = -7; \\ x - 3y - 2z = -4; \\ 2x - y + z = 7. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} x - y - 3z = 10; \\ x - y - 2z = 9; \\ -x + 3y + 2z = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 5z = 6; \\ x + y + 3z = 1; \\ 2x + y + 4z = -3. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6; \\ 4x + 5y + 6z = 12; \\ 7x + 8y = -9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y - 2z = 3; \\ 2x - y - z = 8; \\ x + y + 4z = 7. \end{cases}$

26. а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-8; \\ 2x+3y+z=-3; \\ 2x+y+3z=-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y-2z=6; \\ x+y+2z=4; \\ 2x+5y-2z=11. \end{cases}$

27. а) $\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ 2x+6y+4z=2; \\ 3x+10y+8z=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+4y+2z=-3; \\ x+3y+3z=-1; \\ 2x+7y+5z=-4. \end{cases}$

28. а) $\begin{cases} 2x+y+3z=13; \\ x+y+z=6; \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=0; \\ 2x+3y+z=1; \\ x+2y=1. \end{cases}$

29. а) $\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ 3x+y+2z=6; \\ 3x+3y+z=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+z=3; \\ 2x+3y+z=5; \\ x+3y+2z=4. \end{cases}$

30. а) $\begin{cases} 2x+y-z=6; \\ 3x-y+2z=5; \\ 4x+2y-5z=9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y+2z=-6; \\ x-2y+z=-3; \\ 2x-5y-9z=-9. \end{cases}$

Задание 4. Даны три вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Требуется найти: а) вектор $\overline{d}$, его длину и направляющие косинусы; записать орт вектора $\overline{d}^0$; б) скалярное и векторное произведения векторов $\overline{d}_1 = \overline{a}+\overline{c}$ и $\overline{d}_2 = \overline{b}-\overline{a}$; в) косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а также $\text{пр}_{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}\overline{d}$; г) смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

1. $\overline{a}=(3,-6,-3)$; $\overline{b}=(0,\ 2,-3)$; $\overline{c}=(4,-2,\ 1)$; $\overline{d}=\dfrac{\overline{a}}{3}-\overline{b}+\overline{c}$.

2. $\overline{a}=(3,\ 1,\ 0)$; $\overline{b}=(-3,\ 6,\ 9)$; $\overline{c}=(1,\ 1,\ 1)$; $\overline{d}=\overline{a}+\dfrac{\overline{b}}{3}+2\overline{c}$.

3. $\overline{a}=(2,\ 4,\ -2)$; $\overline{b}=(2,\ 10,\ 1)$; $\overline{c}=(-4,\ 1,\ 3)$; $\overline{d}=\dfrac{\overline{a}}{2}+\overline{b}-2\overline{c}$.

4. $\overline{a}=(1,\ 2,\ 2)$; $\overline{b}=(2,\ 3,\ 4)$; $\overline{c}=(5,\ 1,\ 3)$; $\overline{d}=2\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

5. $\overline{a}=(3,\ 2,\ -5)$; $\overline{b}=(1,\ -1,\ 4)$; $\overline{c}=(1,\ -3,\ 1)$; $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}$.

6. $\overline{a}=(7,\ -8,\ 9)$; $\overline{b}=(1,\ -1,\ 1)$; $\overline{c}=(2,\ 0,\ 4)$; $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}+\dfrac{\overline{c}}{2}$.

7. $\overline{a}=(2,\ -3,\ 1)$; $\overline{b}=(0,\ 1,\ 4)$; $\overline{c}=(5,\ -2,\ 3)$; $\overline{d}=\overline{a}-2\overline{b}-\overline{c}$.

8. $\overline{a}=(1,\ -2,\ 1)$; $\overline{b}=(3,\ 2,\ 1)$; $\overline{c}=(1,\ 0,\ -1)$; $\overline{d}=\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c}$.

9. $\overline{a}=(-3,\ 1,\ 0)$; $\overline{b}=(1,\ -1,\ 1)$; $\overline{c}=(6,\ 2,\ -2)$; $\overline{d}=\overline{a}-2\overline{b}+\dfrac{\overline{c}}{2}$.

10. $\overline{a}=(3,\ 5,\ -1)$; $\overline{b}=(0,\ -2,\ 2)$; $\overline{c}=(-2,\ 2,\ 3)$; $\overline{d}=\overline{a}+\dfrac{\overline{b}}{2}-2\overline{c}$.

11. $\overline{a}=(3,-6,-1)$; $\overline{b}=(1,4,-5)$; $\overline{c}=(2,-4,12)$; $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}-\dfrac{\overline{c}}{2}$.

12. $\overline{a}=(3,\ 4,\ -1)$; $\overline{b}=(2,\ 3,\ 5)$; $\overline{c}=(1,\ 0,\ 1)$; $\overline{d}=2\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$.

13. $\overline{a}=(3,\ 1,\ 1)$; $\overline{b}=(3,\ -6,\ 9)$; $\overline{c}=(2,\ 1,\ 1)$; $\overline{d}=\overline{a}+\dfrac{\overline{b}}{3}-\overline{c}$.

14. $\overline{a}=(1,\ 2,\ 4)$; $\overline{b}=(5,\ 1,\ 2)$; $\overline{c}=(3,\ -1,\ 1)$; $\overline{d}=3\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}$.

15. $\overline{a}=(4,-3,5)$; $\overline{b}=(-3,\ 1,\ 2)$; $\overline{c}=(2,-4,-2)$; $\overline{d}=3\overline{a}+\overline{b}-\dfrac{\overline{c}}{2}$.

16. $\overline{a}=(2,\ 3,\ 0)$; $\overline{b}=(0,-3,-2)$; $\overline{c}=(1,\ 1,-1)$; $\overline{d}=2\overline{a}-3\overline{b}+2\overline{c}$.

17. $\overline{a}=(3,\ 3,\ 1)$; $\overline{b}=(0,-6,-2)$; $\overline{c}=(-1,\ 1,\ 1)$; $\overline{d}=\overline{a}-\dfrac{\overline{b}}{2}+\overline{c}$.

18. $\overline{a}=(3,-1,\ 2)$; $\overline{b}=(0,\ 1,-2)$; $\overline{c}=(-1,\ 7,\ 4)$; $\overline{d}=2\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$.

19. $\overline{a}=(2,-1,\ 5)$; $\overline{b}=(8,-4,\ 0)$; $\overline{c}=(-1,\ 1,\ 1)$; $\overline{d}=\overline{a}-\dfrac{\overline{b}}{4}+2\overline{c}$.

20. $\overline{a}=(2,\ 3,-1)$; $\overline{b}=(-2,\ 4,\ 5)$; $\overline{c}=(-4,\ 4,\ 0)$; $\overline{d}=2\overline{a}+\overline{b}-\dfrac{\overline{c}}{4}$.

21. $\overline{a}=(2,\ 1,\ 0)$; $\overline{b}=(3,\ 2,-1)$; $\overline{c}=(1,-1,\ 4)$; $\overline{d}=3\overline{a}+2\overline{b}-4\overline{c}$.

22. $\overline{a}=(2,-5,\ 1)$; $\overline{b}=(-2,-5,-1)$; $\overline{c}=(6,-3,\ 12)$; $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}+\dfrac{\overline{c}}{3}$.

23. $\overline{a}=(-12,\ 2,-4)$; $\overline{b}=(-4,\ 2,\ 3)$; $\overline{c}=(-3,\ 4,\ 3)$; $\overline{d}=\dfrac{\overline{a}}{2}+\overline{b}-2\overline{c}$.

24. $\overline{a}=(4,-2,-2)$; $\overline{b}=(2,\ 1,\ 2)$; $\overline{c}=(2,-3,\ 6)$; $\overline{d}=\dfrac{\overline{a}}{2}+2\overline{b}-\overline{c}$.

25. $\overline{a}=(-2,\ 1,\ 1)$; $\overline{b}=(1,\ 5,\ 0)$; $\overline{c}=(4,\ -4,\ 2)$; $\overline{d}=2\overline{a}+\overline{b}+\dfrac{\overline{c}}{2}$.

26. $\overline{a}=(5,\ 2,\ 0)$; $\overline{b}=(2,\ 5,\ 1)$; $\overline{c}=(3,\ 3,-6)$; $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}+\dfrac{\overline{c}}{3}$.

27. $\overline{a}=(2,-1,\ 1)$; $\overline{b}=(-3,\ 2,\ 1)$; $\overline{c}=(1,-1,\ 1)$; $\overline{d}=3\overline{a}-\overline{b}+4\overline{c}$.

28. $\overline{a}=(-6,\ 2,\ 0)$; $\overline{b}=(1,-1,\ 1)$; $\overline{c}=(5,\ 2,\ 2)$; $\overline{d}=\dfrac{\overline{a}}{2}-2\overline{b}+\overline{c}$.

29. $\overline{a}=(2,\ 4,-6)$; $\overline{b}=(-9,-3,\ 6)$; $\overline{c}=(3,\ 0,-1)$; $\overline{d}=\overline{a}-\dfrac{\overline{b}}{3}+2\overline{c}$.

30. $\overline{a}=(2,-5,\ 1)$; $\overline{b}=(-2,-5,\ 1)$; $\overline{c}=(4,-12,\ 4)$; $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}+\dfrac{\overline{c}}{4}$.

Задание 5. Даны вершины треугольника ABC. Требуется:

а) найти длину стороны *AB*;

б) составить уравнения сторон треугольника и найти их угловые коэффициенты;

в) составить уравнение высоты *CD* и найти ее длину;

г) составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC*;

д) вычислить косинус угла упри вершине *A*;

е) составить уравнение медианы, проведенной из вершины *B*.

1. *A*(0, 1); *B*(6, 5); *C*(12, –1).
2. *A*(3, 2); *B*(2, –5); *C*(–6, –1).
3. *A*(3, 2); *B*(2, –5); *C*(–6, –1).
4. *A*(4, 1); *B*(–3, –1); *C*(7, –3).
5. *A*(0, 4); *B*(–5, –1); *C*(2, 2).
6. *A*(–1, 6); *B*(3, 4); *C*(–3, 3).
7. *A*(0, 3); *B*(9, 4); *C*(–2, 7).
8. *A*(2, 2); *B*(0, 8); *C*(–2, 4).
9. *A*(7, 0); *B*(–8, 1); *C*(3, 4).
10. *A*(7, 0); *B*(1, 4); *C*(–8 –4).
11. *A*(3, –1); *B*(4, 2); *C*(–2, 0).
12. *A*(–3, –2); *B*(14, 4); *C*(6, 8).
13. *A*(–14, 6); *B*(10, –1); *C*(–8, 23).
14. *A*(–3, 8); *B*(–6, 2); *C*(0, –5).
15. *A*(–4, 3); *B*(4, 6); *C*(0, –3).
16. *A*(–1, 2); *B*(0, 1); *C*(–3, –4).
17. *A*(2, 3); *B*(–1, –3); *C*(6, 8).
18. *A*(0, 1); *B*(6, 5); *C*(12, –1).
19. *A*(–1, 4); *B*(5, 6); *C*(0, 1).
20. *A*(2, 4); *B*(–4, 1); *C*(0, –5).
25. *A*(2, –4); *B*(3, 5); *C*(–4, 0).
26. *A*(–1, 4); *B*(3, 0); *C*(–2, –5).

21. $A(3, 3)$; $B(1, 5)$; $C(-4, 4)$.
22. $A(1, -1)$; $B(-2, 1)$; $C(8, 2)$.
23. $A(0, 1)$; $B(3, 2)$; $C(-8, 4)$.
24. $A(3, 3)$; $B(5, 1)$; $C(-8, 4)$.
27. $A(9, 11)$; $B(3, -4)$; $C(0, -1)$.
28. $A(9, -5)$; $B(3, 5)$; $C(9, 11)$.
29. $A(-3, -10)$; $B(3, 5)$; $C(5, 1)$.
30. $A(6, 20)$; $B(3, 5)$; $C(6, 6)$.

Задание 6. Привести уравнение второго порядка к каноническому виду. Определить вид кривой, которую оно задает. Построить кривую.

1. а) $5x^2+10x+9y^2-4=0$; б) $4x-y^2-2y-5=0$.
2. а) $3x^2+12x-y+17=0$; б) $4x^2-y^2+16x-6y+11=0$.
3. а) $x^2+4x-4y^2-8y+4=0$; б) $x^2+y^2-2y+3=0$.
4. а) $2x^2-16x+y+35=0$; б) $4x^2-8x+3y^2+12y+4=0$.
5. а) $x^2+4x+y+9=0$; б) $x^2-6x-5y^2-10y+9=0$.
6. а) $y^2+x-8y+21=0$; б) $4x^2-8x+2y^2+8y+11=0$.
7. а) $x^2-y^2-2x+4y-7=0$; б) $x+y^2-2y+2=0$.
8. а) $x^2+4x-2y+6=0$; б) $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$.
9. а) $y^2-8y-5x+11=0$; б) $-x^2-10x+y^2-6y-17=0$.
10. а) $x^2-2x-2y-3=0$; б) $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$.
11. а) $3x^2-6x+y+1=0$; б) $x^2+14x+y^2-6y+54=0$.
12. а) $x^2-4x-y^2+4y-4=0$; б) $y^2+x+2y=0$.
13. а) $y^2-3x-6y+6=0$; б) $x^2+16y^2-4x-32y+4=0$.
14. а) $y^2+5x-6y+4=0$; б) $x^2+2y^2+4x-12y+18=0$.
15. а) $x=-2+3\sqrt{7-y}$; б) $x^2+y^2+2x-2y-23=0$.
16. а) $x^2+4x+6=y$; б) $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$.
17. а) $x^2+4x+y^2=60$; б) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$.
18. а) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$; б) $x=\ 2y^2-12y+14=0$.

19. а) $x^2+2x+12+11y=0$; б) $x^2-2x+y^2+4y+4=0$.

20. а) $y^2-6y-3=x$; б) $3x^2-30x-9y^2+30y+15=0$.

21. а) $x^2-4x+y^2-12=0$; б) $4x^2-9y^2+9x+36y+32=0$.

22. а) $y^2-2x+4y+2=0$; б) $-4x^2+8x+9y^2+18y-31=0$.

23. а) $2x^2+4x-y-1=0$; б) $4x^2-16x-9y^2+18y-29=0$.

24. а) $3y^2-12x-6y+11=0$; б) $9x^2-54x+16y^2+64y+1=0$.

25. а) $x^2-8x+1=y$; б) $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$.

26. а) $y^2+6x+6y+15=0$; б) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$.

27. а) $y^2+10x+2y=0$; б) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$.

28. а) $y^2-6y+5x+4=0$; б) $x^2+y^2+8x+2y-17=0$.

29. а) $3x^2-6x+y+1=0$; б) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.

30. а) $x^2-6x-3y^2+6=0$; б) $x^2+y^2+10x-4y+13=0$.

Задание 7. Даны координаты точек A, B, C, D:

а) написать уравнение плоскости ABC;

б) найти площадь треугольника ABC;

в) найти двумя способами длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC (используя формулы векторной алгебры и формулу расстояния от точки до плоскости);

г) найти угол между ребром AD и гранью ABC.

1. $A(7,\ 2,\ 4)$; $B(7,-1,-2)$; $C(3,\ 3,\ 1)$; $D(-4,\ 2,\ 1)$.
2. $A(1,\ 3,\ 6)$; $B(2,\ 2,\ 1)$; $C(-1,\ 0,\ 1)$; $D(-4,\ 6,\ -3)$.
3. $A(-2,\ 0,-4)$; $B(-1,\ 7,\ 1)$; $C(4,-8,-4)$; $D(1,-4,\ 6)$.
4. $A(-1,\ 0,\ 2)$; $B(3,\ 4,\ 0)$; $C(-1,-2,\ 3)$; $D(6,\ 3,\ 1)$.
5. $A(2,\ 3,\ 1)$; $B(-5,-4,\ 8)$; $C(6,\ 3,\ 7)$; $D(4,\ 1,-2)$.
6. $A(2,-1,\ 1)$; $B(4,\ 1,\ 3)$; $C(5,\ 5,\ 4)$; $D(3,\ 2,-6)$.
7. $A(-2,\ 1,-1)$; $B(2,\ 6,\ 8)$; $C(2,-2,\ 0)$; $D(2,\ 2,-3)$.

8. $A(-7, -2, 1)$; $B(3, -1, 4)$; $C(3, 5, 1)$; $D(4, -1, 7)$.

9. $A(7, 4, 2)$; $B(1, -5, 3)$; $C(-5, 3, -9)$; $D(7, -9, 1)$.

10. $A(-2, 0, -8)$; $B(7, 0, 3)$; $C(1, 2, 4)$; $D(-1, -2, 0)$.

11. $A(3, 4, 0)$; $B(0, -3, 1)$; $C(0, 2, 5)$; $D(1, 2, 0)$.

12. $A(5, 2, 0)$; $B(2, 5, 0)$; $C(1, 2, 4)$; $D(0, 1, 2)$.

13. $A(10, -5, 10)$; $B(-11, -2, 10)$; $C(-2, -14, 5)$; $D(1, 2, 0)$.

14. $A(3, 1, -2)$; $B(1, -2, 1)$; $C(-2, 1, 0)$; $D(2, 2, 5)$.

15. $A(1, -3, 1)$; $B(-3, 2, -3)$; $C(-3, -3, 3)$; $D(-2, 0, 4)$.

16. $A(3, 1, -1)$; $B(-1, -2, 4)$; $C(7, 0, -5)$; $D(1, 2, -1)$.

17. $A(5, 2, 1)$; $B(-2, 7, 3)$; $C(-1, 3, 9)$; $D(1, 0, 2)$.

18. $A(2, 2, 2)$; $B(0, 4, 0)$; $C(-3, -1, 5)$; $D(-1, 5, 6)$.

19. $A(-1, 6, 2)$; $B(8, 4, 4)$; $C(5, 4, 0)$; $D(2, 1, 0)$.

20. $A(3, -1, 1)$; $B(0, -2, 3)$; $C(-2, -1, 0)$; $D(3, -9, 2)$.

21. $A(-6, 0, 1)$; $B(1, 5, -2)$; $C(2, 7, 1)$; $D(0, 0, 1)$.

22. $A(1, -2, 6)$; $B(4, 1, 1)$; $C(0, 2, 1)$; $D(2, -1, 1)$.

23. $A(-5, -4, 8)$; $B(2, 3, 1)$; $C(4, -1, 2)$; $D(6, 3, 7)$.

24. $A(1, 2, 3)$; $B(-2, 4, 1)$; $C(7, 6, 3)$; $D(4, -3, -1)$.

25. $A(1, -1, 2)$; $B(2, 1, 2)$; $C(1, 1, 4)$; $D(6, -3, 8)$.

26. $A(2, 1, 0)$; $B(2, -1, 2)$; $C(0, 1, 3)$; $D(-1, 1, 0)$.

27. $A(2, -3, 5)$; $B(0, 2, 1)$; $C(3, 2, 4)$; $D(-2, -2, 3)$.

28. $A(1, -5, 4)$; $B(-1, 2, 3)$; $C(-2, -4, 3)$; $D(1, 0, 6)$.

29. $A(-4, 1, -3)$; $B(2, -5, 1)$; $C(3, 4, 3)$; $D(5, 2, -4)$.

30. $A(2, 0, 1)$; $B(2, 3, 5)$; $C(6, 2, 3)$; $D(3, 7, 2)$.

Задание 8. Вычислить пределы, не используя правило Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-3x-1}{x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{2-x^2}}{2x^2-5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{\sin^2 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{4x^2+23x+28}{x^3+64}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{e^{x^2}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{(x+1)/4}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{7x^2+15x+2}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+10}\right)^{x+8}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+4}}{2x^2-3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}\left(2\pi+2x\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+1}\right)^{x+1}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+6}-2\sqrt{2}}{2x^2-5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-6}{3x-1}\right)^{x/2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^x-e^\pi}{\sin 5x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+9x+10}{\sqrt{x+18}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1-2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^3-x^2+4x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{-4x-6}-\sqrt{2}}{x^2+5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+7}\right)^{2x+5}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi x+7\pi)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x-2}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\arcsin\, 2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+7}{5x+3}\right)^{3x+2}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^3-125}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}\, 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{(x-7)/3}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x+2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+3}\right)^{5x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-9x+2}{x^3-7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{5-x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3+x^2-8x-4}{x^2-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{1+x}-3}{x^2-3x-40}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+6}\right)^{x+2}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+3x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x+\pi)}{\ln(1+2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4x^2+7x-2}{x^3-2x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x}}{x^2+3x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 4x^2}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{2x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{2x-2}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\arcsin(x-3)}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-7}{x+9}\right)^{2x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{5-x}}{5x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x+5\pi)}{e^{3x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{(5x+8)/4}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+12}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-5}{3x+7}\right)^{x+1}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-3x}{\sqrt{2x-2}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arcsin^2 2x}{x\cdot\left(2^{-3x}-1\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4-1}{5x^2-6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-7x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{4x}-1}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}+\pi\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+6}{x+5}\right)^{3x+2}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{13+x}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{(5x-1)/2}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 5x}{x\operatorname{tg}\left(\pi x+\pi\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^{x+1}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^3+2x^2-x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x+4}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-16\right)}{x^2+x-20}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x-3}{7x-2}\right)^{3x+1}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+x-2}{x^3-13x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-x\sqrt{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-x-6}{e^{x-3}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+18}{x-2}\right)^{2x+3}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^2-4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{2x-3}-3\sqrt{x-5}}{x^2-3x+18}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+4}{8x-2}\right)^{(x+1)/4}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{2x^2-3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\pi x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-7}\right)^{x-2}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3-x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3+x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 3x-1}{\ln\left(1-3x^2\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-3}{8x+2}\right)^{5x+4}$.

Задание 9. Найти производные следующих функций:

1. а) $f(x)=\ln(\sin 5x)-\dfrac{4x^2}{\pi}$; б) $y=(6x-5)^{\operatorname{arctg} x}$;

в) $(x+y)^2(2x+y)^3=1$.

2. а) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{\sqrt[3]{x}}$; б) $y=(\sin x)^{2x-3}$;

в) $e^y+e^x+x^2+y^3=0$.

3. а) $f(x)=\ln\sqrt{(x-4)^3+(x-4)^3}$; б) $y=(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$;

в) $\ln\dfrac{y}{x}-x+6y=0$.

4. а) $f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$; б) $y=(\cos x)^{e^x}$;

в) $\operatorname{arctg} y+2x-y=0$.

5. а) $f(x)=4^x\sin\dfrac{\pi(2x+1)}{2}$; б) $y=\left(1+x^2\right)^{1/x}$;

в) $e^{xy}+\dfrac{y}{x}=\cos 3x.$

6. а) $f(x)=\ln\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{2-\operatorname{tg}x};$ б) $y=(\sin x)^{\sqrt[4]{x}};$

в) $\operatorname{arctg}y=x^2+xy.$

7. а) $f(x)=(x+1)e^{-2x};$ б) $y=(0{,}5x+1)^{\sin^2 x};$

в) $x^3+x^2y+y^2=0.$

8. а) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x};$ б) $y=\left(1+x^3\right)^{\sqrt{x}};$

в) $\sin 2y+\dfrac{x^3}{y}=7x.$

9. а) $f(x)=x\ln(\sin x+\cos x);$ б) $y=\left(4+x^3\right)^{\operatorname{tg}x};$

в) $x^3y^2-x=y\arcsin x.$

10. а) $f(x)=\operatorname{arctg}(2x\sqrt{x});$ б) $y=(\ln x)^{1/x};$

в) $y-\operatorname{tg}(x+5y)=e^x x^3.$

11. а) $f(x)=e^{x+1}(4x+5);$ б) $y=(1+\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}x};$

в) $e^{x-3y}+x^3y^2+4=0.$

12. а) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{x};$ б) $y=(6x+1)^{1/x^2};$

в) $xy^3+x=\sin y.$

13. а) $f(x)=\left(x^2+2x\right)\sin(\ln x);$ б) $y=(x+3)^{x/(x+1)};$

в) $e^y=e^x-xy.$

14. $f(x)=e^{\cos(\ln x)};$ б) $y=(x+1)^{(1-x)/x};$

в) $xy-\cos x+\sin y=0.$

15. а) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2-16}+x\right);$ б) $y=(\operatorname{ctg}x+1)^{1/\sin 2x};$

в) $2x^3+y^3=6xy^2$.

16. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$; б) $y=(\cos x)^{x^2}$;

в) $y=6x^2-xy^2+\cos x$.

17. а) $f(x)=\cos e^x+e^x\sin e^x$; б) $y=(3x+2)^{\arcsin x}$;

в) $xy^2+\cos y-4xy=1$.

18. а) $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{x+1}$; б) $y=\left(2x^3-3x\right)^{1-x}$;

в) $x-y^2+\cos x=\sin y$.

19. а) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$; б) $y=(\operatorname{tg}x)^{x^3}$;

в) $x^4+x^2y^2+y=x$.

20. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2x\right)$; б) $y=(10x+7)^{\operatorname{tg}x}$;

в) $\ln y-6x+\dfrac{y}{x}=0$.

21. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$; б) $y=\left(x^2+2x\right)^{\ln x}$;

в) $xy-7=\cos 2y-x$.

22. а) $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$; б) $y=\left(x^3+1\right)^{\sin x}$;

в) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^2}{7}=xy$.

23. а) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$; б) $y=(\ln(7x+4))^{\operatorname{ctg}x}$;

в) $\cos y=y^2+5x-4$.

24. а) $y=\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{2}$; б) $y=\left(x^2+x\right)^{\ln 3x}$;

в) $x^4-y^2+y\sin x=0$.

25. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; б) $y=(\cos 4x)^{3/x}$;

в) $x^3-y^2+yx=7x$.

26. а) $f(x)=\arcsin\left(\sqrt{2x}\right)$; б) $y=(\operatorname{ctg}\,3x)^{2e^x}$;

в) $x^3+y^3+5yx=10x$.

27. а) $f(x)=x\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$; б) $y=(\operatorname{ctg}\,(4x-1))^x$;

в) $y=e^y+\dfrac{y^2}{x}+x^2$.

28. а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-x}{e^x}}$; б) $y=(6x-1)^{2x/(1-x)}$;

в) $\cos y=xy^2+5$.

29. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$; б) $y=\left(3x^2+2x\right)^{\cos x}$;

в) $x^3+y^2=6yx$.

30. а) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; б) $y=(\sin x)^{x/2}$;

в) $x-e^y=4y+x^2$.

Задание 10. Функция $y=f(x)$ задана параметрически. Найти:
а) первую производную y'_x данной функции;
б) вторую производную y''_{xx} данной функции.

1. $\begin{cases} x=3\cos t; \\ y=3t-t^2. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos t}; \\ y=\operatorname{tg}\,t. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x=t+\ln(\cos t); \\ y=t+\ln(\sin t). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=\dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=e^{-\cos^2 t}; \\ y=e^{-\sin^2 t}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=2t-\sin 2t; \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t; \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = 4\left(1 + t^2\right). \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \cos t \cdot \sin t; \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}^2 t; \\ y = \ln(\cos t). \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = 3t\cos t; \\ y = 3t\sin t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t; \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln(\sin t); \\ y = e^{\cos 2t}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{4}; \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = te^{-t^2}; \\ y = \dfrac{1}{3}\left(3t - 2t^3\right). \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^4}; \\ y = \arcsin t^2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = 2 - \sin 2t. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = t - \operatorname{arctg} t; \\ y = \dfrac{t^4}{4} + 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \dfrac{2}{\cos^2 t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}; \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}^2 t; \\ y = \ln(\sin t). \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right); \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - 2t}; \\ y = \arccos\sqrt{2t}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^t; \\ y = \ln\left(1 + e^{2t}\right). \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = e^{t^2}; \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\left(3t + 2t^3\right); \\ y = te^{t^2}. \end{cases}$

Задание 11. Найти y'' и $d^2 y$.

1. $y = \dfrac{x}{x-1}$.

3. $y = x\cos^2 2x$.

5. $y = \operatorname{tg}^2 7x$.

2. $y = x(\ln x - 1)$.

4. $y = \dfrac{x-1}{x+4}$.

6. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

7. $y=\ln(\ln x)$.

8. $y=\left(x^2+1\right)^3$.

9. $y=\left(1+4x^2\right)\operatorname{arctg}2x$.

10. $y=\dfrac{3x+2}{5-2x}$.

11. $y=\dfrac{4x}{x+2}$.

12. $y=\dfrac{12x}{6-x}$.

13. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

14. $y=\dfrac{1-x}{x+7}$.

15. $y=\dfrac{4-2x}{1-x}$.

16. $y=\dfrac{x^2+x}{x+4}$.

17. $y=\dfrac{5\ln x}{x+3}$.

18. $y=\dfrac{x-2}{3-x}$.

19. $y=\dfrac{2x-1}{3x+4}$.

20. $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

21. $y=x^2\ln\left(1+x^2\right)$.

22. $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.

23. $y=\left(x^2+1\right)\operatorname{tg}x$.

24. $y=2x\operatorname{arctg}2x$.

25. $y=\dfrac{4x^2-8}{2x-1}$.

26. $y=\arcsin^2\dfrac{x}{2}$.

27. $y=\sqrt{8-x^2}$.

28. $y=\dfrac{7x+1}{x-2}$.

29. $y=x^4\ln\left(1+x^3\right)$.

30. $y=-\cos^2 x+\dfrac{\ln x}{x}$.

Задание 12. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{0,5-\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\cos 3x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{16/(4x-\pi)^2}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{(1-x)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{x-\dfrac{\pi}{3}-\sin 3x}{\cos\dfrac{3x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}x^{1/x+\ln x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^x$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x-\sin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{\sin^2 5x}$;   б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln 2x\right)^{1/\ln x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{x-\frac{\pi}{6}-\cos 3x}{\sin 6x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{1/\ln x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(2x-5\right)}{e^{\sin\pi x}-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{2/(x-\ln x)}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x+3\right)^{1/\ln x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\left(\sin x\right)}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{1/(x-1)}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$;   б) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\sin x+1\right)^{\ln x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$;   б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\operatorname{tg} x\right)^{2/(3x)}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3-x\right)^{1/(x^2-2x)}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1+3x)}{e^{6x}-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\sin 2x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{2/(x^2-x-6)}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{1-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/\ln(e^x-1)}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3-2x^2\right)^{1/\ln x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x^2\right)^{1/\sin \pi x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x+1\right)^{1/(2x)}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x\operatorname{ctg} x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} x\right)^{1/(4x-\pi)}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos x\right)^{1/\ln(1+2x^2)}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x\right)^{1/(x-\pi/4)^2}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\left(5-x\right)^{2/\left(4x-x^2\right)}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1+\cos\left(x+3\pi\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3-2x\right)^{1/(x-1)}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x\left(1-\operatorname{tg} x\right)}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$.

Задание 13. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y=1-2x^2-\dfrac{x^4}{4}$.
2. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-3}$.
3. $y=4x^2+\dfrac{25}{x-1}$.
4. $y=\ln\left(x^2+2x+2\right)$.
5. $y=x^3-3x^2+3$.
6. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+5$.
7. $y=2x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$.
8. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.
9. $y=-\ln\left(x^2-4x+5\right)$.
10. $y=\sqrt[3]{3x^2+2x^3}$.
11. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.
12. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$.
13. $y=e^{1/(2-x)}$.
14. $y=\left(x^2+2\right)e^{-x^2}$.
15. $y=x^3+6x^2+9x$.
16. $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$.
17. $y=\dfrac{x^2}{2x-3}$.
18. $y=(x+1)(x-2)^2$.
19. $y=x\sqrt{8-x^2}$.
20. $y=\sqrt{x^2-4x+5}$.
21. $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$.
22. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$.
23. $y=e^{2x-x^2}$.
24. $y=x^2e^{1-x}$.
25. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.
26. $y=1{,}5\sqrt[3]{x^2}-x$.
27. $y=xe^{0{,}5\left(1-x^2\right)}$.
28. $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$.
29. $y=-x^4+2x^2+8$.
30. $y=x(x-1)^2$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Матрицы, их свойства и операции над ними.
2. Определители второго и третьего порядка.
3. Миноры и алгебраические дополнения. Определители n-го порядка.
4. Свойства определителей n-го порядка. Основные методы вычисления определителей n-го порядка.
5. Ранг матрицы и его нахождение.
6. Обратная матрица, ее вычисление. Матричные уравнения.
7. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение невырожденных систем линейных уравнений.
8. Решение произвольных систем. Теорема Кронекера-Капелли.
9. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).
10. Однородные системы уравнений. Структура решений однородной системы. Фундаментальная система решений.
11. Векторы в трехмерном пространстве. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось.
12. Линейная зависимость и независимость векторов. Разложение вектора по базису. Направляющие косинусы вектора.
13. Деление отрезка в заданном отношении. Скалярное произведение векторов и его приложения.
14. Векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и приложения. Двойное векторное произведение.
15. Прямая линия на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
16. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, расстояние от данной точки до данной прямой (на плоскости).
17. Кривые второго порядка. Окружность, эллипс.
18. Кривые второго порядка. Гипербола, парабола.
19. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости.
20. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.
21. Прямая линия в пространстве. Различные виды уравнений прямой.

22. Угол между двумя прямыми в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.

23. Прямая и плоскость в пространстве.

24. Определение и способы задания функций.

25. Монотонная, обратная и ограниченная функции. Гиперболические функции.

26. Числовая последовательность. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел числовой последовательности.

27. Предел числовой функции. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательный пределы.

28. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых функций.

29. Односторонние пределы. Определение непрерывности и свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции и их классификация.

30. Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

31. Связь непрерывности с дифференцируемостью. Таблица производных и основные правила дифференцирования функций.

32. Производная неявной функции. Понятие о логарифмической производной.

33. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной. Производная параметрической функции.

34. Дифференциал функции. Геометрический смысл и свойства дифференциала. Дифференциал сложной функции.

35. Дифференциалы высших порядков.

36. Основные теоремы дифференциального исчисления.

37. Виды неопределенностей. Правило Лопиталя для вычисления пределов.

38. Условия возрастания и убывания функций. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

39. Точки экстремума. Необходимые условия локального экстремума. Достаточные признаки существования локального экстремума.

40. Асимптоты графика функции. Наибольшее и наименьшее значение функции (глобальный экстремум). Построение графиков функций.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

2. Высшая математика : руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета : в 7 ч. – Ч. 1. – Элементы линейной и векторной алгебры / Н. К. Прихач [и др.] ; под ред. В. А. Нифагина. – Минск : БНТУ, 2008. – 95 с.

3. Высшая математика : руководство к решения задач для студентов механико-технологического факультета : в 7 ч. – Ч. 2. – Элементы аналитической геометрии / О. Г. Вишневкая [и др.] ; под ред. В. А. Нифагина. – Минск : БНТУ, 2008. – 63 с.

4. Высшая математика : руководство к решения задач для студентов механико-технологического факультета : в 7 ч. – Ч. 3. – Элементы математического анализа / Е. А. Глинская [и др.] ; под ред. В. А. Нифагина. – Минск : БНТУ, 2009. – 104 с.

5. Астровский, А. И. Высшая математика : учебное пособие : в 3 ч. / А. И. Островский, М. П. Дымков. – Минск : БГЭУ, 2009. – Ч. 1. – 398 с.

6. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : Астрель, 2008. – 654 с.: ил.

7. Макарук, С. Ф. Конспект лекций по высшей математике для студентов экономических специальностей первого курса заочного обучения / С. Ф. Макарук, А. В. Дворниченко. – Брест : БрГТУ, 2006. – 65 с.

8. Гусак, А. А. Основы высшей математики : пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. М. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2012. – 204 с.

9. Булдык, Г. М. Высшая математика : курс лекций для студентов экономических специальностей / Г. М. Булдык. – Минск : ФУАинформ, 2010. – 541 с.

10. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Оникс 21 век, Мир и Образование, 2003. – Ч. 1. – 304 с.: ил.

11. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – 7-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 576 с.: ил.

12. Высшая математика: задачник : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.] – Минск : Высш. шк., 2012. – 319 с.: ил.

13. Демин, С. Е. Аналитическая геометрия : учеб.-метод. пособие / С. Е. Демин, Е. Л. Демина. – Нижний Тагил : НТИ (филиал УрФУ), 2016. – 272 с.

14. Губкина, Е. В. Простейшие приложения дифференциального исчисления : учебное пособие / Е. В. Губкина, М. А. Прохорович. – Горно-Алтайск : РИО ГАГУ, 2012. – 81 с.

15. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 1. – 41 с.

16. Лунгу, К. Н. Высшая математика : руководство к решению задач : в 2 ч. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – Ч. 1. – 216 с.

17. Богинич, А. В. Учебное пособие по высшей математике / А. В. Богинич, М. А. Двинина, В. А. Телешов. – Екатеринбург : УГМА, 2007. – 82 с.

18. Индивидуальные задания по высшей математике : в 4 ч. – Ч. 1. – Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А. П. Рябушко [и др.] – Минск : Вышэйшая школа, 2011. – 304 с.

19. Краткий курс высшей математики [Электронный ресурс] : учебное пособие. – Режим доступа: http://primat.org/_ld/0/35_ELVMATEM.pdf.

Учебное издание

ПРУСОВА Ирина Васильевна
ПРИХАЧ Наталия Константиновна

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие
для студентов специальностей
1-36 01 05 «Машины и обработка металлов давлением»,
1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства»

В 2 частях

Часть 1

Редактор *Н. Ю. Казакова*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 09.09.2022. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,06. Уч.-изд. л. 3,95. Тираж 100. Заказ 440.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.