

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Промышленная теплоэнергетика и теплотехника»

В. А. Седнин

В. В. Янчук

Т. В. Рьжова

МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Пособие

для студентов специальности 1-43 01 05

«Промышленная теплоэнергетика»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области энергетики и энергетического оборудования*

Минск  
БНТУ  
2022

УДК 621.1:519.8(075.8)

ББК 31.391я7

С28

**Рецензенты:**

*А. Л. Тимошук, В. М. Сыропуцинский*

**Седнин, В. А.**

С28 Моделирование, оптимизация и управление теплотехническими системами : пособие для студентов специальности 1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика» / В. А. Седнин, В. В. Янчук, Т. В. Рыжова. – Минск : БНТУ, 2022. – 58 с.

ISBN 978-985-583-773-3.

Пособие составлено как дополнение к лекционному материалу по дисциплине «Моделирование, оптимизация и управление теплотехническими системами».

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика».

**УДК 621.1:519.8(075.8)**

**ББК 31.391я7**

**ISBN 978-985-583-773-3**

© Седнин В. А., Янчук В. В.,  
Рыжова Т. В., 2022

© Белорусский национальный  
технический университет, 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Лабораторная работа № 1 .....	6
Лабораторная работа № 2 .....	19
Лабораторная работа № 3 .....	26
Лабораторная работа № 4 .....	34
Литература .....	53
Приложение 1.....	54
Приложение 2.....	57

## Введение

В процессе практической деятельности инженера моделирование занимает особое место. При разработке новых конструкций, проектировании технических систем и их эксплуатации возникает множество вопросов, связанных с необходимостью исследования и предсказания поведения технических объектов в различных ситуациях, связанных с условиями внешних воздействий, изменяющимися режимами работы, всевозможными внештатными ситуациями. Получение ответов на эти вопросы путем проведения натуральных испытаний далеко не всегда обосновано, а часто просто невозможно. Более гибким инструментом в этом случае выступают методы моделирования и особенно методы математического моделирования.

Данное пособие предполагает развитие у студентов навыков проведения численных экспериментов с применением ЭВМ. При выполнении лабораторных работ особое внимание уделяется развитию умения грамотной постановки задач исследования, построения математической модели, с привлечением знаний по специальным дисциплинам, разработки алгоритма численного эксперимента, правильной оценки полученных результатов. В пособие включены четыре работы, рассчитанные на 14–20 часов лабораторных работ (1 семестр изучения дисциплины).

Первая лабораторная работа посвящена общим проблемам приближенных вычислений как основополагающему фактору в анализе исходной информации и правилам преобразований в ходе машинной обработки.

Вторая – методам моделирования тепловых свойств теплоносителей и рабочих тел, которые являются необходимой частью расчетов теплотехнических установок на ЭВМ. В качестве исходных заданий могут быть использованы различные элементы теплотехнических систем: топки, теплообменные аппараты (рекуператоры, экономайзеры, пароперегреватели) и т. п. При выполнении работы для построения модели объекта исследования предполагается применение методов моделирования технических систем на макроуровне.

Третья работа предполагает выполнение на ПЭВМ расчетов режимов работы теплообменников с использованием методов моде-

лирования теплофизических свойств, изученных студентами при выполнении второй работы.

В четвертой работе студенты на базе использования численных методов решения уравнения теплопроводности в частных производных учатся анализировать тепловые режимы элементов теплотехнических установок.

Первая работа носит ознакомительный характер и может быть вынесена при необходимости на самостоятельную проработку материала. Методика выполнения последующих работ построена по принципу составления алгоритма решения индивидуальной задачи, а также составления и отладки программы реализации математической модели на ЭВМ.

Пособие составлено на основе опыта преподавания цикла дисциплин непрерывной подготовки в области применения вычислительной техники и программирования курса на кафедре «Промышленная теплоэнергетика и теплотехника» БНТУ. Авторы сознательно делают упор на самостоятельную разработку студентами алгоритмов и программ с целью развития навыков логического мышления, владение которыми обязательно в инженерной деятельности.

## Лабораторная работа № 1

### ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

В науке и технике мы обычно имеем дело с приближенными числами, что, прежде всего, вызвано ограниченной точностью получения тех или иных физических величин. Поэтому непрременной частью любого серьезного вычисления должен являться численный анализ ошибок результата. На практике это выполняется на основе теории приближенных вычислений, задачами которой являются:

- 1) установление способов выявления ошибок;
- 2) оценка ошибки операции над приближенными числами;
- 3) определение необходимой точности заданных чисел для обеспечения допустимой погрешности результата вычислений;
- 4) выяснение таких условий измерений или вычислений, при которых ошибка результата действий будет по возможности наименьшей.

В важности вышесказанного можно убедиться, выполнив следующий пример.

*Задание 1.* Вычислить с точностью до пяти знаков величину  $x$  по следующим пяти формулам:

$$x = \frac{(\sqrt{2} - 1)^3}{(\sqrt{2} + 1)^3} = (\sqrt{2} - 1)^6 = (3 - 2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2} = \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}$$

при а)  $\sqrt{2} = 7/5$ ; б)  $\sqrt{2} = 17/12$ .

В каждом случае действие деления выполнять последним.

После выполнения задания становится ясно, что без анализа ошибок вычисления нельзя сказать что-либо определенное относительно точности результатов.

**Цель работы:** ознакомиться с основными видами ошибок, с которыми сталкиваются при решении инженерных задач, и способами оценки точности полученных результатов вычислений.

## 1. Виды ошибок и их оценка

При проведении вычислений приходится сталкиваться со следующими основными видами ошибок: ошибки в исходной информации, ошибки ограничения и ошибки округления.

Ошибки в исходной информации. Любой результат измерения содержит ряд ошибок различного происхождения. Их принято делить на систематические, случайные и явные промахи. К ним необходимо еще добавить ошибки из-за невозможности представить необходимую величину конечной дробью.

К *систематическим* относят ошибки, величина которых одинакова во всех измерениях, проводящихся одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов. Общим признаком систематических ошибок можно считать принципиальную возможность их определения и исключения из результатов измерений.

Величина *случайных* ошибок различна для измерений, выполненных одинаковым образом. Случайные ошибки обязаны своим происхождением ряду объективных и субъективных причин, действие которых неодинаково в каждом опыте и не может быть учтено. Этот тип ошибок оценивается с помощью теории ошибок, которая базируется на аппарате теории вероятности.

При обработке числовой информации необходимо считаться с возможностью промахов или внешних влияний, дающих совершенно неверные результаты. Существует ряд вероятностных критериев, позволяющих определить и исключить результаты с грубыми ошибками.

Кроме того, многие числа нельзя представить точно ограниченным числом значащих цифр. Так, например, невозможно представить число  $\pi$  точно, так как оно является иррациональным числом и не может быть представлено конечным числом знаков. Многие обыкновенные дроби очень часто нельзя представить с помощью конечного числа десятичных знаков, как  $1/3$ , которую можно представить только в виде периодической дроби.

Ошибки ограничения. Этот вид ошибок проиллюстрируем на следующем примере.

Общеизвестный ряд Тейлора для функции  $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

может использоваться для вычисления синуса любого угла  $x$ , выраженного в радианах. Конечно, невозможно использовать все члены ряда для вычислений, так как ряд бесконечен, вычисления ограничиваются конечным числом членов: например, до  $x^7$  или  $x^9$ . Отброшенные члены ряда (а их число бесконечно) вносят некоторую ошибку в результат вычислений. Эта ошибка называется ошибкой ограничения, так как она возникает в результате ограничения бесконечного математического процесса.

Ошибки округления. Предположим, что вычисления производятся на машине, в которой каждое число представляется пятью значащими цифрами, и что необходимо сложить числа 9,2654 и 7,1625, причем эти два числа являются точными. Сумма их равна 16,4279, она содержит шесть значащих цифр и не помещается в разрядной сетке машины. Поэтому шестизначный результат будет округлен до 16,428 и при этом возникает ошибка округления. Так как вычислительные машины всегда работают с конечным количеством значащих цифр, то потребность в округлении возникает довольно часто.

Необходимо помнить, что вопросы округления относятся только к действительным числам, так как при выполнении арифметических операций с целыми числами потребность в округлении не возникает.

Оценки ошибок приближенных чисел. Разность между приближенным значением величины  $a$  и точным значением  $A$

$$\Delta a = a - A$$

называют точной ошибкой приближенного числа. Модуль точной ошибки называют абсолютной ошибкой числа.

Предельной абсолютной погрешностью  $\varepsilon_a$  приближенного числа  $a$  называют наименьшее положительное число, содержащее одну-две

значащие цифры и которое больше или равно модулю точной ошибки, т. е.

$$\varepsilon_a \geq |\Delta a|.$$

Если приближенное число записано в десятичной системе счисления, то по общепринятому соглашению предельная абсолютная погрешность принимается равной единице младшего разряда, если число получено без округления, и половине единицы младшего разряда, если число получено с округлением.

Таким образом, предельная абсолютная погрешность позволяет указать границы, в которых заключается точное значение числа, но недостаточно характеризует качество измерений, если приближенное число есть результат измерений или вычислений, произведенных по результатам измерений. Чтобы измерение или вычисление считалось хорошим, важна не только малость  $\varepsilon_a$ , но и малость  $\varepsilon_a$  по сравнению с  $a$ . Так, определение экваториального радиуса Земли при  $\varepsilon_R = 1$  м можно считать превосходным, измерение размеров аудитории с такой же предельной абсолютной погрешностью было бы плохим. Кроме того, в обычных задачах  $a$  и  $\varepsilon_a$  – числа размерные, и погрешности разных измерений не могут быть сравнимы в тех случаях, когда измеряются величины разных размерностей.

В связи с этими соображениями, используется понятие предельной относительной погрешности. Предельной относительной погрешностью  $\delta$  приближенного числа  $a$  называется отношение его предельной абсолютной погрешности  $\varepsilon_a$  к модулю числа  $a$ :

$$\delta = \frac{\varepsilon_a}{|a|}.$$

Природа возникновения ошибок округления в ЭВМ. Будем считать, что действительные числа в машине представлены в нормализованном виде. Обозначим дробную часть числа  $x$  через  $a$ , а показатель числа через  $b$ :

$$x = a \cdot 10^b.$$

При выполнении сложения или вычитания ЭВМ выравнивает порядки, т. е. сдвигает дробную часть меньшего числа по абсолютной величине его вправо или влево на столько разрядов, на сколько пришлось увеличить или уменьшить показатель  $b$  меньшего числа:

$$0,123 \cdot 10^3 + 0,453 \cdot 10^1 = 0,123 \cdot 10^3 + 0,00453 \cdot 10^3 = 0,12753 \cdot 10^3.$$

Предположим, что дробная часть может быть представлена только тремя значащими цифрами, тогда представим полученную сумму в виде суммы двух вещественных чисел:

$$0,12753 \cdot 10^3 = 0,127 \cdot 10^3 + 0,53 \cdot 10^{3-3}.$$

Таким образом, результаты любого из четырех арифметических действий можно представить в общем виде следующим образом:

$$x = a \cdot 10^b + c \cdot 10^{b-d},$$

где  $0,1 \leq |a| < 1$ ;  $0 \leq |c| < 1$ ;

$d$  – число значащих цифр в дробной части.

Существует два способа округления результатов арифметических операций: правило отбрасывания и так называемое симметрическое округление, когда к  $a$  прибавляется единица младшего разряда, если  $c$  по абсолютной величине больше или равно  $0,5$ ; если  $c < 0,5$ , то  $a$  остается без изменений:

$$x = \begin{cases} a \cdot 10^b & \text{при } |c| < 0,5; \\ a \cdot 10^b + 10^{b-d} & \text{при } |c| \geq 0,5. \end{cases}$$

Определим максимально возможные относительные ошибки для обоих видов округления:

1) правило отбрасывания:

$$\delta_x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| = \left| \frac{c \cdot 10^{b-d}}{a \cdot 10^b} \right| \leq \frac{1 \cdot 10^{b-d}}{0,1 \cdot 10^b} = 1 \cdot 10^{-d+1};$$

2) симметричное округление:

$$\delta_x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \leq \left| \frac{0,5 \cdot 10^{b-d}}{a \cdot 10^b} \right| = \frac{0,5 \cdot 10^{b-d}}{0,1 \cdot 10^b} = 0,5 \cdot 10^{-d+1}.$$

*Задание.* Сопоставить относительные ошибки для случая отбрасывания и случая симметричного округления для следующей арифметической операции:

$$y = 0,7324 \cdot 10^3 + 0,8261 \cdot 10^{-1}.$$

Полученные результаты сравнить с максимально возможными ошибками.

Вообще ошибки симметричного округления никогда не превосходят ошибки отбрасывания и в среднем вдвое меньше последней. Как правило, и та, и другая ошибка обычно гораздо меньше своих максимально возможных значений, но для полной уверенности всегда необходимо предполагать самое худшее, т. е. ситуацию, когда ошибка равна своему верхнему пределу.

Оценка ошибки по числу верных знаков. В практике широко используется связь между числом верных значащих цифр в приближенном числе и предельной относительной погрешностью. Легко показать [1], что предельную относительную погрешность для приближенного числа можно выразить как

$$\delta_a = \frac{10}{2n_1} \cdot 10^{-b},$$

где  $b$  – число верных значащих цифр в приближенном числе;

$n_1$  – первая цифра числа.

Следует обратить внимание на то, что, согласно приведенной формуле, предельная относительная погрешность зависит только от числа верных знаков и  $n_1$ , но не зависит от места запятой.

В табл. 1.1 приведены значения  $\delta_a$  для разных  $n_1$  и  $b$ . Все значения в таблице либо точные, либо с избытком.

Таблица 1.1

### Значение предельной относительной ошибки в процентах

$n_1 \backslash b$	1	2	3	4	5
1	50	5,0	0,50	0,050	0,0050
2	25	2,5	0,25	0,025	0,0025
3	17	1,7	0,17	0,017	0,0017
4	13	1,3	0,13	0,013	0,0013
5	10	1,0	0,10	0,010	0,0010
6	8,4	0,84	0,084	0,0084	0,00084
7	7,2	0,72	0,072	0,0072	0,00072
8	6,3	0,63	0,063	0,0063	0,00063
9	5,6	0,56	0,056	0,0056	0,00056

Для примерной оценки относительной погрешности можно взять среднее значение первой цифры, т. е. положить  $n_1 = 5$ . Тогда окажется, что предельная относительная погрешность числа, имеющего один верный знак, есть число порядка 10 %, в случае двух верных знаков – 1 %, в случае трех верных знаков – 0,1 % и т. д. Следует отметить, что во многих прикладных задачах оказывается достаточной предельная относительная погрешность порядка десятка долей процента; такие вычисления достаточно вести с тремя значащими цифрами.

Только что мы по числу верных знаков определяли предельную относительную погрешность. Можно решить и обратную задачу – по заданной предельной относительной погрешности определить необходимое число верных знаков. Если задано  $\delta_a = 10^{-q}$ , то нужно взять  $b$  так, чтобы

$$10^b \geq \frac{10^{q+1}}{2(n_1 + 1)}.$$

За необходимое число верных знаков следует принять наименьшее целое число  $b$ , удовлетворяющее этому неравенству. Можно

получить нечто вроде средней оценки, если принять  $n_1 = 4$ ; тогда  $b \geq q$ . В соответствии со сказанным составлена табл. 1.2.

Таблица 1.2

Значение числа верных знаков при заданной относительной погрешности

$\delta, \% \backslash q$	100	10	1	0,1	0,01	0,001
$n_1$	0	1	2	3	4	5
1–3	1	2	3	4	5	6
4–9	0	1	2	3	4	5

Таким образом, если первая цифра не превышает трех, то число верных цифр должно быть на единицу больше, чем модуль показателя при 10 в заданной относительной погрешности; в остальных случаях эти числа равны.

Значения при  $q = 0$ ,  $n = 4–9$  означает, что 100-процентная ошибка будет, если в числе нет ни одного верного знака, но все-таки известно, что первая цифра не меньше четырех. Действительно, пусть точное число, однозначное, равно 5. Если допускается ошибка в 100 % числа, значит модуль ошибки может достигнуть 5, и приближенное число может иметь значение от 0 до 10, т. е. и первая цифра не будет верной.

## 2. Распространение ошибок

При вычислениях очень важно знать, как ошибка, возникшая в определенном месте в ходе вычислений, распространяется дальше и влияет на промежуточный и конечные результаты. Рассмотрим абсолютную и относительную погрешность каждой из четырех арифметических операций. Пусть имеются два приближения  $x$  и  $y$  к двум величинам  $x$  и  $y$ , а также известны соответствующие абсолютные ошибки  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ .

Тогда сумма чисел:

$$x + y = x + \varepsilon_x + y + \varepsilon_y = x + y + \varepsilon_x + \varepsilon_y = x + y + \varepsilon_{x+y},$$

т. е. абсолютная погрешность суммы двух чисел:

$$\varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

Аналогично абсолютная погрешность разности:

$$\varepsilon_{x-y} = \varepsilon_x - \varepsilon_y.$$

При умножении имеем:

$$x \cdot y = (x + \varepsilon_x) \cdot (y + \varepsilon_y) = xy + x\varepsilon_y + y\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y,$$

и, пренебрегая произведением ошибок, поскольку ошибок обычно гораздо меньше самих величин, имеем:

$$\varepsilon_{xy} = x\varepsilon_y + y\varepsilon_x.$$

При делении, соответственно, имеем

$$\frac{x}{y} = \frac{x + \varepsilon_x}{y + \varepsilon_y}.$$

Преобразуем последнее выражение к виду:

$$\frac{x}{y} = \frac{x + \varepsilon_x}{y} \left( \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_y}{y}} \right).$$

Далее выражение, стоящее в скобках, разложим в ряд, пользуясь формулой разложения бинома Ньютона:

$$(1 + \alpha)^m = 1 + m\alpha + \Lambda + \frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!} \alpha^n + K.$$

В данном случае  $\alpha = \frac{\varepsilon_y}{y}$  и  $m = 1$ , тогда

$$\frac{x}{y} = \frac{x + \varepsilon_x}{y} \left( 1 - \frac{\varepsilon_y}{y} + \frac{\varepsilon_y^2}{y^2} - K \right).$$

Перемножая и пренебрегая всеми членами, которые содержат произведения ошибок или степени ошибок выше первой, имеем:

$$\frac{x}{y} \approx \frac{x}{y} + \frac{\varepsilon_x}{y} - \frac{x\varepsilon_y}{y^2}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{x/y} = \frac{\varepsilon_x}{y} - \frac{x\varepsilon_y}{y^2}.$$

Необходимо четко представлять, что знак ошибки бывает известен только в очень редких случаях. Не следует думать, что ошибка увеличивается при сложении и уменьшается при вычитании потому, что в формуле для сложения стоит плюс, а для вычитания – минус. Если, например, ошибки двух чисел имеют противоположные знаки, то дело будет обстоять как раз наоборот, т. е. ошибка уменьшится при сложении и увеличится при вычитании этих чисел.

После того как мы вывели формулы для распространения абсолютных ошибок при четырех арифметических действиях, довольно просто вывести соотношение формулы для относительных ошибок.

*Задание.* Вывести формулы распространения относительной ошибки для четырех арифметических действий.

Вышеприведенные формулы дают возможность проследить распространение ошибок. Абсолютные и относительные погрешности каждого из четырех действий можно рассматривать как функции приближенных значений исходных операндов  $x$ ,  $y$  и ошибок  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,

$\delta_x, \delta_y$ . Ошибка округления в данных арифметических операциях не учитывалась.

Если же в дальнейшем необходимо будет подсчитать, как распространяется в последующих операциях ошибка этого результата, то необходимо ее прибавить к вычисленной арифметической операции. Проиллюстрируем распространение ошибки на следующем примере.

Предположим, что заданы исходные числа  $x, y, z, v, w$ ; для упрощения считаем, что они не содержат никаких ошибок. Необходимо вычислить выражение

$$u = ((x + y)z + v)w.$$

Вначале требуется сложить числа  $x$  и  $y$ . Относительная погрешность суммы определяется ошибкой округления, и при симметричном округлении она не должна превысить величины  $0,5 \cdot 10^{-d+1}$ , где  $d$  – число дробной части операндов.

Далее

$$\delta_{(x+y)z} = \delta_{x+y} + \frac{\varepsilon_z}{z} + k_1,$$

где  $\varepsilon_z = 0$  по условию;

$k_1$  – ошибка округления при умножении,

$$|k| \leq 0,5 \cdot 10^{-d+1}.$$

Отсюда

$$\delta_{(x+y)z} = \left| \delta_{x+y} \right| \leq \left| \delta_{x+y} \right| + |k_1| \leq 1,0 \cdot 10^{-d+1}.$$

Следя за движением ошибки, получим:

$$\delta_{(x+y)z+v} = \left| \frac{(x+y)z}{(x+y)z+v} \delta_{(x+y)z} + \frac{v}{(x+y)z+v} \delta_v + k_2 \right|,$$

где  $k_2$  – ошибка округления, возникающая при прибавлении  $v$ ,  
 $|k_2| \leq 0,5 \cdot 10^{-d+1}$ .

Так как  $\delta_v = 0$ , то

$$\delta_{(x+y)z+v} \leq \left| \frac{(x+y)z}{(x+y)z+v} 10^{-d+1} \right| + \left| 0,5 \cdot 10^{-d+1} \right|.$$

Окончательно

$$\delta_u \leq \left| \frac{(x+y)z}{(x+y)z+v} 10^{-d+1} \right| + 0,5 \cdot 10^{-d+1} + 0,5 \cdot 10^{-d+1} = 1,0 \cdot 10^{-d+1} \left| \frac{2(x+y)z}{(x+y)z+v} \right|.$$

Существует более удобный способ анализа распространения ошибки в арифметических операциях. Последовательность операций в арифметическом выражении изображается с помощью графа. В этом случае около стрелок графа пишутся коэффициенты, позволяющие легко определить общую погрешность результата. Граф следует читать снизу вверх, причем сначала выполняются операции одного горизонтального уровня. Коэффициенты у стрелок пишутся по следующим правилам. Если складываются два числа  $a$  и  $b$ , то у двух стрелок, входящих в кружок сложения, коэффициенты будут:

$$\frac{a}{a+b} \text{ и } \frac{b}{a+b}.$$

Аналогично при вычитании:

$$\frac{a}{a-b} \text{ и } \frac{b}{a-b}.$$

При умножении стрелок получают коэффициенты  $+1$ . При делении  $a/b$  стрелка, идущая от числа  $a$ , снабжается коэффициентом  $+1$ , а идущая от числа  $b$  – коэффициентом  $-1$ . Таким образом, относительные ошибки всех чисел, входящих в арифметическое выражение, переходят в следующую операцию, умноженные на соответствующий коэффициент.

Граф вычислительного процесса рассмотренного примера представлен на рис. 1.1, где  $(x+y)z = m$ .

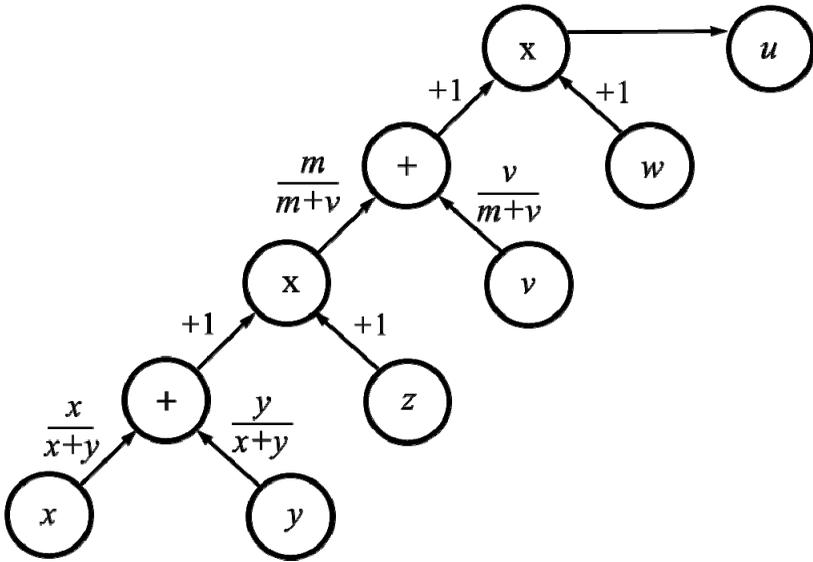


Рис. 1.1. Граф вычислительного процесса  $u = ((x + y) z + v) w$

**Краткие выводы**

При программировании вычислительных алгоритмов необходимо помнить следующее:

1. При сложении и вычитании длинной последовательности чисел арифметические операции начинают с наименьших чисел.
2. Преобразуя формулы, следует избегать вычитания двух приблизительно равных друг другу чисел и деления на числа, близкие к нулю.
3. Следует по возможности уменьшить число выполняемых арифметических операций, ограничившись их необходимым минимумом.

*Задание.* Определить величину абсолютной и относительной ошибок при вычислении выражения:

$$u = [(x - y) z v + w] / x,$$

где  $x, y, z, v, w$  – исходные числа, заданные точно.

Ошибку округления принять равной  $k$ .

## Лабораторная работа № 2

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ И РАБОЧИХ ТЕЛ

**Цель работы:** приобретение навыков в использовании методов определения физических свойств теплоносителей и рабочих тел при моделировании теплотехнических систем и установок.

#### Общие методические положения

При моделировании теплотехнических установок и систем возникает необходимость расчета термодинамических и теплофизических свойств теплоносителей и рабочих тел. Основными теплоносителями (рабочими телами) в энергетике являются вода, водяной пар, воздух и продукты сгорания органического топлива. К ним можно добавить используемые в теплоэнергетике реже: инертные газы, двуокись углерода, жидкие металлы, фреоны и др. В инженерных расчетах необходимо определять такие их свойства, как плотность, теплоемкость, вязкость, теплопроводность, энтальпия, энтропия и др.

Для определения термодинамических и теплофизических свойств теплоносителей и рабочих тел при ручных расчетах широко используются соответствующие таблицы и диаграммы. Как правило, они наглядны, удобны для использования и соответствуют по точности ручным расчетам. В случае же математического моделирования и использования ЭВМ возникают трудности в применении имеющихся табличных данных, связанных с большим объемом таблиц, сложностью устройств непосредственного считывания данных с диаграмм и т. п. Поэтому в этом случае предпочтительней применять другие подходы.

Эти методы и реализующие их программы должны удовлетворять ряду требований. Во-первых, они должны обеспечивать необходимое быстродействие в получении расчетных значений параметров. Это особенно важно, так как при реализации математических моделей теплотехнических систем и установок преобладают итерационные процессы, и время, расходуемое на определение свойств

теплоносителей и рабочих тел, может составлять до 80–90 % общего времени расчета. Во-вторых, методы должны обеспечивать возможность быстрого и легкого внесения дополнительных сведений о свойствах теплоносителей и рабочих тел, которые появляются в ходе постоянного обновления наших знаний. В-третьих, методы должны быть понятными и простыми в использовании.

Наиболее широко используются три основных метода определения физических параметров рабочих тел и теплоносителей [4]:

- 1) аппроксимация табличных данных и представление их в виде функций от одного или нескольких параметров;
- 2) интерполирование по узловым точкам табличных данных;
- 3) индивидуальные методики расчета параметров, полученные для отдельных теплоносителей и рабочих тел.

Реализация первого метода требует предварительной обработки исходных табличных данных (диаграмм) с целью получения функциональных зависимостей. Степень сложности этих зависимостей определяет скорость определения искомого физического параметра теплоносителя: функциональные зависимости явного вида требуют малые объемы машинной памяти и простые алгоритмы; при использовании неявных функциональных зависимостей с итерационным процессом расчета время вычисления резко возрастает. Сложность функции растет с повышением требуемой точности и увеличением области определения параметра. Существенным недостатком этого метода является трудность учета изменений и уточнений, вносимых в таблицы физических свойств рабочих тел. В большинстве случаев это требует разработки расчетных уравнений заново.

Суть второго способа заключается в использовании известных методов интерполяции на базе узловых точек, сформированных из соответствующих таблиц свойств теплоносителей и рабочих тел. Существенными преимуществами определения параметров путем прямой интерполяции по узловым точкам является отсутствие итерационных расчетов и возможность быстрого внесения изменений и дополнений в соответствии с новыми исследованиями свойств теплоносителей. В то же время важным является вопрос выбора метода интерполяции, так как от этого зависит объем таблицы узловых точек, а следовательно, точность и скорость вычисления иско-

мых параметров. В самом деле, чем выше степень интерполирующего многочлена, тем либо больше допустимый интервал между узловыми точками при данной требуемой точности, либо выше точность определения параметров при данном межузловом интервале. С другой стороны, с повышением степени интерполирующего многочлена требуется учитывать большее число соседних узловых точек, что усложняет алгоритм их выделения, увеличивает объем расчетов и снижает скорость вычисления параметров. Следовательно, в каждом конкретном случае можно выбрать оптимальный объем узловых точек, т. е. таблицы значений параметров, до размеров которой уменьшается исходная информация.

Алгоритм реализации метода интерполяции в укрупненном виде включает: 1) определение при необходимости фазы состояния энергоносителя по исходным термодинамическим параметрам; 2) определение расчетных узловых точек для искомого параметра(ов); 3) выполнение интерполяции.

Возможность применения третьего метода расчета свойств рабочего тела или теплоносителя при моделировании теплотехнических объектов определяется наличием соответствующей методики, ее сложностью, трудоемкостью реализации на ЭВМ.

Выбор одного из перечисленных методов определяется его преимуществами в каждом конкретном случае перед двумя другими. Рассмотрим несколько примеров определения параметров теплоносителей.

### *Пример 1.*

При моделировании теплоэнергетических установок часто возникает необходимость определения теплоемкости продуктов сгорания. Как известно, теплоемкость смеси газов, состоящей из  $n$  компонентов, определяется как

$$c_{\text{см}} = \sum_{i=1}^n c_i r_i,$$

где  $c_i$ ,  $r_i$  – соответственно теплоемкость и доля  $i$ -го компонента смеси.

Для компонентов продуктов сгорания средняя объемная (массовая) изобарная теплоемкость может быть описана полиномом 5-й степени как функция от температуры  $t$  [5]:

$$c_i = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_5t^5 = \sum_{i=0}^5 a_i t^i.$$

Алгоритм расчета теплоемкости продуктов сгорания, состоящих в общем случае из  $n$  компонентов, приведен ниже. Для расчетов полиномов использована схема Горнера:

```

ccn = 0;
for i = 1 to n
    ci = ai5;
    for j = 4 to 0 step -1
        ci = ci · t + aij;
    ccn = ccn + ci · ri;
next j
next i.

```

На основе данного алгоритма легко составить подпрограмму для определения теплоемкости продуктов сгорания при расчетах теплотехнических объектов.

### Пример 2.

В случае необходимости определения нескольких параметров теплоносителя в зависимости друг от друга удобно использовать интерполирование. Рассмотрим алгоритм с применением линейной интерполяции. Таблица узловых точек может быть представлена в виде двумерного массива, например, массива  $a_{il} = 1 \dots n, l = 1 \dots m$  ( $n$  – число узловых точек, размещенных в таблице,  $m$  – число параметров):

$i \backslash l$	1	2	...	$m$
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,m}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,m}$
...	...	...	...	...
$n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	...	$a_{n,m}$

Допустим задано произвольное значение  $k$ -го параметра  $t$ , причем  $k$  может принимать любое целочисленное значение по номеру столбца (от  $l$  до  $m$ ), а  $t$  задано соответствующими значениями в узловых точках:  $a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{n,k}$ . Необходимо определить соответствующее ему значение  $j$ -го параметра  $y$  ( $j = 1, k, m, (j \neq k)$ ). Для линейной интерполяции алгоритм расчета имеет следующий вид:

```

i = 2;
while  $a_{i,k} > t$ 
     $y = a_{i-1,j} + (a_{i,j} - a_{i-1,j}) \cdot (t - a_{i-1,k}) / (a_{i,k} - a_{i-1,k})$ 
     $i = i + 1$ 
loop

```

В случае использования, например, интерполяционного многочлена Лагранжа

$$y = \sum_{i=1}^n y_{i,k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{t - a_{l,j}}{a_{i,k} - a_{l,j}},$$

алгоритм расчета может быть представлен в следующем виде:

```

 $y_i = 0$ ;
for  $i = 1$  to  $n$ 
     $p = 1$ 
    for  $l = 1$  to  $n$ 
        if  $i \neq l$  then
             $p = p \cdot (t - a_{l,k}) / (a_{i,k} - a_{l,k})$ 
        else
            end if
     $y = y + p \cdot a_{i,k}$ 
    next  $l$ 
next  $i$ 

```

Таким образом, один и тот же многочлен применяется для определения различных параметров теплоносителя, причем в вышеприведенной постановке любой из параметров, представленных в исходной таблице, может выступать как в виде функции, так и в виде аргумента.

*Пример 3.*

Рассмотрим алгоритм расчета параметров водяного пара по уравнению состояния МЭИ. В этих уравнениях искомые свойства: энтальпия  $h$ , энтропия  $s$  и удельный объем  $v$  – представлены в виде аналитических зависимостей от температуры  $T$  и давления  $p$  [6]. Например, уравнение для энтальпии имеет вид:

$$h = f(p, t) = 1808,92 + 1,48286T + 3,79025 \cdot 10^4 \cdot T^2 + 106,3196 \times \\ \times \lg(T) - 0,4615 \cdot T^2 \cdot p \cdot D \cdot B + 0,5 \cdot D \cdot C \cdot p + D \cdot D \cdot p^{2/3},$$

где  $B, C, D$  – вириальные коэффициенты:

$$B = (b_0 + b_1\tau + \dots + b_5\tau_5) \cdot 10^{-4}, \\ C = (c_0 + c_1\tau + \dots + c_8\tau_8) \cdot 10^{-6}, \\ D = (d_0 + d_1\tau + \dots + d_8\tau_8) \cdot 10^{-8},$$

$\tau = 1000 / T$ ,  $b, c, d$  – константы.

Алгоритм определения энтальпии по данному уравнению для заданных  $T$  и  $p$  можно представить следующим образом:

$$\tau = 1000/T;$$

$$B = b_5;$$

*for*  $i = 4$  *to*  $0$  *step*  $-1$

$$B = B \cdot \tau + b_i;$$

*exit for*

*next i*

$$C = c_8;$$

$$D = d_8;$$

*for*  $i = 7$  *to*  $0$  *step*  $-1$

$$C = C + c_i;$$

$$D = D + d_i;$$

*exit for*

*next i*

$$B = B / 10000;$$

$$C = C / 1000000;$$

$$D = D / 100000000;$$

$$h = 1808,92 + 1,48286 * T + 3,79025 * 0,0001 * T^2 + 106,3196 * \log(T) / \log(10) - 0,4615 * T^2 * p * D * B + 0,5 * D * C * p + D * D * p^{(2/3)}$$

В заключение следует отметить, что в настоящее время разработано множество программ для аппроксимации и интерполирования, которые могут быть успешно использованы при реализации математических моделей теплоэнергетических систем с целью расчета физических свойств теплоносителей. В частности, в [7] представлена программа для интерполирования сплайн-функций. В [8] представлен расширенный обзор, посвященный физике жидкостей, газов и твердых тел, расчетам их параметров, который может быть полезен при выполнении расчетов теплоэнергетических систем.

### **Порядок выполнения работы**

#### ***Занятие 1.***

1. Ознакомиться с инструкцией по работе.
2. Получить от преподавателя задание.
3. Описать структуру и механизм функционирования объекта исследования.
4. Разработать математическую модель (метод представления физических параметров теплоносителей (рабочих тел) задается преподавателем).
5. Самостоятельная работа. Составить программу реализации математической модели на ЭВМ.

#### ***Занятие 2.***

6. Обсуждение программы (см. п. 5) с преподавателем.
7. Ввод программы с ПЭВМ и ее отладка.
8. Самостоятельная работа. Подготовить тестирующий пример и исходные данные для выполнения численного исследования.

#### ***Занятие 3.***

9. Выполнить тестирование программы.
10. Выполнить численное исследование на ПЭВМ.
11. Произвести анализ полученных экспериментов.
12. Самостоятельная работа. Оформить отчет по лабораторной работе.

## Лабораторная работа № 3

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

**Цель работы:** приобретение навыков моделирования стационарных и нестационарных режимов работы теплообменников.

#### Общие методические положения

Эффективность теплообмена в теплообменных аппаратах определяется гидродинамической структурой потока теплоносителей. Предложен целый ряд моделей, описывающих гидродинамику теплоносителей [9], среди которых выделим модель идеального смешения, модель идеального вытеснения, ячеечную модель.

Согласно модели *идеального смешения*, во всем потоке или на рассматриваемом его участке происходит полное смешение молекул теплоносителей. В таком случае любое изменение температуры потока на входе в зону идеального смешения мгновенно распределяется по всему объему зоны. Подобная структура потоков имеет место в теплообменных аппаратах с изменением агрегатного состояния теплоносителей (конденсаторах, испарителях и т. п.).

Условия физической реализуемости модели *идеального вытеснения* выполняются в случае поршневого потока, когда предполагается, что в направлении его движения смешение полностью отсутствует, а в направлении, перпендикулярном движению, происходит идеальное смешение. Такая структура соответствует движению потоков в трубном пространстве кожухотрубчатых теплообменников различных конструкций, а также для теплообменного аппарата типа «труба в трубе».

Диффузионная модель гидродинамической структуры потоков соответствует такому движению потока, когда в направлении его течения существует продольное смешение, а в перпендикулярном направлении предполагается наличие идеального смешения. Диффузионная модель значительно лучше, чем модель идеального вытеснения, описывает гидродинамическое условие реальных кожухотрубчатых теплообменников.

Обычно расчеты теплообменных аппаратов проводят, пренебрегая отклонениями реальной гидродинамической структуры потоков в них от моделей идеального смешения или вытеснения. Это объясняется тем, что в промышленных условиях редко достигаются условия, близкие к процессам равновесного теплообмена, т. е. с температурным напором, стремящимся к нулю. А именно при этих режимах влияние структуры потока на эффективность процесса теплообмена оказывается наиболее значительным.

На примере теплообменника «труба в трубе» (рис. 3.1) рассмотрим закономерности изменения температуры по длине теплообменника (рис. 3.2) в стационарном режиме. Считаем, что диаметры внешней и внутренней трубы постоянны по всей длине теплообменника, потери давления на сопротивление движению теплоносителей внутри теплообменника незначительны по сравнению с их абсолютным значением давления. Если для описания гидродинамической структуры потоков в теплообменном аппарате типа «труба-труба» принята модель «идеального вытеснения», то изменение температур теплоотдающего и тепловоспринимающего теплоносителей по длине аппарата характеризуется системой уравнений:

$$G_{\text{ТО}} \frac{dh_{\text{ТО}}}{dx} = -k(t_{\text{ТО}} - t_{\text{ТВ}}) \frac{F}{l},$$

$$G_{\text{ТВ}} \frac{dh_{\text{ТВ}}}{dx} = k(t_{\text{ТО}} - t_{\text{ТВ}}) \frac{F}{l},$$

где  $t$ ,  $h$ ,  $G$  – соответственно температура, энтальпия, расход теплоносителя;

$k$ ,  $F$ ,  $l$  ( $l_{\text{акт}}$ ) – соответственно коэффициент теплопередачи, площадь поверхности и рабочая (активная) длина теплообменника;

$\text{то}$ ,  $\text{тв}$  – индексы соответственно для теплоотдающего и тепловоспринимающего теплоносителей.

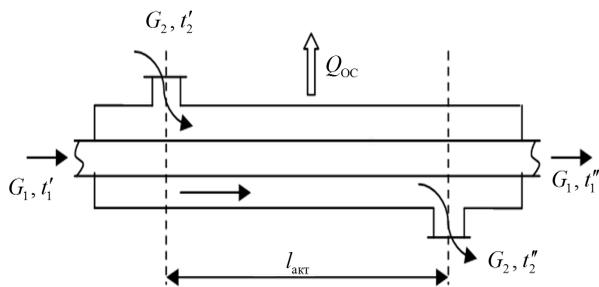


Рис. 3.1. Теплообменник «труба в трубе»

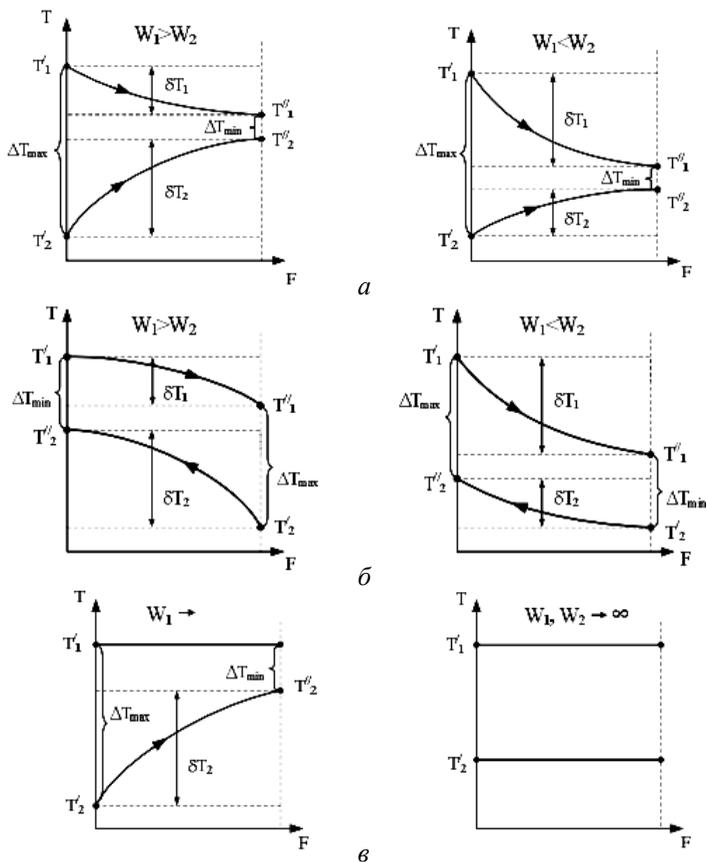


Рис. 3.2. Изменение температуры теплоносителей по длине теплообменника: а – при прямотоке; б – при противотоке; в – при изменении агрегатного состояния теплоносителей

Если физические свойства теплоносителей принять постоянными и ввести понятия удельной поверхности теплообмена ( $f = F / l$ ) и теплоемкости массового расхода ( $W = G \cdot c_p$ ), исходные выражения приведем к виду:

$$W_{\text{ТО}} dt_{\text{ТО}} = -k(t_{\text{ТО}} - t_{\text{ТБ}}) f dx,$$

$$W_{\text{ТБ}} dt_{\text{ТБ}} = k(t_{\text{ТО}} - t_{\text{ТБ}}) f dx.$$

Тогда профили изменения температур получают путем интегрирования ранее записанных дифференциальных уравнений [9]:

– для прямотока:

$$t_{\text{ТБ}}^x = t_{\text{ТБ}}^0 + \frac{t_{\text{ТО}}^0 - t_{\text{ТБ}}^0}{\frac{W_{\text{ТБ}}}{W_{\text{ТО}}} + 1} \left\{ 1 - \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_{\text{ТО}}} + \frac{1}{W_{\text{ТБ}}} \right) \right] \right\},$$

$$t_{\text{ТО}}^x = t_{\text{ТО}}^0 - \frac{t_{\text{ТО}}^0 - t_{\text{ТБ}}^0}{\frac{W_{\text{ТБ}}}{W_{\text{ТО}}} + 1} \left\{ 1 - \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_{\text{ТО}}} + \frac{1}{W_{\text{ТБ}}} \right) \right] \right\};$$

– для противотока:

$$t_{\text{ТБ}}^x = t_{\text{ТБ}}^0 + \frac{(t_{\text{ТО}}^0 - t_{\text{ТБ}}^0) \left\{ 1 - \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_{\text{ТО}}} - \frac{1}{W_{\text{ТБ}}} \right) \right] \right\}}{\frac{W_{\text{ТБ}}}{W_{\text{ТО}}} - \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_{\text{ТО}}} - \frac{1}{W_{\text{ТБ}}} \right) \right]},$$

$$t_{\text{ТО}}^x = t_{\text{ТО}}^0 + \frac{(t_{\text{ТО}}^0 - t_{\text{ТБ}}^0) \left\{ 1 - \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_{\text{ТО}}} - \frac{1}{W_{\text{ТБ}}} \right) \right] \right\}}{1 - \frac{W_{\text{ТО}}}{W_{\text{ТБ}}} \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_{\text{ТО}}} - \frac{1}{W_{\text{ТБ}}} \right) \right]}.$$

Если необходимо учитывать изменение свойств теплоносителей, то для определения профиля температур вдоль длины теплообменных аппаратов используют интервальный метод расчета:

$$G_{\text{ТО}} c_{p\text{ТО}} = -k f (t_{\text{ТО}} - t_{\text{ТВ}}) \Delta x,$$

$$G_{\text{ТВ}} c_{p\text{ТВ}} = k f (t_{\text{ТО}} - t_{\text{ТВ}}) \Delta x.$$

Разбив длину теплообменника на  $n$  элементарных участков (рис. 3.3) и переписывая исходные уравнения в виде конечных разностей для  $i$ -го участка, запишем:

$$t_{\text{ТВ}}^i = t_{\text{ТВ}}^{i-1} \pm \frac{k f (\bar{t}_{\text{ТО}}^i - \bar{t}_{\text{ТВ}}^i) \Delta x}{W_{\text{ТВ}}},$$

$$t_{\text{ТО}}^i = t_{\text{ТО}}^{i-1} - \frac{k f (\bar{t}_{\text{ТО}}^i - \bar{t}_{\text{ТВ}}^i) \Delta x}{W_{\text{ТО}}}.$$

Здесь «+» – для прямотока; «-» – для противотока,  $\bar{t}^i = 0,5 \cdot (t^i - t^{i-1})$ .

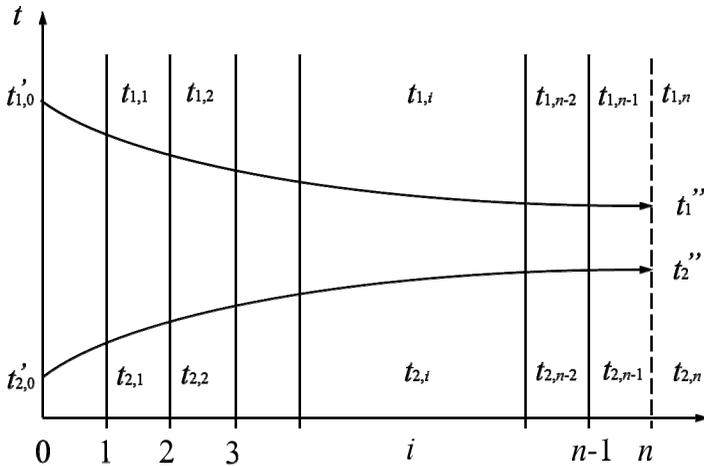


Рис. 3.3. Длина теплообменника разбита на  $n$  элементарных участков

На рис. 3.4 представлена схема теплообмена на элементарном участке. При достаточно малом изменении температуры на отдельном участке для упрощения схемы расчета можно принять  $\bar{t}^i = t^{i-1}$ . Следует учесть, что потерями в окружающую среду в вышеприведенных уравнениях пренебрегается. Для их учета возможно внести коэффициент, учитывающий эти теплоты, в уравнение для внешнего потока, зависящий от температуры данного потока.

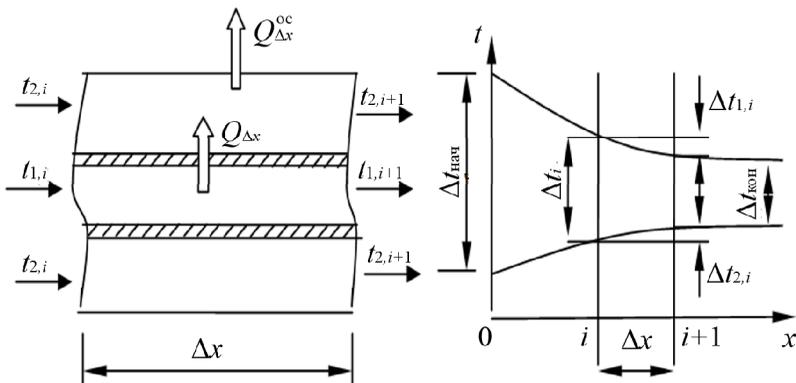


Рис. 3.4. Схема, отражающая теплообмен на элементарном участке теплообменника  $dx$  ( $\Delta x$ )

Аналогично можно рассмотреть вариант с моделью идеального смешения. На рис. 3.2, в показаны кривые изменения температуры по длине теплообменника, в котором движение одного из теплоносителей описывается моделью идеального смешения ( $t = \text{const}$  – кипение/конденсация), а другого – моделью идеального вытеснения.

Для динамических режимов уравнение изменения температуры в потоке теплоносителя принимает вид:

– в случае модели идеального вытеснения:

$$F \frac{\partial h}{\partial \tau} = -v(h^0 - h^k);$$

– в случае модели идеального смешения:

$$V \frac{\partial T}{\partial \tau} = v(h^0 - h^k).$$

Здесь  $F$  – сечение зоны идеального вытеснения;  $V$  – объем зоны идеального смешения;  $h^0, h^k$  – энтальпия соответственно на входе и выходе зоны идеального смешения.

В качестве примера для иллюстрации исследования динамических режимов работы оборудования рассмотрим также рекуперативный теплообменник типа «труба в трубе». Для упрощения математической модели введем ряд допущений [9, 10]:

1) учитываются только изменения температуры вдоль потока, в поперечном сечении принято идеальное перемешивание;

2) интенсивность теплообмена между жидкостью и стенками труб определяется локальными суммарными коэффициентами теплоотдачи;

3) механической энергией пренебрегается по сравнению с тепловой;

4) теплопроводность материала стенки принимается бесконечной;

5) потерями в окружающую среду пренебрегается.

Выделим по длине теплообменника элементарный участок длиной  $dx$ . Для массы первого (теплоотдающего) теплоносителя, находящегося во внутренней трубе на участке  $dx$ , в момент времени  $\tau$  количество теплоты  $dQ_1$  составит

$$dQ_1' = \rho_1 c_{p1} t_1 S_1 dx,$$

где  $\rho_1, c_{p1}$  и  $t_1$  – соответственно плотность, теплоемкость и температура теплоотдающего теплоносителя в точке  $x$ ;

$S_1$  – площадь поперечного сечения внутренней трубы.

В момент времени  $\tau + d\tau$  количество теплоты данной массы составит

$$dQ_1'' = \rho_1 c_{p1} \left( t_1 + \frac{\partial t_1}{\partial \tau} d\tau \right) S_1 dx.$$

Следовательно, изменение накопленной теплоты на участке  $dx$  за промежуток времени  $d\tau$  определяется как разность:

$$dQ = dQ_1'' - dQ_1' = \rho_1 c_{p1} \left( t_1 + \frac{\partial t_1}{\partial \tau} d\tau \right) S_1 dx - \rho_1 c_{p1} t_1 S_1 dx = \rho_1 c_{p1} S_1 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} d\tau dx.$$

В данной работе не рассматриваются более подробно другие модели, например, модели с определенными параметрами: эффективным коэффициентом диффузии или числом Пекле (диффузионная модель); числом ячеек (ячеечная модель) и т. п. В то же время в инженерной практике для описания гидродинамической структуры в реальных теплообменных аппаратах используются комбинированные модели: ячейчная модель с перемешиванием между ячейками; модель идеального смешения с застойной зоной; модель идеального смешения; последовательное соединение моделей идеального смешения и идеального вытеснения и т. п. [9, 11, 12].

### **Порядок выполнения работы**

#### ***Занятие 1.***

1. Ознакомиться с основными методическими положениями работы.

2. Получить от преподавателя задание.

3. Разработать основу математической модели заданного типа теплообменного аппарата. Выбрать метод представления физических свойств теплоносителей.

4. Домашнее задание. Разработать расчетную математическую модель согласно полученному заданию.

#### ***Занятие 2.***

5. Обсудить разработанную математическую модель с преподавателем.

6. Составить алгоритм реализации разработанной математической модели.

7. Домашнее задание. Составить программу для численного исследования. Спланировать численное исследование.

#### ***Занятие 3.***

8. Выполнить численное исследование.

9. Проанализировать полученные результаты.

10. Оформить работу.

## Лабораторная работа № 4

### РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

**Цель работы:** ознакомление с некоторыми алгоритмами решения теплотехнических задач разностными методами и приобретение навыков в программировании этих алгоритмов.

При математическом моделировании процессов тепло- и массообмена, как правило, дело имеют с дифференцированными уравнениями в частных производных. В большинстве случаев такие уравнения в явном виде не решаются. Поэтому важное значение приобретают численные методы интегрирования указанных уравнений, в частности, методы прямых, характеристик, интегральных соотношений, конечных разностей (метод сеток) и т. п.

Наиболее распространенным из них является метод конечных разностей, что вызвано универсальностью этого метода, возможностью его применения как к линейным, так и к нелинейным задачам. Метод базируется на аппроксимации непрерывного поля функции дискретным, т. е. на возможности дискретизации пространства и времени. На практике это замена дифференциальных уравнений их приближенными значениями. Как известно, классическое определение производной функции  $f(x, y)$  записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{h}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h}.$$

Естественно, в ЭВМ нельзя произвести предельного перехода. Но, с другой стороны, можно придать  $h$  некоторое малое, хотя и не нулевое, значение, и проверить, получается ли приближение доста-

точно точным (проблема точности) и не возрастает ли ошибка в ходе процесса вычислений (проблема устойчивости).

Основные положения метода конечных разностей заключаются в следующем. В исходном дифференциальном уравнении производные заменяют соответствующими разностными соотношениями и получают конечно-разностное уравнение. Решение последнего следует считать приближенным решением исходного дифференциального уравнения. В полученном уравнении непрерывные аргументы заменяются на дискретные, т. е. независимые переменные  $x$  и  $y$  пробегают дискретное множество значений:

$$x_i = ih; \quad y_j = jl; \quad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty.$$

Для этого область непрерывного изменения аргументов  $x$  и  $y$  ( $x$  и  $\tau$ ) заменяют конечным множеством точек (узлов), которые получают как результат пересечения параллельных прямых (рис. 4.1):

$$x_i = ih; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty; \quad y_j = jl; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty.$$

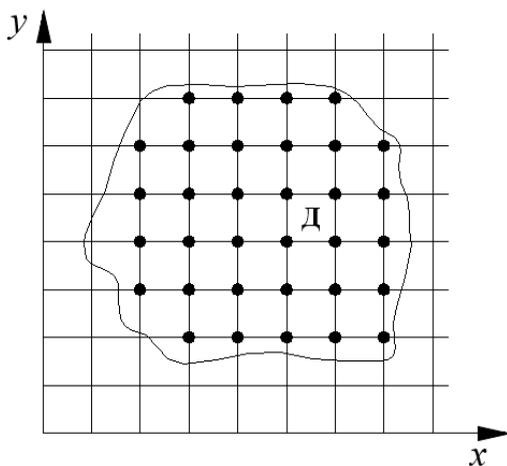


Рис. 4.1. Расчетная сетка

Это семейство прямых называют сеткой. Все функции непрерывного аргумента, входящие в дифференциальное уравнение, за-

меняются функциями дискретного аргумента, определенными в узлах сетки. Например, значение решения  $u(x, y)$  дифференциального уравнения в области  $D$  заменяются значениями этой функции  $u(x, y)$  в узлах сетки, принадлежащих области  $D$ .

Производные, входящие в дифференциальное уравнение, аппроксимируются соответствующими разностными отношениями для функций дискретного аргумента. Например, для производных первого порядка можно записать:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &\approx \frac{u(x_i+h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &\approx \frac{u(x_i, y_j+l) - u(x_i, y_j)}{l} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

для производных второго порядка, соответственно, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l}}{l} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение заменяется конечно-разностными уравнениями для каждой точки области  $D$ . И получают систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $u_{i,j}$ . Начальные и граничные условия, заданные для дифференциального уравнения, также заменяются разностными граничными и начальными и рассматриваются совместно с полученной системой уравнений. В результате решения полученной системы алгебраических уравнений получают приближенные значения искомого решения  $u(x, y)$ .

Очевидно, что о близости полученного решения к решению дифференциальной задачи можно судить по наличию их совпадения при стремлении шагов сетки к нулю. Если совпадение существует, то разностная задача аппроксимирует дифференциальную. Проверка аппроксимации [13] несложна и проводится единообразно для всех задач на основе разложения точного решения дифференциальной задачи в узлах сетки в ряд Тейлора.

Кроме того, численное решение необходимо проверять на устойчивость по отношению к ошибкам, связанным с погрешностью вычисления. Эти ошибки неизбежны, так как даже ЭВМ оперирует с конечным числом значащих цифр. В зависимости от особенностей вычислительного алгоритма эти ошибки в процессе счета могут затухать или возрастать. В первом случае считают, что численный метод устойчив, во втором – неустойчив. Для решения практических задач используются устойчивые алгоритмы.

Один и тот же алгоритм может при одних условиях быть устойчивым, а при других терять это свойство. Выполнение условий устойчивости зависит только от свойств конечно-разностной схемы и не связано с исходной дифференциальной задачей.

Основным критерием качества разностной схемы является сходимость. Если разностная схема сходится, то, выбирая шаги сетки достаточно малыми, можно вычислить решение соответствующей дифференциальной задачи с любой наперед заданной точностью. Поэтому одной из важнейших теорем вычислительной математики является теорема сходимости [13]: «если разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную на ее точном решении и устойчива, то решение разностной задачи при измельчении сетки сходится к точному решению дифференциальной задачи и порядок точности разностной схемы совпадает с порядком аппроксимации».

Таким образом, для численного решения дифференциальной задачи необходимо выбирать такой способ аппроксимации, при котором аппроксимирующая задачу разностная схема устойчива.

Процесс нахождения приближенного решения дифференциальной задачи можно разбить на три этапа. На первом из них выбирается особый набор точек, в которых будут определяться значения искомой функции. На втором производится аппроксимация производных, входящих в дифференциальное уравнение, и краевых условий конечно-

разностными отношениями. И третий этап состоит в решении полученных конечно-разностных уравнений, которые представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функции во внутренних узлах исследуемой области.

При изучении процессов тепло- и массообмена разделяют стационарные и нестационарные процессы. Первые описываются эллиптическими уравнениями типа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f(x, y, z); \quad (4.4)$$

вторые – параболическими:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \varphi(x, y, z, \tau). \quad (4.5)$$

Применение метода сеток к этим двум категориям уравнений различно. Поэтому ниже приводятся примеры интегрирования обеих категорий уравнений.

Рассмотрим численное решение одномерного уравнения теплопроводности для изолированного тонкого стержня длиной  $L$  [14]:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (4.6)$$

где  $0 \leq x \leq L$ ;  $a = \text{const}$ .

Так как функция  $T(x, \tau)$  зависит от двух переменных  $x$  и  $\tau$ , то используем прямоугольную сетку (рис. 4.2). На оси абсцисс откладываем отрезок длиной  $L$  и делим его на  $n$  равных частей. Полученный шаг на оси абсцисс равен  $h = L / n$ . На оси ординат отложим значения времени  $\tau$  через равные промежутки  $l$ . Проводим через полученные точки на осях координат прямые, параллельные координатным осям, которые образуют прямоугольную сетку. Задача приближенного численного интегрирования исходного уравнения по методу

сеток состоит в нахождении приближенного значения функции  $T(x, \tau)$  в каждом узле.

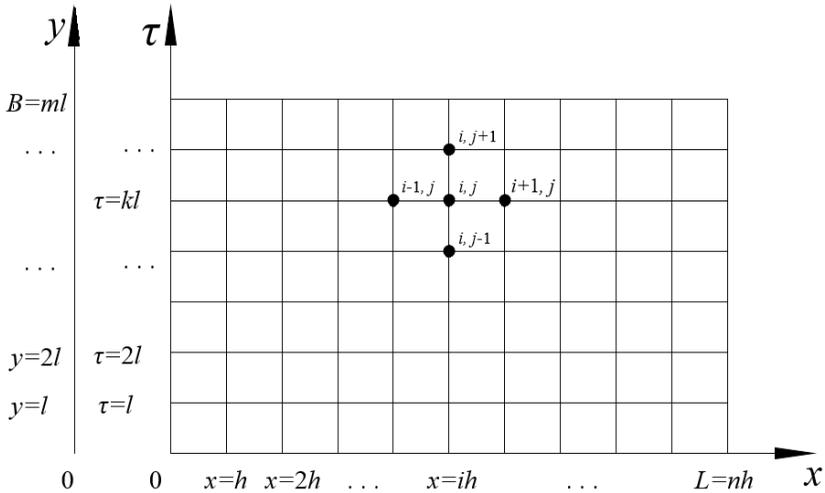


Рис. 4.2. Схема расчета по сетке прямоугольного типа

Значение  $T$  в узлах, лежащих на осях координат и на прямой, параллельной от нее на расстоянии  $L$ , т. е. температуры на концах стержня и распределение температуры по длине стержня в начальный момент, находят из начального и граничных условий.

Для определения значений температуры в других точках сетки составим разностное уравнение для точки  $h, k$ . Для этого заменим в уравнении (4.6) частные производные  $\partial T / \partial \tau$  и  $\partial^2 T / \partial x^2$  через разностные отношения по формулам (4.2) и (4.3):

$$\frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{l} + \varepsilon_1 = a \left( \frac{T_{i-1,k} - 2T_{i,k} + T_{i+1,k}}{h^2} + \varepsilon_2 \right), \quad (4.7)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – остаточные члены, стремящиеся к нулю при стремлении к нулю  $l$  и  $h$ .

Преобразуя (4.7) и отбрасывая выражение  $l(a\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ , получим разностное уравнение:

$$\theta_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2la}{h^2}\right)\theta_{i,k} + \frac{la}{h^2}(\theta_{i-1,k} + \theta_{i+1,k}), \quad (4.8)$$

в котором через  $\theta_{i,k}$  обозначено приближенное значение величины  $T_{i,k}$ .

Таким образом, выражение (4.8) позволяет вычислить значения  $\theta$  в узлах горизонтального ряда  $(k+1)$  по значениям  $\theta$ , находящимся только в одном предшествующем ряду  $k$ . Поэтому с помощью формулы (4.8) можно найти значения  $\theta$  в узлах первого горизонтального ряда (при  $\tau = l$ ) по известным из краевых условий значениям температуры в узлах самой оси  $0x$  (при  $\tau = 0$ ). Получив таким образом значения  $\theta$  в первом ряду, по той же формуле находим значения в узлах второго горизонтального ряда (т. е. при  $\tau = 2l$ ).

Этот процесс построения можно продолжать как угодно далеко, так как значения температуры в узлах прямых  $x = 0$  и  $x = L$  известны или вычисляются из граничных условий.

Важным вопросом решения нестационарных уравнений в частных производных параболического типа является выбор соотношения между  $h$  и  $l$ , которое влияет на сходимость и устойчивость получаемого решения. Выражение (4.8) можно переписать:

$$\theta_{i,k+1} = \frac{\theta_{i-1,k} + (p-2)\theta_{i,k} + \theta_{i+1,k}}{p}, \quad (4.9)$$

где  $p = \frac{h^2}{la}$ .

Доказано [14], что пользоваться формулой (4.9) можно только при  $p \geq 2n$ , где  $n$  – размерность пространства, при этом наибольший шаг по времени получается при  $p = 2n$ , а точность решения увеличивается с ростом  $p$ .

Рассмотренная сетка для численного интегрирования удобна, когда задача решается при граничных условиях первого рода. При решении уравнения при граничных условиях третьего рода вводят дополнительные точки, лежащие вне изучаемой области [14].

Рассмотрим блок-схему реализации решения данного уравнения на ЭВМ (рис. 4.3). Исходными данными в данном случае являются шаг изменения координаты  $h$ , шаг изменения времени  $l$  и величины, описывающие кривые условия. При решении задач с граничными условиями первого рода значения узловых точек при  $x = 0$  и  $x = L$  определяются граничными условиями, а значения при  $\tau = 0$  – начальными условиями. Во втором блоке производится численное определение точек, лежащих на прямых  $x = 0$ ,  $x = L$  и  $\tau = 0$ . Далее определяется начальное расчетное значение времени  $\tau$  и координаты  $x$ . В пятом блоке производится расчет значения температуры в точке, определяемой координатой  $x$  и временем  $\tau$ . Далее организуется цикл для перебора всех точек стержня с шагом  $h$  при фиксированном  $\tau$  и цикл по времени с шагом  $l$ . Телом циклов является блок 5. После расчета значений температуры во всех узловых точках сетки результаты расчета выводятся на печать.

Реализация данной блок-схемы на алгоритмическом языке VBA вынесена в прил. 1. В программах принято, что начальное распределение температуры в стержне описывается линейной функцией:

$$T(x, 0) = a_0 + a_1 x. \quad (4.10)$$

Граничные условия сведены к случаю, когда температура на концах стержня постоянна  $T(0, \tau) = T_n$  и  $T(L, \tau) = T_L$ .

Описанный выше метод относится к численным методам явного типа, так как в нем значение температуры в момент  $\tau_{k+1}$  выражается через известные значения температуры в момент  $\tau_k$ . Основным недостатком явных схем является то, что увеличение шага по времени приводит к сильному колебанию пространственной переменной компоненты решения.

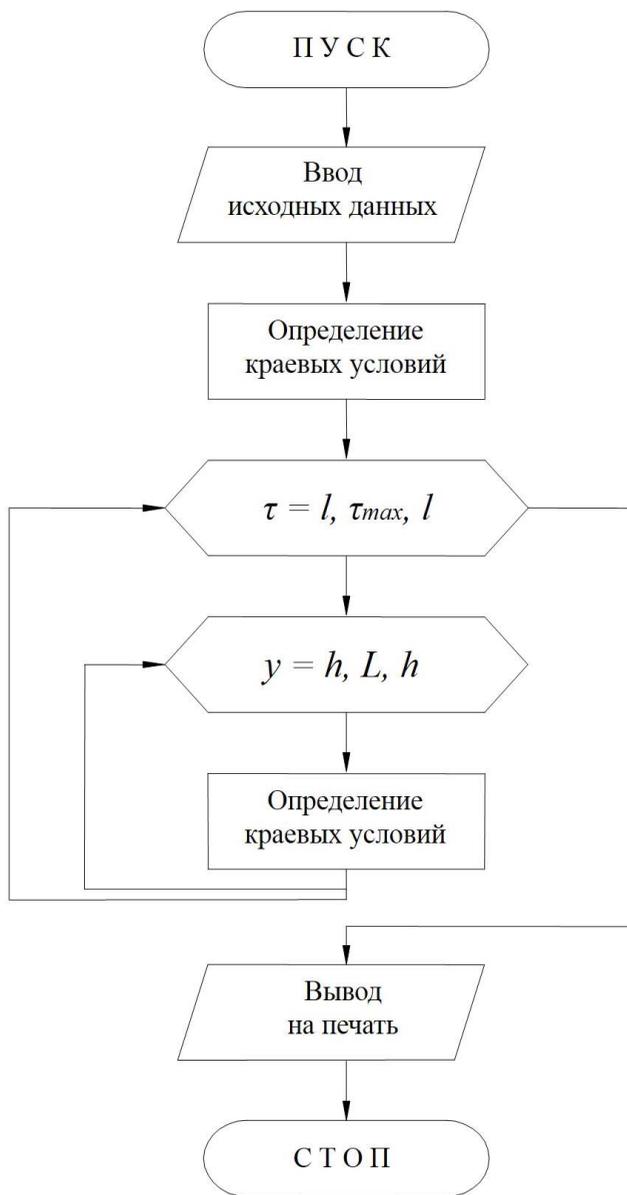


Рис. 4.3. Блок-схема для решения одномерной задачи нестационарной теплопроводности (граничные условия первого рода)

От такого недостатка свободны неявные схемы, в которых на каждом шаге итерации приходится решать систему уравнений. Рассмотрим пример реализации такой схемы на решении стационарной задачи теплопроводности в двухмерном теле, которая математически сводится к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (4.11)$$

справедливого для некоторой области  $R$  и на границе этой области, которой является кривая  $C$ .

Если предположить, что кривая  $C$  представляет собой отрезки прямых, параллельных осям  $x$  и  $y$ , то получим область  $R$  в виде прямоугольника с шириной  $A$  и высотой  $B$ . Как и в предыдущем случае разделим ширину прямоугольника  $A$  на  $n$  интервалов, каждый размером  $h = A/n$ , а высоту  $B$  на  $m$  частей размерами  $l = B/m$ . Внутри области при этом получается  $(n + 1)(m + 1)$  узлов сетки (рис. 4.2), из них внутренних  $(n - 1)(m - 1)$ .

Запишем разностное соотношение для внутренней точки  $T(i, j)$ . Согласно (4.3) и (4.11), имеем:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{l^2} = 0. \quad (4.12)$$

Принимая  $\lambda = l/h$ , после преобразования имеем

$$\lambda^2 T_{i-1,j} + \lambda^2 T_{i+1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) T_{i,j} = 0. \quad (4.13)$$

Таким образом, значение искомой функции в каждом внутреннем узле сетки является функцией от четырех соседних с ним. Записав соотношение (4.13) для каждого узла, получим систему линейных алгебраических уравнений. Если  $2(m + n)$  неизвестных исключить с помощью граничного условия, остается точно  $(m - 1)(n - 1)$  уравнений относительно  $(m - 1)(n - 1)$  неизвестных. Методы решения таких систем уравнений известны.

В частности, системы разностных уравнений, получаемых при решении эллиптического дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяют условиям сходимости итерационного метода Гаусса-Зейделя, который применительно к рассматриваемому случаю называют методом Либмана или методом последовательных смещений. За начальное приближение функции во внутренних узлах принимают нуль. Порядок вычисления уравнений следующий (уравнения записаны для  $\lambda = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 T_{1,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{1,0} + f_{0,1} + T_{2,1}^{(0)} + T_{1,2}^{(0)}]; \\
 T_{2,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{2,0} + T_{1,1}^{(1)} + T_{3,1}^{(0)} + T_{2,2}^{(0)}]; \\
 T_{3,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{3,0} + T_{2,1}^{(1)} + T_{4,1}^{(0)} + T_{3,2}^{(0)}]; \\
 &\dots \\
 T_{n-1,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{n-1,0} + f_{n,1} + T_{n-2,1}^{(1)} + T_{n-1,2}^{(0)}]; \\
 T_{1,2}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{0,2} + T_{1,1}^{(1)} + T_{2,2}^{(0)} + T_{1,3}^{(0)}]; \\
 T_{2,2}^{(1)} &= \frac{1}{4} [T_{2,1}^{(1)} + T_{1,2}^{(1)} + T_{3,1}^{(0)} + T_{2,3}^{(0)}]; \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Блок-схема расчета системы (4.14) приведена на рис. 4.4. Задаются два двумерных массива из  $(m + 1)$  строк и  $(n + 1)$  столбцов. Один для значений температуры на текущем шаге итерации, второй для значений температуры на предыдущем шаге итерации. Расчетные точки по строкам 0 и  $m$  и столбцам 0 и  $n$  определяются через граничные условия. В данном случае принимаются граничные условия первого рода. Следовательно, расчетные точки на границе области исследования заранее определены и из дальнейшего расчета исключаются. Значения температур во внутренних точках сетки обнуляются. Затем выполняется решение исходной системы.

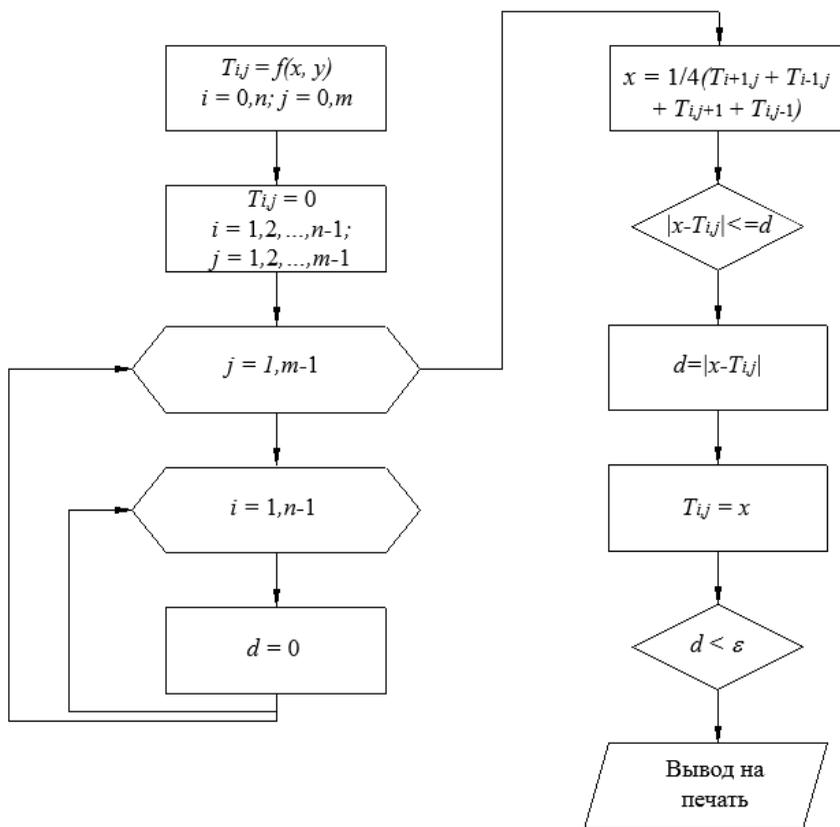


Рис. 4.4. Блок-схема расчета эллиптических разностных уравнений

Сначала открывается цикл по точности расчета и защите в случае получения неустойчивого решения (ограничивается общее число итераций). Схема расчета системы уравнений строится на двух вложенных циклах, имеющих в качестве индексных параметров  $i$  и  $j$ . Значения  $j$  изменяются от 1 до  $(m - 1)$ , а  $i$  от 1 до  $(n - 1)$ . Каждая пара значений  $i, j$  определяет узел, в котором разностное уравнение решается относительно  $T_{i,j}^{(k)}$ , и вычисленное значение сравнивается со значением  $T_{i,j}^{(k-1)}$ , определенном на предыдущем шаге итерации. При этом запоминается наибольшее по абсолютной величине отклонение температуры в расчетных точках, которое по окончании

очередной итерации сравнивается с допустимой погрешностью  $\varepsilon$ . Если процесс не сошелся, то производится очередная итерация. Параллельно ведется подсчет числа итераций; если решение принимает неустойчивый характер, расчет прекращается.

Для ускорения сходимости решения системы вводят ускоряющий множитель  $\omega$ :

$$T_{i,j}^{(k)} = \omega x + (1 - \omega) T_{i,j}^{(k-1)}, \quad (4.15)$$

где  $x$  – значение  $T_{i,j}$ , вычисленное по общему уравнению (4.13).

При  $\omega > 1$  метод называется ускоренным методом Либмана, и при правильном выборе  $\omega$  можно получить до 20-кратной экономии машинного времени за счет более быстрой сходимости решения. Для случая, когда область вычисления близка к квадрату и числа  $m$  и  $n$  велики, оптимальным значением  $\omega$  будет приблизительно 1,9.

Рассмотрим пример составления программы для расчета распределения температуры в трубе квадратного сечения [2].

Дана длинная квадратная труба с квадратным отверстием, по которой течет горячая жидкость. Труба наполовину погружена в ледяную ванну, так что температура нижней половины поверхности трубы равна  $0^\circ\text{C}$ . Верхняя плоскость трубы находится при постоянной температуре  $100^\circ\text{C}$ . Жидкость внутри трубы имеет температуру  $200^\circ\text{C}$ . Наружный размер трубы равен 10 дюймам (25,4 см), внутренний – 4 дюймам (10,2 см) (рис. 4.5).

Необходимо определить стационарное распределение температур в поперечном сечении трубы.

Очевидно, что стационарное температурное поле в поперечном сечении заданной трубы описывается уравнением (4.11). Этому уравнению удовлетворяет распределение температуры внутри трубы, а распределение температур на границах трубы определяется граничными условиями. При этом будем предполагать, что температура наружной поверхности трубы линейно изменяется от  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$  на участке между ледяной ванной и верхней плоскостью трубы.

Построим расчетную сетку. Для этого разобьем наружные стенки канала в направлениях  $x$  и  $y$  на 60 интервалов. Тогда граничные условия можно записать:

$T_{i,j} = 0$ , если  $i = 0, 1, \dots, 60$ ;

$$T_{0,j} = T_{60,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 0, 1, \dots, 30; \\ \frac{100}{30}(j-30), & \text{если } j = 31, 32, \dots, 60; \end{cases}$$

$T_{i,60} = 100$ , если  $i = 0, 1, \dots, 60$ ;

$T_{i,42} = T_{i,18} = 200$ , если  $i = 18, 19, \dots, 42$ ;

$T_{42,j} = T_{18,j} = 200$ , если  $j = 18, 19, \dots, 42$ .

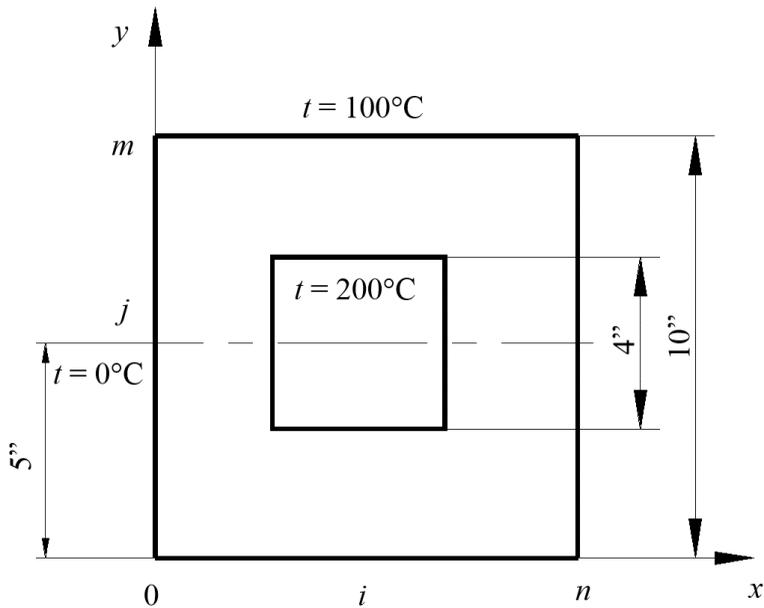


Рис. 4.5. Сечение трубы и распределение температуры на ее границах

Разностные уравнения для внутренних точек принимают вид

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1}), \quad (4.16)$$

где  $i = 1, 2, \dots, 59$  и  $j = 1, 2, \dots, 17$ ;

$i = 1, 2, \dots, 17, 43, \dots, 59$  и  $j = 18, 19, \dots, 42$ ;

$i = 1, 2, \dots, 59$  и  $j = 43, 44, \dots, 59$ .

Систему полученных уравнений будем решать методом Либмана, тогда (4.16) переписывается

$$T_{i,j} = \frac{\omega}{4} (T_{i+1,j} + T_{i,j+1} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1}) - (1 - \omega) T_{i,j}.$$

Программу составляем в соответствии с приведенной на рис. 4.4 блок-схемой. В прил. 2 приведен текст программы на языке VBA.

Весьма наглядной и полезной при обучении является вариация метода конечных элементов: метод контрольных объемов. Для его иллюстрации рассмотрим двумерную область в виде прямоугольника размерами  $A \times B$ . Составление математической модели и процедура дискретизации аналогична описанной выше и приведенной на рис. 4.1. Далее для каждой узловой точки строится расчетное уравнение.

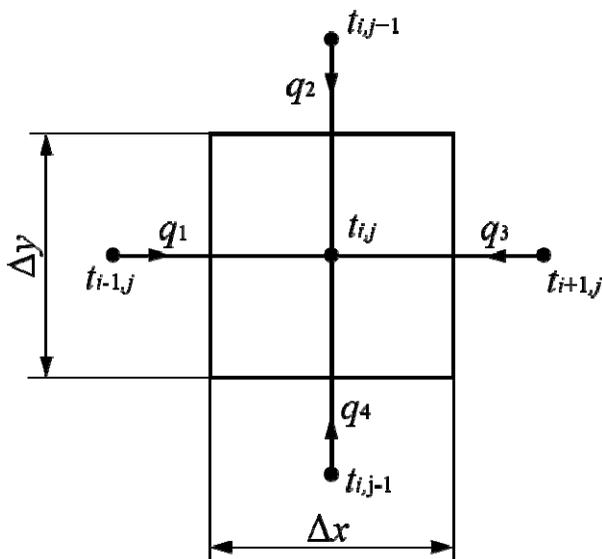


Рис. 4.6. Узел, находящийся внутри исследуемой области

Выберем для начала любой узел, находящийся внутри исследуемой области с координатами  $(i, j)$ , контрольный объем которого

размером  $\Delta x \times \Delta y$  выделен пунктиром, таким образом, чтобы узел находился в центре (рис. 4.6). Ввиду малости контрольного объема можно считать, что теплота к точке  $(i, j)$  передается от соседних точек в соответствии с дискретным аналогом уравнения Фурье:

$$q_1 = \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} F_y; \quad q_2 = \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} F_x;$$

$$q_3 = \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x} F_y; \quad q_4 = \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} F_x.$$

Для стационарных условий сумма четырех тепловых потоков от соседних контрольных объемов должна равняться нулю. Если для упрощения принять  $\Delta x = \Delta y$ , тогда и  $F_x = F_y$ . Соответственно, баланс энергии для рассматриваемого узла можно представить:

$$\lambda \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} + \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta x} + \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x} + \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta x} = 0.$$

Так как  $\lambda \neq 0$  и  $\Delta x \neq 0$ , окончательно имеем:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1}),$$

т. е. уравнение типа (4.16).

Для нестационарных условий сумма тепловых потоков от соседних узлов будет равняться изменению энергии в контрольном объеме за некоторое время  $\Delta \tau$ :

$$\lambda \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} F_y + \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} F_x + \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x} F_y +$$

$$+ \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} F_x = c\rho\Delta V \frac{T_{i,j}^* - T_{i,j}}{\Delta \tau}, \quad (4.17)$$

где  $c$ ,  $\rho$ ,  $\Delta V$  – соответственно теплоемкость, плотность и объем контрольного объема ( $\Delta V = \Delta x F_y = \Delta y F_x$ );

$T_{i,j}^*$  – температура в узле  $i, j$  после истечения момента времени  $\Delta \tau$ .

Преобразовывая (4.17), имеем

$$\begin{aligned} T_{i,j}^* &= T_{i,j} + \frac{\lambda \Delta \tau}{c\rho \Delta x \Delta x} (4T_{i,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j+1} - T_{i+1,j} - T_{i,j-1}) = \\ &= T_{i,j} + Fo (4T_{i,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j+1} - T_{i+1,j} - T_{i,j-1}), \end{aligned}$$

где  $Fo$  – критерий Фурье для контрольного объема.

В случае составления расчетных уравнений для узлов, находящихся на границе области исследования (рис. 4.7, *a*), уравнения записываются с учетом граничных условий и формы контрольного объема. В этом случае граничные условия II и III рода определяются через соответствующие потоки теплоты к расчетной точке со стороны окружающей среды. Для граничных условий I рода просто задается закон изменения температуры в расчетной точке. В качестве примера рассмотрим случай угловой точки прямоугольной области исследования (рис. 4.7, *б*), когда с одной стороны определены граничные условия II рода ( $q = \text{const}$ ), а со второй – граничные условия III рода:  $q = \alpha(T_{i,j} - T_{\text{oc}})$ .

Расчетное уравнение в этом случае примет вид:

– для стационарной задачи:

$$\frac{1}{2} \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} F_y + \frac{1}{2} q F_x + \frac{1}{2} \alpha (T_{i,j} - T_{\text{oc}}) F_y + \frac{1}{2} \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} F_x = 0;$$

– для нестационарной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} F_y + \frac{1}{2} q F_x + \frac{1}{2} \alpha (T_{i,j} - T_{\text{oc}}) F_y + \frac{1}{2} \lambda \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} F_x = \\ = \frac{1}{4} c\rho \Delta V \frac{T_{i,j}^* - T_{i,j}}{\Delta \tau}. \end{aligned}$$

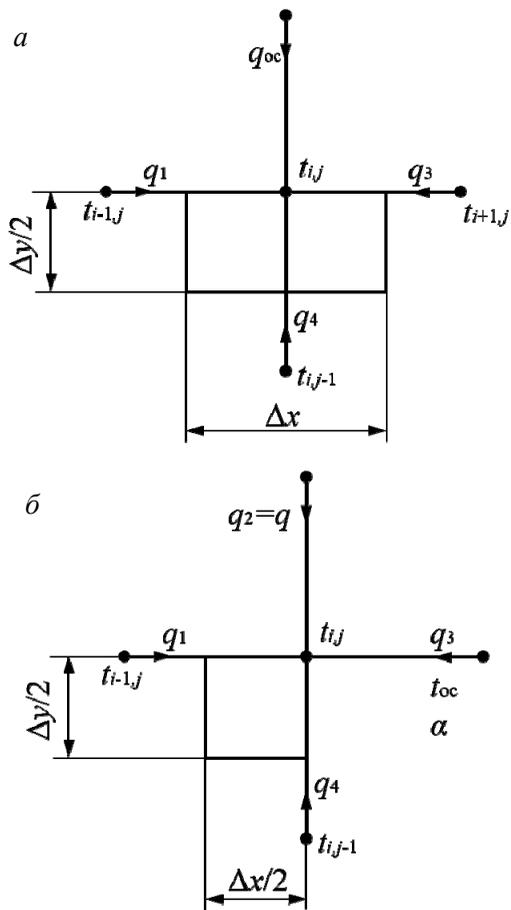


Рис. 4.7. Укрупненное изображение контрольных объемов, расположенных на границе с окружающей средой:  
*a* – граничная точка; *б* – угловая точка

Или после соответствующих преобразований в случае  $\Delta x = \Delta y$  и  $F_x = F_y$ , соответственно, имеем:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + \frac{q\Delta x}{\lambda} + BiT_{oc}}{2 + Bi};$$

$$T_{i,j}^* = T_{i,j} + 2Fo \left( 2T_{i,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j-1} + \frac{q\Delta x}{\lambda} + Bi(T_{i,j} - T_{oc}) \right),$$

где  $Bi = \frac{\alpha\Delta x}{\lambda}$  – критерий Био для контрольного объема.

Дальнейшие действия по реализации системы расчетных уравнений аналогичны ранее описанным.

В заключение следует отметить, что методика решения дифференциальных уравнений теплопроводности с источниками и с переменными коэффициентами не отличаются от изложенных выше. Метод конечных разностей позволяет успешно решать как одномерные, так и двух- и трехмерные задачи.

## **Порядок выполнения работы**

### ***Занятие 1.***

1. Ознакомиться с основными методическими положениями работы.

2. Получить от преподавателя задание.

3. Определить расчетную сетку для заданной области исследования. Определить характерные для расчета точки. Методом контрольных объемов получить расчетные уравнения для характерных точек.

4. Домашнее задание. Разработать расчетную математическую модель (систему расчетных уравнений), согласно полученному заданию. Составить алгоритм и программу реализации разработанной математической модели.

### ***Занятие 2.***

5. Обсудить разработанную математическую модель и программу с преподавателем.

6. Ввести разработанную программу в ПЭВМ.

7. Домашнее задание. Составить план численного исследования.

### ***Занятие 3.***

8. Выполнить отладку и тестирование программы.

9. Выполнить численное исследование. Проанализировать полученные результаты.

10. Оформить работу.

## Литература

1. Щиголов, Б. М. Математическая обработка наблюдений / Б. М. Щиголов. – М. : Наука, 1969. – 344 с.
2. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
3. Левщиц, В. М. Приближенные вычисления и программирование на ЭВМ «Наири-2» / В. М. Левщиц, Б. Ф. Литвин. – Л. : Машиностроение, 1977. – 240 с.
4. Попырин, П. С. Математическое моделирование и оптимизация теплоэнергетических установок / П. С. Попырин. – М. : Энергия, 1978. – 342 с.: ил.
5. Тепловой расчет котельных агрегатов. (Нормативный метод). – М. : Энергия, 1973. – 296 с.
6. Вульман, Ф. А. Математическое моделирование тепловых схем / Ф. А. Вульман, А. В. Корягин, М. З. Кривошей. – М. : Машиностроение, 1985. – 112 с.: ил.
7. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 280 с.
8. Справочник по теплообменникам. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – Т. 2. – 352 с.
9. Кафаров, В. В. Оптимизация теплообменных процессов и систем / В. В. Кафаров, В. П. Мешалкин, Л. В. Гурьева. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 192 с.
10. Каневец, Г. Е. Теплообменники и теплообменные системы / Г. Е. Каневец. – Киев : Наукова думка, 1982. – 272 с.
11. Бажан, П. И. Справочник по теплообменным аппаратам / П. И. Бажан, Т. Е. Каневец, В. М. Селивестров. – М. : Машиностроение, 1989. – 200 с.
12. Бакластов, А. М. Проектирование, монтаж и эксплуатация теплоиспользующих установок / А. М. Бакластов. – М. : Энергия, 1970. – 568 с.
13. Берновский, Б. М. Разностные методы использования задач теплообмена / Б. М. Берновский, Е. Ф. Ноготов. – Мн. : Наука и техника, 1967. – 144 с.
14. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967 – 599 с.
15. Крейт, Ф. Основы теплопередачи / Ф. Крейт, У. Блэк. – М. : Мир, 1983. – 512 с.

**Текст программы для расчета нестационарного  
температурного поля**

*Sub NESTTASK ()*

*Dim T, T1 as single*

*Dim i, il, ir, j, k, n, il, j1, iw, ik, iwt, ki as integer*

*Dim a, d, res, la, l, dx, t0, tl, tr, dt, c, x, ql, tos1, alfa1, q2, tos2,  
alfa2, time, time1, dtime, cm, ro, Fo as single*

*e = 0,05*

*maxit = 1000*

*'Исходные данные для расчета*

*('Введите следующие данные (работаем в системе СИ)'*

*l = inputbox ("длина стержня (толщина одномерной пластины)")*

*la = inputbox ("коэффициент теплопроводности материала")*

*cm = inputbox ("теплоемкость материала")*

*ro = inputbox ("плотность материала")*

*n = inputbox ("число расчетных интервалов по пространственной  
координате")*

*dx = l / n*

*'Начальные условия*

*t0 = inputbox ("введите значение температуры t0") 'Определе-  
ние начального распределения температуры*

*for j = 0 to n+1*

*T(j) = t0*

*'Граничные условия*

*tl = inputbox ("введите значение температуры") 'Определение  
граничных условий с левой границы*

*tr = inputbox ("введите значение температуры") 'Определение  
граничных условий с правой границы*

*'Расчет коэффициента температуропроводности и промежу-  
тка времени*

$$a = la / cm / ro$$

$$Fo = 0,05$$

$$dtime = Fo * dx * dx / a$$

*'Определение служебных переменных*

$$iwt = 1 \quad \text{'счетчик прерываний расчета}$$

$$ki = 20 \quad \text{'кратность итераций для прерывания расчета}$$

$$iw = int(n / 10) \quad \text{'интервал вывода точек на экран}$$

$$msgbox iw \quad \text{'интервал вывода точек}$$

*'Расчет температурного поля*

$$time = dtime$$

$$T(0) = tl$$

$$T(n+1) = tr$$

$$k = 1 \quad \text{'число итераций}$$

$$d = 0 \quad \text{'погрешность текущей итерации}$$

*Do until ((d<e) or (k>maxit))*

$$Tl(0) = tl$$

$$Tl(n+1) = tr$$

$$Tl(1) = t(1) - Fo * (3 * T(1) - 2 * T(0) - T(2))$$

*for il = 2 to n*

$$Tl(il) = T(il) - Fo * (2 * T(il) - T(il - 1) - T(il + 1))$$

$$Tl(n+1) = T(n) - Fo * (T(n) - T(n-1))$$

*for il = 1 to n+1*

$$res = abs(Tl(il) - T(il))$$

$$if res > d then d = res$$

$$T(il) = Tl(il)$$

*next il*

*exit for*

$$k = k + 1$$

$$time1 = time / 3600$$

*msgbox time, dtime, k*  
*il = 0*

*Do while il < n*  
*il = il + iw*  
*loop*

*ik = int (k / ki)*  
*if iwt = ik then*  
*iwt = iwt + 1*  
*end if*

*time = time + dtime*

*loop*

*End Sub*

**Текст программы для расчета стационарного  
температурного поля**

*Sub STAR ()*

*Dim T1(0 to 60, 0 to 60) as single 'двумерный массив температур*

*Dim i, j, k, i1, j1 as integer*

*Dim a, b, d, bound, Tnew, res as single 'вспомогательные переменные*

*e = 0,01 'заданная погрешность расчета в °C*

*w = 1,80 'ускоряющий коэффициент*

*maxit = 1000 'допустимое число итераций*

*'определение начальных условий исходного приближения*

*for i = 1 to 59*

*for j = 1 to 59*

*T1(i,j) = 0*

*next j*

*next i*

*'определение граничных условий*

*for j = 0 to 60*

*T1(0, j) = 0*

*next j*

*for j = 0 to 60*

*T1(60, j) = 100*

*next j*

*for i = 1 to 30*

*T1(i, 0) = 0*

*T1(i, 60) = 0*

*next i*

*for i:=31 to 60*

*bound = 100 \* (i - 30) / 30*

*T1(i, 0) = bound*

*T1(i, 60) = bound*

*next i*

```

for i = 18 to 42
  for j = 18 to 42
    T1(i, j) = 200
  next j
next i

```

```

'расчет системы уравнений
k = 1      'счетчик итераций
a = w / 4
b = 1 - w

```

```

Do until (d < e) or (k > maxit)
  d = 0  'текущая погрешность
  for i = 1 to 59
    for j = 1 to 59
      if (i > 17) and (i < 43) and (j > 17) and (j < 43)
        then Tnew = 200
      else
        Tnew = a * (T1(i-1,j) + T1(i,j+1) + T1(i+1,j) + T1(i,j-1)) + b * T1(i,j)
        res = abs (Tnew - T1(i,j))
        if res > d then d = res
        T1(i,j) = Tnew
      end if
    end if
  next j
next i
k = k + 1
loop

```

```

msgbox k
msgbox d  'Результаты расчета
  for i = 0 to 12
    for j = 0 to 12
      i1 = i * 5
      j1 = j * 5
      T1(i1, j1) = cells (i, j)
    next j
  next i
End Sub

```

Учебное издание

**СЕДНИН** Владимир Александрович  
**ЯНЧУК** Вера Васильевна  
**РЫЖОВА** Татьяна Викторовна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

Пособие

для студентов специальности 1-43 01 05  
«Промышленная теплоэнергетика»

Редактор *Н. А. Костешева*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 22.09.2022. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 3,43. Уч.-изд. л. 2,68. Тираж 100. Заказ 384.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.