Литература

1. Judd B. R. Optical absorption intensities of rare-earth ions / B. R. Judd // Phys. Rev. – 1962. – Vol. 127, № 3. – З. 750–761.
2. Справочник по лазерам / Под ред. А.М. Прохорова. – М.: Советское радио, 1978. – Т. 1. – С. 259–282.
3. Черчес, Х. А. О взаимодействии хлорида неодима с силикатом натрия / Х. А. Черчес, Н. И. Близнюк, Л. Г. Дащинский // Стекло, ситаллы и силикатные материалы: Сб. ст. / – Минск: Вышэйшая школа, 1980. – № 9. – С. 99–102.
4. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – С. 810–821.
5. Carnal, W. T. Electronic energy levels in the trivalent lanthanide aquo ions / W. T. Carnal, P. R. Fields, K. Rajnak // J. Chem. Phys. –1968. – V. 49, №. 10. – P. 4424–4442.
6. Zaidel, A. N. Errors of Measurements of Physical Quantities / A.N. Zaidel // Nauka, Leningrad. – 1985.

УДК 517.958

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ПО УПРУГОМУ СТЕРЖНЮ С УПРУГИМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ ОДНОГО ИЗ КОНЦОВ

Корзюк В.И.[1, 2], Рудько Я.В.[3]

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси*
[2]*Белорусский государственный университет,*
[3]*ООО «Открытые информационные системы»,*
Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Настоящая работа посвящена решению краевой задачи о продольном ударе по однородному упругому стержню постоянного поперечного сечения в случае, когда один из их концов жестко закреплен, а второй конец соединен пружиной с неподвижной опорой и подвергся удару некоторым грузом.

Ключевые слова: продольный удар, волновое уравнение, смешанная задача, метод контурного интеграла, обобщенное решение.

THE PROBLEM OF A LONGITUDINAL IMPACT ON AN ELASTIC BAR WITH AN ELASTIC ATTACHMENT OF ONE OF ITS ENDS

Korzyuk V.[1, 2], Rudzko J.[3]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*
[2]*Belarusian State University,*
[3]*Open Information Systems LLC,*
Minsk, Republic of Belarus

Abstract. The present work is devoted to solving the boundary value problem of longitudinal impact on a homogeneous elastic bar of a constant cross-section. One of the bar's ends is rigidly fixed, and the other end is connected by a spring to a fixed support and was subjected to an impact by some load.

Key words: longitudinal impact, wave equation, mixed problem, method of contour integral, generalized solution.

Адрес для переписки: Рудько Я.В., ул. В. Гастинец, 143Б, к. 579, Молодечно 222310, Республика Беларусь
e-mail: janycz@yahoo.com

Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ однородный упругий стержень $0 \leq x \leq l$ постоянного поперечного сечения, конец которого $x = 0$ жестко закреплен, а конец $x = l$ соединен пружиной с неподвижной опорой, подвергся удару некоторым грузом по концу $x = l$, причем в дальнейшем груз остается в соприкосновении со стержнем. Тогда, пренебрегая весом стержня как силы и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений $u(t,x)$ сечений стержня нужно найти решение уравнения

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u(t,x) = 0, 0 < t < \infty, 0 < x < l, \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$u(0,x) = 0, 0 \leq x \leq l, \partial_t u(0,x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l, \\ v, & x = l, \end{cases} \qquad (2)$$

и граничных условиях

$$u(t,0) = 0, (h + k\partial_x + m\partial_t^2)u(t,l) = 0, 0 \leq t < \infty. \qquad (3)$$

В задаче (1) – (3) $a^2 = E/\rho$, E – модуль упругости стержня, ρ – плотность материала стержня, $h > 0, k > 0, m > 0$ – физические постоянные, характеризующие закрепление конца $x = l$ стержня и $v \in \mathbb{R}$ – физическая постоянная, характеризующая скорость ударившего груза.

Отметим, что значения производных в условиях (2) и (3) задачи (1) – (3) следует понимать не в смысле предельного перехода, а в смысле их значений в точках соответствующих отрезков.

Построение формального решения. Применив к задаче (1) – (3) метод контурного интеграла [1], ее формальное решение можно представить в виде

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}\frac{amv\,\mathrm{sh}(px/a)\exp(pt)}{\Delta(p)}dp, \quad (4)$$

где $\Delta(p)=kp\,\mathrm{ch}(pl/a)+a(h+mp^2)\mathrm{sh}(pl/a)$, Γ_n $(n\in\mathbb{N})$ – последовательность расширяющихся замкнутых контуров в виде прямоугольников с вершинами в точках $h+i\pi n$, $-h+i\pi n$, $-h-i\pi n$, $h-i\pi n$ $(0<h<\infty)$ в комплексной p-плоскости.

Вычислим на основании известной теоремы о вычетах интеграл в (4), получим, что

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^{-1}lv\sin(at\omega_n/l)\sin(x\omega_n/l)}{(\omega_n^2-\alpha-\beta)\cos(\omega_n)+(2+\alpha)\omega_n\sin(\omega_n)}, \quad (5)$$

где $\alpha=kla^{-2}m^{-1}$, $\beta=hl^2a^{-2}m^{-1}$ и ω_n – положительные корни уравнения $\alpha\omega\,\mathrm{ctg}(\omega)=\omega^2-\beta$, занумерованные в порядке возрастания.

Функция (5) представляет собой формальное решение задачи (1) – (3) в виде обобщенного тригонометрического ряда.

Обоснование решения и его свойства. В силу разрыва во втором из начальных условий (2) задача (1) – (3) не имеет классического решения, поэтому речь будет идти об обобщенном решение, которое определим следующим образом: назовем обобщенным решением задачи (1) – (3), функцию u, которая непрерывна на множестве $\bar{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$, имеет в $\bar{Q}$ почти всюду непрерывные производные первого порядка, а производные второго порядка представляются в области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ обобщенными тригонометрическими рядами, суммируемыми почти всюду методом Чезаро первого порядка (класс таких функций обозначим через W) и удовлетворяет почти всюду в Q уравнению (1) и всюду начальным условиям (2) и граничным условиям (3).

Взяв n-ый член ряда (5) в правой части равенств, подставим вместо входящих туда величин их асимптотические представления и, тогда получим, что он в $\bar{Q}$ имеет порядок малости n^{-2}. Следовательно, ряд для u, состоящий из непрерывных функций в $\bar{Q}$, равномерно сходится в $\bar{Q}$, и u является непрерывной функцией на том множестве. Поэтому ряд, стоящий справа в (5), можно почленно дифференцировать сколько угодно раз по t и x в смысле обобщенных функций [2], и суммы полученных после дифференцирования рядов будут слабыми обобщенными производными функции u в $\bar{Q}$.

Обозначим множество лежащих в $\bar{Q}$ отрезков прямых линий $x+at=(2m+1)l$ и $x-at=-(2m+1)l$ $(m\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ как L.

Для дальнейшего удобно ввести обозначение: пусть функция v терпит конечные разрывы на лежащих в некоторой области дугах некоторых кривых линий, тогда через $v|^+$ и $v|^-$ будем обозначать соответственно предельные значения, которые принимает функция при стремлении сверху и снизу к точкам указанных выше дуг по путям, не касательным к этим дугам.

Из свойств сумм рядов для функций $\partial_t u$, $\partial_x u$, $\partial_t^2 u$, $\partial_t\partial_x u$, $\partial_x^2 u$ получаем, что а) частные производные $\partial_t u$ и $\partial_x u$ терпят на отрезках L конечные разрывы, которые соответственно равны $(\partial_t u|^+ + \partial_t u|^-)/2$ и $(\partial_x u|^+ + \partial_x u|^-)/2$; б) ряды, представляющие $\partial_t^2 u$, $\partial_t\partial_x u$ и $\partial_x^2 u$, суммируются в $\bar{Q}$ вне отрезков L к непрерывным функциям методом Чезаро первого порядка.

Непосредственной подстановкой ряда (5) в уравнение (1) с учетом свойств б) можно убедиться, что уравнение (1) удовлетворяется в $\bar{Q}$ вне отрезков L, т. е. удовлетворяется почти всюду. Аналогично, учитывая свойства а), можно проверить удовлетворение всюду первого из начальных условий (2) и граничных условий (3), причем ряд для частной производной $\partial_t^2 u$ на полупрямой $x=l$, $t\le 0$ сходится в обычном смысле и его сумма на этой прямой испытывает разрывы первого рода.

Таким образом, задача (1) – (3) имеет обобщенное в смысле данного в настоящей работе решение u, представимое в виде (5), непрерывное в $\bar{Q}$ и обладающее указанными выше свойствами а) и б).

Единственность решения. Будем говорить, что две функции, разрывные на некотором подмножестве V замкнутого множества $\bar{D}$, имеют на множестве V одинаковые разрывы (конечные или бесконечные или конечные и бесконечные одновременно), если их разность в $\bar{D}$ является непрерывной функцией. Докажем, что в классе W задача (1) – (3) не может иметь двух решений u_1 и u_2, обладающих тем свойством, что частные производные до второго порядка включительно от этих функций имеют одинаковые разрывы.

Предположим, что задача (1) – (3) имеет два непрерывных решения u_1 и u_2, обладающие указанными выше свойствами. Пусть $u=u_1-u_2$, а тогда $u\in C^2(\bar{Q})$. Кроме того, функция u будет решением задачи (1), (3) с добавлением однородных начальных условий

$$u(0,x)=\partial_t u(0,x)=0, 0\le x\le l. \quad (6)$$

Функции u, определяемой как решение задачи (1), (3), (6), сопоставим функцию «энергии» E

$$E(t)=\frac{a^2m}{2k}\left(\partial_x u(t,l)\right)^2+\frac{a^2h}{2k}\left(u(t,l)\right)^2+ +\frac{1}{2}\int_0^l\left(\left(\partial_t u(t,x)\right)^2+a^2\left(\partial_x u(t,x)\right)^2\right)dx. \quad (7)$$

Теперь, продифференцируем (7), выполним интегрирование по частям и воспользуемся (1) и (3), чтобы получить $E'(t)=0$. Значит $E(t)=\text{const}$. Пользуясь начальными условиями (6), вычисляем $E(0)=0$. А значит, $E \equiv 0$. Отсюда следует, что $\partial_t u = \partial_x u = 0$ в $\overline{Q}$, т. е. $u \equiv \text{const}$ в $\bar{Q}$. Так как $u \in C(\bar{Q})$, то из $u \equiv \text{const}$ и (7) следует, что $u \equiv 0$ в $\bar{Q}$. Из последнего результата и равенства $u = u_1 - u_2$ следует $u_1 = u_2$ в $\bar{Q}$.

Литература

1. Расулов, М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений / М. Л. Расулов. – М.: Наука, 1964. – 464 с.
2. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

УДК 621.791.725

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НИТИНОЛА В ЗОНЕ ЛАЗЕРНОЙ СВАРКИ

Савченко А.Л.[1], Минченя В.Т.[1], Роговцова А.С.[1], Сатторов С.[1], Августинович А.Л.[2]

[1]Белорусский национальный технический университет
[2]Научно-технологический парк БНТУ «Политехник»
Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Рассмотрены характеристики фазовых переходов в проволоке из никелида титана при различных режимах лазерной сварки. Показано, как нагрев в зоне сварки влияет на характеристики материала и свойства памяти формы. Предложены рекомендации по практическому использованию результатов исследования.

Ключевые слова: нитинол, лазерная сварка, механические характеристики, фазовые переходы.

INVESTIGATION OF THE PROPERTIES OF NITINOL IN THE ZONE OF LASER WELDING

Savchenko A.[1], Minchenya V.[1], Rogovtsova A.[1], Sattorov S.[1], Avgustinovich A.[2]

[1]Belarusian National Technical University
[2]Science and Technology Park of BNTU "Polytechnic"
Minsk, Republic of Belarus

Abstract. The characteristics of phase transitions in a titanium nickelide wire under various laser welding modes are considered. It is shown how heating in the weld zone affects material characteristics and shape memory properties. Recommendations for the practical use of the research results are proposed.

Key words: nitinol, laser welding, mechanical characteristics, phase transitions.

Адрес для переписки: Савченко А.Л., пр. Независимости, 65, Минск 220113, Республика Беларусь
e-mail: alsavchenko@bntu.by

При изготовлении различных изделий из нитиноловой проволоки, например, элементов эндопротезов сосудов, требуется соединение концов проволоки для получения замкнутых структур. Одним из наиболее производительных методов является сварка. При изготовлении изделий медицинского назначения в условиях Научно-технологического парка БНТУ «Политехник» используется лазерная сварка, выполняемая после термообработки элементов на сварочном автомате Rofin Select производства ROFIN-BAASEL Lasertech GmbH & Co, Германия. Сварка выполняется внахлест.

При испытаниях и эксплуатации сварных соединений возникают две основные проблемы: разрушение проволоки при статическом или циклическом нагружении в непосредственной близости от сварного шва и изменение характера фазовых переходов в нитиноле в сварном шве и непосредственно возле него вследствие нагрева при сварке, хотя по данным [1] сверхупругость и эффект памяти формы обычно сохраняются в материале после сварки. На рисунке 1 показан стент-элемент, подвергавшийся циклическому нагружению. Усталостное разрушение произошло непосредственно возле сварного шва.

Для оценки влияния режимов сварки на характеристики шва использовалась нитиноловая проволока диаметром 0,43 мм без термообработки, используемая для изготовления каркасов стент-графтов. Были изготовлены образцы, сваренные внахлест точечной лазерной сваркой с различным количеством точек сварки и, следовательно, с разной степенью нагрева в процессе соединения. Образцы имели вид двух сваренных прямолинейных фрагментов проволоки. На рис. 2 показаны примеры сварных швов.

Полученные образцы подвергались статическому нагружению на разрывной машине MTS Systems до разрушения и на специальном приспособлении для циклического нагружения. Кроме того, образцы материала сварного шва и участков