УДК 681.511

ПОСТРОЕНИЕ КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Райкова Ю.Д.
Научный руководитель – Несенчук А.А., к.т.н., доцент

Метод корневого годографа [1, 2] представляет собой мощный метод синтеза и анализа систем в теории систем автоматического управления (САУ) [1]. В данной работе рассматриваются процедуры анализа и синтезадинамических систем с использованием метода корневого годографа.

Основной характеристикой замкнутой динамической системы является ее передаточная функция (ПФ), которая имеет следующий вид:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + KW_1(s)W_2(s)},$$

где $W_1(s)$ – передаточная функция прямой цепи; $W_2(s)$ – передаточная функция звена обратной связи;K - общий коэффициент усиления системы; s – комплексный дифференциальный оператор [1].

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$1 + KW_1(s)W_2(s) = 0 .$$

Передаточную функцию разомкнутой системы представим в виде

$$G(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{\psi(s)}{\phi(s)}, \tag{1}$$

где $\psi(s)$и $\phi(s)$ -полиномы от комплексного переменного s.

Тогда характеристическое уравнение системы перепишем в виде

$$p(s) = \phi(s) + K\psi(s) = 0.$$

Пусть варьируется общий коэффициент усиления в пределах всех действительных значений: $-\infty < K < +\infty$. Тогда уравнение корневого годографа в общем виде определяется следующей функцией отображения:

$$K = -\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \tag{2}$$

где $u(\sigma,\omega)$ и $v(\sigma,\omega)$ - гармонические функции двух независимых переменных σ и ω.

Функция (2) позволяет отображать некоторые образы, заданные в плоскости K варьируемого параметра (*параметра годографа*) на *плоскость комплексного переменного*s и используется, таким образом, для формирования корневых годографов (корневых траекторий) в плоскости s [2].

Если параметр годографа изменяется вдоль всей действительной оси u плоскости K варьируемого параметра, годограф называется корневым годографом Теодорчика - Эванса (КГТЭ) [2]. Уравнение КГТЭ в данном случае имеет следующий вид:

$$v(\sigma,\omega) = 0. \quad (3)$$

Выражение (3) позволяет определять корневые годографы при изменении параметра годографа K вдоль всей действительной оси u плоскости варьируемого параметра [2]: $-\infty < K < +\infty$.

Уравнение параметра КГТЭ имеет вид

$$K = u(\sigma,\omega). \quad (4)$$

С использованием выражения (4) вычисляются значения параметра корневого годографа в любой точке корневого годографа.

Рассмотрим примеры построения корневых траекторий с целью анализа и синтеза динамических систем.

Пример 1. Динамическая система описывается передаточной функцией разомкнутой системы вида

$$G(s) = \frac{(s+5)}{(s+2)(s+3)}.$$

После преобразований согласно выражений (1) - (3) получим уравнение КГТЭ для заданной системы в виде

$$(\sigma+5)^2 + \omega^2 = 6. \quad (5)$$

Заметив, что выражение (5) является уравнением окружности с центром в точке (-5;0) и квадратом радиуса 6 в комплексной плоскости s, используя (5), вычислим соответствующие значения координат σ и ω и изобразим соответствующий корневой годограф в плоскости s комплексного переменного (рисунок 1).

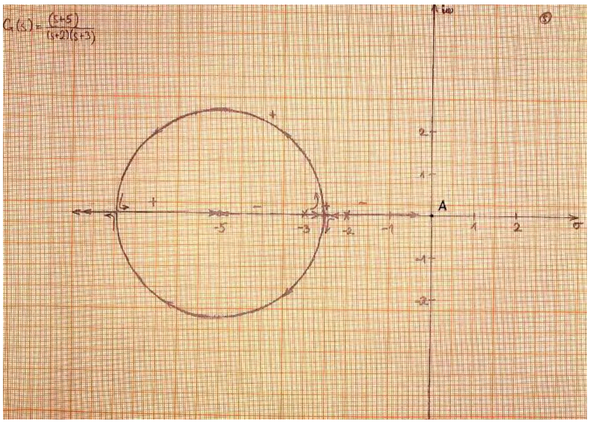

Рис.1. График КГТЭ №1 для системы, описываемой уравнением

На рисунке 1 полюсы функции $G(s)$ (1) на годографе обозначены "крестиками" - "x", нули - "кружками" - "o". Положительные ветви годографа обозначены символами "+", отрицательные -"-". Направление движения корней вдоль положительных и отрицательных ветвей при изменении параметра годографа в бесконечных пределах обозначено стрелками.

Единственная асимптота [1, 2] (степень числителя и знаменателя ПФ отличаются на 1)корневого годографа совпадает с осью σ; полюсы находятся в точках (-2;0), (-3;0); нуль – в точке (-5;0).

Данная система в части положительного годографа является устойчивой, т.к. положительныеветви годографа расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости корней *s*. В отрицательной части годографа система теряет устойчивость в точке *A* (рисунок 1). Значение параметра годографа в точке *A* вычисляется по формуле параметра (4). Согласно формуле параметра (4) в точке *A* значение *K*= -1,2. При значениях параметра $K < -1{,}2$ система является неустойчивой (рисунок 1).

Пример 2. Динамическая система описывается передаточной функцией разомкнутой системы вида

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+5)(s+6)(s+7)}.$$

После преобразований согласно выражениям (1) - (3) получаем уравнение КГТЭ для заданной системы в виде

$$\frac{36\sigma^2 + 264\sigma + 36\omega^2 + 444}{(\sigma^2 + 5\sigma - \omega^2 + 6) - \omega^2(2\sigma + 5)^2} = 1 = 0. \qquad (6)$$

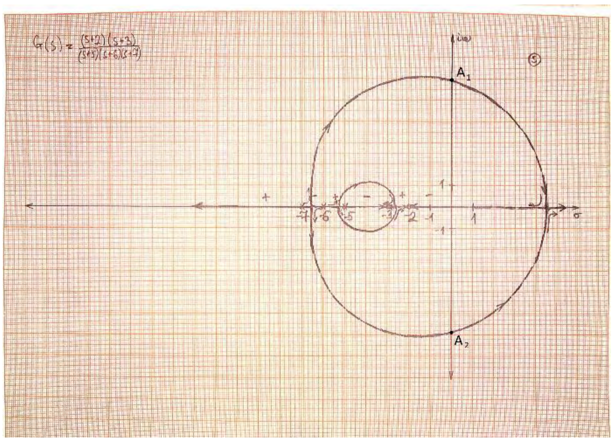

Рис.2. График КГТЭ №1 для системы, описываемой уравнением (6).

Уравнение (6) используется для вычисления координат КГТЭ. Единственная асимптота полученного КГТЭ (рисунок 2) совпадает с осью σ; полюсы находятся в точках (-5;0), (-6;0), (-7;0); корни – в точках(-2;0), (-3;0).

Рассматриваемая система в части положительного годографа является устойчивой (рисунок 2).

В части отрицательного корневого годографа система теряет устойчивость в точках A_1, A_2 (рисунок 2) при значении параметра *K* = -14,45. При *K*<-14,45 отрицательный годограф (система) является неустойчивым.

Литература

1. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. –М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

2. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005.