

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК НА ИЗОТРОПНОМ  
ОСНОВАНИИ**

*СИРОШ К. А.*

Белорусский государственный университет транспорта

**Основная часть.** Вариационно-разностный метод является одним из приближенных к реальным условиям способов расчета строительных конструкций, который основан на минимуме полной потенциальной энергии системы [1]. В расчете принимается, что реактивные касательные давления в контактной зоне балок не учитываются; распределение нормальных реактивных давлений по ширине каждой балки считается постоянным [3]; на контакте системы железобетонных балок с изотропным основанием возникают сжимающие и растягивающие реактивные давления.

Внутренние усилия в железобетонных балках регулярной системы будут определены по дифференциальным зависимостям через конечные разности. Собственный вес системы и касательные на-пряжения в контактной зоне при вычислениях не учитываются.

**Постановка задачи.** Бесконечная регулярная система железобетонных балок имеет постоянные изгибные жесткости  $EJ_x$ ,  $EJ_y$  и находится на изотропном основании под действием нагрузки. Система в силу симметрии перекрестных балок разбивается на базовые фрагменты и заменяется на совокупность двух пересекающихся балок, свободно опирающихся на основание [6].

Поперечные сечения балок приняты равными и постоянными по длине. Внешняя нагрузка действует перпендикулярно и симметрично плоскости осей системы железобетонных балок.

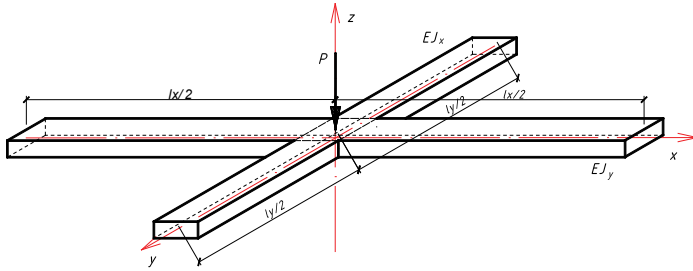


Рисунок 1. Бесконечная система железобетонных балок

**Граничные условия.** На границах расчетной области задачи горизонтальные перемещения ( $u$ ,  $v$ ) равны нулю. В контактной зоне осадки основания равняются прогибам балок.

Для крайних точек фрагмента пересечения балок действуют смешанные граничные условия

$$\begin{aligned}
 Q_z \Big|_{x=\pm \frac{l_x}{2}} &= -EJ_y \frac{d^3 w}{dx^3} = 0, & Q_z \Big|_{y=\pm \frac{l_y}{2}} &= -EJ_x \frac{d^3 w}{dy^3} = 0, \\
 \varphi_x \Big|_{y=\pm \frac{l_y}{2}} &= \frac{dw}{dy} = 0, & \varphi_y \Big|_{x=\pm \frac{l_x}{2}} &= \frac{dw}{dx} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

**Алгоритм расчета.** Изотропное основание заменяется расчетной областью (рис. 2) и аппроксимируется симметричной объемной разбивочной сеткой с постоянным шагом по осям:  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .

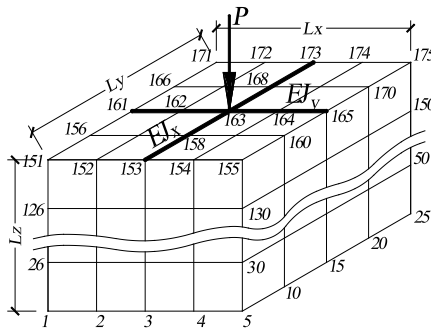


Рисунок 2. Расчетная область задачи

Таким образом расчетная область представляет собой совокупность объемных кубических ячеек с гранями  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Аппроксимация дала 96 ячеек и 175 узловых точек.

Последовательность этапов расчета дает алгоритм для системы перекрестных балок методом Ритца [2].

Функционал полной энергии представляет собой сумму полной энергии деформации изотропного основания, энергии изгиба двух перекрестных балок и потенциала внешней нагрузки. Энергия деформации основания подсчитывается отдельно для каждой объемной кубической ячейки расчетной области, а затем суммируется по объему изотропного основания. Подробно алгоритм определения полной энергии приведен в статье автора [5].

Решение задачи реализуется путем принятия за неизвестные компоненты вектора узловых перемещений  $u_i(x,y,z)$ ,  $v_i(x,y,z)$ ,  $w_i(x,y,z)$ .

Неизвестные перемещения  $u_i(x,y,z)$ ,  $v_i(x,y,z)$ ,  $w_i(x,y,z)$  могут быть определены из условия тождества нулю производных от полной энергии по каждому из перемещений в виду минимума функционала полной энергии в состоянии статического равновесия [1].

После замены интегро-дифференциальных выражений функционалов энергий конечно-разностными аппроксимациями система дифференциальных уравнений преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений. Решение СЛАУ позволяет найти неизвестные компоненты вектора  $u_i(x,y,z)$ ,  $v_i(x,y,z)$ ,  $w_i(x,y,z)$ . Полученная система линейных алгебраических уравнений представлена в общем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

где  $N$  – число узловых точек.

Исходя из граничных условий, перемещения контурных точек обнуляются.

Решение системы уравнений (2) позволяет найти неизвестные компоненты вектора перемещений. Имея значения перемещений, становится возможным определить прогибы балки, осадки изотропного основания, а также реактивные давления в контактной зоне. По прогибам балок определяются внутренние усилия в сечениях, а именно поперечная сила и изгибающий момент.

Для решения задачи были определены исходные данные:  $l_x = l_y = 4\text{ м}$ ,  $l_z = 6\text{ м}$ ,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1\text{ м}$ ,  $EJ_x = 2000\text{ кНм}^2$ ,  $EJ_y = 2000\text{ кНм}^2$ ,  $E = 3,06 \cdot 10^{10}\text{ Мпа}$ ,  $\mu = 1/6$ ,  $P_{163} = 2000\text{ кН}$ .

Числовые значения упругого расчета регулярной системы железобетонных балок на изотропном основании получены в проприетарной системе компьютерной алгебры MATHEMATICA [5].

Таблица 1

Результаты расчета

Балка в направлении оси x		Балка в направлении оси y	
Узловые точки	Перемещения, м	Узловые точки	Перемещения, м
161	-0,00817	153	-0,00831
162, 162'	0,00822	158, 158'	0,00832
163, 163'	-0,00854	163, 163'	-0,00854
164, 164'	0,00822	168, 168'	0,00814
165	-0,00817	173	-0,00805

*Примечание: знаком «'» обозначены законтурные точки.*

**Реактивные давления в контактной зоне.** Подробный алгоритм вычисления реактивных давлений в контактной зоне и внутренних усилий в балках рассмотрим на примере балки, ориентированной в направлении оси x, с контактными точками 161–165. Точки 162', 163', 164' являются законтурными. В силу симметрии системы перемещения в них равны перемещениям в соответствующих узловых точках балки (что отражено в таблице 1).

Для балки с контактными точками 153, 158, 163, 168, 173 (ориентированной в направлении оси y), все расчеты аналогичны в силу симметрии принятой расчетной модели.

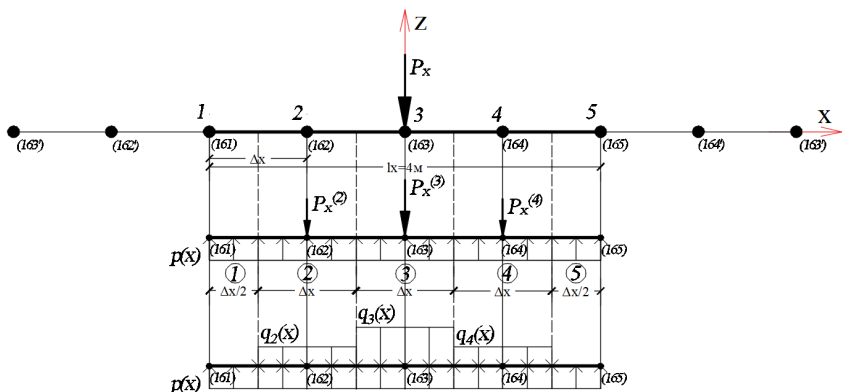


Рисунок 3. К расчету контактной зоны

Реактивные давления в контактной зоне балки с изотропным основанием определяются по вычисленным ранее вертикальным перемещениям основания (см. таблицу 1) с учетом граничных условий в контактной зоне (1).

Используем дифференциальную зависимость изгиба балки

$$p_z^{(i)} - q_k(x) = -EJ \frac{d^4 y_k}{dx^4} \quad (3)$$

где  $p_z^{(i)}$  – реактивное давление в  $i$  – той точке основания в зоне контакта с  $k$  – тым сечением балки;

$q_k(x)$  – внешняя нагрузка, действующая на конструкцию в области  $k$  – того сечения.

Используя готовые формулы для аппроксимации производных [4, с. 91], запишем выражение (3) в конечно-разностном виде:

$$p_z^{(k)} = q_k(x) - EJ_{y_{i=11+1}} \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^4} \quad (4)$$

Ввиду того, что сила  $P_{163}$  действует на систему балок и приложена в месте крестообразного пересечения, ее можно представить в виде двух составляющих  $P_{163} = P_x^{163} + P_y^{163}$ . В свою очередь  $P_x^{163} = P_x^{(2)} + P_x^{(3)} + P_x^{(4)}$ ,  $P_y^{163} = P_y^{(2')} + P_y^{(3')} + P_y^{(4')}$ .

Внешнюю нагрузку представим в виде распределенной нагрузки (см. рис. 3):

$$\begin{aligned}
q_1(x) &= 0, \\
q_2(x) &= \frac{P_x^{(2)}}{\Delta x} = \frac{P_x}{4\Delta x}, \\
q_3(x) &= \frac{P_x^{(3)}}{\Delta x} = \frac{P_x}{2\Delta x}, \\
q_4(x) &= \frac{P_x^{(4)}}{\Delta x} = \frac{P_x}{4\Delta x}, \\
q_5(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Формулы для контактных точек в конечно-разностном виде с учетом граничных условий (1) и выражений (5) имеют вид

$$\begin{aligned}
p_z^{(161)} &= 0 - EJ \frac{w_{163}' - 4w_{162}' + 6w_{161} - 4w_{162} + w_{163}}{\Delta x^4}, \\
p_z^{(162)} &= \frac{P_x}{4\Delta x} - EJ \frac{w_{162}' - 4w_{161} + 6w_{162} - 4w_{163} + w_{164}}{\Delta x^4}, \\
p_z^{(163)} &= \frac{P_x}{2\Delta x} - EJ \frac{w_{161} - 4w_{162} + 6w_{163} - 4w_{164} + w_{165}}{\Delta x^4}, \\
p_z^{(164)} &= \frac{P_x}{4\Delta x} - EJ \frac{w_{162} - 4w_{163} + 6w_{164} - 4w_{165} + w_{164}'}{\Delta x^4}, \\
p_z^{(165)} &= 0 - EJ \frac{w_{163} - 4w_{164} + 6w_{165} - 4w_{164}' + w_{163}'}{\Delta x^4}.
\end{aligned} \tag{6}$$

В результате подстановки числовых значений в формулы (6) получаем значениям  $p_z^{(i)}$ , по которым строим эпюру реактивных давлений в контактной зоне.

Таблица 2

Результаты вычисления реактивных сил в железобетонных баках

Балка в направлении оси x		Балка в направлении оси y	
Узловые точки	Реактивные силы p, кПа	Узловые точки	Реактивные силы p, кПа
161	263,72	153	267,00
162	-515,20	158	-517,56
163	-233,32	163	-233,12
164	-515,20	168	-513,32
165	263,72	173	261,00

**Внутренние усилия в железобетонных балках.** По известным вертикальным перемещениям (таблица 1) с учетом граничных условий в контактной зоне (1) определяются поперечная сила и изгибающий момент.

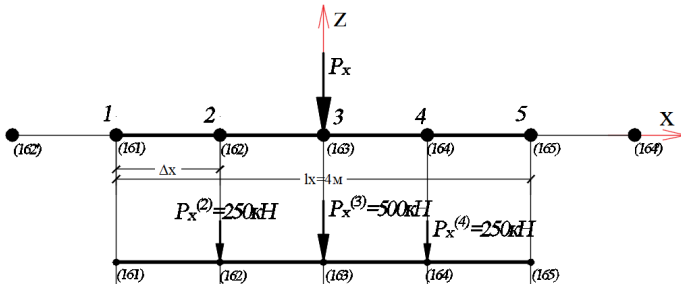


Рисунок 4. К расчету внутренних усилий

Используем известные дифференциальные зависимости

$$Q^{(k)} = -EJ \frac{d^3 y_k}{dx^3} - \sum P_i, \quad M^{(k)} = -EJ \frac{d^2 y_k}{dx^2}, \quad (7)$$

где  $P_i$  – сосредоточенная сила, действующая на балку.

В левых ненагруженных точках балки  $P_i = 0$ . В точке приложения внешней силы поперечная сила имеет два значения:  $Q_{\text{слева}}^{(k)}$  – без учета силы,  $Q_{\text{справа}}^{(k)}$  – с учетом силы.

*Момент.* Используя готовые формулы для аппроксимации производных [4], выражение в конечно-разностном представлении имеет вид:

$$M^{(k)} = -EJ_{y\ i=i_1+1} \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2}, \quad (8)$$

где  $EJ_{y\ i=i_1+1}$  – изгибная жесткость балки;

$I_1$  – номер узла начала балки ( $I_1 = 161$ ).

Формулы для контактных точек в конечно-разностном выражении с учетом граничных условий (1)

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= -EJ_y \frac{w_{162} - 2w_{161} + w_{162}}{\Delta x^2}, \\ M^{(2)} &= -EJ_y \frac{w_{161} - 2w_{162} + w_{163}}{\Delta x^2}, \\ M^{(3)} &= -EJ_y \frac{w_{162} - 2w_{163} + w_{164}}{\Delta x^2}, \\ M^{(4)} &= -EJ_y \frac{w_{163} - 2w_{164} + w_{165}}{\Delta x^2}, \\ M^{(5)} &= -EJ_y \frac{w_{164} - 2w_{165} + w_{164}}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

*Поперечная сила.* Запишем выражение для поперечной силы в конечно-разностном виде:

$$Q^{(k)} = -EJ_{y\ i=i_1+1} \frac{-w_{i-2} + 2w_{i-1} - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{2\Delta x^3} - P_i, \quad (10)$$

где  $EJ_{y\ i=i_1+1}$  – изгибная жесткость балки;

$I_1$  – номер узла начала балки ( $I_1 = 161$ ).

Для крайних контактных точек справедливы условия (1)

$$Q^{(1)} = Q^{(5)} = 0. \quad (11)$$

Формулы в конечно-разностном выражении



$$Q_{\text{слева}}^{(2)} = -EJ_y \frac{-w_{162'} + 2w_{161} - 2w_{163} + w_{164}}{2\Delta x^3},$$

$$Q_{\text{справа}}^{(2)} = -EJ_y \frac{-w_{162'} + 2w_{161} - 2w_{163} + w_{164}}{2\Delta x^3} - P_x^{(2)},$$

$$Q_{\text{слева}}^{(3)} = -EJ_y \frac{-w_{161} + 2w_{162} - 2w_{164} + w_{165}}{2\Delta x^3}, \quad (12)$$

$$Q_{\text{справа}}^{(3)} = -EJ_y \frac{-w_{161} + 2w_{162} - 2w_{164} + w_{165}}{2\Delta x^3} - P_x^{(3)},$$

$$Q_{\text{слева}}^{(4)} = -EJ_y \frac{-w_{162} + 2w_{163} - 2w_{165} + w_{164'}}{2\Delta x^3},$$

$$Q_{\text{справа}}^{(4)} = -EJ_y \frac{-w_{162} + 2w_{163} - 2w_{165} + w_{164'}}{2\Delta x^3} - P_x^{(4)}.$$

Таблица 3

Результаты вычисления внутренних усилий в балках

Балка в направлении оси x			Балка в направлении оси y		
Узловые точки	Момент M, кНм	Поперечная сила Q, кН (слева/справа)	Узловые точки	Момент M, кНм	Поперечная сила Q, кН (слева/справа)
161	-65,56	0,00	153	-66,52	0,00
162	66,30	-7,40 / -257,40	158	66,98	-2,80 / -252,80
163	-67,04	0,00 / -500,00	163	-67,08	-6,20 / -506,20
164	66,30	7,40 / -242,60	168	65,74	11,60 / -238,40
165	-65,56	0	173	-64,76	0

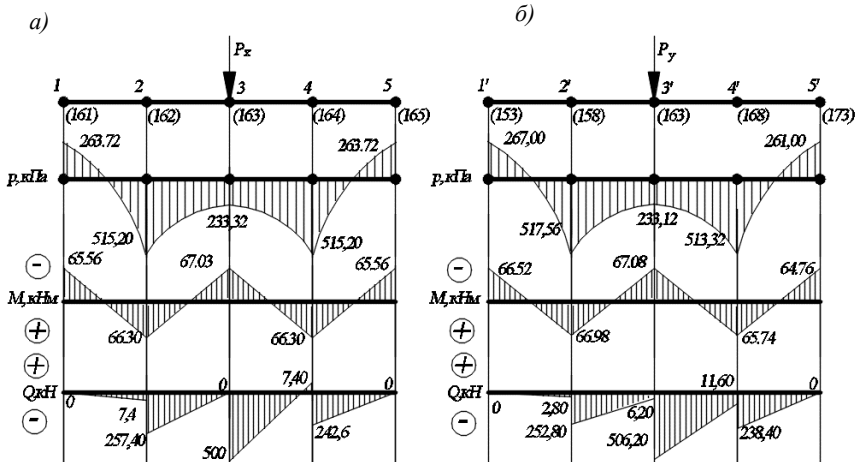


Рисунок 5. Эпюры реактивных давлений в контактной зоне и внутренних усилий:  
 а – балка в направлении оси  $x$ ; б – балка в направлении оси  $y$

**Заключение.** В рассматриваемой работе автором предложено вариационно-разностным методом исследовать параметры напряженно-деформированного состояния железобетонных балок, как регулярной системы, которая расположена на изотропном основании с ограничением глубины сжимаемой толщи. Построен и реализован алгоритм упругого расчета, составлена программа с использованием компьютерного пакета МАТНЕМАТИСА, проведена апробация. Вычислены внутренние усилия в железобетонных балках и определены реактивные давления в контактной зоне.

#### Список использованных источников:

1. Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета (Часть 1) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.
2. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости: монография / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.

3. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 639 с.

4. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики : справочное пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 346 с.

5. Козунова, О. В. Расчет бесконечной системы перекрестных балок на упругом основании вариационно-разностным методом / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Новополоцк : Вестник ПГУ. Серия F 2021. – С. 65 – 71.

6. Семенюк, С. Д. Железобетонные и пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании / С. Д. Семенюк. –: Белорусско-Российский университет, 2003. – 269 с.