УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЕЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

КОТОВ Ю. Н.
Белорусско-Российский университет

В работе рассматривается задача расчета пластинки на упругом основании при условии, что часть точек пластинки при ее изгибе лежат в одной наклонной плоскости. Упругое основание, на котором располагается пластинка, считается упругим однородным изотропным полупространством. Подобная задача возникает, например, при расчете фундаментной плиты многоэтажного здания, когда точки фундаментной плиты под колоннами и диафрагмами жесткости находятся в одной плоскости.

Для определения контактных напряжений между пластинкой и основанием используется способ Жемочкина. Система разрешающих канонических уравнений включает в себя уравнения способа Жемочкина и уравнения нахождения отдельных точек плиты в наклонной плоскости. В результате решения системы определяются усилия в связях Жемочкина и неизвестные силы, вызывающие перемещения ряда точек пластинки в одной наклонной плоскости. Далее находятся перемещения пластинки и усилия в ней.

В качестве примера рассчитана база внецентренно сжатой металлической колонны двутаврового поперечного сечения, лежащей на бетонном основании. Показаны изолинии и графики контактных напряжений и перемещений, графики изгибающих моментов и перемещений по характерным сечениям базы.

Постановка задачи. Рассмотрим пластинку на упругом основании под действием неизвестной асимметричной вертикальной нагрузки, вызывающей перемещения некоторых точек пластинки, лежащих в одной наклонной плоскости (рис. 1). Примем, что на контакте между пластинкой и упругим основанием возникают только нормальные напряжения, для пластинки справедливы гипотезы технической теории изгиба [1]. Требуется определить контактные напряжения между пластинкой и упругим основанием, ее вертикальные перемещения и усилия в ней.

Алгоритм расчета. Поставленную задачу будем выполнять способом Жемочкина [2]. Разобьем пластинку на равные прямоугольные участки размерами Δx и Δy. В центре каждого участка поставим вертикальную жесткую связь, через которую осуществляется контакт пластинки с упругим основанием. Будем считать, что усилие в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений в пределах каждого участка. Внешние силы P_k неизвестны и вызывают вертикальные перемещения некоторых точек пластинки, лежащие в одной плоскости. Для решения задачи используем смешанный метод строительной механики [3]. Для этого разрежем все связи и в начале координат введем защемление.

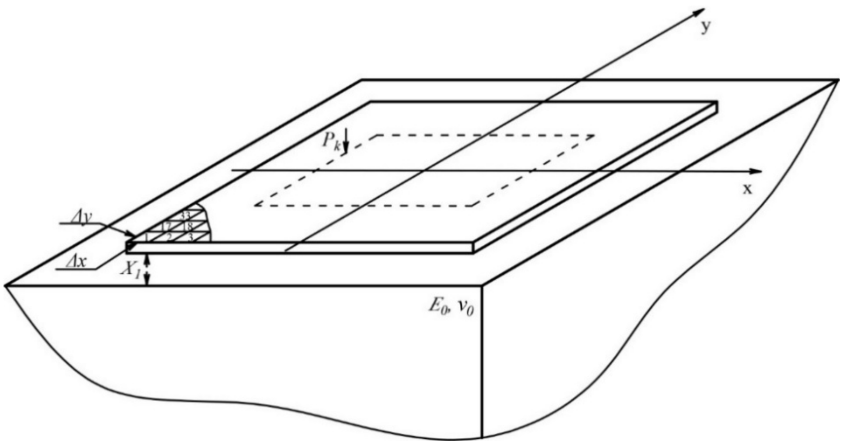

Рисунок 1. Пластинка на упругом основании

Система уравнений при величине равнодействующей внешних сил R имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{m} \delta_{i,k} X_k + u + \varphi_x y_i + \varphi_y x_i + \sum_{k=1}^{n} y_{i,k} P_k = 0, \quad i = 1,...,m;$$

$$-\sum_{k=1}^{m} X_k + \sum_{k=1}^{n} P_k = 0;$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{m} x_k X_k + \sum_{k=1}^{n} x_{pk} P_k = 0;\\
&-\sum_{k=1}^{m} y_k X_k + \sum_{k=1}^{n} y_{pk} P_k = 0;\\
&\sum_{k=1}^{m} F_{i,k} X_k - u' - \varphi'_x y_i - \varphi'_y x_i = 0, \quad i = 1,...,n;\\
&\sum_{k=1}^{n} P_k = R;\\
&\sum_{k=1}^{n} x_{pk} P_k = Ra_x;\\
&\sum_{k=1}^{n} y_{pk} P_k = Ra_y,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где m – число участков Жемочкина на пластинке;

n – число неизвестных сил, приложенных к точкам пластинки с перемещениями, лежащими в одной наклонной плоскости;

x_{pk}, y_{pk} – расстояние от введенного защемления до участков, где приложены сосредоточенные неизвестные силы;

X_k – неизвестное усилие в связи Жемочкина на участке с номером k;

u, φ_x, φ_y – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного в начале координат пластинки защемления;

$\delta_{i,k}$ – взаимное вертикальное перемещение разрезанной связи Жемочкина с номером i. Состоит из двух слагаемых. Первое представляет перемещения центра участка с номером i упругого основания от единичной силы, распределенной равномерно по участку с номером k $(i = 1,...,\mathrm{m})$, $(k = 1,...,\mathrm{m})$. Определяется для упругого полупространства по формуле $\delta_{i,k} = \dfrac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \vartriangle x} F_{i,k} + y_{i,k}$, где выражение для $F_{i,k}$, приводится в [4]. Для некоторых иных моделей упругого основания выражения для $F_{i,k}$ можно также найти в [2, 4];

P_k – неизвестное сила, приложенная к центру участка на пластинке с номером k $(k = 1,...,\mathrm{m})$;

u', φ'_x, φ'_y – неизвестные линейное и угловые перемещения наклонной плоскости, на которой расположены n неизвестных сил;

$y_{i,k}$ – вертикальное перемещение (прогиб) центра участка Жемочкина с номером i на пластинке с защемлением от единичной силы, приложенной к центру участка пластинки с номером k $(i = 1,...,\mathrm{m})$, $(k = 1,...,\mathrm{m})$. Определяется по формуле, приведенной в [4];

Δx, Δy – размеры прямоугольного участка Жемочкина;

E_0, ν_0 – упругие постоянные полупространства;

R, a_x, a_y – равнодействующая внешних сил и расстояние от введенного защемления до участка, где приложена равнодействующая.

После решения системы (1) определяются вертикальные перемещения центров участков Жемочкина на пластинке, по которым численным дифференцированием находятся внутренние усилия в пластинке.

Результаты расчета. Расчет выполнялся для металлической базы размерами опорной плиты 0,64 м х 0,52 м х 0,04 м на бетонном фундаменте с упругими постоянными – E_0 = 30600 МПа, ν_0 = 0,17. Колонна – сварная двутаврового сечения, размером 0,4 м х 0,28 м опирается на базу симметрично. Контактная зона двутавра с опорной плитой содержит 22 участка Жемочкина. Центры этих участков принадлежат базе, находятся в одной наклонной плоскости и имеют одинаковые угловые перемещения. Из-за действия асимметричной вертикальной нагрузки принято, что равнодействующая внешних сил R проходит через центр участка Жемочкина под № 107. Система разрешающих уравнений имеет 233 порядок. После решения системы находились контактные напряжения и определялись перемещения. На рис. 2, 3 показаны линии равных контактных напряжений и вертикальных перемещений базы. Явно выделяется область, соответствующая области контакта двутавра с базой. Также выделяется область внецентренного сжатия. Видно, что наибольшие значения контактных напряжений расположены в местах контакта краев двутавра с базой.

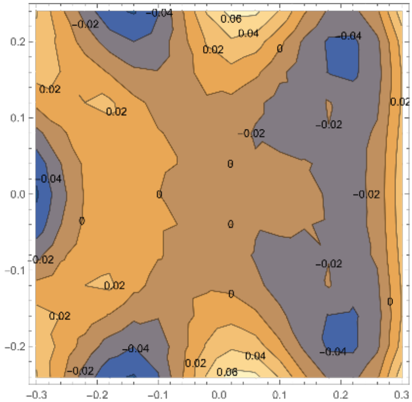

Рисунок 2. Изолинии распределения равных контактных напряжений в пластинке от R = 1

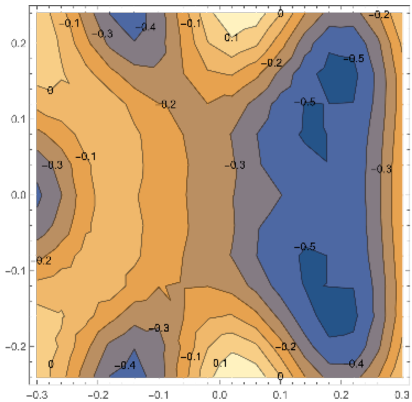

Рисунок 3. Изолинии распределения вертикальных перемещений в долях от $\frac{R(1-\nu_0^{2})}{\pi E_0 \triangle x}$

На рис. 4, 5, 6 приводятся графики изгибающих моментов, перемещений и напряжений по характерным сечениям базы, соответствующие стенкам и полкам двутавра.

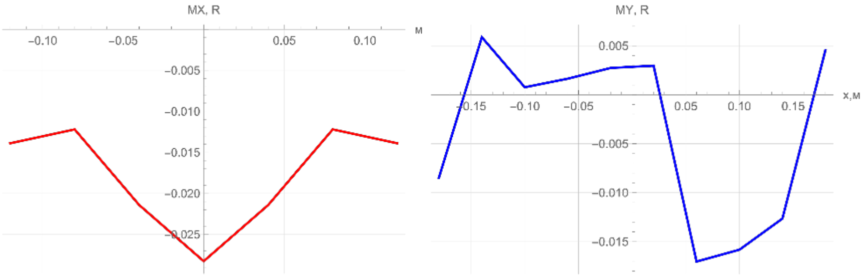

Рисунок 4. Графики распределения изгибающих моментов в опорной пластине по сечению под полкой в растянутой зоне и под стенкой двутавра

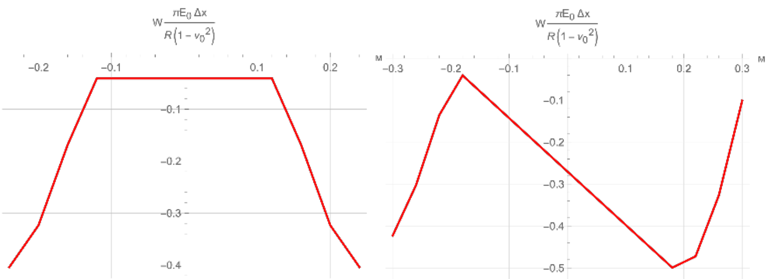

Рисунок 5. Графики перемещений узлов базы по вертикальной оси, совпадающей с полкой двутавра в растянутой зоне и по стенке двутавра

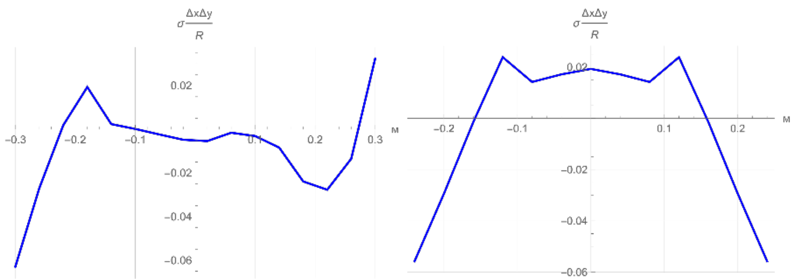

Рисунок 6. Графики распределения контактных напряжений под стенкой двутавра и по вертикальной оси, совпадающей с полкой двутавра в растянутой зоне

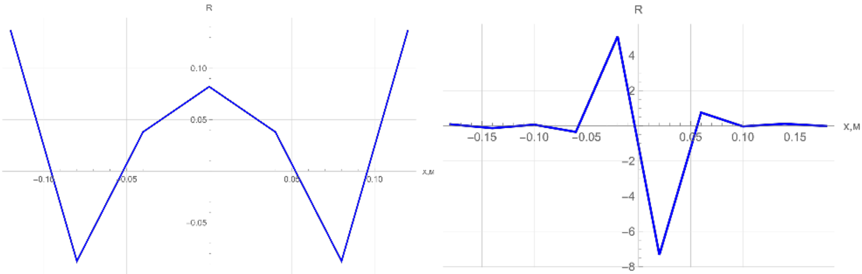

Рисунок 7. Графики распределения сил давления двутавра на опорную пластину по полке двутавра в растянутой зоне и по стенке двутавра

На рис. 7 показаны вертикальные силы, возникающие на контакте двутавра и базы в долях от величины R внецентренно приложенной равнодействующей силы. На графике распределения сил давления двутавра на опорную плиту видно, что минимальные силы возникают у краев полок двутавра. Силы, возникающие в стенке двутавра, близки к нулю вблизи полок двутавра. Как видно из расчета, распределения давлений от двутавра на опорную плиту неравномерны.

Все расчеты выполнялись в программном комплексе *Wolfram Mathematica 12.2.* [5, 6].

Заключение. В работе изложена методика расчета пластинки на упругом основании способом Жемочкина при условии, что часть точек пластинки при изгибе лежат в одной наклонной плоскости. Данная методика позволяет найти вертикальные перемещения пластинки, распределение контактных напряжений и силы, обеспечивающие нахождение некоторых перемещений пластинки в одной плоскости. В качестве примера приведен расчет базы внецентренно сжатой металлической колонны. Анализ полученных величин показывает, что распределения давлений от двутавра на опорную плиту неравномерны. Полученные результаты могут быть пригодны для использования, в частности, на стадии эксплуатации металлической базы колонны и для расчета фундаментных плит многоэтажных зданий также на стадии эксплуатации [7].

Список использованных источников:

1. Александров, А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности: уч. для строит. спец. вузов – 2–е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2002. – 400 с.
2. Жемочкин, Б. Н., А. П. Синицын. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1962. – 239 с.
3. Ржаницын, А. Р. Строительная механика. М.: Высш. шк., 1991. – 439 с.
4. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании. Минск: БНТУ, 2002. − 128 с.
5. Дьяконов, В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М. : ДМК, Пресс, 2009. – 624 с.
6. Половко, А. М. Mathematica для студента. – СПб.: БХВ–Петербург. – 2007. – 368 с.: ил.
7. Маликова Т. А. Анализ натурных осадок плитных и коробчатых фундаментов многоэтажных зданий. Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1972. –2. – С. 17 – 21.