

Белорусский национальный технический университет  
Международный институт дистанционного образования  
Кафедра информационных систем и технологий

СОГЛАСОВАНО  
Заведующий кафедрой  
Бояршинова О. А.

СОГЛАСОВАНО  
Директор МИДО  
Седнина М.А.

## ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

### Компьютерное моделирование прикладных задач

для специальностей:

I – 40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»  
1-40 05 01 «Информационные системы и технологии»

Составители: Напрасников В.В., Ковалева И.Л.

Рассмотрено и утверждено  
на заседании совета МИДО 26 сентября 2022 г.,  
протокол N 1

Минск ♦ БНТУ ♦ 2022

[Оглавление](#)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

*Цели ЭУМК:* ЭУМК предназначен для изучения дисциплины

комплекс «Компьютерное моделирование прикладных задач» для обучающихся I ступени получения высшего образования по специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий» и 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии». ЭУМК содержит набор методических материалов по этой дисциплине.

*Особенности структурирования и подачи учебного материала:* ЭУМК состоит из четырех частей.

*Теоретический раздел* содержит краткие лекционные материалы, посвященные изложению в наглядном виде основных понятий и определений.

*Практический раздел* содержит задания для проведения лабораторных занятий, а также программные коды примеров (Mathcad), рассмотренных в теоретическом разделе. Данные программные коды могут быть использованы для выполнения индивидуальных заданий.

*Раздел контроля знаний* содержит вопросы для организации текущего контроля знаний.

*Вспомогательный раздел* содержит программу дисциплины, список рекомендуемой литературы.

*Рекомендации по работе с ЭУМК:*

- ЭУМК представлен .pdf-файлом;
- требования к системе: IBM PC-совместимый ПК стандартной конфигурации, Adobe Reader. Программа работает в среде Windows XX;
- открытие ЭУМК производится посредством запуска файлов с расширением .pdf – в Adobe Reader

## Оглавление

1	ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	6
	Тема 1. Понятие о моделировании .....	6
	Виды моделирования .....	6
	О некоторых пакетах инженерных расчетов и моделирования.....	11
	Тема2. Моделирование в механических системах .....	17
	Пример 1. Маятник под действием силы тяжести .....	17
	Пример 3. Одномассовая колебательная система.....	19
	Приведение системы ОДУ произвольного порядка к каноническому виду .....	21
	Получение уравнений математической модели механической системы с сосредоточенными параметрами для в общем случае.....	28
	Пример 1. Колебательная двухмассовая система .....	32
	Пример 2. Система с тремя степенями свободы .....	34
	Шаговые методы решения задачи Коши .....	38
	Метод Эйлера решения задачи Коши .....	39
	Усовершенствованный метод Эйлера решения задачи Коши .....	42
	Модифицированный метод Эйлера решения задачи Коши .....	44
	Формулы для приближенного решения задачи Коши методами Рунге-Кутты .....	45
	Методы 4-го порядка .....	45
	Пример получения уравнений для формул первого порядка точности .....	47
	Оценка погрешности в решении дифференциальных уравнений .....	49
	Метод Рунге.....	50
	Понятие о «жестких» ДУ.....	51
	Методы прогноза и коррекции для решения ОДУ.....	52
	Метод предиктор-корректор Адамса-Башфорта.....	53
	Метод стрельбы (пристрелки) решения граничной задачи для ОДУ .....	53
	Пример 1. Стрельба по цели .....	54
	Пример 2. Решение задачи об изгибе балки переменного сечения под действием распределенной нагрузки.....	58
	Тема 3. Моделирование в экологии и экономике .....	66
	Взаимодействие популяций .....	66
	Получение математической модели для системы хищник-жертва .....	66
	Тема 4. Использование случайных величин для моделирования.....	77
	Задача Бюффона.....	77

Вычисление площадей и объёмов тел с помощью случайных величин.....	80
Примеры документов MATHCAD для вычисления объёмов на основе изложенного подхода.....	86
Шар вписанный в единичный куб.....	86
Куб, заданный соотношением: .....	89
Геометрическое множество точек, удовлетворяющих неравенствам:.....	92
Тема 5. Метод наихудшего случая и статистический анализ .....	103
Понятие о параметрах математической модели.....	103
Понятие о работоспособности технического объекта. ....	104
Метод наихудшего случая при анализе работоспособности технического объекта. ....	105
Статистический анализ работоспособности.....	106
Понятие о чувствительности математической модели.....	108
Пошаговый метод анализа чувствительности (метод приращений).....	109
Тема 6. Моделирование конкурирующих стратегий .....	111
Пример конкурирующих стратегий .....	111
Построение алгоритмической модели конкурирующих стратегий.....	112
Программная реализация в среде MATHCAD алгоритмической модели конкурирующих стратегий .....	115
Различные законы распределения случайных величин.....	116
Пример программной реализаций закона распределения Коши в среде MATHCAD.....	117
Тема 7. Моделирование систем массового обслуживания .....	125
Построение алгоритмической модели простейшей СМО .....	126
Простейшие потоки событий.....	130
Замкнутые системы массового обслуживания .....	132
Открытые системы массового обслуживания .....	133
Некоторые функции MATHCAD для решения обыкновенных дифференциальных уравнений .....	136
Пример решения в среде MathCAD. Открытая СМО с очередью.....	139
Пример решения в среде MathCAD. Нестационарный режим, замкнутая СМО с очередью .....	141
Тема 8. Моделирование систем с распределенными параметрами .....	145
Понятие о методах решения задач расчета сплошных сред .....	146
Метод взвешенных невязок для решения граничной задачи.....	146
Метод сеток .....	148
Метод конечных элементов .....	149
Метод граничных элементов.....	150
Подробнее о конечно-элементном моделировании .....	151

Краткий обзор существующих систем конечно-элементного моделирования .....	153
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ .....	160
Лабораторная работа №1. Модели колебательных систем .....	160
Лабораторная работа №2. Модель «хищник жертва» .....	161
Лабораторная работа №3. Случайные величины в моделировании .....	164
Лабораторная работа №4. Конкурирующие стратегии эксплуатации автобуса .....	167
Лабораторная работа №5. Моделирование прочности деталей .....	169
Какая конструкция называется фермой .....	169
Пример расчета фермы с использованием графического интерфейса пользователя .....	170
Задания к расчету ферм .....	185
Дополнительные задания. Моделирование систем массового обслуживания.....	191
Задание 1. Стационарный режим, открытая СМО.....	191
Задача 1 (По вариантам) .....	191
Задание 2. Нестационарный режим, замкнутая СМО с очередью .....	192
Задача 2 (По вариантам) .....	192
Задача 3 (Для всех вариантов) .....	192
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ.....	194
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	195

## 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

### Тема 1. Понятие о моделировании

#### Виды моделирования

В повседневной жизни и научных исследования человек желает предсказать поведение объектов или развитие явлений. Для этого *реальный объект или явление он заменяет искусственным объектом, который называется моделью*. Этот искусственный объект строится исследователем исходя из его представлений о поведении реального объекта и принятых им упрощениях. Под упрощением понимается отбрасывание несущественных свойств реальных объектов.

Не всегда представления человека о реальном объекте правильно отражают его свойства. Модель называется адекватной, если на её основе можно правильно предсказать интересующие исследователя свойства.

Виды моделирования:

- натурное;
- полунатурное;
- аналоговое;
- математическое.

**Натурное моделирование.** При таком моделировании объект воспроизводится с возможно большей точностью и к нему прикладываются внешние воздействия, по возможности точно воспроизводящие натуральные ситуации (например, краш-тест автомобиля). К достоинствам относится точность получаемых результатов. Недостатки: дороговизна проведения эксперимента, принципиальная невозможность в некоторых случаях выполнить натурный эксперимент, иногда погрешности натурального эксперимента могут оказаться выше, чем при математическом моделировании, такие погрешности могут возникнуть за счет погрешности измерительных аппаратов.

**Полунатурное моделирование.** При этом изменяется либо масштаб объекта, либо материал, либо другое его важное свойство. По эксперименту, выполненному на макете, с помощью коэффициентов пересчета, воспроизводится реальная ситуация. Недостатки: сложность выполнения и однократность эксперимента, сложность измерений.

**Аналоговое моделирование.** На основе принципа единства мира явления, имеющие разную природу, описываются одинаковыми

уравнениями. Исходя из этого, можно, решая одинаковые уравнения, интерпретировать полученные решения для описания объекта другой природы. АВМ – аналоговые вычислительные машины – бывают:

- электрические;
- пневматические;
- гидравлические.

В электрических АВМ на верхней панели выгравированы символы электрических элементов, выполняющих различные математические операции (сложение, умножение, интегрирование, дифференцирование). Каждый элемент имеет один или несколько входов и один выход. Соединяя гибкими проводниками гнезда входов и выходов различных элементов, составляется электрическая схема, позволяющая решить соответствующее уравнение. После включения машины, решение мгновенно получается в виде сигнала на экране осциллографа. Недостатки: сложность получения коэффициентов для пересчета электрического сигнала к переменной реальной задачи.

**Математическое моделирование.** В этом виде моделирования в качестве искусственного объекта, заменяющего реальный объект (модели), выступает чаще всего уравнение или системы уравнений. Реже могут быть графы, матрицы, тензоры или другие математические объекты. Поэтому моделирование называется математическим. Процесс построения математической модели имеет множество этапов. Основные из них изображены на рисунке 1.

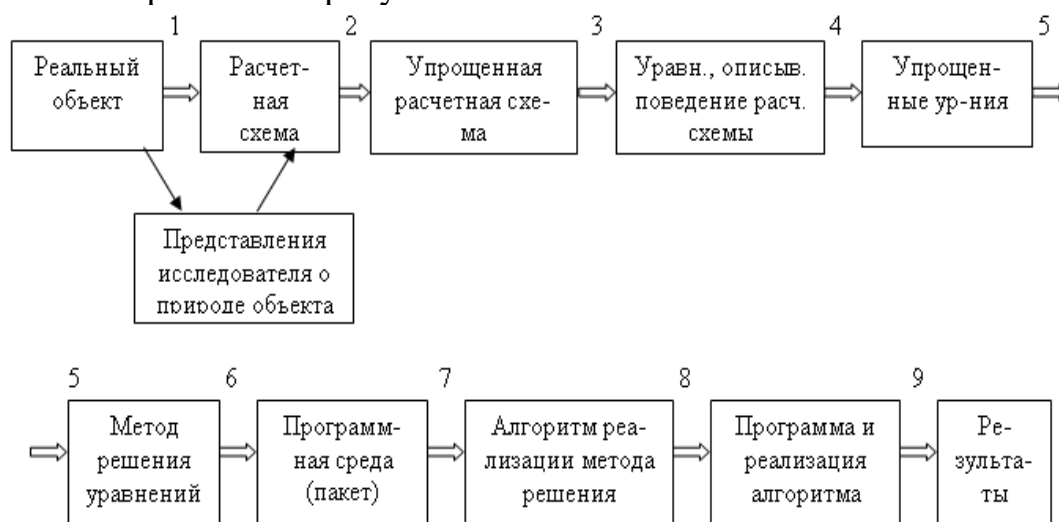


Рисунок 1.1. Этапы математического моделирования с использованием компьютера.

На этом этапе могут возникнуть гносеологические ошибки, связанные с неправильным представлением исследователя о функционировании объекта.

[Оглавление](#)

Чаще всего решить задачу в общем виде не удастся и приходится вводить дополнительные предположения, абстрагируясь от несущественных свойств объекта (свойства, которые оказывают незначительное влияние на исследуемые свойства технического объекта). На этом этапе вопрос «существенные - не существенные» исследователь решает в зависимости от своего опыта и квалификации.

Когда упрощённая расчётная схема получена, нужно подобрать правильные уравнения, описывающие поведение сплошной среды или системы с сосредоточенными параметрами. Например, если рассматривать задачу о деформировании биметаллической пластины, то уравнения должны учитывать как упругие, так и температурные свойства объекта. Если та же пластина деформировалась лишь под влиянием внешних сил, которые медленно меняются во времени при постоянной температуре, то достаточно использовать уравнения обычной теории упругости.

При рассмотрении тонких эффектов, полученные уравнения могут оказаться очень сложными. Если же интересующая исследователя точность решения может быть достигнута при пренебрежении этими эффектами, то часто удаётся упростить эти уравнения. Например, одним из таких упрощений является линеаризация. При этом в решении удерживается первое линейное слагаемое, а слагаемые более высоких порядков отбрасываются.

Одни и те же уравнения можно решить различными численными методами. Эти методы могут обладать различной точностью.

На следующем этапе подбирается нужная среда программирования или пакет, обладающие возможностями для решения соответствующих уравнений.

Теперь создаётся программная реализация, которая может содержать как синтаксические, так и семантические ошибки.

При создании программной реализации могут возникнуть погрешности, связанные с неправильной подготовкой входных и выходных параметров. Это в дальнейшем затруднит стыковку с другими программными модулями.

Очень важный этап анализа результатов. Следует иметь в виду, что решение задачи здесь только начинается. Нужно правильно интерпретировать результаты, представить их в обозримом виде для предоставления постановщику задачи.

Как видно из этого перечисления, источников ошибок очень много. Отсюда вытекает необходимость тестирования модели.



## *Тестирование компьютерной модели*

Тестирование модели – это искусственный подбор такой ситуации, в которой поведение объекта можно заранее предсказать. Тестирование должно быть всесторонним. Чем больше тестов выполнено, тем увереннее можно говорить об адекватности модели.

Другой способ тестирования заключается в том, что исследуется реальный объект на основании натурального эксперимента, а результат этого эксперимента сравнивается с результатом моделирования. Это способ обычно считается более представительным. Следует лишь иметь в виду, что и здесь возможны ошибки, связанные с погрешностями измерительной аппаратуры.

Третий способ тестирования: результат численного эксперимента, полученного на основе разработанной модели, сравнивают с результатом другого численного эксперимента, полученными на основе существующих, хорошо проверенных универсальных пакетов и программ.

### *Преимущества математического моделирования*

- Универсальность математических моделей. Поскольку математическая модель является параметрической, возможны исследования различных объектов простым измерением параметров.
- Относительная дешевизна математического моделирования по сравнению с другими видами.
- Простая переносимость компьютерных моделей из одной организации в другую.

### *Понятие о системах со сосредоточенными и с распределёнными параметрами*

Рассмотрим пример:

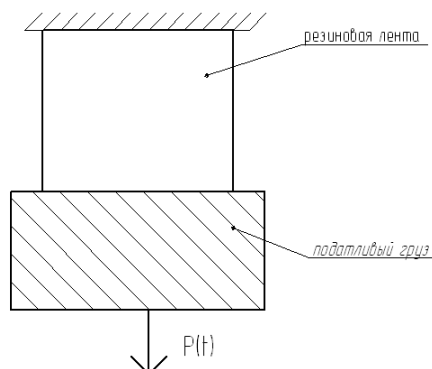


Рисунок 1.2. Схема нагружения

Возможны различные ситуации. Первая такова:

- Податливость груза гораздо меньше, чем податливость резиновой ленты (жесткость груза больше жёсткости ленты):

$$k_{гр} \geq k_{ленты} \quad (1.1)$$

- Пусть масса груза значительно больше массы ленты

$$m_{гр} \geq m_{ленты} \quad (1.2).$$

В этом случае массой ленты можно пренебречь, а груз считать абсолютно жёстким. Приходим к следующей расчётной схеме:

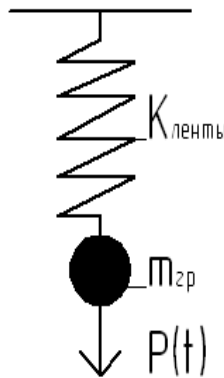


Рисунок 1.3. Расчетная схема при допущениях (1), (2)

Мы считаем, что вся податливость сосредоточена в пружине, а вся масса сосредоточена в грузе. При выполнении этих предположений такая система называется **системой со сосредоточенными параметрами**.

Поведение таких систем в математическом плане описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). В таких уравнениях присутствуют производные только по одной переменной (в рассматриваемом случае по времени). Методы решения уравнений: метод Эйлера, метод Рунге-Кутты и другие.

Если же податливость (масса) ленты соизмерима с податливостью (массой) груза, то предположения (1.1) и (или) (1.2) не выполняется, и система называется системой с распределёнными параметрами. Поведение таких систем описывается дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП).

Такие уравнения описывают поведение сплошной среды, где каждая точка влияет на любую другую точку. Методы их решения: методы конечных элементов, метод граничных элементов, метод конечных разностей.

## О некоторых пакетах инженерных расчетов и моделирования

В настоящее время существует немалое количество математических пакетов, и все они используются в экономическом и математическом моделировании, так как математика и экономика очень тесно связаны. Наиболее распространенные из них – это MathCAD, Matlab, Derive, Eureka, Mathematika, Maple. Данные пакеты многофункциональны.

### **EUREKA**

Это интегрированная система автоматизации математических, физических, химических, электро - и радиохимических и прочих научно-технических расчетов «Eureka» позволяет:

- выполнить типовые математические и экономические расчеты;
- вычислять производные и интегралы;
- решать системы уравнений;
- искать экстремумы;
- выводить данные в табличной форме;
- строить по выбору график одной из функций;
- работать с комплексными числами.

«Eureka» также интегрирует в одной системе редактор для подготовки файлов, вычислитель, верификатор, проверяющий правильность вычислений, генератор отчетов, простой графопостроитель. Данный пакет работает в многооконной оболочке, позволяющей одновременно наблюдать описание решаемой задачи, результаты вычислений и их проверки, готовить отчет о работе и график выбранной функции.

### **DERIVE**

Математический пакет «Derive» является системой символьной математики, т.е. позволяет производить символьные вычисления. Пакет обладает богатыми графическими возможностями. Задания и результаты вычислений представлены на экране в привычной математической записи. Интерфейс системы прост, но исключительно удобен для пользователя. Пакет можно эффективно использовать при решении широкого круга математических задач от планиметрии до теории вероятностей и статистики, а также производить финансовые расчеты.

«Derive» имеет несколько десятков встроенных функций:

- элементарные и специальные функции;
- действия с комплексными числами;
- решение задач математического анализа: отыскание пределов

функций, производных, определенных и неопределенных интегралов, конечных сумм и сумм числовых рядов, бесконечных произведений;

- операции векторной алгебры;
- действия с матрицами, вычисление обратной матрицы, собственных значений матрицы.

«Derive» имеет библиотеку функций-утилит, предназначенных для решения специальных задач, есть возможность пополнения библиотеки функциями пользователя.

## **MATLAB**

«Matlab» является одной из старейших и проработавших систем автоматизации автоматических расчетов. Она была разработана С.В. Молером и с конца 70-х годов широко использовалась на больших ЭВМ. Система Matlab оказала большое внимание на разработку ряда пакетов для выполнения матричных операций, расчета систем управления, в свою очередь, вобрав в себя лучшие из средств, накопленных за более чем 30-летнюю историю развития матричных методов вычислений на ЭВМ.

«Matlab» - расширяемая система, и ее можно легко приспособить к решению нужных классов задач. Возможности ее весьма обширны, по скорости выполнения задач система не уступает многим другим подобным системам.

Своим названием (Matrix Laboratory – «матричная лаборатория») система «Matlab» обязана ориентации на матричные и векторные вычисления. Она выполняет операции над векторами и матрицами даже в режиме простых вычислений без какого-либо программирования.

Система содержит средства, особенно удобные для электро- и радиотехнических расчетов (операции с комплексными числами, полиномами, обработка данных, анализ сигналов и цифровая фильтрация). «Matlab» содержит также операторы построения графиков в декартовой и полярной системах координат, трехмерных поверхностей. На одном графике данная система может представить множество кривых, различающихся цветом и отличительными символами. Графики «Matlab» выводит в одном или несколько окон.

Будучи ориентированной, на работу с реальными данными, эта система выполняет все вычисления в арифметике с плавающей точкой. Система также поддерживает выполнение операций с массивами данных, регулирует сингулярное и спектральное разложения, вычисление ранга и чисел обусловленности матриц, поддерживает работу с алгебраическими полиномами, решение нелинейных уравнений и задач оптимизации, интегрирование в квадратурах, решение дифференциальных и

разностных уравнений. В системе реализована удобная операционная среда, которая позволяет формулировать проблемы и получать решения в привычной математической форме, не прибегая к рутинному программированию.

Каждая из вышеописанных систем имеет свои достоинства и недостатки. Одни из них чрезвычайно сложны для освоения, требуют основательной математической подготовки и предназначены в первую очередь для профессионалов, имеют встроенные языки программирования математических действий и дополнительные библиотеки электронных справочников, другие, простые в освоении, обладают ограниченными возможностями и неудобным интерфейсом пользователя.

### **MATHCAD**

К универсальным программам, пригодным для решения поставленной задачи, относится, например, программа MathCad, которая представляет собой автоматизированную систему, позволяющую динамически обрабатывать данные в числовом и аналитическом (формульном) виде.

Фирма MathSoft быстро завоевала признание на рынке программного обеспечения, выпустив за 3 года целую серию пакетов MathCAD. В названии пакета присутствует известная аббревиатура CAD (Computer Aided Design), русский эквивалент САПР (система автоматизированного проектирование). Так обычно называются продукты, нацеленные на создание удобной программной среды для дизайнера (проектировщика). Аббревиатура CAD отражает стремление разработчиков создать программу, для которой не нужно быть специалистом по компьютерам. В целом можно сказать, что программный пакет MathCAD оправдывает такое название.

Каждая версия MathCAD выпускается в двух вариантах – Standard (обычная) и Professional (профессиональная). К названию профессиональной добавляется аббревиатура PRO.

Особое же место среди систем автоматизации математических расчетов занимает пакет «MathCAD». Пакет чрезвычайно прост в использовании. Его интерфейс настолько удобно сделан, что пользователь работает с рабочим листом программы, как с листом бумаги, где он пишет формулы и математические выражения в их привычной нотации. MathCAD является одной из самых мощных и эффективных математических систем, которая занимает особое место среди множества таких систем и по праву может называться самой современной, универсальной и массовой математической системой для всех

пользователей. Отличительная черта этой системы – входной язык, максимально приближенный к математическому языку или языку научных статей и книг. Объединение в этой системе текстового редактора с возможностью использования общепринятого языка позволяет пользователю получить готовый итоговый документ.

«MathCAD» столь же гибок, как самые мощные электронные таблицы и языки программирования, но легок в освоении и приятен в использовании.

Система «MathCAD» содержит текстовый редактор, мощный графопостроитель и графический процессор.

Текстовый редактор служит для ввода и редактирования текстов. Текст может состоять из слов, математических выражений и формул, спецзнаков.

Вычислитель обладает уникальными возможностями:

- обеспечивает вычисления по сложным математическим формулам;
- имеет большой набор встроенных математических функций;
- позволяет вычислять ряды, суммы и произведения, определенные интегралы и производные;
- работать с комплексными числами;
- решать линейные и нелинейные уравнения;
- выполнять векторные и матричные операции.

В вычислитель входят и такие мощные средства как линейная и сплайн-интерполяция, регрессия, прямое и обратное быстрое преобразование Фурье. Легко можно менять разрядность чисел и погрешность итерационных методов.

«MathCAD» позволяет записывать на экране компьютера формулы в их привычном виде. Но формулы в «MathCAD» могут значительно больше, чем просто хорошо выглядеть. С их помощью можно решить почти любую мыслимую математическую задачу символьно либо численно. Можно реализовать текст в любых местах вокруг уравнений, чтобы документировать процесс решения.

Графический процессор служит для создания графиков. Графический процессор сочетает чрезвычайную простоту общения с пользователем с самыми изысканными возможностями графических средств. Простые графики нескольких функций пользователь может начать строить буквально в первые секунды знакомства с системой. По мере приобретения навыков работы с графическим процессором легко осваиваются и другие графические средства – графики в логарифмическом масштабе, масштабные сетки с любым числом делений, линии, отмеченные точками, прямоугольниками и ромбиками. Графика

ориентирована на решение типичных математических задач. Возможно быстрое изменение размеров графиков, наложение их на текстовые надписи и перемещение в любое место документа. Можно создавать двумерные и трехмерные графики. Можно пользоваться иллюстрациями из других приложений Windows.

Также данный пакет обладает возможностью программирования. MathCad - это система, ориентированная на пользователя, который не обязан знать абсолютно ничего о программировании. Создатели MathCAD изначально поставили перед собой такую задачу, чтобы дать возможность профессионалам-математикам, физикам и инженерам самостоятельно проводить сложные расчеты, не обращаясь за помощью к программистам. Несмотря на блестящее воплощение этих замыслов, выяснилось, что вовсе без программирования MathCAD серьезно теряет в своей силе, в основном, из-за недовольства пользователей, знакомых с техникой создания программ и желающих осуществить свои расчеты в привычном для себя программистском стиле. Вместо знакомых принципов программирования, пользователям старых версий MathCAD предлагалось комбинировать несколько специфичных встроенных функций и ранжированные переменные. Последние версии MathCAD имеют не очень мощный, но весьма элегантный собственный язык. С одной стороны, он дает возможность программисту эффективно применять программный код в документах MathCAD. С другой, простота и интуитивность языка программирования позволяет быстро ему обучиться. Наконец, программные модули внутри документа MathCAD сочетают в себе и обособленность (поэтому их легко отличить от остальных формул), и простоту смыслового восприятия. Несмотря на небольшое число операторов, язык программирования MathCAD позволяет решать самые различные, в том числе и довольно сложные, задачи и является серьезным подспорьем для расчетов. В ранних версиях MathCAD встроенного языка программирования не было. Чтобы применять привычные операции проверки условий и организовывать циклы, приходилось изобретать причудливую смесь из встроенных функций условия и комбинаций ранжированных переменных. Несмотря на принципиальную эквивалентность определения функций и переменных через встроенные функции MathCAD или программные модули, программирование имеет ряд существенных преимуществ, которые в ряде случаев делают документ более простым и читаемым: возможность применения циклов и условных операторов, простота создания функций и переменных, требующих нескольких простых шагов, возможность создания функций, содержащих

закрытый для остального документа код, включая преимущества использования локальных переменных и обработку исключительных ситуаций (ошибок). MathCAD имеет удобный многооконный интерфейс: одновременно может быть открыто несколько документов, каждый из которых занимает отдельное окно в пределах основного окна программы. Документ MathCAD представляет собой макет некоторого математического документа. Пользователь обладает богатыми возможностями «проектирования»: в любое место документа можно добавить математическое выражение, график, объект для импорта и экспорта данных и т.д. Программа MathCAD обеспечивает в автоматическом режиме, дополняя введенные формулы полученными результатами. В итоге документ MathCAD выглядит как лист бумаги с выкладками математики. В терминах решения прикладных задач он содержит описание модели, исходные данные и полученный результат. Для импорта и экспорта данных в него вставляются компоненты, которые отвечают за интеграцию с другими приложениями.

Интерфейс MathCAD является дружелюбным к пользователю, в нем соблюдены современные стандарты построения приложений Windows. Пользователь Windows легко может освоить MathCAD. Упрощенный набор функций обеспечивает наглядность и простоту использования. Удобство использования MathCAD и наглядность представления математических формул достигнуты за счет ограничения функциональных возможностей пакета.

Справочная система MathCAD построена на основе HTML-Help и очень удобна. В пакет MathCAD включены многочисленные примеры использования всех возможностей, он популярен у нас в стране, его шестая версия даже была русифицирована, о нем появилось достаточное количество литературы на русском языке.



## Тема2. Моделирование в механических системах

В рассматриваемом курсе будем в основном заниматься системами с сосредоточенными параметрами.

Примеры задач, приводящих к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

### Пример 1. Маятник под действием силы тяжести

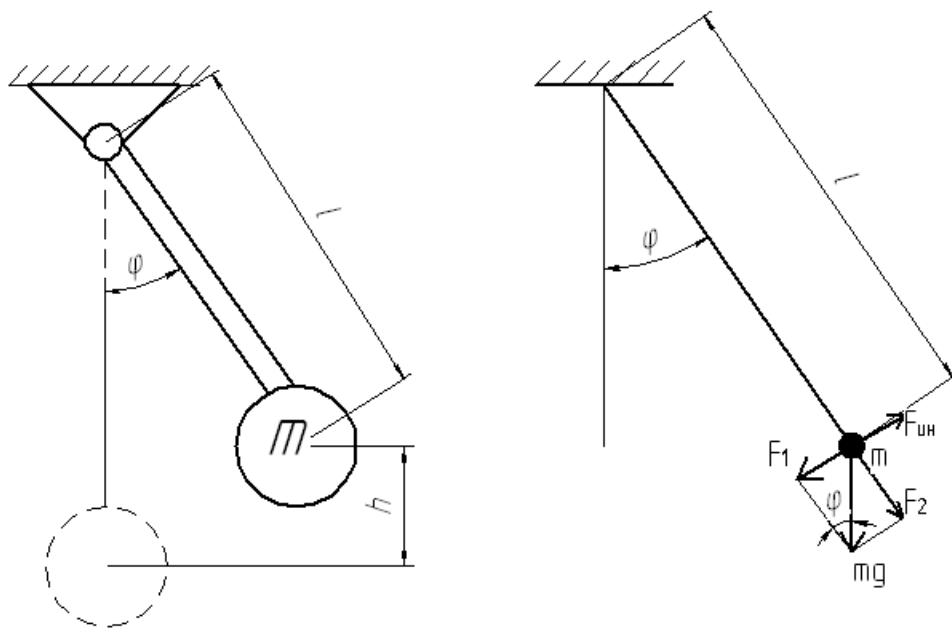


Рисунок 2.1. Маятник под действием силы тяжести. Схема колебательной системы.

Спроецируем обе силы по направлению касательной к траектории движения точки.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_{ун} \\
 F_1 &= m \cdot g \cdot \sin(\phi) \\
 F_{ун} &= -\varepsilon \cdot l \cdot m = -\ddot{\phi} \cdot l \cdot m \\
 m \cdot g \cdot \sin(\phi) + \ddot{\phi} \cdot l \cdot m &= 0 \\
 \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\phi) &= 0
 \end{aligned}$$

Пусть  $\phi \approx \sin(\phi)$ , то есть  $\phi \ll 1$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \cdot \phi = 0$$

Пример 2. Балка переменного сечения под действием изгибающей нагрузки

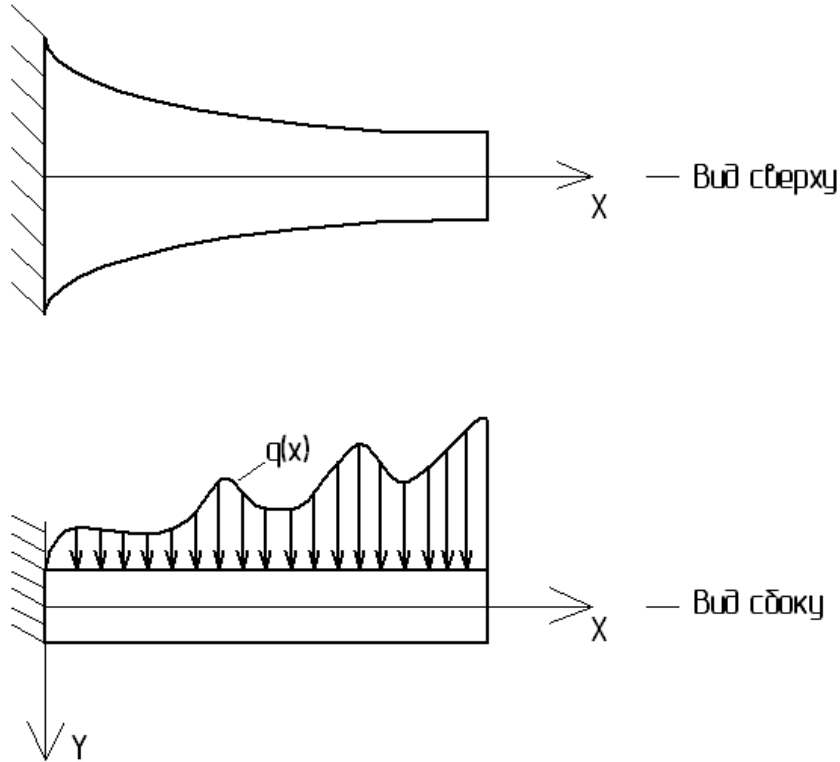


Рисунок 2.2. Балка переменного сечения

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$E \cdot J(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x) \quad (2.1)$$

где  $E$  – модуль Юнга,

$J(x)$  – момент инерции сечения,

$M(x)$  – изгибающий момент.

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \quad (2.2)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad (2.3)$$

Продифференцируем (1) два раза:

$$E \cdot J' \cdot y'' + E \cdot J \cdot y''' = -Q(x)$$

$$E \cdot (J'' \cdot y'' + 2 \cdot J' \cdot y''' + J \cdot y'''' ) = q(x)$$

Как видно, получено ОДУ четвертого порядка относительно неизвестной функции  $y(x)$ . Для того, чтобы однозначно определить это

решение, необходимо сформулировать четыре условия для самой функции и её производных.

$$\begin{aligned}y(x)|_{x=0} &= y_0 \\y'(x)|_{x=0} &= y'_0 \\y''(x)|_{x=0} &= y''_0 \\y'''(x)|_{x=0} &= y'''_0\end{aligned}$$

Мы рассмотрим случай, когда значения функции и её производных заданы для начальных значений. Такая задача называется задачей с начальными условиями для ОДУ. Независимая переменная меняется на интервале наблюдения

$$x \in [0; L]$$

Если на правом конце известны какие-нибудь значения функции или её производных, то аналогичные четыре условия будут записаны соответственно на левом и на правом конце (всего четыре условия). Это пример граничной задачи.

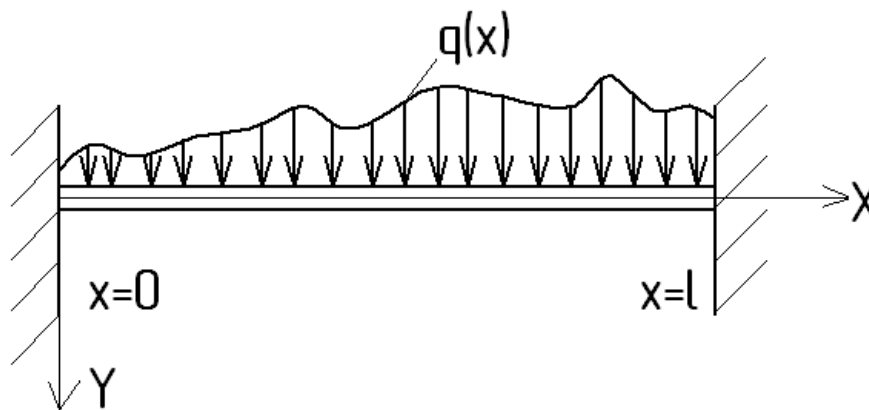


Рисунок 2.3. Схема нагружения балки для граничной задачи.

$$\begin{aligned}y(x)|_{x=0} &= 0 \\y'(x)|_{x=0} &= 0 \\y(x)|_{x=L} &= 0 \\y'(x)|_{x=L} &= 0\end{aligned}$$

Такая задача для ОДУ называется краевой или граничной.

### Пример 3. Одномассовая колебательная система.

Брус связан со стеной пружиной с жесткостью  $k$  и устройством, рассеивающим энергию (демпфером) с характеристикой  $s$ . Брус движется без трения по горизонтальной поверхности под действием силы  $P(t)$ .

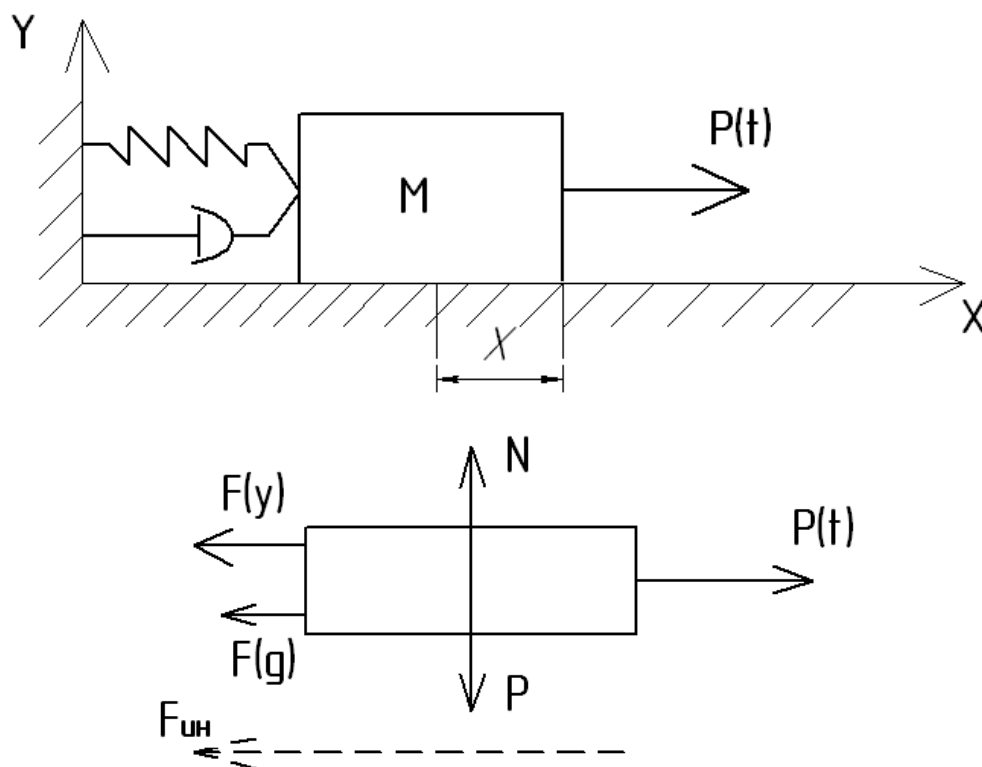


Рисунок 2.4. Колебательная одномассовая система.

Если спроецировать все действующие силы на OX, то

$$p(t) - F_y - F_d - F_u = 0.$$

$x=x(t)$  – функция от времени, описывающая смещение массы относительно положения, в котором она находилась при недеформированном состоянии пружины. Будем считать, что в этом случае наблюдение начинается в момент времени  $t_0$ .

$t \in [t_0; t_k]$  – интервал наблюдения.

$F_y = k \cdot x$  - сила упругости.

$F_d = C \cdot \frac{dx}{dt}$  - сила демпфирования.

$F_u = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$  - сила инерции.

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = p(t)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x(t)|_{t=0} = x_0$$

$$\dot{x}(t)|_{t=0} = \dot{x}_0$$

Получили ОДУ второго порядка с заданными начальными условиями.

[Оглавление](#)

Приведение системы ОДУ произвольного порядка к каноническому виду

Задачу вида

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f(x, z(x)) \\ z(x)|_{x=x_0} = z_0 \end{cases}$$

называют задачей Коши.

Пример задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \cos(x) \cdot z \\ z(x)|_{x=0} = 2 \end{cases}$$

Численные методы для решения такой задачи хорошо исследованы, разработаны соответствующие алгоритмы и программы. Такие программы присутствуют в MATHCAD имеются встроенные процедуры: **rkfixed**, **Rkadapt**.

При этом предполагается, что пользователь должен подготовить свою задачу в виде системы ОДУ первого порядка в нормализованном виде Коши.

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = f_1(x, z_1, z_2, \dots, z_N) \\ \frac{dz_2}{dx} = f_2(x, z_1, z_2, \dots, z_N) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dz_N}{dx} = f_N(x, z_1, z_2, \dots, z_N) \\ z_1(x_0) = z_{10} \\ \dots\dots\dots \\ z_n(x_0) = z_{n0} \end{cases}$$

Для двух рассмотренных примеров покажем, как можно свести их к нормализованной системе.

**Для примера 2 из предыдущего параграфа:**

$$\begin{aligned} E \cdot (J'' \cdot y'' + 2 \cdot J' \cdot y''' + J \cdot y'''' ) &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ y''(x_0) &= y_0'' \\ y'''(x_0) &= y_0''' \end{aligned}$$

Выразим старшую производную из этого уравнения:

$$y^{(4)} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{q(x)}{E} - J^{(2)} \cdot y^{(2)} - 2 \cdot J' \cdot y^{(3)} \right)$$

Введем новые функции:

$$\begin{aligned}z_1(x) &= y(x) \\z_2(x) &= y'(x) \\z_3(x) &= y''(x) \\z_4(x) &= y'''(x)\end{aligned}$$

Тогда нормализованная система вида Коши имеет такой вид:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \frac{dz_3}{dx} = z_4 \\ \frac{dz_4}{dx} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{q(x)}{E} - J^{(2)} \cdot z_3 - 2 \cdot J' \cdot z_4 \right) \end{cases}$$

Если имеется система из нескольких дифференциальных уравнений, куда входят неизвестные функции, порядок старших производных которых равен  $k_1, k_2, \dots, k_l$ , то после преобразования этой системы к системе ОДУ первого порядка в нормализованном виде в этой системе окажется

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l \quad \text{ОДУ.}$$

**Для примера 3 из предыдущего параграфа:**

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x &= p(t) \\x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0\end{aligned}$$

Выразим старшую производную:

$$\ddot{x} = \frac{p(t) - c\dot{x} - kx}{m} \quad (2.4)$$

Введём новые неизвестные функции:

$$\begin{aligned}z_1 &= x(t) \\z_2 &= \dot{x}(t)\end{aligned}$$

Тогда уравнение можно представить в виде системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{p(t) - cz_2 - kz_1}{m} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}z_1(t_0) &= x_0 \\z_2(t_0) &= \dot{x}_0\end{aligned}$$

Используем встроенную в MATHCAD процедуру **Rkadapt** для решения систем ОДУ методом Рунге-Кутты четвёртого порядка для решения этой задачи. Документ MATHCAD представлен ниже.

$w := 5$   
 $M := 1$   
 $C := 0$   
 $P(t) := \sin(w \cdot t)$   
 $K := 1$   
 $ORIGIN := 0$

+

$$f(t, z) := \begin{bmatrix} z_1 \\ \frac{1 \cdot (P(t) - C \cdot z_1 - K \cdot z_0)}{M} \end{bmatrix} \quad zbegin := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

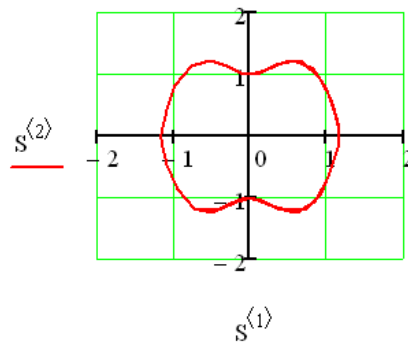
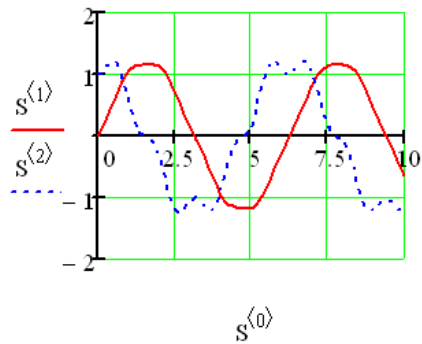
$tbegin := 0$

$tend := 10$

$h := 0.2$

$$N := \frac{tend - tbegin}{h}$$

$S := Rkadapt(zbegin, tbegin, tend, N, f)$



**При  $p(t) = \sin(w \cdot t)$  и  $w = w_{\text{собственное}}$**

$$K := 1$$

$$M := 1$$

$$C := 0$$

$$w := \sqrt{\frac{1-K}{M}}$$

$$P(t) := \sin(w \cdot t)$$

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$f(t, z) := \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \cdot \frac{(P(t) - C \cdot z_1 - K \cdot z_0)}{M} \end{bmatrix} \quad z_{\text{begin}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

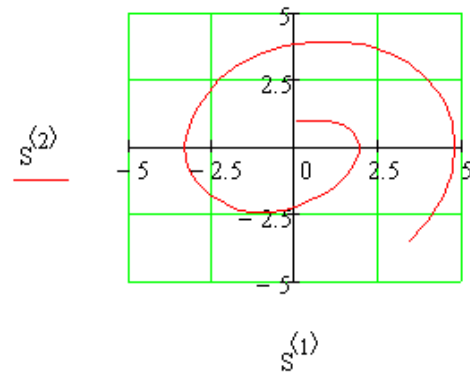
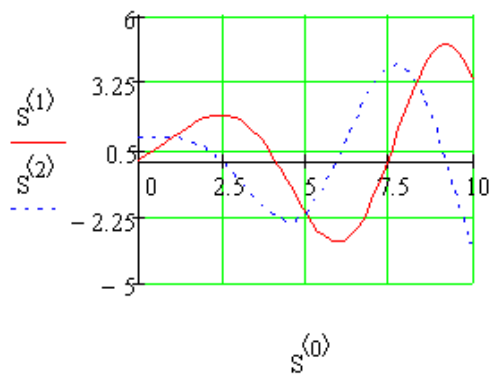
$$t_{\text{begin}} := 0$$

$$t_{\text{end}} := 10$$

$$h := 0.2$$

$$N := \frac{t_{\text{end}} - t_{\text{begin}}}{h}$$

$$S := \text{Rkadapt}(z_{\text{begin}}, t_{\text{begin}}, t_{\text{end}}, N, f)$$



**При  $p(t) = \text{const}$**



$$\overset{\text{AAAA}}{K} := 1$$

$$M := 1$$

$$\overset{\text{AAAA}}{C} := 0$$

$$w := \sqrt{\frac{1 \cdot K}{M}}$$

$$P(t) := 2$$

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$f(t, z) := \begin{bmatrix} z_1 \\ \frac{1 \cdot (P(t) - C \cdot z_1 - K \cdot z_0)}{M} \end{bmatrix}$$

$$z_{\text{begin}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

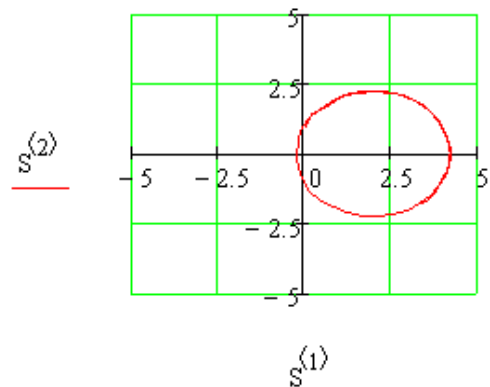
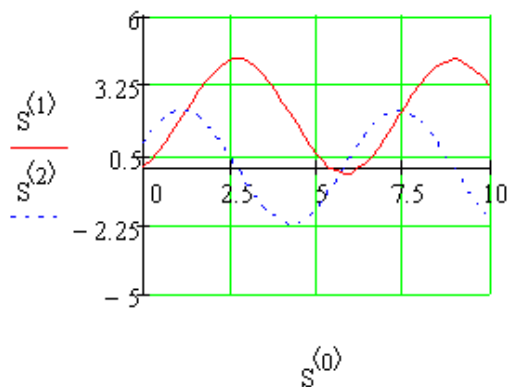
$$t_{\text{begin}} := 0$$

$$t_{\text{end}} := 10$$

$$h := 0.2$$

$$\overset{\text{AAAA}}{N} := \frac{t_{\text{end}} - t_{\text{begin}}}{h}$$

$$\overset{\text{AAA}}{S} := \text{Rkadapt}(z_{\text{begin}}, t_{\text{begin}}, t_{\text{end}}, N, f)$$



**При  $p(t) = t$**

$$K := 1$$

$$M := 1$$

$$C := 0$$

$$w := \sqrt{\frac{1-K}{M}}$$

$$P(t) := t$$

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$f(t, z) := \begin{bmatrix} z_1 \\ \frac{1 \cdot (P(t) - C \cdot z_1 - K \cdot z_0)}{M} \end{bmatrix}$$

$$z_{\text{begin}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

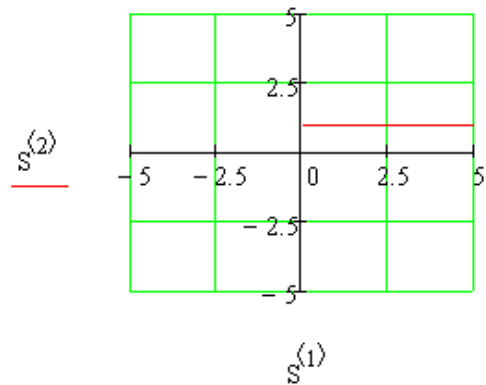
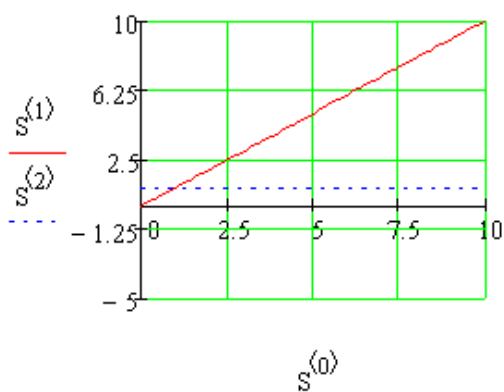
$$t_{\text{begin}} := 0$$

$$t_{\text{end}} := 10$$

$$h := 0.2$$

$$N := \frac{t_{\text{end}} - t_{\text{begin}}}{h}$$

$$S := \text{Rkadapt}(z_{\text{begin}}, t_{\text{begin}}, t_{\text{end}}, N, f)$$



**При очень маленьком C:**

$$K := 1$$

$$M := 1$$

$$C := 0.0001$$

$$w := \sqrt{\frac{1 \cdot K}{M}}$$

$$P(t) := 0$$

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$f(t, z) := \begin{bmatrix} z_1 \\ \frac{1 \cdot (P(t) - C \cdot z_1 - K \cdot z_0)}{M} \end{bmatrix}$$

$$z_{\text{begin}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

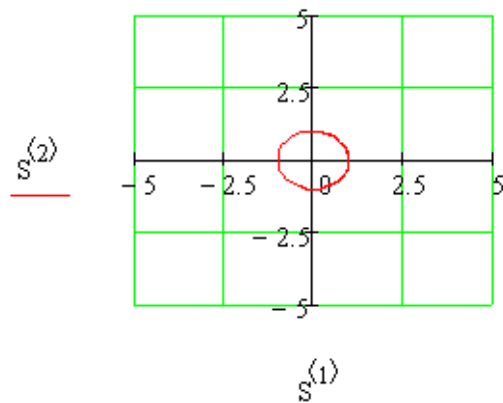
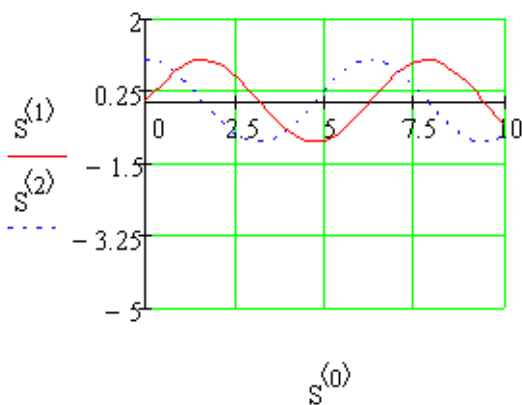
$$t_{\text{begin}} := 0$$

$$t_{\text{end}} := 10$$

$$h := 0.2$$

$$N := \frac{t_{\text{end}} - t_{\text{begin}}}{h}$$

$$S := \text{Rkadapt}(z_{\text{begin}}, t_{\text{begin}}, t_{\text{end}}, N, f)$$



**При очень большом C:**

$$K := 1$$

$$M := 1$$

$$C := 100000$$

$$w := \sqrt{\frac{1 \cdot K}{M}}$$

$$P(t) := 0$$

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$f(t, z) := \begin{bmatrix} z_1 \\ \frac{1 \cdot (P(t) - C \cdot z_1 - K \cdot z_0)}{M} \end{bmatrix}$$

$$z_{\text{begin}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

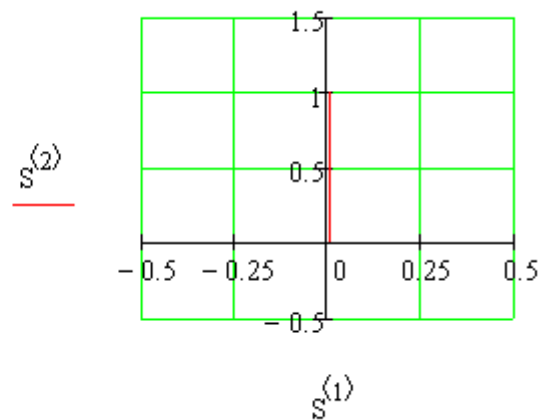
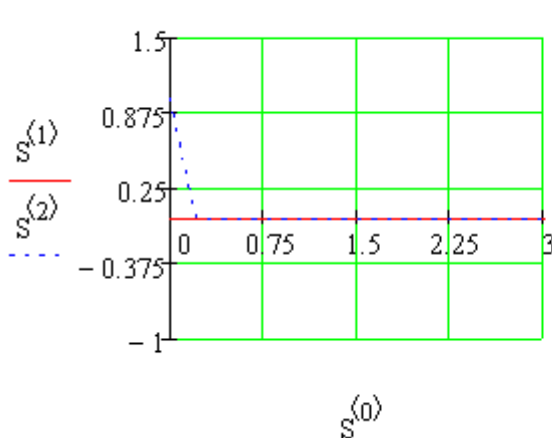
$$t_{\text{begin}} := 0$$

$$t_{\text{end}} := 10$$

$$h := 0.2$$

$$N := \frac{t_{\text{end}} - t_{\text{begin}}}{h}$$

$$S := \text{Rkadapt}(z_{\text{begin}}, t_{\text{begin}}, t_{\text{end}}, N, f)$$



### [Получение уравнений математической модели механической системы с сосредоточенными параметрами для в общем случае](#)

Большое количество механических систем при выполнении предположений о том, что массы сосредоточены в отдельных точках, а податливыми являются лишь некоторые элементы (остальные являются

бесконечно жёсткими) можно представить состоящими из разнотипных элементов, которые попарно не пересекаются. Такими элементами являются:

Упругие элементы (пружины)

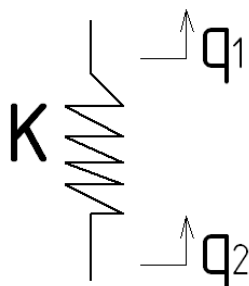


Рисунок 2.5. Упругий элемент

Диссипативный элемент (демпфер)

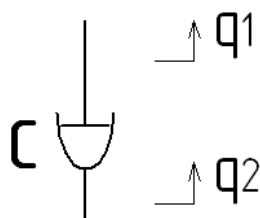


Рисунок 2.6. Демпфирующий элемент

Инерционный элемент (масса)

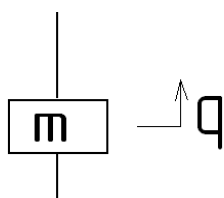
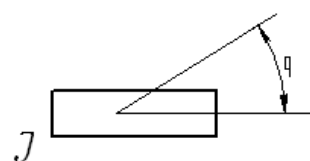
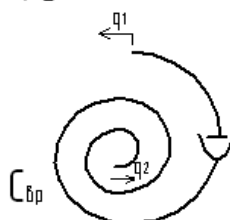
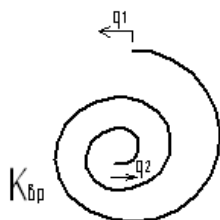


Рисунок 2.7. Инерционный элемент

Представленные схемы элементов соответствуют поступательному движению. Аналогичные же элементы могут быть введены и для случая вращательного движения:

- 1). крутильная пружина    2). крутильный демпфер    3). момент инерции



### Рисунок 2.8. Аналогичные для случая вращательного движения

Элемент типа пружина накапливает потенциальную энергию. При этом будем считать, что при наличии перемещений концов  $q_1, q_2$ , когда удлинение составляет

$$\Delta = q_1 - q_2,$$

его действия на систему описывают силы упругости, пропорциональные удлинению:

$$F_y = k \cdot \Delta.$$

При этом необходимо ввести правило знаков: будем считать, что удлинению пружины соответствует положительная сила упругости.

На элементе типа демпфер механическая энергия преобразуется в тепловую. При этом считают, что сила демпфирования пропорциональна скорости удлинения

$$F_\delta = c \cdot \dot{\Delta} = c \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2).$$

Элемент типа масса «накапливает» кинетическую энергию. Сила инерции при этом имеет выражение

$$F_{инерции} = m \cdot \ddot{q}.$$

В зависимости от природы упругих элементов и демпферов соответствующие выражения сил упругости и затухания могут иметь и нелинейный вид.

Выражение кинетической энергии:

- При поступательном движении:  $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$
- При вращательном движении:  $T = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\omega}^2.$

На рисунках линейные и угловые перемещения обозначены буквой  $q$ .

Как известно, для получения уравнений движения такой системы могут быть использованы уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = \overline{1, n}$$

$q_i = q_i(t)$  - перемещение по  $i$ -той обобщённой степени свободы;

$T$  – кинетическая энергия системы;

$Q_i = Q_i^* - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$  - обобщённая сила, действующая по  $i$ -тому направлению.

$\Phi$  – диссипативная функция системы;

$\Pi$  – потенциальная энергия системы;

$Q_i^*$  - внешняя сила, действующая по  $i$ -тому обобщённому направлению.

Таким образом, последовательность действий для записей уравнений движения механической системы с сосредоточенными параметрами следующая:

- необходимо мысленно разбить систему на попарно непересекающиеся элементы стандартного типа (формируется расчетная схема системы);
- вводятся обобщенные перемещения  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Эти обобщенные перемещения должны полностью описывать положение системы в произвольный момент времени и никакое из них не должно выражаться через остальные (независимые);
- при заданных величинах свободных перемещений записываются выражения для абсолютных перемещений инерционных элементов;
- записывают выражения для удлинений упругих элементов;
- записывают выражения для скоростей удлинений диссипативных элементов;
- составляют выражение для кинетической энергии  $T$ , диссипативной функции  $\Phi$  и потенциальной энергии  $\Pi$  всей системы в целом;
- вычисляют частные производные, присутствующие в уравнении Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}; \frac{\partial T}{\partial q_i}; \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}; \frac{\partial \Pi}{\partial q_i};$$

- получают выражение для величины  $Q_i^*$ . Для этого
  - изображают все активные силы, действующие на систему при заданных положительных направлениях обобщенных перемещений; вычислить значения работы этих сил на заданных перемещениях;
  - полагают:
 
$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0,$$
 то есть задают возможные перемещения только по первому направлению, а по всем остальным запрещают. На заданном возможном перемещении вычисляют работу всех активных сил и реакций связей. Если в полученном выражении привести подобные и представить его в виде  $\delta q_1 \cdot (\dots)$ , то коэффициент при этом  $\delta q_1$  будет  $Q_1^*$ .
  - теперь полагают:

$\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$ . Выполняем то же самое и получаем выражение в следующем виде  $\delta q_2 \cdot (\dots)$ , коэффициент при  $\delta q_2$  будет  $Q_2^*$ .

И так далее для всех степеней свободы.

### Пример 1. Колебательная двухмассовая система

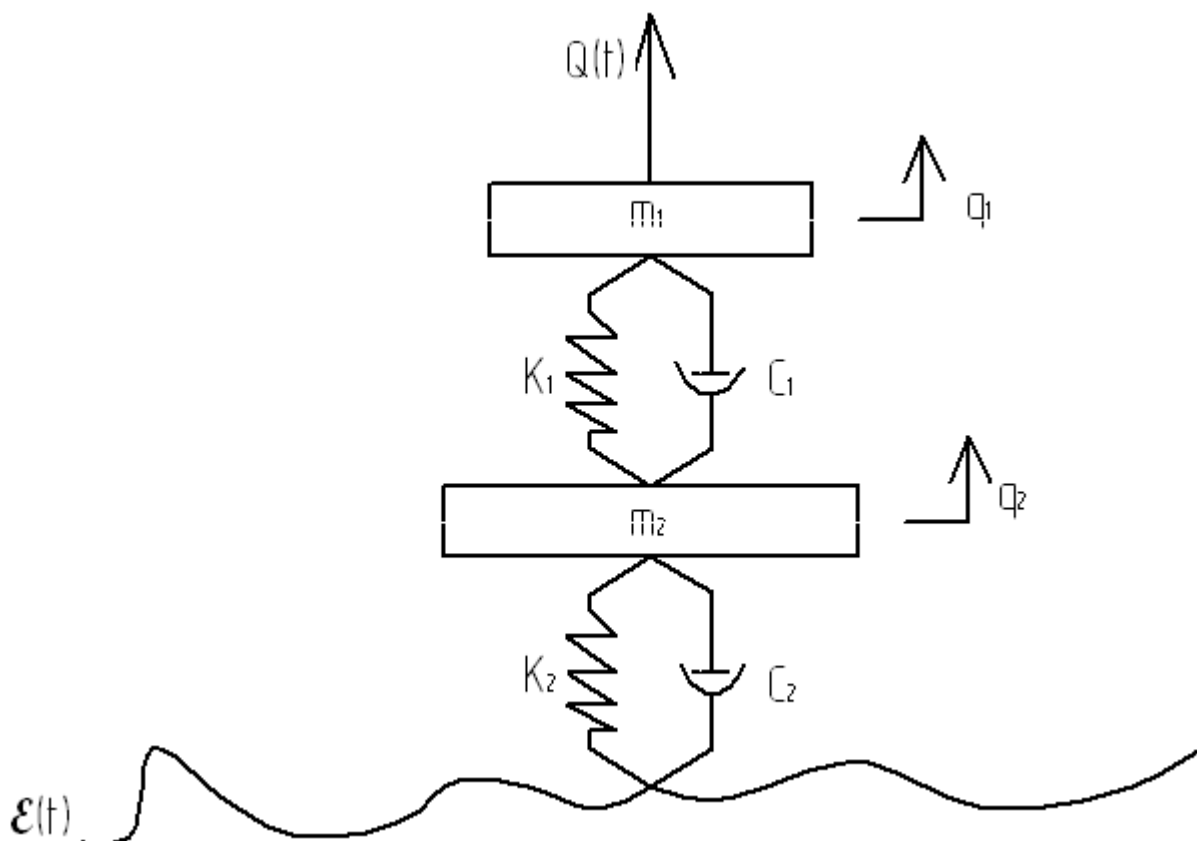


Рисунок 2.9. Колебательная двухмассовая система

Получим уравнения движения для двухмассовой системы. Движение происходит по дороге со скоростью  $v$ .

$\xi(t)$  – закон дорожного возмущения (кинематическое возмущение).

$m_1, m_2$  – массы;

$k_1, k_2$  – жесткости упругих элементов;

$c_1, c_2$  – характеристики демпфирующих элементов.

Введены обобщенные перемещения

$q_1 = q_1(t)$  – смещение верхней массы относительно дороги.

$q_2 = q_2(t)$  – смещение нижней массы относительно дороги.

При этом будем считать, что эти смещения соответствуют недеформированному состоянию пружины. Очевидно, что введенных обобщенных степеней достаточно для однозначного определения



положения системы в любой момент времени. При этом ни одно из них не выражается через другое.

Составим выражения для абсолютных перемещений:

$$u_1(t) = q_1(t)$$

$$u_2(t) = q_2(t)$$

Запишем уравнения для удлинений пружин:

$$\Delta_2 = q_2 - \xi(t)$$

$$\Delta_1 = q_1 - q_2$$

Запишем скорости удлинений:

$$\dot{\Delta}_2 = \dot{q}_2 - \dot{\xi}(t)$$

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2$$

Записываем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{u}_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{q}_2^2$$

Записываем выражение для диссипативной функции:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \dot{\Delta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot \dot{\Delta}_2^2 = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{\xi})^2$$

Выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \Delta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot \Delta_2^2 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (q_2 - \xi)^2$$

Выражаем  $Q_1^*$ :

$$A_1 = Q(t) \cdot \delta q_1 \text{ поэтому } Q_1^* = Q(t)$$

$$Q_2^* = 0$$

Вычислим нужные частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \cdot \dot{q}_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \cdot \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = k_1 \cdot (q_1 - q_2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -k_1 \cdot (q_1 - q_2) + k_2 \cdot (q_2 - \xi)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} = c_1 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} = -c_1 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + c_2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{\xi})$$

Окончательно система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{q}_1 = Q(t) - c_1 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - k_1 \cdot (q_1 - q_2) \\ m_2 \cdot \ddot{q}_2 = c_1 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - c_2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{\xi}) + k_1 \cdot (q_1 - q_2) - k_2 \cdot (q_2 - \xi) \end{cases}$$

## Пример 2. Система с тремя степенями свободы

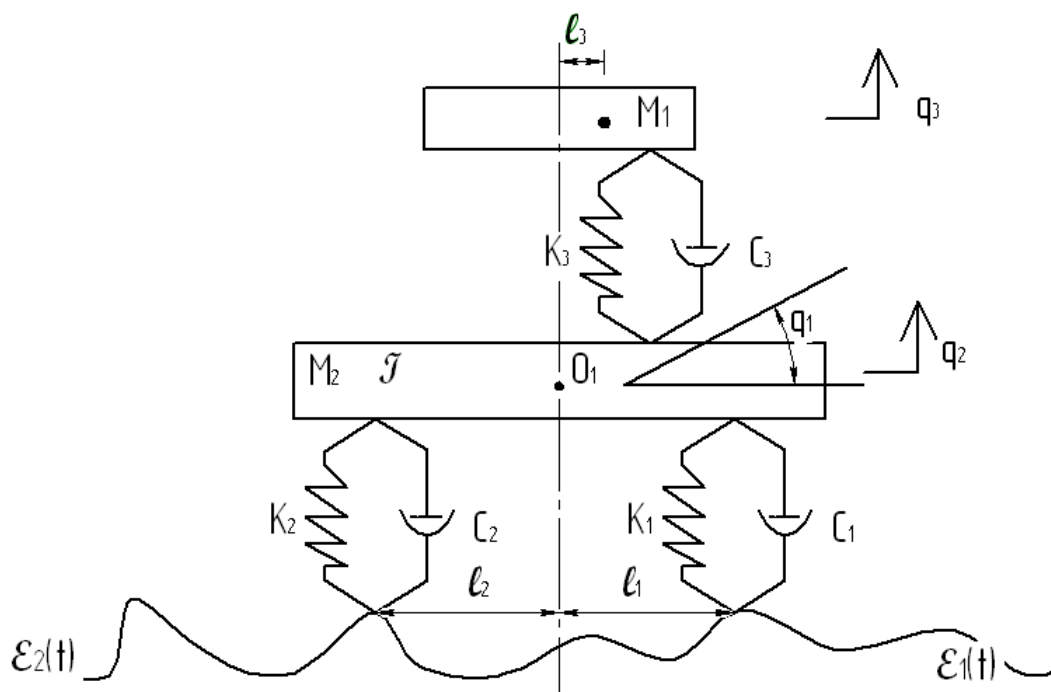


Рисунок 2.10. Система с тремя степенями свободы

$q_1 = q_1(t)$  - перемещение нижней платформы относительно грунта;  
 $q_2 = q_2(t)$  - угол поворота платформы вокруг точки  $O_1$  относительно грунта;

$q_3 = q_3(t)$  - перемещение массы  $M_1$  относительно точки крепления к платформе.

Абсолютные перемещения:

$$u_1 = q_1$$

$$u_2 = q_2$$

$$u_3 = q_1 + q_2 \cdot l_3 + q_3$$

$$\dot{u}_1 = \dot{q}_1$$

$$\dot{u}_2 = \dot{q}_2$$

$$\dot{u}_3 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_3 + \dot{q}_3$$

Удлинения пружин и скорости удлинений:

$$k_3: \Delta_3 = q_3$$

$$\dot{\Delta}_3 = \dot{q}_3$$

$$k_1: \Delta_1 = q_1 + q_2 \cdot l_1 - \xi_1(t)$$

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_1 - \dot{\xi}_1(t)$$

$$k_2: \Delta_2 = q_1 - q_2 \cdot l_2 - \xi_2(t)$$

$$\dot{\Delta}_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cdot l_2 - \dot{\xi}_2(t)$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_3 + \dot{q}_3)^2$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot \Delta_1^2 + k_2 \cdot \Delta_2^2 + k_3 \cdot \Delta_3^2)$$

Для диссипативной функции:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot (c_1 \cdot \dot{\Delta}_1^2 + c_2 \cdot \dot{\Delta}_2^2 + c_3 \cdot \dot{\Delta}_3^2)$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = \overline{1, n}$$

$$i = \overline{1, n}, n=3.$$

Вычислим нужные частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = M_2 \cdot \dot{q}_1 + M_1 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_3 + \dot{q}_3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = J \cdot \dot{q}_2 + M_1 \cdot l_3 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_3 + \dot{q}_3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = M_1 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_3 + \dot{q}_3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = k_1 \cdot (q_1 + q_2 \cdot l_1 - \xi_1(t)) + k_2 \cdot (q_1 - q_2 \cdot l_2 - \xi_2(t))$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = k_1 \cdot l_1 \cdot (q_1 + q_2 \cdot l_1 - \xi_1(t)) - k_2 \cdot l_2 \cdot (q_1 - q_2 \cdot l_2 - \xi_2(t))$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = k_3 \cdot q_3$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} = c_1 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_1 - \dot{\xi}_1(t)) + c_2 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cdot l_2 - \dot{\xi}_2(t))$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} = c_1 \cdot l_1 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_1 - \dot{\xi}_1(t)) - l_2 \cdot c_2 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cdot l_2 - \dot{\xi}_2(t))$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_3} = c_3 \cdot \dot{q}_3$$

Окончательно запишем систему трёх ДУ второго порядка:

$$\begin{cases} M_2 \cdot \ddot{q}_1 + M_1 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cdot l_3 + \ddot{q}_3) = -k_1 \cdot (q_1 + q_2 \cdot l_1 - \xi_1(t)) - k_2 \cdot (q_1 - q_2 \cdot l_2 - \xi_2(t)) - \\ -c_1 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_1 - \dot{\xi}_1(t)) - c_2 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cdot l_2 - \dot{\xi}_2(t)) \\ J \cdot \ddot{q}_2 + M_1 \cdot l_3 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cdot l_3 + \ddot{q}_3) = -k_1 \cdot l_1 \cdot (q_1 + q_2 \cdot l_1 - \xi_1(t)) + k_2 \cdot l_2 \cdot (q_1 - q_2 \cdot l_2 - \xi_2(t)) - \\ -c_1 \cdot l_1 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_1 - \dot{\xi}_1(t)) + l_2 \cdot c_2 \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cdot l_2 - \dot{\xi}_2(t)) \\ M_1 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cdot l_3 + \ddot{q}_3) = -k_3 \cdot q_3 - c_3 \cdot \dot{q}_3 \end{cases} \quad (2.5)$$

Эта система должна быть снабжена шестью начальными условиями:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= q_{10} \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_{10} \\ q_2(0) &= q_{20} \\ \dot{q}_2(0) &= \dot{q}_{20} \\ q_3(0) &= q_{30} \\ \dot{q}_3(0) &= \dot{q}_{30} \end{aligned}$$

Приведём пример возможного упрощения уравнения.

Рассмотрим ситуацию, когда верхняя масс значительно меньше нижней:

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{M_2} &\ll 1 & (2.6) \\ \frac{M_1 \cdot l_3}{J} &\ll 1 \end{aligned}$$

Тогда после деления первого уравнения на  $M_2$ , а второго уравнения на  $J$ , в левой части образуются слагаемые с коэффициентом вида (2.6), которыми можно пренебречь по сравнению со слагаемыми, содержащими  $\ddot{q}_1$  в первом уравнении и  $\ddot{q}_2$  - во втором уравнении. Тогда уравнения, аппроксимирующее исходную систему будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{k_1}{M_2} \cdot (q_1 + q_2 \cdot l_1 - \xi_1(t)) - \frac{k_2}{M_2} \cdot (q_1 - q_2 \cdot l_2 - \xi_2(t)) - \\ -\frac{c_1}{M_2} \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_1 - \dot{\xi}_1(t)) - \frac{c_2}{M_2} \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cdot l_2 - \dot{\xi}_2(t)) \\ \ddot{q}_2 = -\frac{k_1 \cdot l_1}{J} \cdot (q_1 + q_2 \cdot l_1 - \xi_1(t)) + \frac{k_2 \cdot l_2}{J} \cdot (q_1 - q_2 \cdot l_2 - \xi_2(t)) - \\ -\frac{c_1 \cdot l_1}{J} \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_1 - \dot{\xi}_1(t)) + \frac{l_2 \cdot c_2}{J} \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cdot l_2 - \dot{\xi}_2(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Как видно из системы уравнений (2.7)  $q_1$  и  $q_2$  не зависят от  $q_3$ , т.е. движение платформы не зависит от движения груза на ней, поэтому для получения закона движения груза  $q_3$ , можно предварительно решить систему (2.7), а затем подставить эти известные функции в последнее уравнение системы (2.5) и решить его относительно  $q_3$ .

Сведём систему (2.5) к системе ОДУ 1-го порядка в каноническом виде Коши. Очевидно, (2.5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \dot{q}_1 + a_{12} \cdot \dot{q}_2 + a_{13} \cdot \dot{q}_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot \dot{q}_1 + a_{22} \cdot \dot{q}_2 + a_{23} \cdot \dot{q}_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot \dot{q}_1 + a_{32} \cdot \dot{q}_2 + a_{33} \cdot \dot{q}_3 = b_3 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= M_1 + M_2 \\ a_{12} &= M_1 \cdot l_3 \\ a_{13} &= M_1 \end{aligned}$$

Здесь  $b_1, b_2, b_3$  - правые части системы (4), например

$$b_1 = -k_1 \cdot (q_1 + l_1 \cdot q_2 - \xi_1(t)) - \dots$$

Как видно, если формально считать  $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2$  и  $\ddot{q}_3$  неизвестными, то (4) представляет систему линейных алгебраических уравнений. Её можно решить, например, по формуле Крамера:

$$\ddot{q}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \ddot{q}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \ddot{q}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и так далее.}$$

Введем новые функции

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 \\ z_2 &= \dot{q}_1 \\ z_3 &= q_2 \\ z_4 &= \dot{q}_2 \\ z_5 &= q_3 \\ z_6 &= \dot{q}_3. \end{aligned}$$

Тогда эквивалент системы (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{dz_3}{dt} = z_4 \\ \frac{dz_4}{dt} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \frac{dz_5}{dt} = z_6 \\ \frac{dz_6}{dt} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases}$$

Начальные условия теперь запишутся в виде:

$$\begin{aligned} z_1(0) &= q_{10} \\ z_2(0) &= \dot{q}_{10} \\ z_3(0) &= q_{20} \\ z_4(0) &= \dot{q}_{20} \\ z_5(0) &= q_{30} \\ z_6(0) &= \dot{q}_{30} \end{aligned}$$

### Шаговые методы решения задачи Коши

Пусть интервал наблюдений  $(x_0, x_n)$  разбит на подинтервалы с равным шагом (рисунок 2.11).

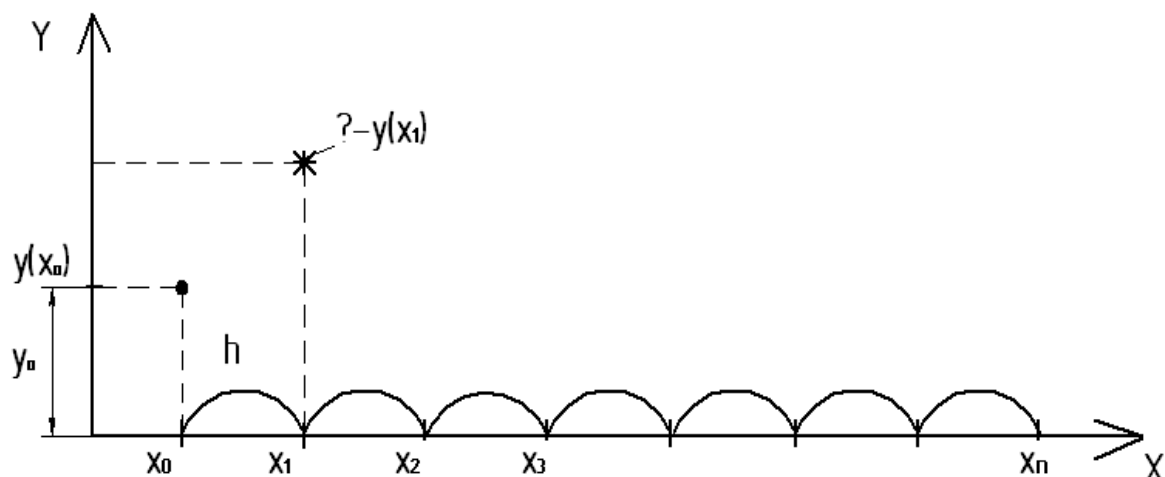


Рисунок 2.11. Интервал наблюдений, разбитый на подинтервалы

Предположим, что нам известно решение ДУ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.9)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.10)$$

Если каким-то способом удастся построить решение в точке  $x$ , на конце шага  $h$ , то используя этот же способ для последующих шагов, мы найдем решение и в остальных узлах. Если решается не одно ДУ, а их система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_k) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_k) \end{cases} \quad (2.11)$$

То можно использовать такой же способ для решения всех уравнений на каждом шаге. Таким образом решение системы (2.11) с начальными условиями:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{10} \\ &\dots\dots\dots \\ y_k(x_0) &= y_{k0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

сводится к проблеме решения одного ДУ (2.9) с начальными условиями (2.10) на отдельном шаге  $h$ .

Выполним интегрирование обеих частей ДУ (2.9) на интервале  $[x_0, x_0 + h]$ .

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

$$y(x) \Big|_{x_0}^{x_0+h} = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y \quad (5)$$

где  $\Delta y = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$ .

(5) – точное равенство. Нижний индекс здесь означает номер текущей точки на интервале наблюдения.

Приближенные вычисления начинаются, только тогда, когда мы заменяем значение интеграла его приближенным значением.

Разные методы интегрирования ОДУ различаются формулами для вычисления интеграла.

### [Метод Эйлера решения задачи Коши](#)

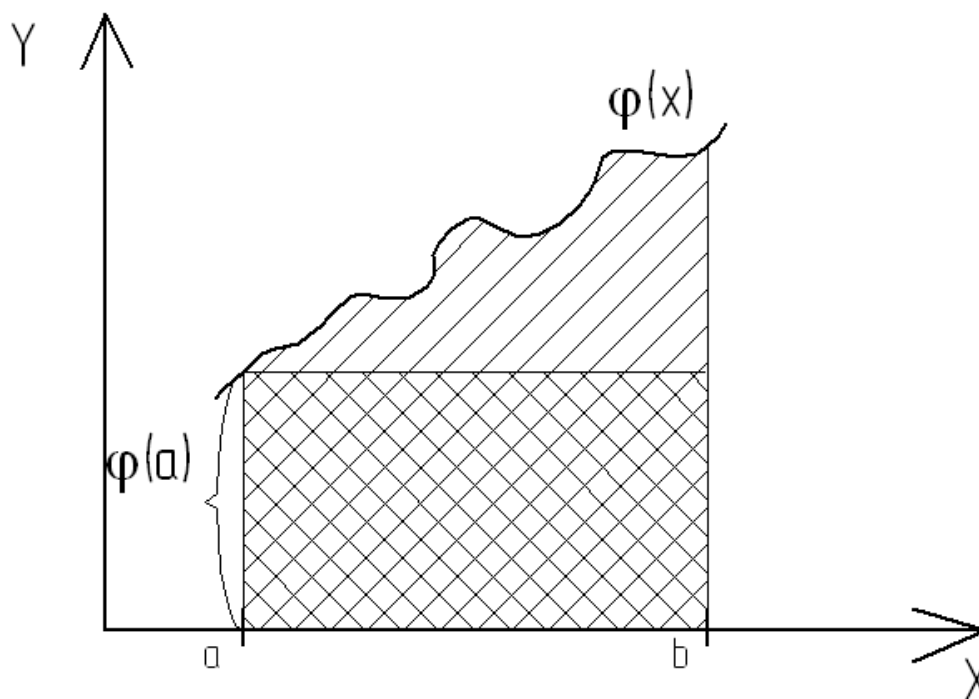


Рисунок 2.12. Приближенное нахождение интеграла по формуле левых прямоугольников.

$$\int_a^b \phi(x) dx \approx \phi(a) \cdot (b - a)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \approx f(x_0) \cdot h$$

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0) \cdot h$$

То есть мы приближенно заменили  $\Delta y \approx \tilde{\Delta} y$ . Здесь  $\tilde{\Delta} y = f(x_0) \cdot h$   
Тогда формула метода Эйлера для произвольного шага примет вид:

$$y_{i+1} \approx y_i + f(x_i) \cdot h$$

Заметим, что можно следующим образом интерпретировать формулу Эйлера.

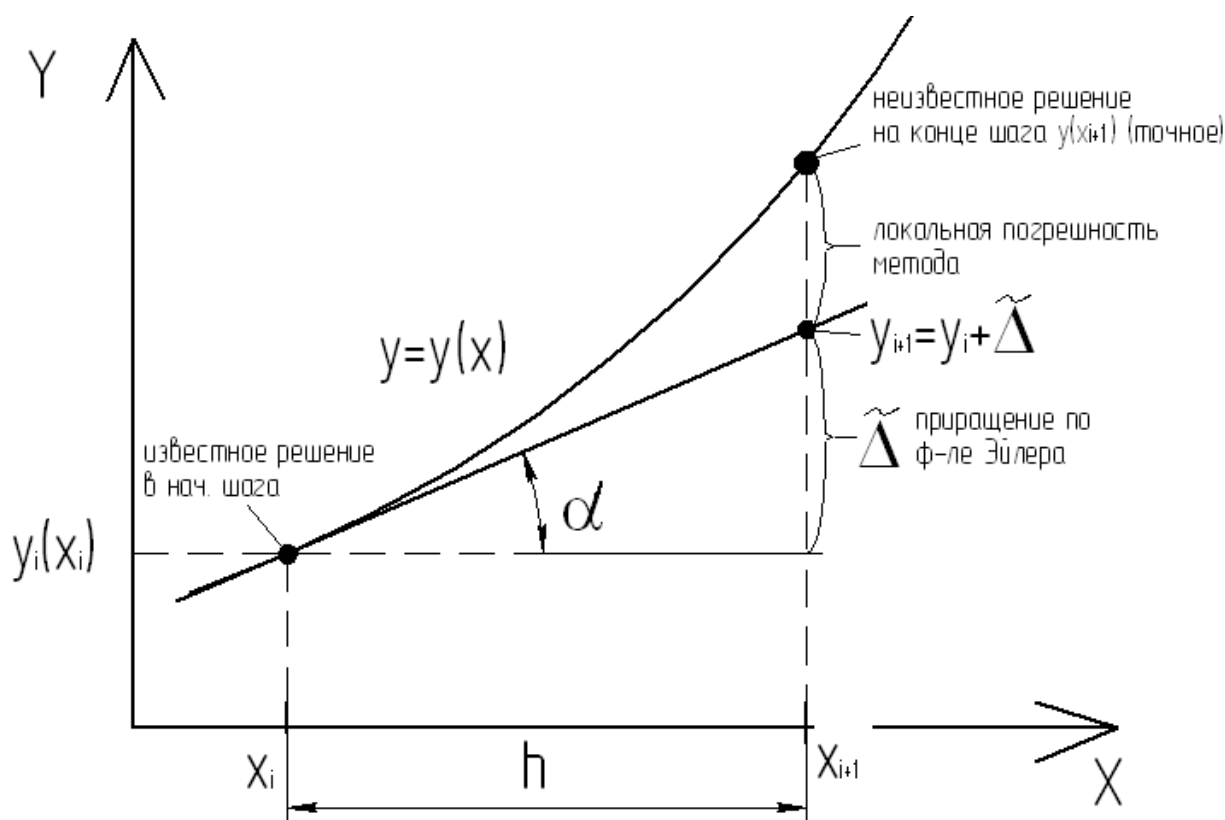


Рисунок 2.13. Графическая интерпретация метода Эйлера

$$tg(\alpha) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i}$$

Пусть у нас имеется решаемое ДУ:



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.12)$$

Из ДУ (2.12)

$$tg(\alpha) = f(x, y)|_{x=x_i} = f_i$$

$$\tilde{\Delta}y = h \cdot tg(\alpha)$$

Локальная погрешность метода:  $(y(x_{i+1}) - y_{i+1})$ , где  $y(x_{i+1})$  - точно неизвестное, а  $y_{i+1}$  - вычислено по приближенной формуле.

**Локальная погрешность** – отклонение приближенного значения от точного на данном шаге интегрирования.

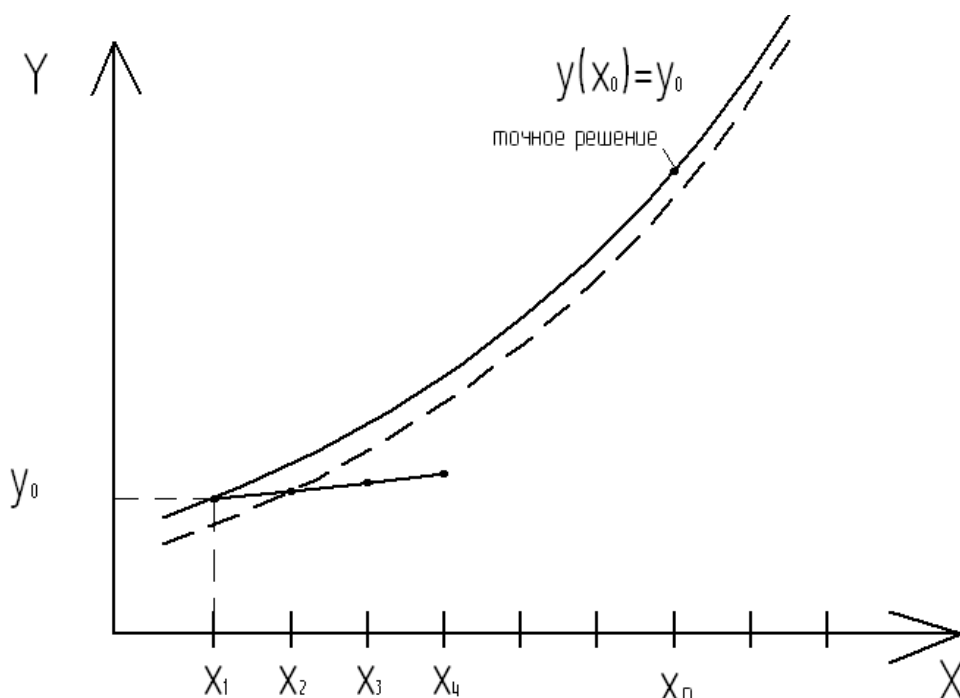


Рисунок 2.14. Иллюстрация «перескакивания» из одной интегрируемой прямой на другую на каждом шаге.

Как видно, для некоторых видов ДУ может возникнуть ситуация, когда ошибка будет бесконечно нарастать при продвижении по независимой переменной. Такой процесс носит название неустойчивости численного решения. Например, если решением ДУ является  $y = c \cdot e^x$ , то погрешность, допущенная на каком-либо шаге, будет возрастать в дальнейшем по экспоненте. Для уравнения  $\frac{dy}{dx} = -y$ , решением которого является  $y = c \cdot e^{-x}$ , погрешность будет стремиться к нулю.

Таким образом следует различать неустойчивость решения, связанную с природой самого ДУ, и неустойчивость, связанную с

численным методом решения. То есть может оказаться так, что несмотря на то, что само ДУ «устойчиво», численный метод приносит такую ошибку, что приближенное решение отклоняется от точного при  $x \rightarrow \infty$  на бесконечно большую величину.

$$y_{i+1} \approx y_i + f(x_i) \cdot h$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i) \cdot h + O(h^{k+1}),$$

где  $O(h^{k+1})$  - локальная погрешность метода,

Число  $k$  называют порядком метода интегрирования.

Если  $h=0,001$ ,  $k=1$ , то

$$O(h^{k+1}) = 0,01^2$$

Чем больше  $k$ , тем меньше локальная погрешность, тем точнее метод.

Метод Эйлера имеет локальную погрешность  $O(h^2)$ ;  $k=1$  – метод 1-го порядка точности.

### Усовершенствованный метод Эйлера решения задачи Коши

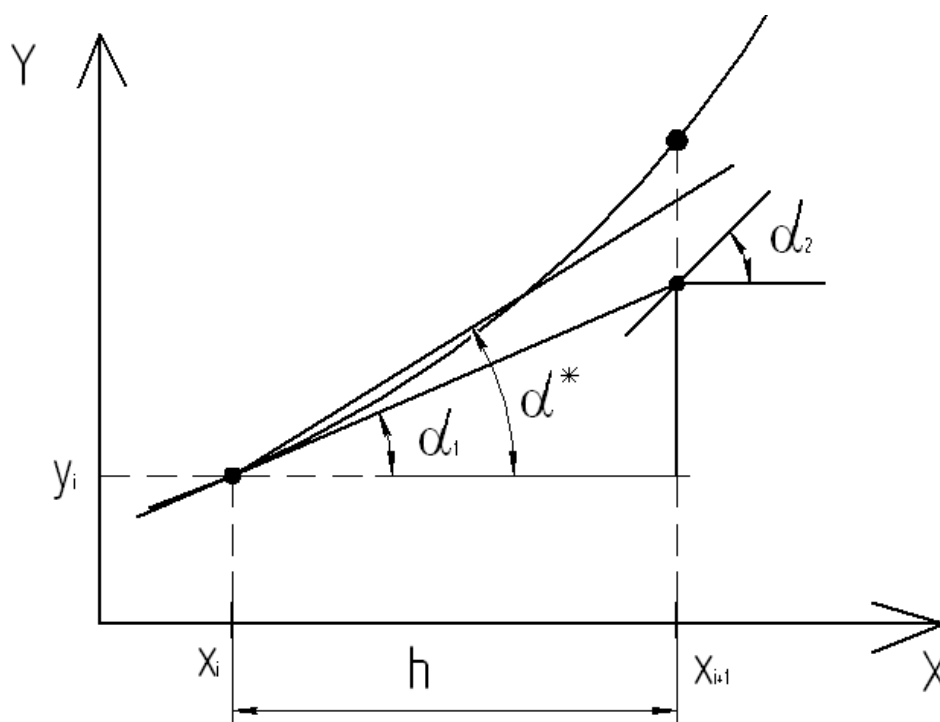


Рисунок 2.15. Усовершенствованный метод Эйлера. Графическая интерпретация

Основная идея этого метода заключается в том, что результирующий шаг будет выполняться под уточненным углом наклона  $\alpha^*$ , удовлетворяющим соотношению:

$$\operatorname{tg}(\alpha^*) = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{tg}(\alpha_1) + \operatorname{tg}(\alpha_2)),$$

где  $\alpha_1$  - угол, под которым наклонено решение в начальной точке интервала,

$\alpha_2$  - приближенный угол, под которым наклонено решение в конечной точке интервала.

Последовательность шагов при реализации усовершенствованного метода Эйлера:

1. По формуле Эйлера вычислить

$$y_{i+1} \approx y_i + f(x_i) \cdot h$$

2. Используя правую часть ДУ, вычислить

$$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

3. Вычислить

$$\operatorname{tg}(\alpha^*) = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{tg}(\alpha_1) + \operatorname{tg}(\alpha_2))$$

$$f^* = \frac{1}{2} \cdot (f_i + \tilde{f}_{i+1})$$

4. Вернувшись в начало шага, выполнить окончательный расчет для решения на конце шага

$$y_{i+1} \approx y_i + f_i^* \cdot h.$$

Для усовершенствованного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + f_i^* \cdot h + O(h^3),$$

$k=2$  – это метод 2-го порядка точности. Эта точность достигается двукратным вычислением правой части ДУ.

### Модифицированный метод Эйлера решения задачи Коши

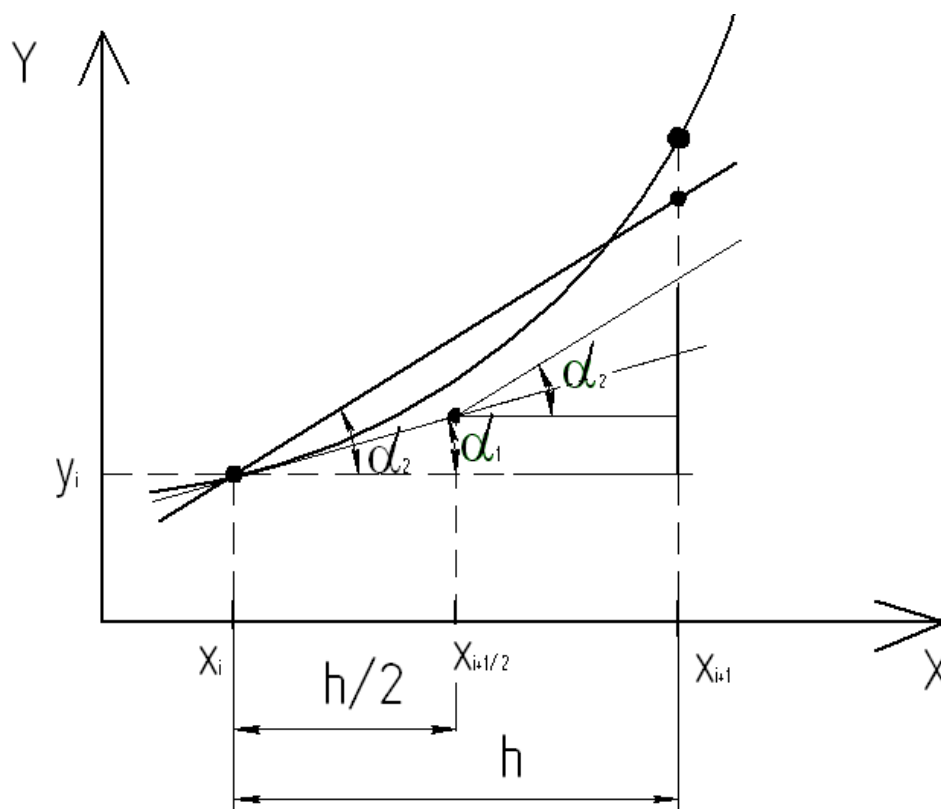


Рисунок 2.16. Модифицированный метод Эйлера. Графическая интерпретация

Последовательность шагов при реализации модифицированного метода Эйлера:

1. В этом методе сначала выполняется поиск решения по методу Эйлера на половине шага:

$$y_{i+\frac{1}{2}} \approx y_i + f_i \cdot \frac{h}{2}$$

2. Затем вычисляется приближенное значение производной в середине интервала

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* \approx f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

3. И только после этого, вернувшись в начало шага, выполняется окончательный расчет для решения на конце шага

$$y_{i+1} \approx y_i + f_{i+\frac{1}{2}}^* \cdot h.$$

Этот метод имеет локальную погрешность  $O(h^3)$ ,  $k=2$ , это метод 2-го порядка точности.

## Формулы для приближенного решения задачи Коши методами Рунге-Кутты

Как отмечено выше, все приближенные формулы для решения ОДУ имеют вид

$$y_{i+1} \approx y_i + \tilde{\Delta}y$$

и отличаются лишь вычислением  $\tilde{\Delta}y$ .

Заметим, что для всех формул Рунге-Кутты необходимо вычислять следующие значения:

$$\phi_0 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$\phi_1 = h \cdot f(x_i + \alpha_1 \cdot h, y_i + \beta_{10} \cdot \phi_0)$$

$$\phi_2 = h \cdot f(x_i + \alpha_2 \cdot h, y_i + \beta_{20} \cdot \phi_0 + \beta_{21} \cdot \phi_1)$$

.....

$$\phi_q = h \cdot f(x_i + \alpha_q \cdot h, y_i + \beta_{q0} \cdot \phi_0 + \beta_{q1} \cdot \phi_1 + \dots + \beta_{q(q-1)} \cdot \phi_{q-1})$$

Из этих величин составить линейную комбинацию, аппроксимирующую «добавку»  $\tilde{\Delta}$

$$\tilde{\Delta}y = A_0 \cdot \phi_0 + A_1 \cdot \phi_1 + \dots + A_q \cdot \phi_q$$

Приведем формулы Рунге-Кутта 2-го порядка точности.

Для метода 2-го порядка точности константы  $A, \alpha, \beta$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 \cdot \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ A_1 \cdot \beta_{10} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Это системы трех уравнений относительно четырех неизвестных. Она имеет бесконечное множество решений. Если

$$A_1 = \frac{1}{2} \left( A_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = 1, \beta_{10} = \frac{1}{2} \right), \text{ то}$$

$$\tilde{\Delta}y = \frac{1}{2} \cdot (\phi_0 + \phi_1).$$

$$\text{Для } A_1 = 1, A_0 = 0, \beta_{10} = \frac{1}{2}:$$

$$\tilde{\Delta}y = \phi_1.$$

Эти формулы соответствуют формулам усовершенствованного и модифицированного методов Эйлера. Значит эти методы являются частными случаями методов Рунге-Кутты.

### Методы 4-го порядка

Чаще всего используют следующий метод четвертого порядка:

$$\tilde{\Delta}y = \frac{1}{6} \cdot (\phi_0 + 2 \cdot \phi_1 + 2 \cdot \phi_2 + \phi_3)$$

$$\begin{aligned}\phi_0 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\ \phi_1 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\phi_0}{2}\right) \\ \phi_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\phi_1}{2}\right) \\ \phi_3 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + \phi_2)\end{aligned}$$

Приведем возможную процедуру для реализации последних формул в среде MATCAD. Построим её так, чтобы список её параметров соответствовал списку параметров функций встроенных функций **rkfixed**, **Rkadapt**.

```

Rgk(y0,t0,t1,N,f) :=
  z<sup>0</sup> ← y0
  h ← (t1 - t0) / N
  x ← t0
  h2 ← h / 2
  for i ∈ 0..(N - 1)
    rez<sub>0</sub>,i ← x
    s0 ← h·f(x,z<sup>i</sup>)
    s1 ← h·f(x + h2,z<sup>i</sup> + s0 / 2)
    s2 ← h·f(x + h2,z<sup>i</sup> + s1 / 2)
    s3 ← h·f(x + h,z<sup>i</sup> + s2)
    x ← x + h
    z<sup>i+1</sup> ← z<sup>i</sup> + 1/6·(s0 + s1 + s2 + s3)
  for j ∈ 1..length(y0)
    for i ∈ 0..(N - 1)
      rez<sub>j</sub>,i ← z<sub>j-1</sub>,i
  rez<sup>T</sup>

```

Для того, чтобы переделать её для любого другого метода, достаточно изменить в ней только несколько строк.

Другой метод четвертого порядка имеет следующие формулы:

$$\tilde{\Delta}y = \frac{1}{8} \cdot (\phi_0 + 3 \cdot \phi_1 + 3 \cdot \phi_2 + \phi_3)$$

$$\phi_0 = h \cdot f(x, y)$$

$$\phi_1 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{\phi_0}{3}\right)$$

$$\phi_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{3}, y - \frac{\phi_0}{3} + \phi_1\right)$$

$$\phi_3 = h \cdot f(x + h, y + \phi_0 - \phi_1 + \phi_2)$$

Метод 3-го порядка:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 \cdot \alpha_1 + A_2 \cdot \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ A_1 \cdot \alpha_1^2 + A_2 \cdot \alpha_2^2 = \frac{1}{3} \\ A_2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_{21} = \frac{1}{6} \\ \beta_{20} + \beta_{21} = \alpha_2 \\ \beta_{10} = \alpha_1 \end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}y = \frac{1}{6} \cdot (\phi_0 + 4 \cdot \phi_1 + \phi_2)$$

$$\phi_0 = h \cdot f(x, y)$$

$$\phi_1 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{\phi_0}{2}\right)$$

$$\phi_2 = h \cdot f(x + h, y - \phi_0 + 2 \cdot \phi_1)$$

Метод 5-го порядка:

$$\tilde{\Delta}y = \frac{1}{192} \cdot (23 \cdot \phi_0 + 125 \cdot \phi_2 + 81 \cdot \phi_4 + 125 \cdot \phi_5)$$

$$\phi_0 = h \cdot f(x, y)$$

$$\phi_1 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{\phi_0}{3}\right)$$

$$\phi_2 = h \cdot f\left(x + \frac{2 \cdot h}{5}, y + \frac{4 \cdot \phi_0 + 6 \cdot \phi_1}{25}\right)$$

$$\phi_3 = h \cdot f\left(x + h, y + \frac{4 \cdot \phi_0 + 12 \cdot \phi_1 + 15 \cdot \phi_2}{4}\right)$$

$$\phi_4 = h \cdot f\left(x + \frac{2 \cdot h}{3}, y + \frac{6 \cdot \phi_0 + 90 \cdot \phi_1 + 50 \cdot \phi_2 + 8 \cdot \phi_3}{81}\right)$$

$$\phi_5 = h \cdot f\left(x + \frac{4 \cdot h}{5}, y + \frac{6 \cdot \phi_0 + 36 \cdot \phi_1 + 10 \cdot \phi_2 + 8 \cdot \phi_3}{75}\right)$$

### [Пример получения уравнений для формул первого порядка точности](#)

Как отмечено выше, решение на отдельном шаге вычисляется по формуле

$$y_{n+1} \approx y_n + \tilde{\Delta}y$$

И вся задача заключается в том, чтобы вычислить  $\tilde{\Delta}y$ .

Предложение Рунге-Кутты заключается в следующем. Аппроксиматор представим в виде

$$\tilde{\Delta}y = \sum_{i=0}^q A_i \cdot \phi_i \quad (2.13)$$

При этом вводятся три набора констант:

1.  $A_0, A_1, \dots, A_q$  (A)
2.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  ( $\alpha$ )
3.  $\beta_{10}$   
 $\beta_{20} \quad \beta_{21}$  ( $\beta$ )  
 $\dots\dots\dots$   
 $\beta_{q0} \quad \beta_{q1} \quad \beta_{q2} \quad \dots\dots \quad \beta_{q(q-1)}$

При этом величины  $\phi_i$  последовательно вычисляются следующим образом:

$$\phi_0 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$\phi_1 = h \cdot f(x_i + \alpha_1 \cdot h, y_i + \beta_{10} \cdot \phi_0)$$

$$\phi_2 = h \cdot f(x_i + \alpha_2 \cdot h, y_i + \beta_{20} \cdot \phi_0 + \beta_{21} \cdot \phi_1)$$

.....

$$\phi_q = h \cdot f(x_i + \alpha_q \cdot h, y_i + \beta_{q0} \cdot \phi_0 + \beta_{q1} \cdot \phi_1 + \dots + \beta_{q(q-1)} \cdot \phi_{q-1})$$

Очередные  $\phi$  вычисляются через предыдущие.

Если ввести величину:

$$r_q = \Delta y - \sum_{i=0}^q A_i \cdot \phi_i,$$

то это и будет локальная погрешность метода.

Считая, что  $h$  достаточно мал, разложим эту погрешность в окрестности нуля по формуле Тейлора:

$$r_q = \sum_{j=0}^k \frac{h^j}{j!} r_q^{(j)}(h) \Big|_{h=0} + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} r_q^{(k+1)}(\theta h), \quad \theta \in [0; 1]$$

Основная идея метода Рунге-Кутты заключается в том, чтобы обеспечить совпадение неизвестной добавки  $\Delta y$  с её приближенным представлением по формуле (8) до члена с возможно более высокими степенями  $h$ .

Это означает, что  $r_q^{(j)}(h) \Big|_{h=0}$  следует сделать равной нулю для  $j=0, 1, \dots$  до возможно большего  $k$ . А обеспечить это можно выбором соответствующего набора  $A, \alpha, \beta$ . Чем больший набор  $A, \alpha, \beta$ , тем большей точности можно достичь. Число  $k$  – порядок точности метода.

Рассмотрим ситуацию для построения методов 1-го порядка точности:  $k=1$ .

$$\begin{aligned} \Delta y &= A_0 \cdot \phi_0 \\ \phi_0 &= h \cdot f(x, y) \\ r_0(h) &= y(x+h) - y(x) - h \cdot A_0 \cdot f(x, y) \\ r_0'(h) &= y'(x+h) - A_0 \cdot f(x, y) \end{aligned}$$



$$r_0''(h) = y''(x + h)$$

Последняя производная не зависит от  $A, \alpha, \beta$ , то равенства нулю этого выражения при произвольной функции  $f(x, y)$  мы добиться не сможем, значит

$$\sum_{i=0}^q A_i \cdot \phi_i = A_0 \cdot \phi_0$$

Приравняем к нулю первую производную:

$$y'(x + h) - A_0 \cdot f(x, y) = 0.$$

С учетом

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$(1 - A_0) \cdot f(x, y) = 0$$

$$A_0 = 1$$

$$\Delta y \approx \phi_0 = h \cdot f(x, y)$$

Окончательно

$$y(x + h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y)$$

Как видно метод Эйлера – частный случай метода Рунге-Кутты, т.е. метод 1-го порядка. Аналогично можно показать, что модифицированный и усовершенствованный методы Эйлера частные случаи метода Рунге-Кутты, 2-го порядка.

### Оценка погрешности в решении дифференциальных уравнений

Основная задача приближённого вычисления заключается в том, чтобы получить результат с нужной точностью за экономически обоснованное время расчета. Точность зависит от величины шага. Чем меньше шаг, тем обычно выше точность. Конечно же, при измельчении шага может накапливаться и погрешность, связанная с ограничением разрядной сетки компьютера.

Предположим, что на заданном количестве шагов выполняется решение ДУ. Возникает вопрос, как оценить точность решения в последний момент времени наблюдения. Рекомендации:

1. Применение более грубой расчетной схемы и качественная оценка решения.
2. Повторное решение уравнения другим методом и сравнение решений.
3. Метод Рунге.

## Метод Рунге

Рассмотрим этот метод подробнее. Предположим, что на отдельном шаге погрешность пропорциональна некоторой величине с заданным коэффициентом  $A$  и на каждом шаге одна и та же:

$$A \cdot h^{m+1}$$

$A$  – заданное число,  $m$  – порядок метода.

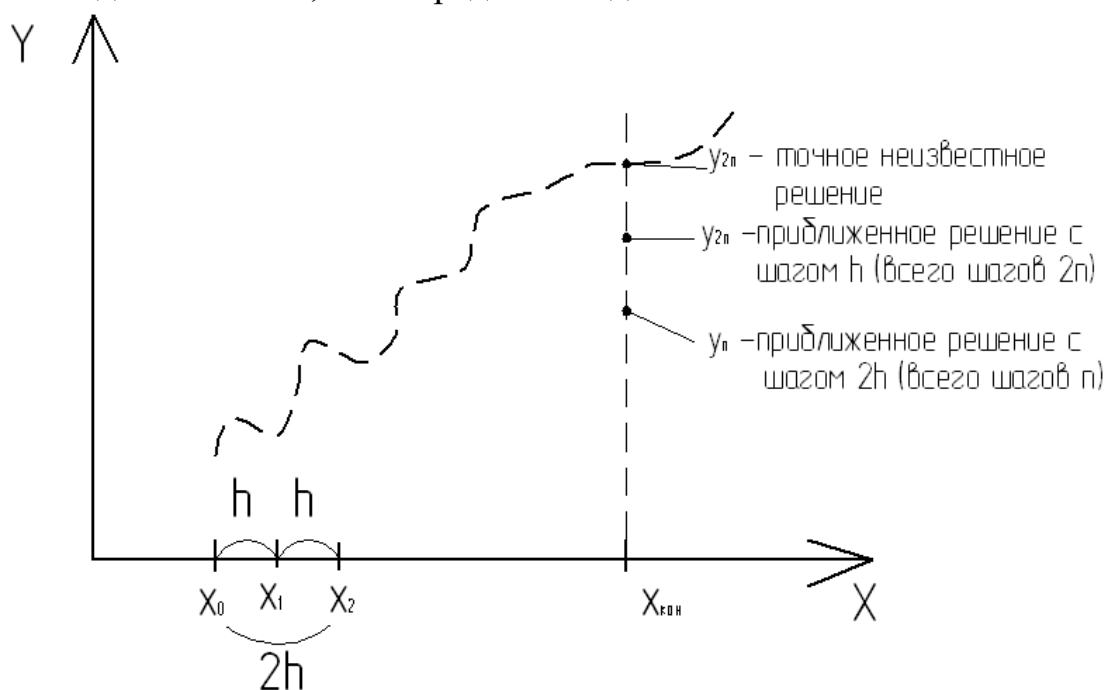


Рисунок 2.17. Иллюстрация метода Рунге.

После получения численного решения при прохождении интервала с шагом  $h$  через  $2n$  шагов приближенное решение  $\tilde{y}_{2n}^*$  отклоняется от точного  $y_{2n}$  на величину, равную

$$\tilde{y}_{2n}^* - y_{2n} = 2 \cdot n \cdot A \cdot h^{m+1} \quad (2.14)$$

Если теперь выполнить решение с удвоенным шагом  $2h$  (при этом шагов  $n$ ), то полученное приближенное решение  $\tilde{y}_n^*$  отклоняется от точного на величину

$$\tilde{y}_n^* - y_n = n \cdot A \cdot (2 \cdot h)^{m+1} \quad (2.15)$$

(2.14) и (2.15) представляют собой систему линейных уравнений относительно двух неизвестных  $A$ , и  $y_{2n}$ .

Решая эту систему, получаем

$$A = \frac{\tilde{y}_n^* - \tilde{y}_{2n}^*}{2 \cdot n \cdot (2^m - 1) \cdot h^{m+1}}$$

$$y_{2n} = \tilde{y}_{2n}^* - \frac{\tilde{y}_n^* - \tilde{y}_{2n}^*}{2^{m-1}} \quad (2.16)$$

Таким образом погрешность решения можно написать так

$$E_{2n}^* = \frac{|\tilde{y}_n^* - \tilde{y}_{2n}^*|}{2^{m-1}} \quad (2.17)$$

Например, для метода 4-го порядка точности формула примет вид

$$E_{2n}^* = \frac{1}{15} \cdot |\tilde{y}_n^* - \tilde{y}_{2n}^*| \quad (2.18)$$

Последовательность этапов для оценки погрешности решения на основе предположения Рунге:

1. Выбрать  $n$  – количество подинтервалов на интервале наблюдения.
2. Вычисляем шаг:  

$$h = \frac{x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}}}{n}$$
3. С помощью выбранного метода  $m$ -того порядка точности получить численное решение на всём интервале наблюдения  $y_n^*$ .
4. Для шага  $\frac{h}{2}$  выполнить решение на  $2n$  шагах, получим  $\tilde{y}_{2n}^*$ .
5. Воспользоваться формулой (2.17) для оценки погрешностей.

### Понятие о «жестких» ДУ

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 998 \cdot u + 1998 \cdot v \\ \frac{dv}{dt} = -999 \cdot u - 1998 \cdot v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(0) &= 1 \\ v(0) &= 1 \end{aligned}$$

Точным решением этой системы является:

$$\begin{cases} u = 4 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-1000 \cdot t} \\ v = -2 \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^{-1000 \cdot t} \end{cases}$$

Очевидно, что после весьма короткого промежутка времени вторые слагаемые практически не сказываются на решении:

$$\begin{cases} u \approx 4 \cdot e^{-t} \\ v \approx -2 \cdot e^{-t} \end{cases}$$

Это пример уравнений, в решении которых присутствуют слагаемые с разными постоянными времени (то есть некоторые слагаемые убывают гораздо быстрее, чем другие). Если использовать метод Эйлера для решения этой системы, то получится

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h \cdot (998 \cdot u_n + 1998 \cdot v_n) \\ v_{n+1} &= v_n + h \cdot (-999 \cdot u_n - 1998 \cdot v_n) \end{aligned}$$

Используя их для шага  $h=0,01$  на конце первого шага, получим

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + 0,01 \cdot (998 + 1998) = 30,96 \\ v_1 &= 1 + 0,01 \cdot (-999 - 1998) = -28,96 \end{aligned}$$

Эти значения не имеют ничего общего с точным решением, и дальнейшие итерации уводят ещё дальше. Это происходит из-за быстро

убывающих слагаемых. На этом примере видно, что существуют такие уравнения, которые накладывают очень жёсткие требования на шаг интегрирования (чтобы достаточно точно воспроизвести слагаемые  $3 \cdot e^{-1000 \cdot t}$  в решении потребуется очень мелкий шаг  $h = 10^{-5}$ ). Отсюда происходит термин «жёсткие» ДУ.

В то же время понятно, что воспроизводить эти слагаемые в решении совершенно необязательно. Таким образом для решения жёстких уравнений стандартные методы непригодны, так как они потребуют очень большое количество машинного времени или вовсе не приведут к приемлемому результату из-за накопления локальной погрешности. Для решения таких классов уравнений разработаны специальные методы Бурлиша-Штерна (в MATCAD процедура **Stiff**).

### Методы прогноза и коррекции для решения ОДУ

В этих методах для определения решения на конце очередного шага используются данные о решении на нескольких предшествующих шагах. Такие методы называются несамостартующими или несаморазгоняющимися, то есть для их запуска необходимо выполнить несколько шагов с помощью другого метода, самостартующего.

В методах прогноза и коррекции используются две формулы:

- формула прогноза решения;
- формула коррекции решения.

Вычисления происходят следующим образом. Сначала по формуле прогноза и исходным значениям, входящих в правую часть этой формулы, определяют  $y_{n+1}^{(0)}$  (приближение нулевое). Индекс в круглых скобках обозначает номер приближения в пределах данного шага.

Прогнозируемое значение является одним из последовательности  $y_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(1)}, \dots$ , располагающихся в порядке возрастания точности. По этому значению с использованием правой части ДУ вычисляется  $(y_{n+1}^{(0)})' = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$ . Вычисленная величина подставляется в формулу коррекции для вычисления уточнённого значения  $y_{n+1}^{(j+1)}$  и т.д.

Если очередное значение производной недостаточно близко к предыдущему, то оно вводится в формулу коррекции и итерационный процесс продолжается. Если это значение достаточно близко к предыдущему, то оно используется для окончательного вычисления.

### Метод предиктор-корректор Адамса-Башфорта

В этом методе используется следующая формула прогноза:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24} \cdot h \cdot (55 \cdot y'_n - 59 \cdot y'_{n-1} + 37 \cdot y'_{n-2} - 9 \cdot y'_{n-3}) + \frac{251}{720} \cdot h^5 \cdot y^{(5)}$$

Формула коррекции:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24} \cdot h \cdot (9 \cdot y'_{n+1} - 19 \cdot y'_n - 19 \cdot y'_{n-1} + y'_{n-2}) + \frac{19}{720} \cdot h^5 \cdot y^{(5)}$$

Последние слагаемые в этих формулах в вычислениях не участвуют и приведены только для оценки точности решения. И та и другая формулы имеют четвертый порядок точности.  $y'_{n+1}$  во второй формуле становится известным только после применения формулы прогноза.

### Метод стрельбы (пристрелки) решения граничной задачи для ОДУ

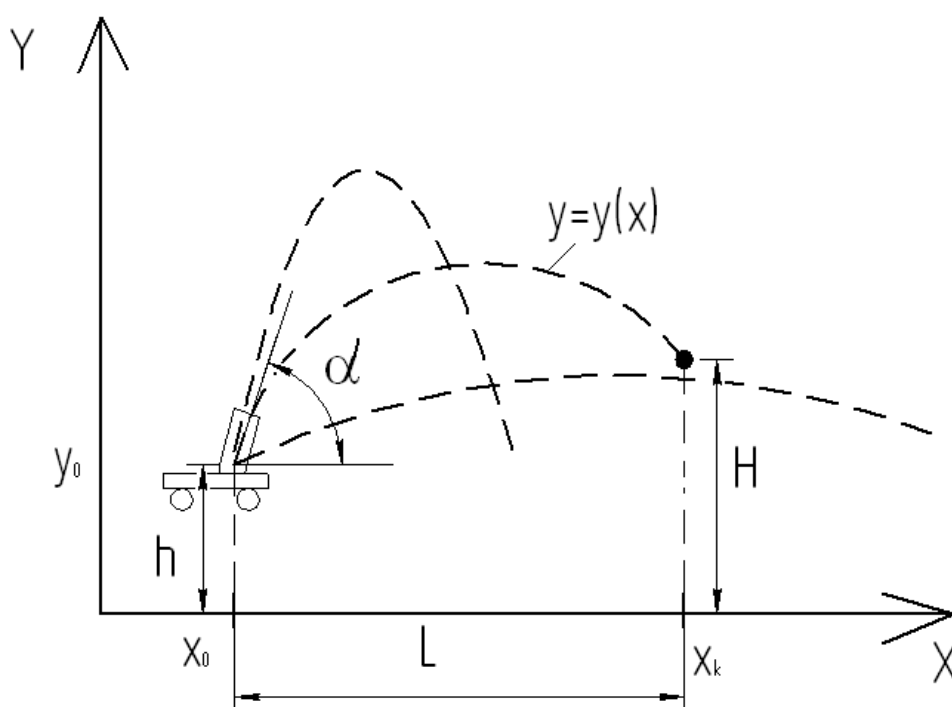


Рисунок 2.18. Иллюстрация метода стрельбы для решения граничной задачи для ОДУ

Если считать, что траектория движения имеет вид  $y = y(x)$  и является решением ДУ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y) \quad (2.19)$$

с начальным условием:

$$y(x_0) = h, \quad (2.20)$$

то, как видно из рисунка 2.18, это решение должно удовлетворять ещё и условию:

$$y(x_k) = H \quad (2.21)$$

Таким образом для решения заданы два условия на *границах (краях)*  $[x_0, x_k]$  (2.20) и (2.21). Такая задача называется *граничной (или краевой)*.

Понятно, что можно подобрать угол наклона орудия  $\alpha$  таким образом, чтобы удовлетворить граничному условию (2.21) на правом конце.

Иначе говоря, нужно найти такое решение задачи (2.19), (2.20), чтобы удовлетворить *дополнительному начальному условию*

$$y'(x_0) = tg(\alpha),$$

где  $\alpha$  - требуемый угол.

Поэтому такой метод называется методом стрельбы (пристрелки).

Значит решить такую задачу можно многократно решая задачу (2.19), (2.20) и, подбирая решение так, чтобы выполнялось условие (2.21). Таким образом, вместо решения задачи (2.19), (2.20), (2.21), подбирается решение задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= h \\ y'(x_0) &= tg(\alpha) \end{aligned}$$

Решение краевой задачи сводится к многократному решению задачи с начальными условиями.

Приведем пример решения аналогичной задачи с помощью встроенных функций системы MATHCAD.

### [Пример 1. Стрельба по цели](#)

$$\begin{aligned} 4 \frac{d^2x}{dt^2} + x(t) &= t \\ x(0) &= 5 \quad x(5) = 13.5 \\ t &\in [0; 5] \end{aligned}$$

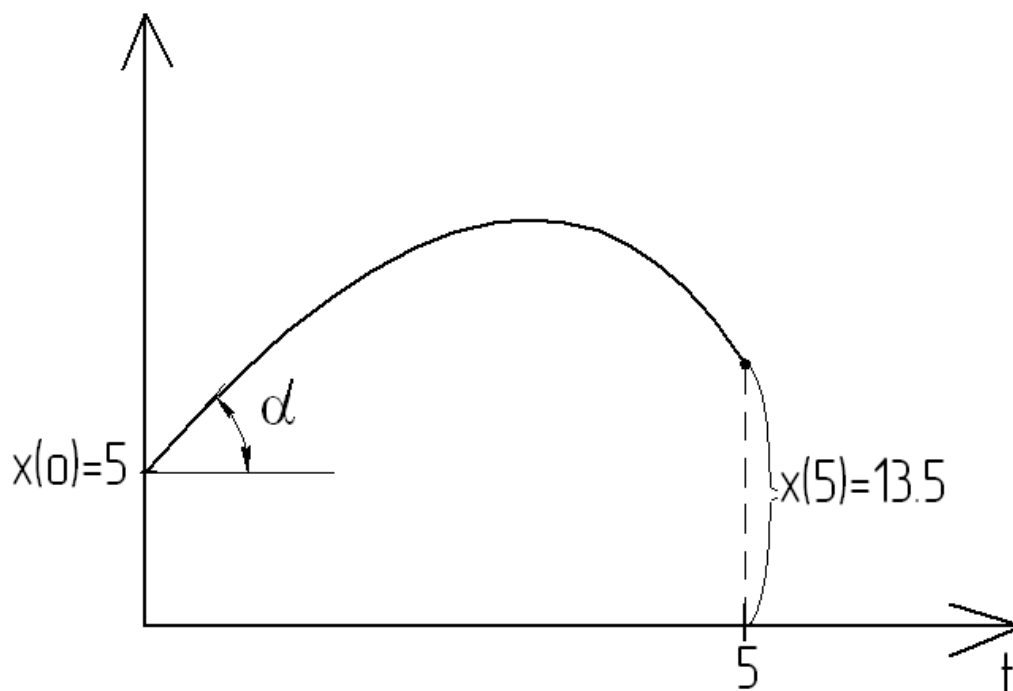


Рисунок 2.19. Вид граничных условий. Пример решения задачи по методу стрельб

1. Задаем вектор начальных значений функции  
 $g_0 := 5$
2. задаем начальный и конечный моменты времени  
 интегрирования

$$t_0 := 0$$

$$t_1 := 5$$

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{t - x_0}{4} \end{cases}$$

3. Записываем правые части в виде процедуры:

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{t - x_0}{4} \end{pmatrix}$$

4. Определяем функцию нагрузки для задания пробного вектора начальных условий:

$$load(t, v) := \begin{pmatrix} 5 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

где 5 – значение первой функции в начальный момент времени;  
 $v_0$  - подбираемое значение второй функции в начальный момент времени.

5. Определяем функцию невязки компонент пробного вектора решения и соответствующий компонент нужного вектора для ОДУ на правой границе.

$$\text{score}(t, w) := w_0 - 13.5$$

Используем встроенную функцию, которая подбирает нужные начальные условия методом стрельб.

$$IC := \text{sbval}(g, t0, t1, D, \text{load}, \text{score})$$

$IC = (11.448)$ . (Это подобранное значение первой производной.)

Построим для контроля график полученного решения (рисунок 2.20) другим способом с помощью блока Given.

Формируем вектор начальных условий:

$$Ybeg := \text{load}(0, IC)$$

$$Ybeg = \begin{pmatrix} 5 \\ 11.448 \end{pmatrix}$$

$$N := 1000$$

$$S := \text{rkfixed}(Ybeg, t0, t1, N, D)$$

Пример файла для реализации подобной задачи в MATHCAD представлен ниже:

$$4 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + x(t) = t$$

$$x(0) = 4 \quad x(5) = 13.5$$

Given

$$4 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + x(t) = t$$

$$x(0) = 4 \quad x(5) = 13.5$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 5)$$

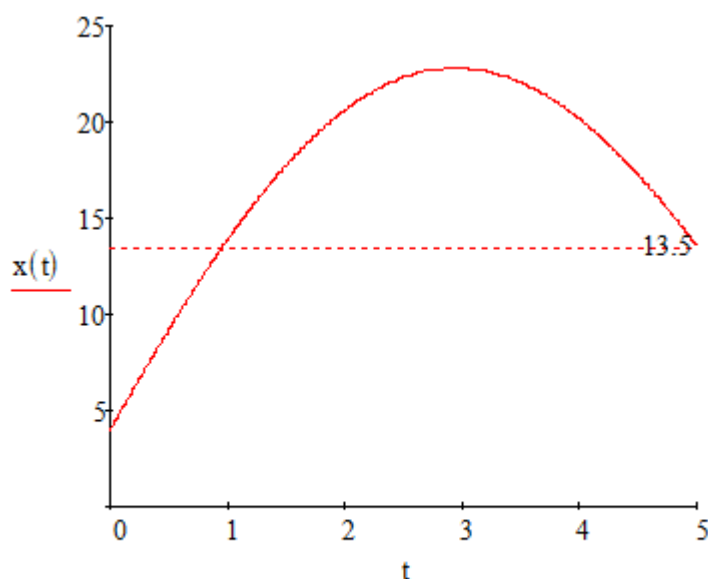




Рисунок 2.20. График полученного решения с помощью блока Given

+

$$g_0 := 4$$

$$t_0 := 0$$

$$t_1 := 5$$

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{t - X_0}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{load}(t, v) := \begin{pmatrix} g_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{score}(t, w) := w_0 - 13.5$$

$$\text{IC} := \text{sbval}(g, t_0, t_1, D, \text{load}, \text{score})$$

$$\text{IC} = (10.779)$$

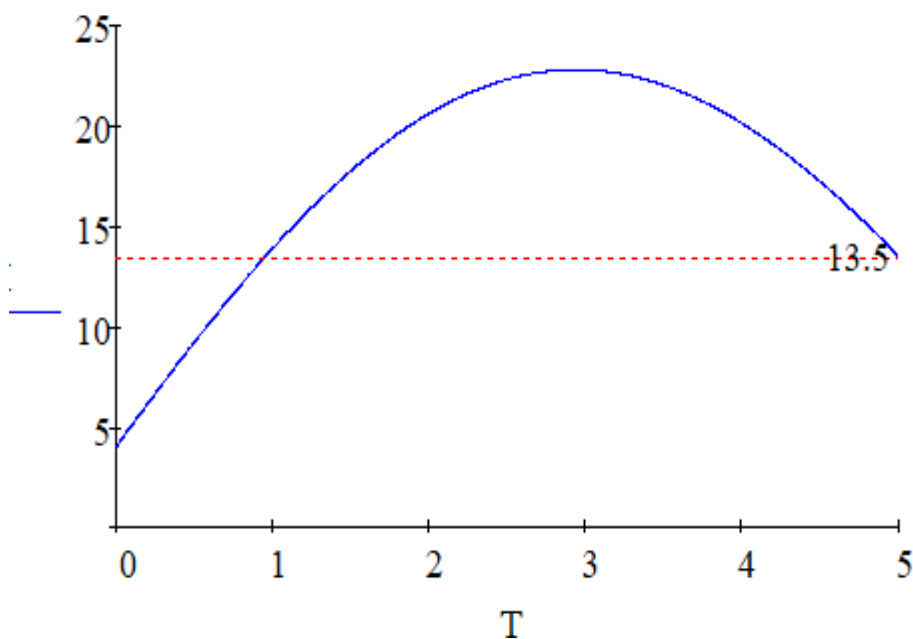
$$\text{ic} := \text{load}(0, \text{IC}) \quad \text{ic} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10.779 \end{pmatrix}$$

$$N := 1500$$

$$S := \text{rkfixed}(\text{ic}, t_0, t_1, N, D)$$

$$T := S^{(0)}$$

$$X := S^{(1)}$$



Пример 2. Решение задачи об изгибе балки переменного сечения под действием распределенной нагрузки

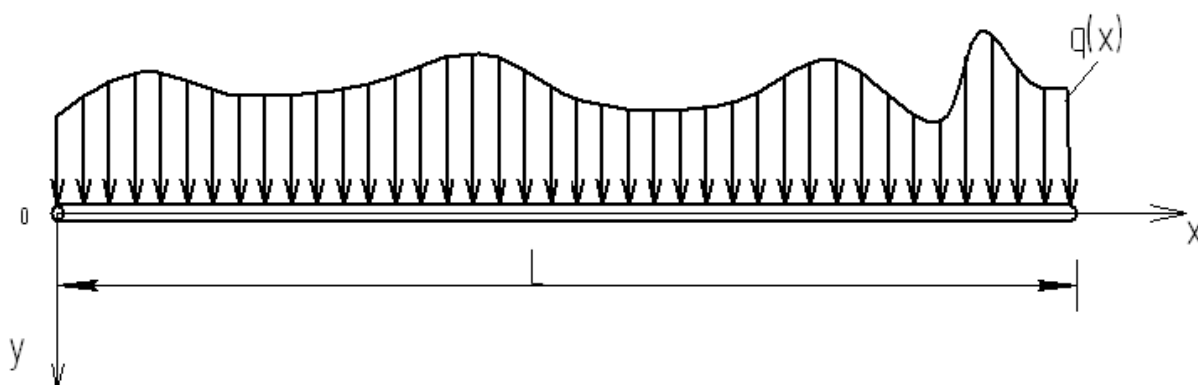


Рисунок 2.21. Балка переменного сечения под действием распределенной нагрузки

Прогиб балки в точке  $x$  описывается функцией  $y(x)$ , которая является решением следующего уравнения (дифференциальное уравнение изогнутой оси балки):

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot J(x)} \quad (2.22)$$

Будем считать, что на левом и на правом концах балки могут быть заданы различные виды закреплений, например

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y'_0 \end{aligned}$$

- условия на левом конце

$$\begin{aligned} y(L) &= y_L \\ y'(L) &= y'_L \end{aligned}$$

- условия на правом конце.

Если ввести новую систему функций

$$\begin{aligned} z_0 &= y(x) \\ z_1 &= y^{(1)}(x) \\ z_2 &= y^{(2)}(x) \\ z_3 &= y^{(3)}(x), \end{aligned}$$

то уравнение (2.22) можно заменить системой ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dx} = z_1 \\ \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \frac{dz_3}{dx} = \frac{q(x)}{E \cdot J(x)} \end{cases}$$

С начальными условиями

$$\begin{aligned} z_0(0) &= y(0) \\ z_1(0) &= y^{(1)}(0) \\ z_2(0) &= y^{(2)}(0) \\ z_3(0) &= y^{(3)}(0). \end{aligned}$$

Недостающие два значения на левом конце методом стрельб нужно подобрать так, чтобы выполнить условия на правом конце.

Пример файла для реализации подобной задачи в MATHCAD на основе изложенного выше подхода представлен ниже:

### Полиномы Эрмита для сравнения

$\psi_1(t) := (1 - t)^2 \cdot (1 + 2 \cdot t)$	$d\psi_1(t) := \frac{d}{dt} \psi_1(t)$	$d\psi_1(t) \text{ simplify} \rightarrow 6 \cdot t \cdot (t - 1)$
$\psi_1(0) = 1$ $\psi_1(1) = 0$		$d\psi_1(0) \rightarrow 0$ $d\psi_1(1) \rightarrow 0$
$\psi_2(t) := t^2(3 - 2 \cdot t)$	$d\psi_2(t) := \frac{d}{dt} \psi_2(t)$	$d\psi_2(t) \text{ simplify} \rightarrow -6 \cdot t \cdot (t - 1)$
$\psi_2(0) = 0$ $\psi_2(1) = 1$		$d\psi_2(0) \rightarrow 0$ $d\psi_2(1) \rightarrow 0$
$\psi_3(t) := t \cdot (1 - t)^2$	$d\psi_3(t) := \frac{d}{dt} \psi_3(t)$	$d\psi_3(t) \text{ simplify} \rightarrow (t - 1) \cdot (3 \cdot t - 1)$
$\psi_3(0) = 0$ $\psi_3(1) = 0$		$d\psi_3(0) \rightarrow 1$ $d\psi_3(1) \rightarrow 0$
$\psi_4(t) := -t^2 \cdot (1 - t)$	$d\psi_4(t) := \frac{d}{dt} \psi_4(t)$	$d\psi_4(t) \text{ simplify} \rightarrow t \cdot (3 \cdot t - 2)$
$\psi_4(0) = 0$ $\psi_4(1) = 0$		$d\psi_4(0) \rightarrow 0$ $d\psi_4(1) \rightarrow 1$



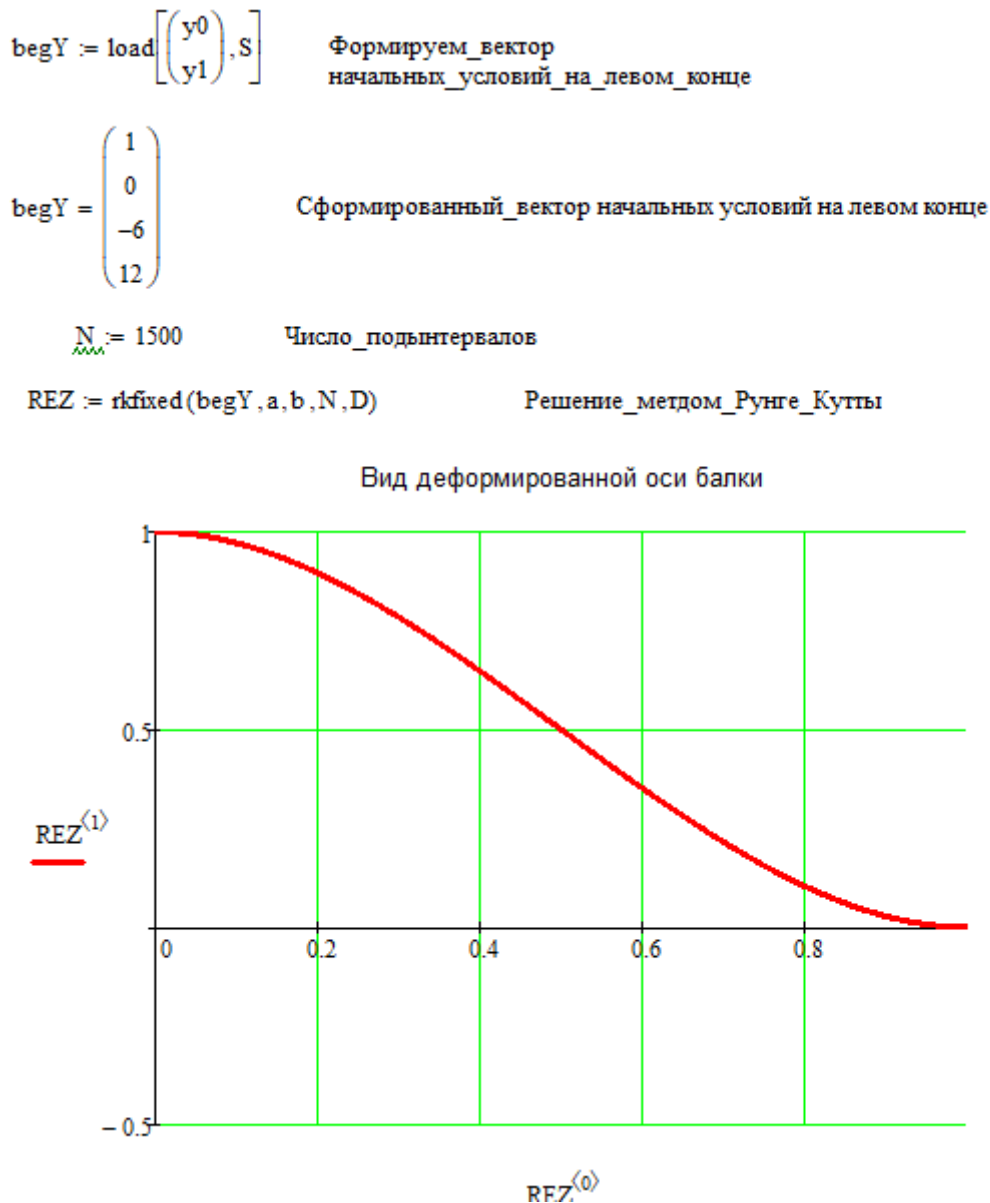


Рисунок 2.21. Изогнутое состояние балки.

Рассмотрим четыре конкретных случая граничных условий.

Пусть	$y_0 := 1$	$y_1 := 0$	$y_2 := 0$	$y_3 := 0$
$q(x) := 0$	$E := 20$	$\underline{J}(x) := 0.5$	$a := 0$	$b := 1$
				+

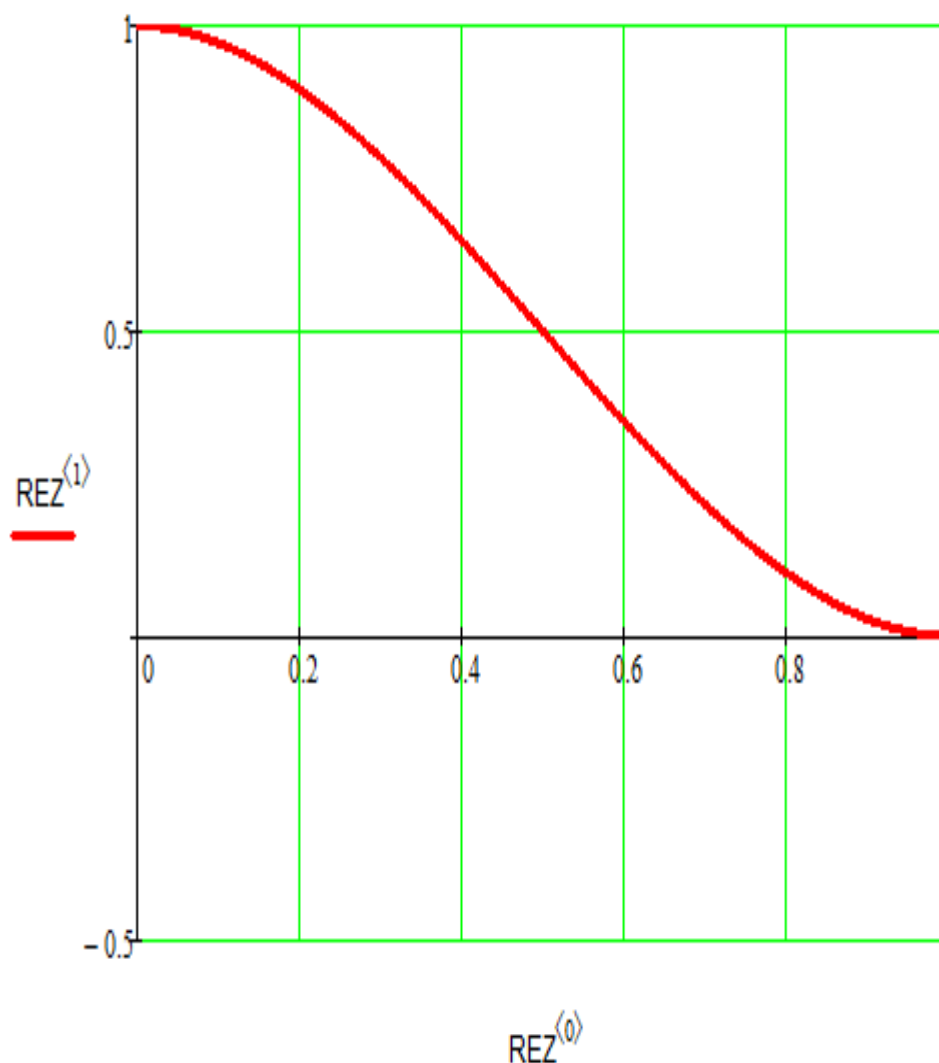
Эту задачу можно решить аналитически. Теоретически показано, что вид деформированной однородной балки для рассмотренных в этом примере граничных условий описывается одной из так называемых функций Эрмита, которая в этом случае имеет вид:

$$F1(t) = (1 - t)^2 \cdot (1 + 2 \cdot t)$$

Эта функция удовлетворяет условиям:

$$F1(0) = 1 \quad F1'(0) = 0 \quad F1(1) = 0 \quad F1'(1) = 0$$

Ниже приведен графический результат (красным цветом) решения этой задачи на основе представленной программы. Результат совпадает с аналитическим решением (соответствующей функцией Эрмита).



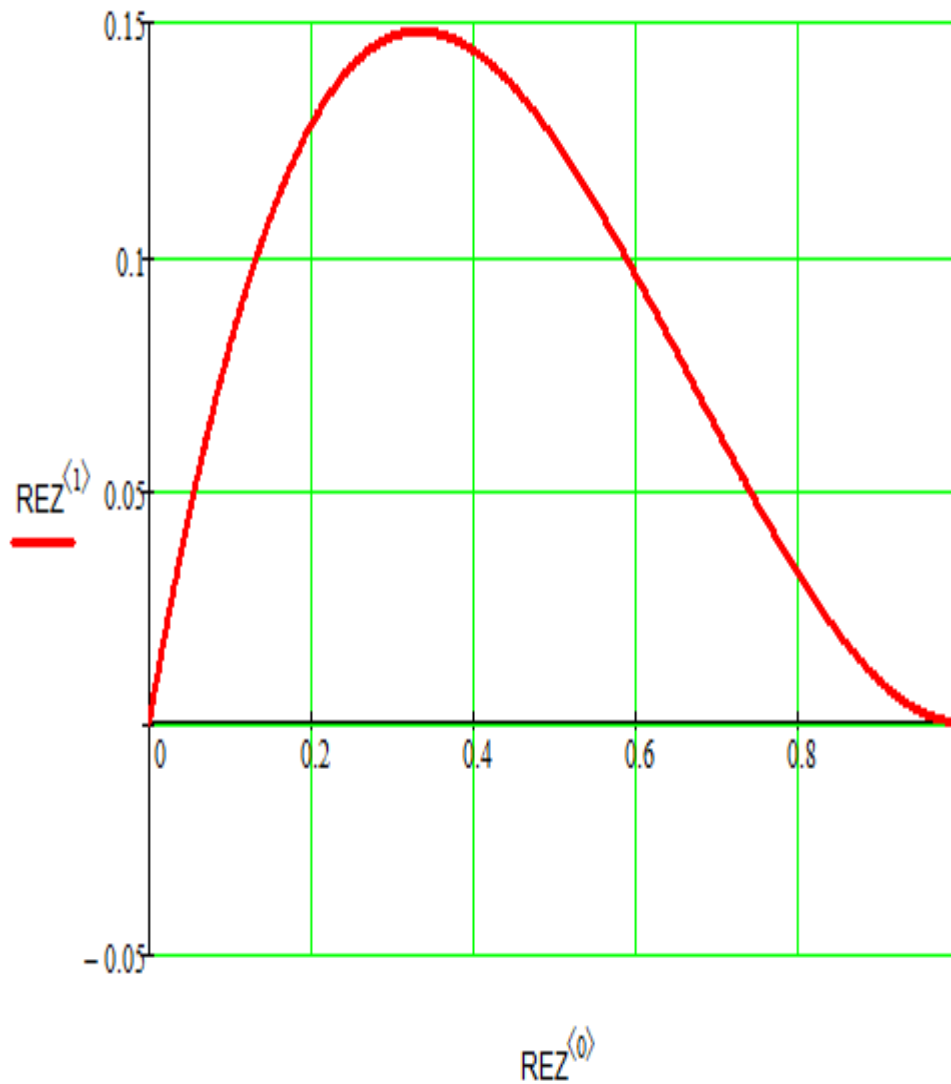
Для других граничных условий

Пусть	$y0 := 0$	$y1 := 1$	$y2 := 0$	$y3 := 0$
$q(x) := 0$	$E := 20$	$J(x) := 0.5$	$a := 0$	$b := 1$

Функций Эрмита для этого случая  $F2(t) = t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t)$

Эта функция удовлетворяет условиям:

$$F2(0) = 0 \quad F2'(0) = 1 \quad F2(1) = 0 \quad F2'(1) = 0$$



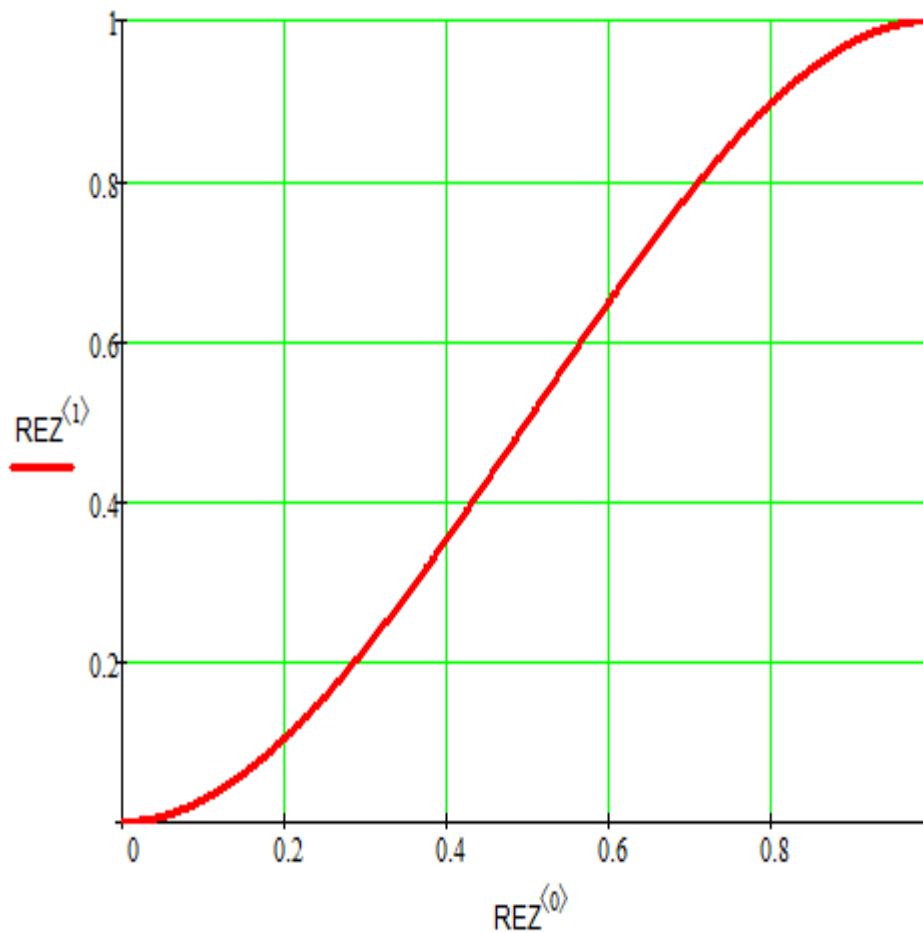
Для других граничных условий

Пусть  $y_0 := 0$        $y_1 := 0$        $y_2 := 1$        $y_3 := 0$   
 $q(x) := 0$        $E := 20$        $J(x) := 0.5$        $a := 0$        $b := 1$

Функций Эрмита для этого случая  $F_3(t) = t \cdot (1 - t)^2$

Эта функция удовлетворяет условиям:

$$F_3(0) = 0 \quad F_3'(0) = 0 \quad F_3(1) = 1 \quad F_3'(1) = 0$$



Для других граничных условий

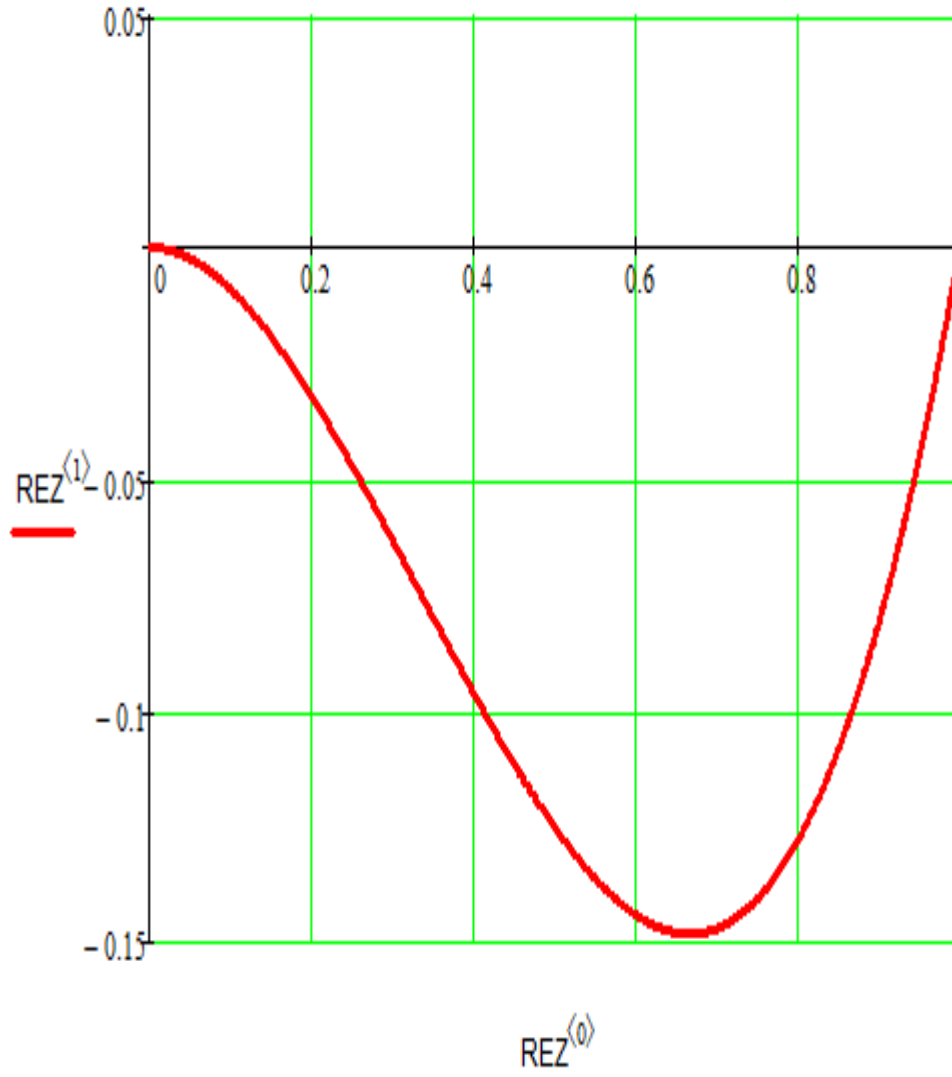
Пусть  $y_0 := 0$        $y_1 := 0$        $y_2 := 0$        $y_3 := 1$   
 $q(x) := 0$        $E := 20$        $J(x) := 0.5$        $a := 0$        $b := 1$

Функций Эрмита для этого случая  $F_4(t) = -t^2 \cdot (1 - t)$

Эта функция удовлетворяет условиям:

$$F_4(0) = 0 \quad F_4'(0) = 0 \quad F_4(1) = 0 \quad F_4'(1) = 1$$





Эти совпадения подтверждают адекватность предложенной программы.

### Тема 3. Моделирование в экологии и экономике

#### Взаимодействие популяций

В 1925 г. В Италии образовался союз двух учёных: математика Вито Вольтер и зоолог Д'Анконо. Рассматривалась задача о явлении, связанном с периодическим в несколько лет возрастанием и убыванием улова промысловых рыб. Статистика привела к следующему выводу: в период первой мировой войны интенсивность рыбной ловли в средиземном море резко снизилась, что привело к возрастанию числа хищных рыб, питающихся промысловыми рыбами. В результате численность промысловых рыб резко упала, что в свою очередь привело к гибели части хищных рыб, потому что их пища стала исчезать.

Обсуждая это явление они пришли к выводу, что помимо внешних факторов (смена времён года, климата) существует причины особого характера, влияющие на популяции животных.

#### Получение математической модели для системы хищник-жертва

Данная математическая модель относится к задачам из области динамики популяций, для которых требуется построение нелинейной модели.

Рассмотрим модель, содержащую два вида, один вид - хищники, а другой - их добыча. Пусть  $x_1$ ,  $x_2$  – популяции жертв и хищников соответственно. Предположим, что между особями одного вида нет соперничества.

Пусть прирост на особь  $\frac{\dot{x}_1}{x_1}$  для жертв составляет  $a - bx_2$ , а и  $b > 0$ ,

где  $a$  – скорость размножения жертв в отсутствии хищников в пересчете на одну особь,

где  $b$  – коэффициент уничтожения хищниками жертв в пересчете на одну особь,

$-bx_2$  - есть член, учитывающий потери от хищников в пересчете на одну особь.

Популяция хищников уменьшалась бы в отсутствии их пищи (т.е. жертв), так что

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} = -c, \quad c > 0 \quad \text{при } x_1 = 0.$$

Однако, наличие жертв в случае удачной охоты на них компенсирует это уменьшение с коэффициентом  $d$  (коэффициент защищенности жертв от хищников), так что при  $x_1 > 0$  имеем

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} = -c + dx_1, \quad d > 0.$$

Таким образом, система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a - bx_2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= (-c + dx_1)x_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $a, b, c, d > 0$ .

Это и есть уравнения Вольтерра – Лотка.

В данной модели считается, что все хищники (и все жертвы) находятся в одинаковых условиях. При этом пищевые ресурсы жертв неограниченны, а хищники питаются исключительно жертвами. Обе популяции живут на ограниченной территории и не взаимодействуют с любыми другими популяциями, также отсутствуют любые другие факторы, способные повлиять на численность популяций.

Сама математическая модель «хищник – жертва» состоит из пары дифференциальных уравнений, которые описывают динамику популяций хищников и жертв в её простейшем случае, когда имеется одна популяция хищников и одна - жертв. Модель характеризуется колебаниями в размерах обеих популяций, причём пик количества хищников немного отстаёт от пика количества жертв. С данной моделью можно ознакомиться во многих трудах по популяционной динамике или математическому моделированию. Она достаточно широко освещена и проанализирована математическими методами. Однако формулы не всегда могут дать очевидное представление о происходящем процессе.

Интересно узнать, как именно в данной модели зависит динамика популяций от начальных параметров и насколько это соответствует действительности и здравому смыслу, причём увидеть это графически, не прибегая к сложным расчётам. Для этой цели на основе модели Вольтерра была создана программа в среде Mathcad14.

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	30	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

ORIGIN := 1

$xbegin := \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \end{pmatrix}$  начальная численность Антилоп  
 начальная численность Львов

$c := 0.02$  Прирост (смертность) Львов

$a := 2$  Прирост (смертность) Антилоп

$d := 0.001$  Межвидовое взаимодействие Львы-Антилопы (коэффициент защищенности жертв от хищников)

$b := 0.01$  Межвидовое взаимодействие Антилопы-Львы (коэффициент уничтожения хищниками жертв).

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	30	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

ORIGIN := 1

$xbegin := \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \end{pmatrix}$  начальная численность Антилоп  
 начальная численность Львов

$c := 0.02$  Прирост (смертность) Львов

$a := 2$  Прирост (смертность) Антилоп

$d := 0.001$  Межвидовое взаимодействие Львы-Антилопы (коэффициент защищенности жертв от хищников)

$b := 0.01$  Межвидовое взаимодействие Антилопы-Львы (коэффициент уничтожения хищниками жертв).

$t_{\text{begin}} := 0$  Начальный момент наблюдения

$t_{\text{end}} := 300$  Конечный момент наблюдения

$N := 4000$  Количество шагов по времени

$$P(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \cdot (a - b \cdot x_2) \\ x_2 \cdot (-c + d \cdot x_1) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} + \\ \text{Правые части системы ОДУ} \\ \text{модели "хищник-жертва"} \end{array}$$

$\text{Rez} := \text{rkfixed}(x_{\text{begin}}, t_{\text{begin}}, t_{\text{end}}, N, P)$

График изменения количества хищников и количества жертв от времени

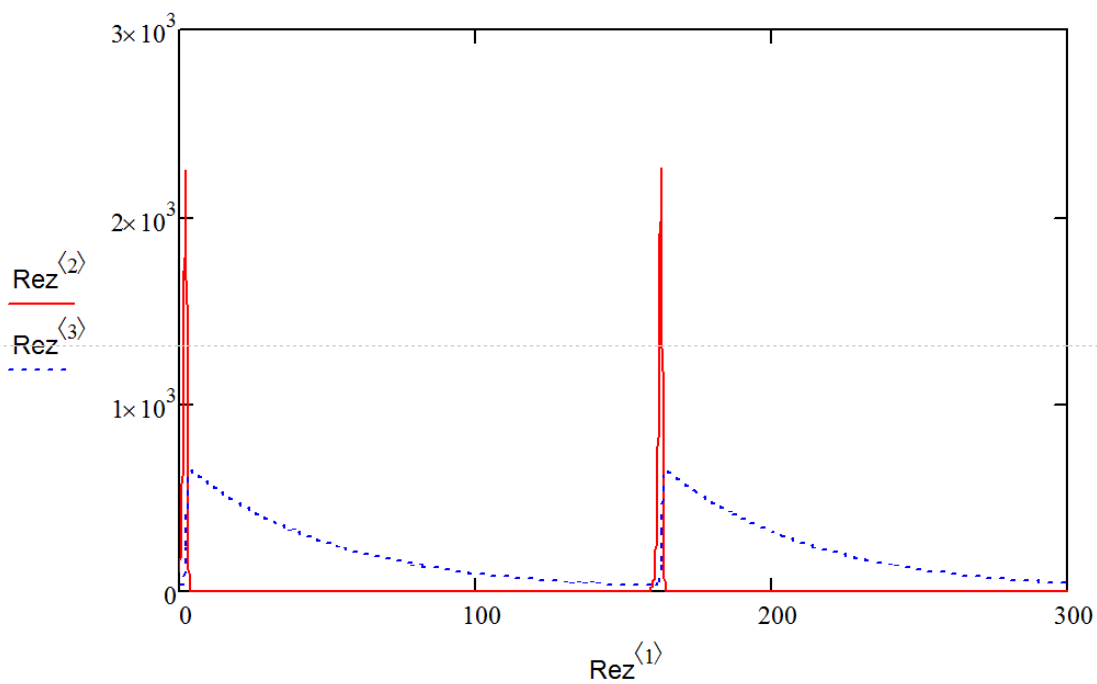
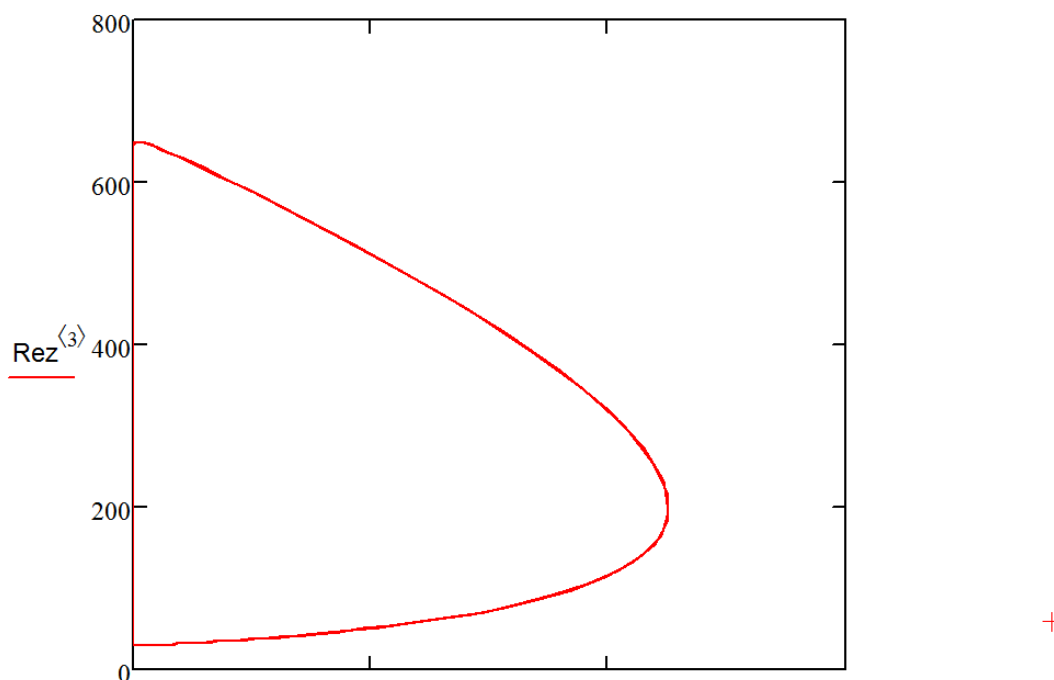


График изменения количества хищников от количества жертв (красная линия)  
 Это фазовый портрет процесса



Для начала проверим модель на соответствие реальным условиям. Для этого рассмотрим вырожденные случаи, когда в данных условиях обитает только одна из популяций. Теоретически было показано, что при отсутствии хищников популяция жертвы неограниченно возрастает во времени, а популяция хищника в отсутствии жертвы вымирает, что, вообще говоря, соответствует модели и реальной ситуации (при указанной постановке задачи).

Полученные результаты отражают теоретические: хищники постепенно вымирают (рисунок 3.1), а численность жертвы неограниченно возрастает (рисунок 3.2).

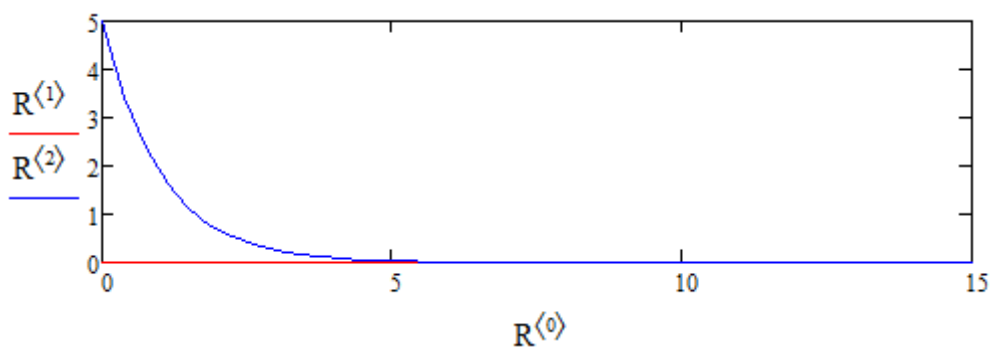


Рисунок 3.1 Зависимость числа хищников от времени при отсутствии жертвы

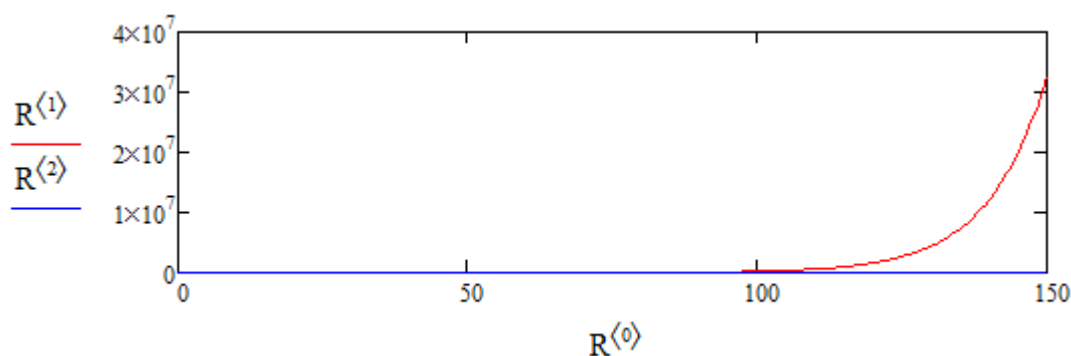


Рисунок 3.2 Зависимость числа жертв от времени при отсутствии хищников

Как видно, в данных случаях система соответствует математической модели.

### Задания для самостоятельного изучения процесса на основе математической модели

Рассмотрим, как ведёт себя система при различных начальных параметрах. Пусть имеются две популяции – львы и антилопы – хищники и жертвы соответственно, и заданы начальные показатели. Тогда получаем следующие результаты (рисунок 3.3):

Таблица 3.1. Коэффициенты колебательного режима системы

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	30	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

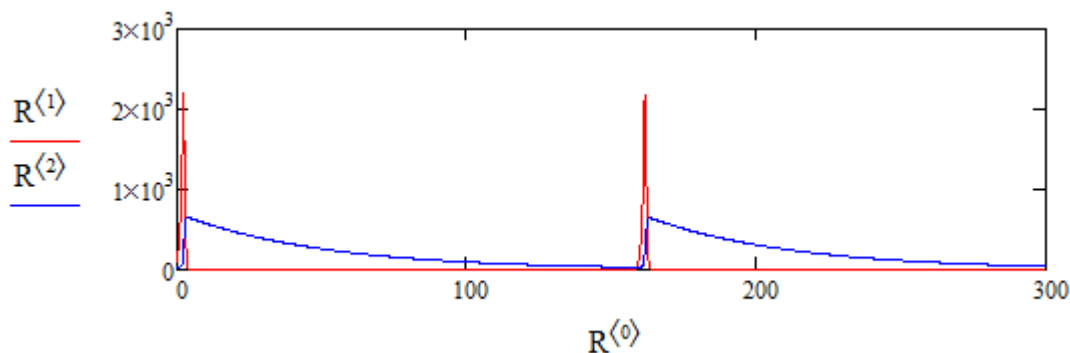


Рисунок 3.3 Система при значении параметров из Таблицы 3.1

Проанализируем полученные данные, исходя из графиков. При первоначальном возрастании популяции антилоп наблюдается прирост числа хищников. Заметим, что пик возрастания популяции хищников наблюдается позже, на спаде популяции жертв, что вполне соответствует

реальным представлениям и математической модели. Действительно, рост числа антилоп означает увеличение пищевых ресурсов для львов, что влечёт за собой рост их численности. Далее активное поедание львами антилоп ведёт к стремительному уменьшению численности жертв, что неудивительно, учитывая аппетит хищника, а точнее частоту поедания хищниками жертв. Постепенное снижение численности хищника приводит к ситуации, когда популяция жертвы оказывается в благоприятных для роста условиях. Далее ситуация повторяется с определённым периодом. Делаем вывод, что данные условия не подходят для гармоничного развития особей, так как влекут резкие спады популяции жертв и резкие возрастания обеих популяций.

Положим теперь начальную численность хищника равную 200 особей при сохранении остальных параметров (рисунок 3.4).

Таблица 3.2. Коэффициенты колебательного режима системы

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

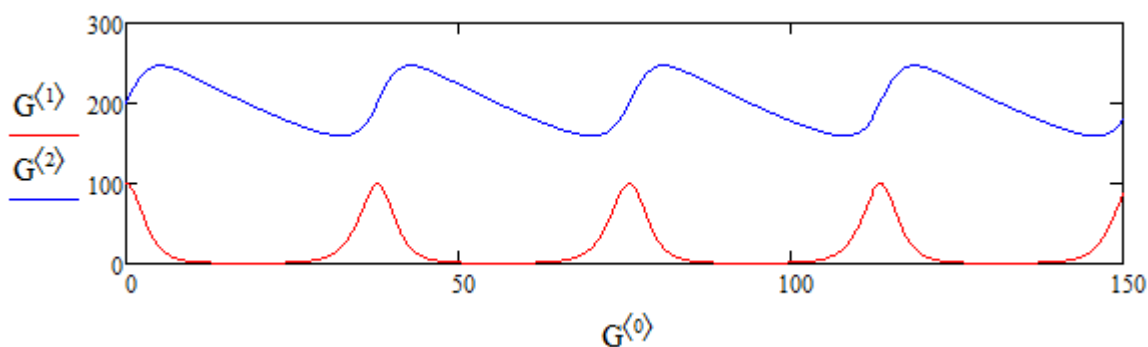


Рисунок 3.4 Система при значении параметров из Таблицы 3.2

Теперь колебания системы происходят более естественно. При данных предположениях система существует вполне гармонично, отсутствуют резкие возрастания и убывания количества численности в обеих популяциях. Делаем вывод, что при данных параметрах обе популяции развиваются достаточно равномерно для совместного обитания на одной территории.

Зададим начальную численность хищника равную 100 особей, численность жертв 200 при сохранении остальных параметров (рисунок 3.5).



Таблица 3.3 Коэффициенты колебательного режима системы

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	100	200
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

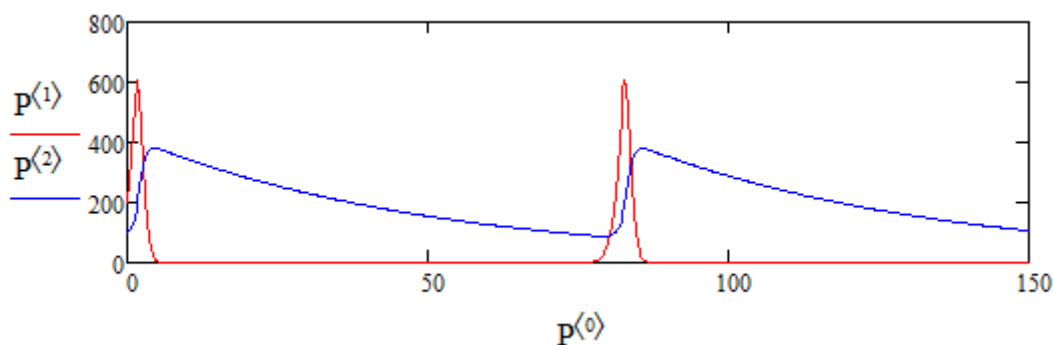


Рисунок 3.5 Система при значении параметров из Таблицы 3.3

В данном случае ситуация близка к первой рассмотренной ситуации. Заметим, что при взаимном увеличении популяций переходы от возрастания к убыванию популяции жертвы стали более плавными, а популяция хищника сохраняется в отсутствие жертв при более высоком численном значении. Делаем вывод, что при близком отношении одной популяции к другой их взаимодействие происходит более гармонично, если конкретные начальные численности популяций достаточно большие.

Рассмотрим изменение других параметров системы. Пусть начальные численности соответствуют второму случаю. Увеличим коэффициент размножения жертв (рисунок 3.6).

Таблица 3.4. Коэффициенты колебательного режима системы

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,02	4
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

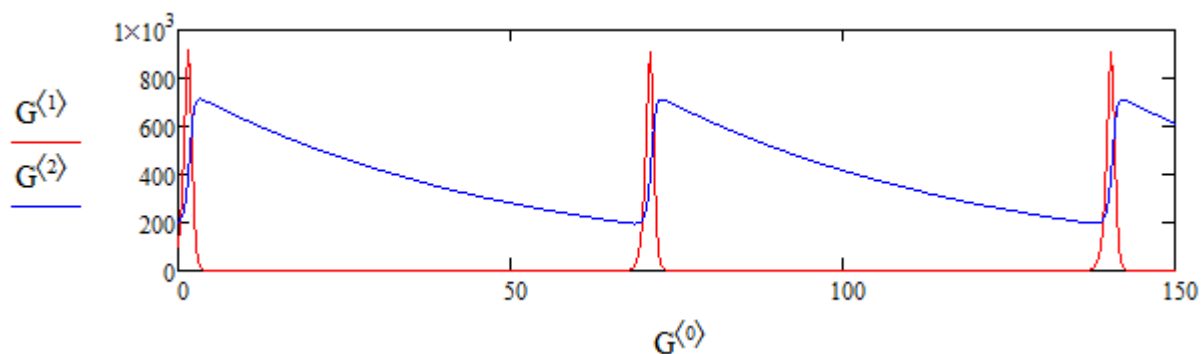


Рисунок 3.6 Система при значении параметров из Таблицы 3.4

Сравним данный результат с результатом, полученным во втором случае. В этом случае наблюдается более быстрый прирост жертвы. При этом и хищник, и жертва ведут себя так, как в первом случае, что объяснялось невысокой численностью популяций. При таком взаимодействии обе популяции достигают пика со значениями, намного большими, чем во втором случае.

Теперь увеличим коэффициент прироста хищников (рисунок 3.7).

Таблица 3.5. Коэффициенты колебательного режима системы

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,04	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

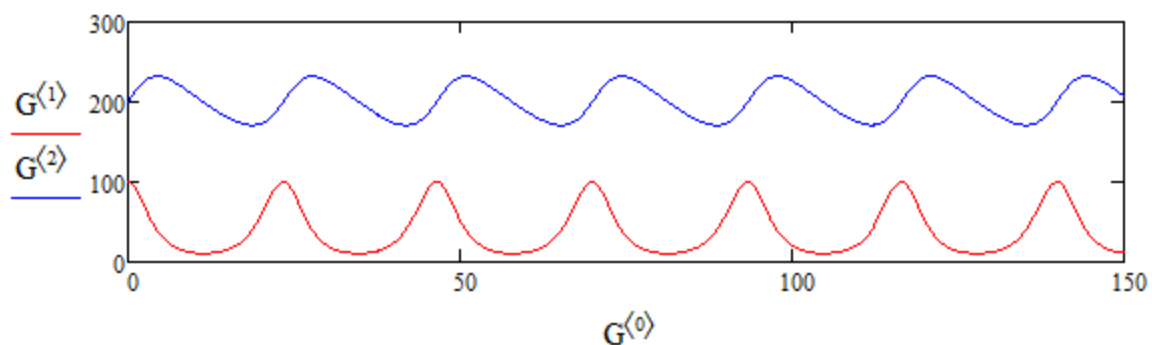


Рисунок 3.7 Система при значении параметров из Таблицы 3.5

Сравним результаты аналогично. В этом случае общая характеристика системы остаётся прежней, за исключением изменения периода. Как и следовало ожидать, период стал меньше, что объясняется быстрым уменьшением популяции хищника в отсутствие жертв.

И, наконец, изменим коэффициент межвидового взаимодействия. Для начала увеличим частоту поедания хищниками жертв:

Таблица 3.6. Коэффициенты колебательного режима системы

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,004	0,01

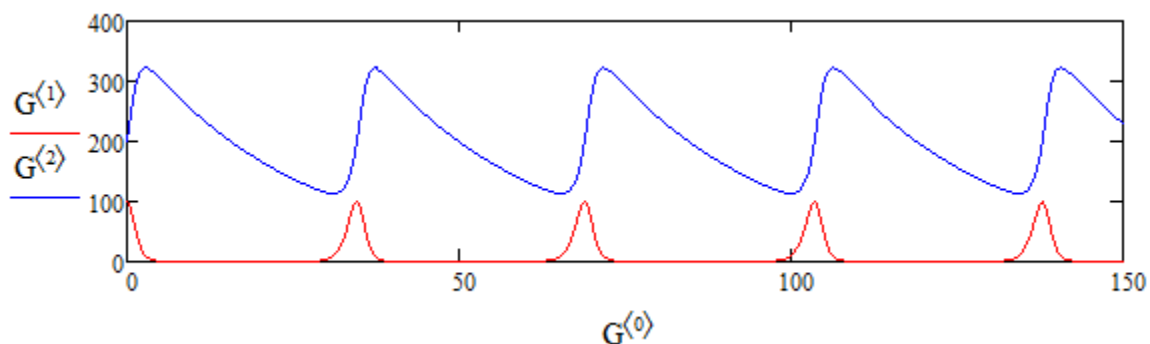


Рисунок 3.8 Система при значении параметров из Таблицы 3.6

Так как хищник поедает жертву чаще, то максимум численности его популяции увеличился по сравнению со вторым случаем, а также уменьшилась разность между максимальным и минимальным значениями численности популяций. Период колебаний системы остался прежним.

И теперь уменьшим частоту поедания хищниками жертв:

Таблица 3.7. Коэффициенты колебательного режима системы

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,0001	0,01

1.

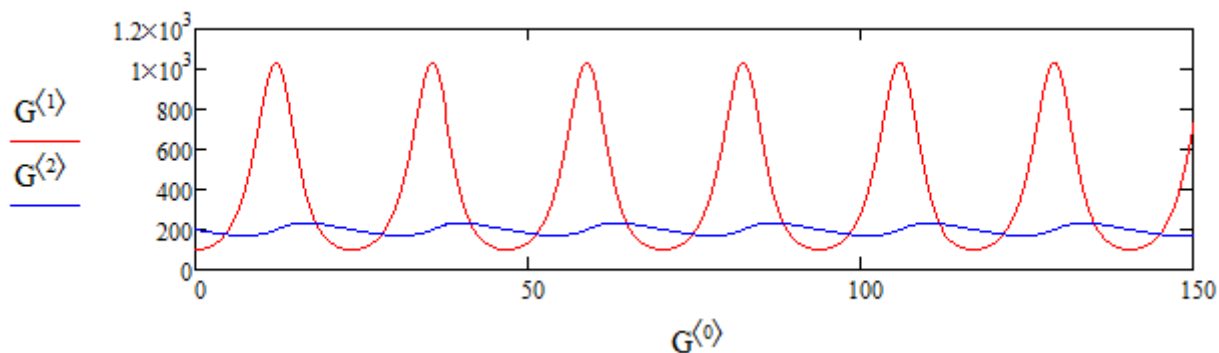


Рисунок 3.9 Система при значении параметров из Таблицы 3.7

Теперь хищник поедает жертву реже, максимум численности его популяции уменьшился по сравнению со вторым случаем, а максимум численности популяции жертвы увеличился, причём в 10 раз. Отсюда следует, что при данных условиях популяция жертвы имеет большую свободу в смысле размножения, ведь хищнику хватает меньшей массы, чтобы насытиться. Также уменьшилась разность между максимальным и минимальным значениями численности популяций.

При попытке моделирования сложных процессов в природе или обществе, так или иначе, возникает вопрос о корректности модели. Естественно, что при моделировании происходит упрощение процесса, пренебрежение некоторыми второстепенными деталями. С другой стороны, существует опасность упростить модель слишком сильно, выкинув при этом важные черты явления вместе с несущественными. Для того чтобы избежать данной ситуации, необходимо перед моделированием изучить предметную область, в которой используется данная модель, исследовать все её характеристики и параметры, а главное, выделить те черты, которые являются наиболее значимыми. Процесс должен иметь естественное описание, интуитивно понятное, совпадающее в основных моментах с теоретической моделью.

Рассмотренная в данной работе модель обладает рядом существенных недостатков. Например, предположение о неограниченных ресурсах для жертвы, отсутствие сторонних факторов, влияющих на смертность обоих видов и т.д. Все эти предположения не отражают реальную ситуацию. Однако, несмотря на все недостатки, модель получила широкое распространение во многих областях, даже далёких от экологии. Это можно объяснить тем, что система «хищник-жертва» даёт общее представление именно о взаимодействии видов. Взаимодействие с окружающей средой и прочими факторами можно описать другими моделями и анализировать их в совокупности.

Взаимоотношения типа «хищник-жертва» - существенная черта различных видов жизнедеятельности, в которых происходит столкновение двух взаимодействующих между собой сторон. Данная модель имеет место не только в экологии, но и в экономике, политике и других сферах деятельности. Например, одно из направлений, касающихся экономики, это анализ рынка труда, с учётом имеющихся потенциальных работников и вакантных рабочих мест.

## Тема 4. Использование случайных величин для моделирования

Во время Второй Мировой войны при разработке атомной бомбы в лаборатории Лос-Аламоса возникла задача о расчете глубины проникновения нейтронов в вещество. Решить её традиционными методами не удавалось. Станислав Улам и Джон фон Нейман предложили новый метод, основанный на использовании тактики, которой руководствовался игрок в кости.

Этот метод получил кодовое название метода Монет-Карло.

Идея метода такова. Исходный объект или явление заменяется другим объектом или явлением, поведение которого связано со случайными величинами (СВ). Общим у исходного объекта и у вновь сконструированного является решение обеих моделей.

Подбор объект может быть никак не связан с исходным ни по своей природе, ни по математическому описанию.

Общая идея методов типа Монте-Карло заключается в следующем:

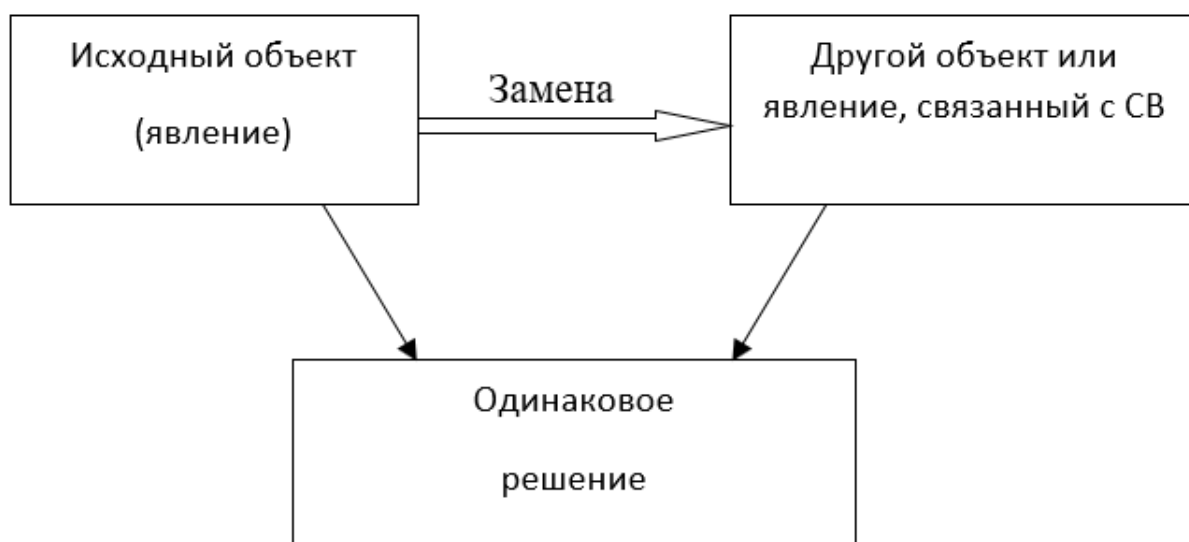


Рисунок 4.1 Схема методов типа Монте-Карло

Детерминированные модели – это такие модели, поведение которых однозначно описывается (определено).

Стохастические (вероятностные) модели - модели, решение которых описывается при той или иной достоверности. Основаны на использовании случайных величин.

Отметим, что методы Монте-Карло могут использоваться независимо от того, был ли исходный объект детерминированным или стохастическим.

Продemonстрируем это на примере задачи Бюффона.

### [Задача Бюффона.](#)

В XVIII веке французский натуралист граф де Бюффон предложил необычное решение задачи о вычислении числа  $\pi$  с любым количеством знаков.

При этом он предложил бросать тонкую иглу на поверхность, размеченную горизонтальными линиями с заданным шагом и подсчитывать количество пересечений иглы с линиями.

В соответствии с рисунком 4.1 исходная задача - вычисление числа  $\pi$ , а сконструированная – эксперимент по бросанию иглы на поверхность.

Покажем связь между этими задачами: длина иглы -  $2 \cdot l$ , поверхность разлинована с шагом  $2 \cdot d$ .

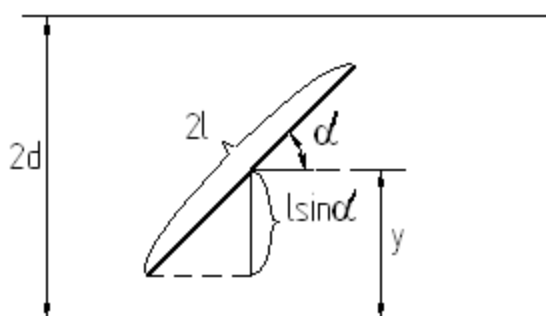


Рисунок 4.2 Возможное положение иглы после бросания.

Достаточно рассмотреть в силу симметрии ситуацию, когда

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y \in [0; d].$$

Понятно, что пересечение возможно, если  $y \leq l \cdot \sin(\alpha)$ .

На рисунке 4.3 изобразим на плоскости  $(\alpha, y)$  соответствующую область. Заштрихуем область, где  $y \leq l \cdot \sin(\alpha)$ .

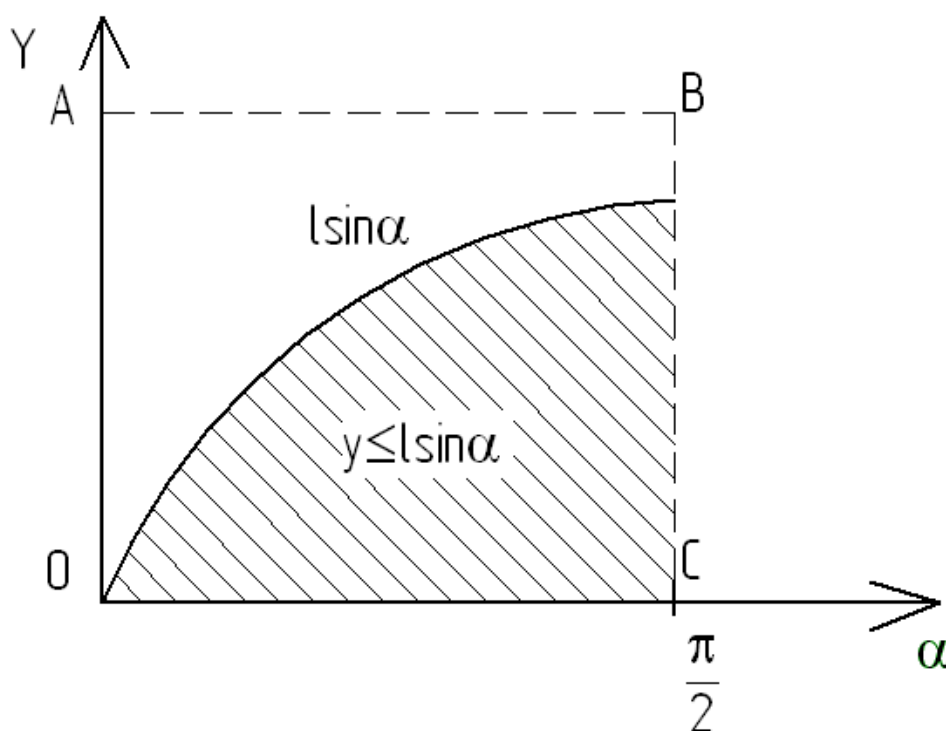


Рисунок 4.3. Заштрихованная область соответствует наличию пересечения.

Так как угол  $\alpha$  равномерно распределён на интервале  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , то вероятность того, что точка попадет в заштрихованную область будет равна отношению площади этой области к площади прямоугольника OABC.

$$P_{\text{попадания}} = \frac{S_{\text{заштрихованная}}}{S_{OABC}}$$

$$S_{OABC} = \frac{\pi}{2} \cdot d$$

$$S_{\text{заштрихованная}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \sin(\alpha) \cdot d\alpha = -l \cdot \cos \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = l$$

Так как при увеличении числа испытаний частота появления события стремится к вероятности, получим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{попаданий}}}{N} = p$$

$$\frac{N_{\text{попаданий}}}{N} \approx \frac{l}{\frac{\pi}{2} \cdot d}$$

тогда

$$\pi \approx \frac{2 \cdot N \cdot l}{N_{\text{попаданий}} \cdot d}$$

Реализация этого эксперимента в среде MATHCAD может выглядеть так

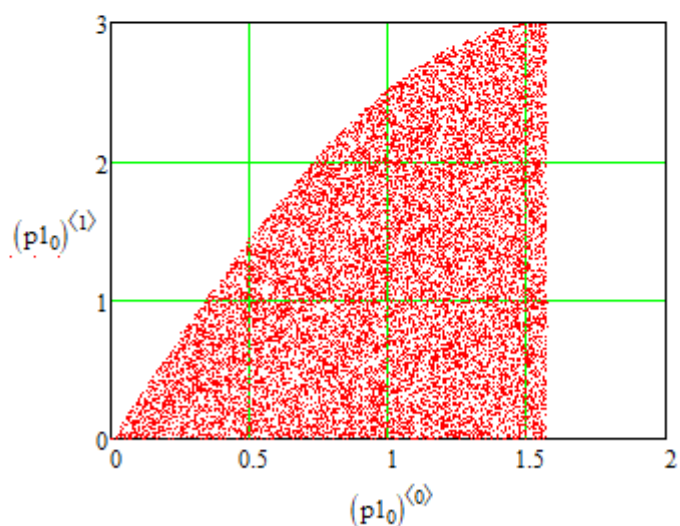
$L := 3$      $d := 5$      $f(x,y) := L \cdot \sin(x) - y$      $g(x,y) := -y$      $n := 40000$

```

p(n) :=
  n1 ← 0
  for i ∈ 1..n
    x ← md( $\frac{\pi}{2}$ )
    y ← md(d)
    if 1 = (g(x,y) ≤ 0) · (f(x,y) ≥ 0)
      n1 ← n1 + 1
      t1,0 ← x
      t1,1 ← y
  rez ←  $\begin{pmatrix} t \\ n1 \end{pmatrix}$ 
rez

```

$p1 := p(n)$



$$pi := \frac{2 \cdot L}{d \cdot \frac{p1_1}{n}}$$

$pi = 3.115$     полученное приближенное значение пи

### [Вычисление площадей и объёмов тел с помощью случайных величин.](#)

Идея заключается в том, что область  $\Omega$  полностью помещается в  $N$ -мерный параллелепипед, измерения которого известны и объём  $V = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots$



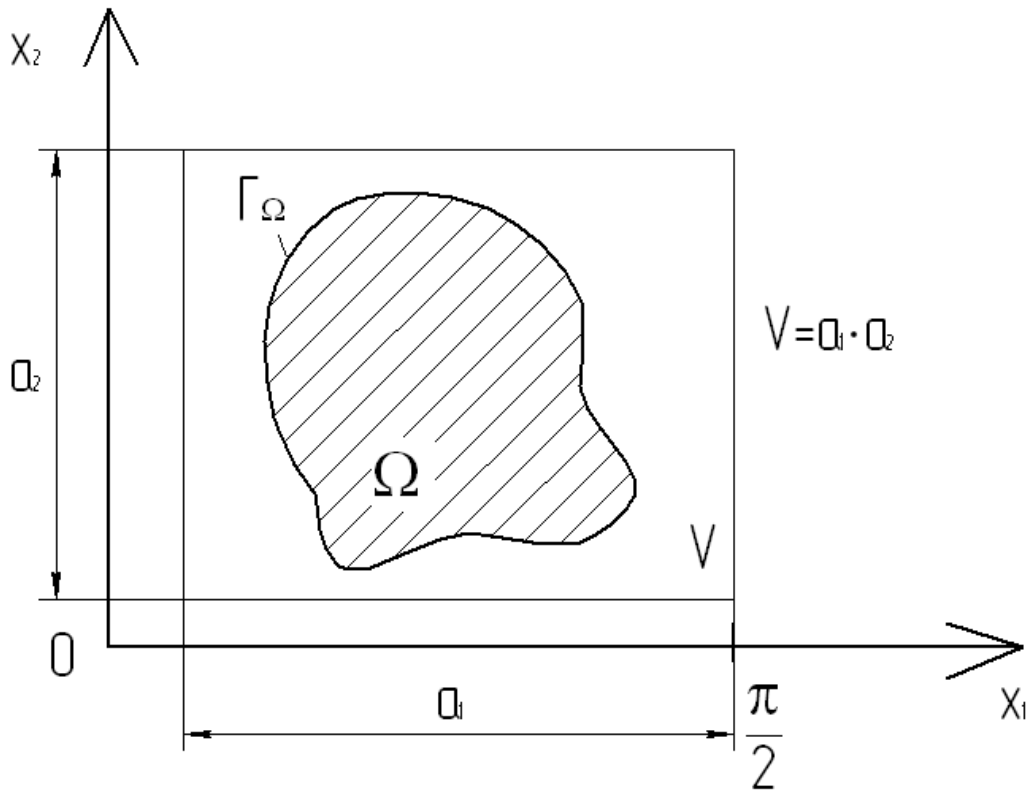


Рисунок 4.4. Область  $\Omega$  в двумерном пространстве.

Пусть нам удастся набрасывать случайным образом точки в этот параллелепипед  $V$ , причем эти точки должны рассеиваться равномерно, тогда очевидно, что

$$\frac{\Omega}{V} \approx \frac{N_{\text{попаданий}}}{N}$$

$$\Omega \approx \frac{V \cdot N_{\text{попаданий}}}{N}$$

$N_{\text{попаданий}}$  - количество попавших точек в область  $\Omega$ .

$N$  – общее число рассеянных точек.

В изложенном подходе существуют две сложности:

1. Нужно иметь датчик случайных чисел, при обращении к которому удастся получить точку  $x_i$ , принадлежащую интервалу  $(a, b)$  и выбранную на этом интервале без предпочтения. Распределение такой случайной величины называется **равномерным**.

2. Нужно иметь возможность ответить на вопрос, попала ли точка внутрь области  $\Omega$  или нет. Для этого нужно аналитически описать уравнение границы  $\Omega$ :  $\Gamma(\Omega)$ . Нужно также уметь правильно строить область  $V$ , в которой целиком содержится  $\Omega$ .

Во многих средах программирования существуют процедуры, позволяющие получать значения такой случайной величины.

Например, в среде MATHCAD:

$\text{Rnd}(\varpi)$  – функция, генерирующая одно значение случайной величины, с равномерным распределением на интервале  $[0, \varpi]$ .

Тогда  $\text{Rnd}(b-a)+a$  – выражение, генерирующая одно значение случайной величины, с равномерным распределением на интервале  $[a,b]$ .

$\text{Runif}(N,a,b)$  – функция, генерирующая  $N$  значений случайной величины, с равномерным распределением на  $[a,b]$ .

Приведём пример документа MATHCAD для вычисления площади фигуры, ограниченной двумя кривыми с уравнениями:

$$\begin{aligned} -(x+5)^2 - y + 6 &= 0 \\ \sin(x) - y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

Изобразим эти кривые:

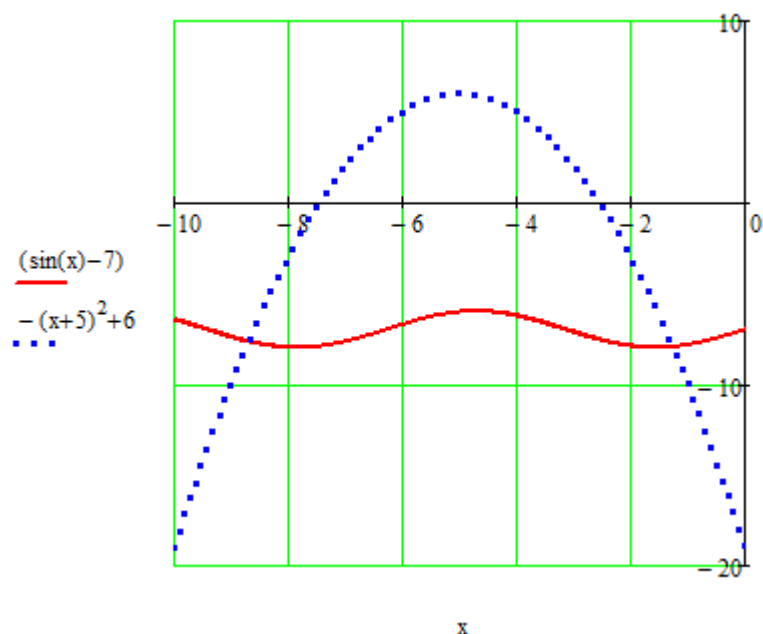


Рисунок 4.5. Кривые, ограничивающие фигуру.

Исходные функции:  $f(x, y) := -(x + 5)^2 + 6 - y$      $g(x, y) := \sin(x) - 7 - y$

Вспомогательные функции     $ab(x, y) := x$      $cd(x, y) := y$

Начальные "затравочные" значения     $x := 0$      $y := 0$

Поиск границ области:

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Minimize}(ab, x, y)$      $a := ab(z_0, z_1)$      $a = -8.697$

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Maximize}(ab, x, y)$      $b := ab(z_0, z_1)$      $b = -1.264$

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Minimize}(cd, x, y)$      $c := cd(z_0, z_1)$      $c = -8$

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Maximize}(cd, x, y)$      $d := cd(z_0, z_1)$      $d = 6$

Функция, вычисляющая количество точек, попавших в область и их координаты:

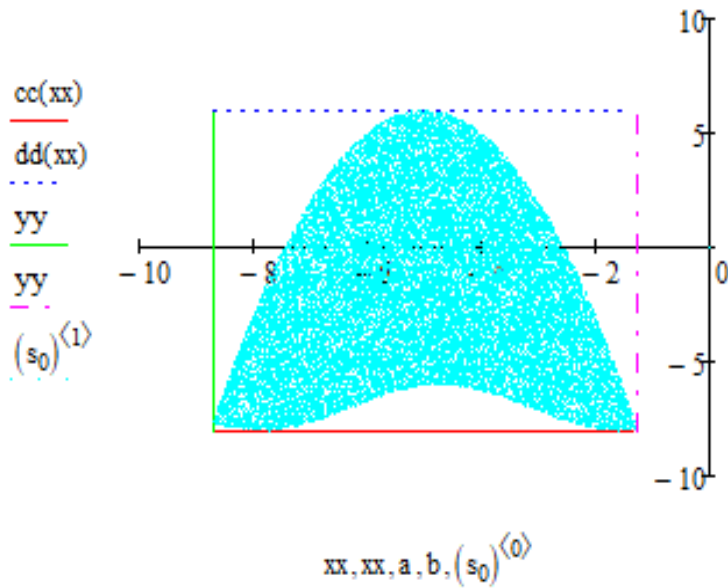
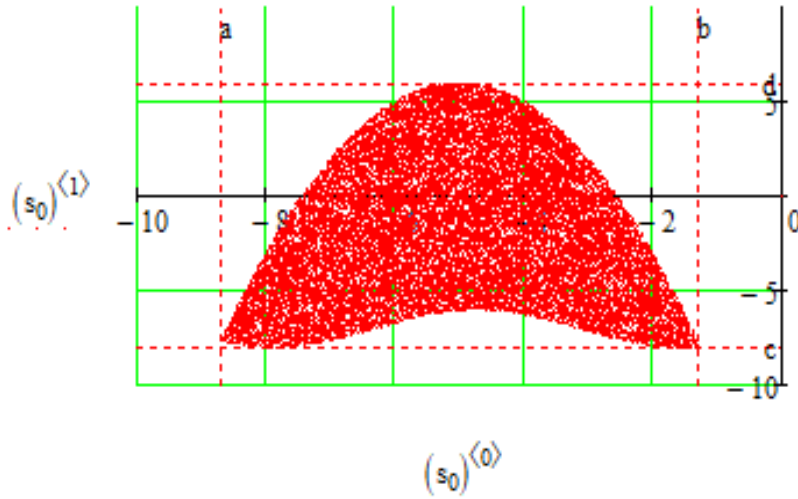
```

p(n) :=
  n1 ← 0
  for i ∈ 1..n
    x ← md(b - a) + a
    y ← md(d - c) + c
    if 1 = (g(x, y) ≤ 0) · (f(x, y) ≥ 0)
      n1 ← n1 + 1
      ti,0 ← x
      ti,1 ← y
  rez ← ( t
          n1 )
  rez
n := 40000
s := p(n)

```

$cc(x) := c$        $dd(x) := d$        $aa(x) := x$        $bb(x) := x$   
 $xx := a, a + 0.1.. b$   
 $yy := c, c + 0.1.. d$

Графическое отображение:



Сравнение полученного значения с значением вычисленным интегралом

$$s := (b - a) \cdot (d - c) \cdot \frac{s_1}{n} \quad s = 63.999$$

$$s1 := \int_a^b 13 - \sin(x) - (x + 5)^2 dx \quad s1 = 63.452$$

На рисунке красным цветом отображены точки, попавшие в область.

Напишем процедуру, возвращающую векторы абсцисс и ординат точек, попавших внутрь области ограниченной кривыми, при  $N$  набросанных точек внутрь двумерной области  $[a,b] \times [c,d]$ .

```

P(a,b,c,d,N) :=
  k ← 0
  for i ∈ 1..N
    x ← rnd(b - a) + a
    y ← rnd(d - c) + c
    if (g(x,y) ≤ 0)(f(x,y) > 0)
      k ← k + 1
      Pk,1 ← x
      Pk,2 ← y
  P
  
```

Главным недостатком статистических методов при моделировании является их медленная сходимость. Она пропорциональна величине  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , где  $n$  – количество выполненных экспериментов.

Например, для получения очередного знака в числе  $\pi$  потребуется выполнить в 100 раз больше экспериментов, чем для вычисления предыдущего знака. В общем случае справедливо следующее утверждение:

$$P \left\{ \left| \frac{N_{\text{попаданий}}}{N_{\text{общее}}} - \frac{\text{объем}\Omega}{\text{объем}V} \right| < \sqrt{\frac{\frac{\text{объем}\Omega}{\text{объем}V} \cdot \left(1 - \frac{\text{объем}\Omega}{\text{объем}V}\right)}{\xi \cdot N_{\text{общее}}}} \right\} \geq 1 - \xi$$

$\xi$  - задаваемая величина.

$P$  – достоверность того, что отличие вычисленной величины от истинной не

будет превосходить  $\sqrt{\frac{\frac{\text{объем}\Omega}{\text{объем}V} \cdot \left(1 - \frac{\text{объем}\Omega}{\text{объем}V}\right)}{\xi \cdot N_{\text{общее}}}}$  и эта достоверность окажется не меньше

$1 - \xi$ .

Примеры документов MATHCAD для вычисления объемов на основе изложенного подхода.

Шар вписанный в единичный куб

$$0 \leq x, y, z \leq 1$$

ORIGIN := 0      Сфера в единичном кубе      R := 0.5  
Исходные функции:       $f(x, y, z) := (x - R)^2 + (y - R)^2 + (z - R)^2 - R^2$   
Вспомогательные функции       $ab(x, y, z) := x$        $cd(x, y, z) := y$        $Ef(x, y, z) := z$   
Начальные "затравочные" значения       $x := 0.5$        $y := 0.5$        $z := 0.5$   
Поиск границ области:  
Given       $f(x, y, z) \leq 0$        $p := \text{Minimize}(ab, x, y, z)$        $a := ab(p_0, p_1, p_2)$        $a = -0.0006$   
Given       $f(x, y, z) \leq 0$        $p := \text{Maximize}(ab, x, y, z)$        $b := ab(p_0, p_1, p_2)$        $b = 1.0006$   
Given       $f(x, y, z) \leq 0$        $p := \text{Minimize}(cd, x, y, z)$        $c := cd(p_0, p_1, p_2)$        $c = -9.452699 \times 10^{-7}$   
Given       $f(x, y, z) \leq 0$        $p := \text{Maximize}(cd, x, y, z)$        $d := cd(p_0, p_1, p_2)$        $d = 1.000186$   
Given       $f(x, y, z) \leq 0$        $p := \text{Minimize}(Ef, x, y, z)$        $e := Ef(p_0, p_1, p_2)$        $e = -0.0006$   
Given       $f(x, y, z) \leq 0$        $p := \text{Maximize}(Ef, x, y, z)$        $ff := Ef(p_0, p_1, p_2)$        $ff = 1.0006$

Функция, вычисляющая количество точек, попавших в область и их координаты:

```
p(n) :=
| n1 ← -1
| x ← runif(n, a, b)
| y ← runif(n, c, d)
| z ← runif(n, e, ff)
| for K ∈ 0..n - 1
|   if 1 = (f(xK, yK, zK) ≤ 0)
|     | n1 ← n1 + 1
|     | tn1,0 ← xK
|     | tn1,1 ← yK
|     | tn1,2 ← zK
| rez ← ( t )
|       ( n1 )
| rez
```

$n := 40000$        $s := p(n)$   
пропа := s<sub>1</sub>      пропа = 20898      количество точек, попавших в область

V<sub>kub</sub> := 1      Объем единичного куба

$$V := V_{\text{kub}} \cdot \frac{\text{пропа}}{n} \quad V = 0.52245 \quad \text{Вычисленный Объем тела}$$

$$V_S := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \quad V_S = 0.523599 \quad \text{Объем тела Аналитическая формула}$$

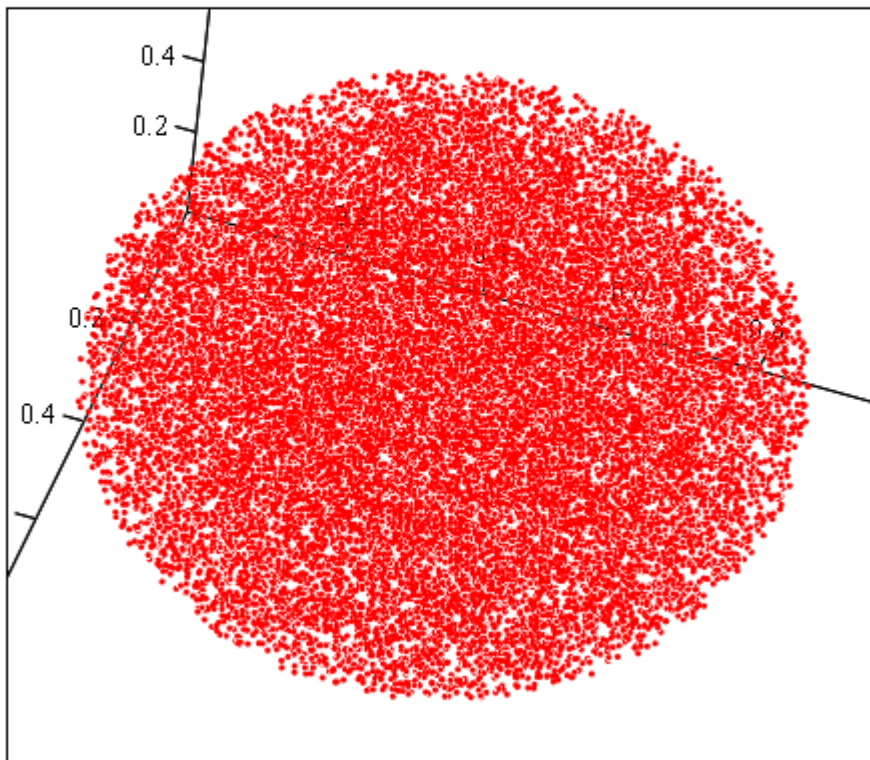
[Оглавление](#)

	0	1	2
0	0.073503	0.673144	0.654561
1	0.646865	0.289756	0.186019
2	0.218316	0.524511	0.425811
3	0.544084	0.086067	0.507489
4	0.625901	0.355692	0.944494
5	0.362645	0.525801	0.226666
6	0.535873	0.596999	0.815997
7	0.636509	0.563184	0.924174
8	0.165921	0.308764	0.668593
9	0.599152	0.347301	0.864188
10	0.242327	0.428723	0.842658
11	0.15672	0.242012	0.384796
12	0.34646	0.565491	0.119435
13	0.206989	0.419512	0.450113
14	0.10336	0.603748	0.783952
15	0.376564	0.4434	0.444198
$s_0 =$ 16	0.711496	0.676972	0.364008
17	0.871321	0.181933	0.576567
18	0.888468	0.429759	0.29948
19	0.526829	0.491257	0.681082
20	0.254779	0.71452	0.514615
21	0.288351	0.189362	0.662566
22	0.378428	0.309679	0.203476
23	0.55295	0.601344	0.630756
24	0.615452	0.673228	0.81624
25	0.426893	0.360165	0.802903
26	0.386181	0.396944	0.28607
27	0.850623	0.246105	0.364675
28	0.590738	0.181772	0.172162
29	0.569661	0.521375	0.080201
30	0.60199	0.237822	0.2203
31	0.524144	0.138462	0.370034
32	0.56918	0.230401	0.531074
33	0.933211	0.602964	...

координаты точек,  
попавших в область

Облако точек попавших в область

$$\alpha := \left[ (s_0)^{\langle 0 \rangle} \right] \quad \beta := (s_0)^{\langle 1 \rangle} \quad \gamma := (s_0)^{\langle 2 \rangle}$$



$(\alpha, \beta, \gamma)$



Куб, заданный соотношением:

$$\frac{1}{4} \leq x, y, z \leq \frac{3}{4}$$

ORIGIN := 0

Исходные функции:  $f(x, y, z) := \begin{cases} 1 & \text{if } \left[ \left( \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right) \cdot \left( \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right) \cdot \left( \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \right) \right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Вспомогательные функции  $ab(x, y, z) := x$  cd(x, y, z) := y  $Ef(x, y, z) := z$

Начальные "затравочные" значения  $x := 0.5$   $y := 0.5$   $z := 0.5$

Поиск границ области:

Given  $\left( \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \right)$

$p := \text{Minimize}(ab, x, y, z)$   $a := ab(p_0, p_1, p_2)$   $a = 0.25$

Given  $\left( \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \right)$

$p := \text{Maximize}(ab, x, y, z)$   $b := ab(p_0, p_1, p_2)$   $b = 0.75$

Given  $\left( \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \right)$

$p := \text{Minimize}(cd, x, y, z)$  c := cd(p<sub>0</sub>, p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>)  $c = 0.25$

Given  $\left( \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \right)$

$p := \text{Maximize}(cd, x, y, z)$   $d := cd(p_0, p_1, p_2)$   $d = 0.75$

Given  $\left( \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \right)$

$p := \text{Minimize}(Ef, x, y, z)$  e := Ef(p<sub>0</sub>, p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>)  $e = 0.25$

Given  $\left( \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right)$   $\left( \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \right)$

$p := \text{Maximize}(Ef, x, y, z)$   $ff := Ef(p_0, p_1, p_2)$   $ff = 0.75$

Функция, вычисляющая количество точек, попавших в область и их координаты:

```

p(n) :=
  n1 ← -1
  x ← runif(n, a, b)
  y ← runif(n, c, d)
  z ← runif(n, e, ff)
  for K ∈ 0..n - 1
    if 1 = (f(xK, yK, zK))
      n1 ← n1 + 1
      tn1,0 ← xK
      tn1,1 ← yK
      tn1,2 ← zK
  rez ← (
    t
    n1
  )
rez

```

n := 4000     $\underline{s}_1 := p(n)$

npopa := $s_1$	npopa = 3999	Количество точек, попавших в область
Vkub := (b - a) · (d - c) · (ff - e)		Объем области, ограничивающей тело
$\underline{V} := \text{Vkub} \cdot \frac{\text{npopa}}{n}$	V = 0.124969	Вычисленный Объем тела
VS := 0.5 <sup>3</sup>	VS = 0.125	Объем тела Аналитическая формула

$$s_0 =$$

	0	1	2
0	0.466912	0.604513	0.528072
1	0.396056	0.339194	0.582495
2	0.500088	0.393635	0.527546
3	0.442994	0.694075	0.45994
4	0.459228	0.66354	0.665135
5	0.61091	0.514767	0.570946
6	0.654719	0.4378	0.380795
7	0.299265	0.744556	0.730664
8	0.635673	0.284378	0.714426
9	0.53253	0.702638	0.631158
10	0.36503	0.443895	0.387402
11	0.661125	0.363301	0.698696
12	0.653427	0.466537	0.642621
13	0.391576	0.71409	0.279991
14	0.55503	0.561054	...

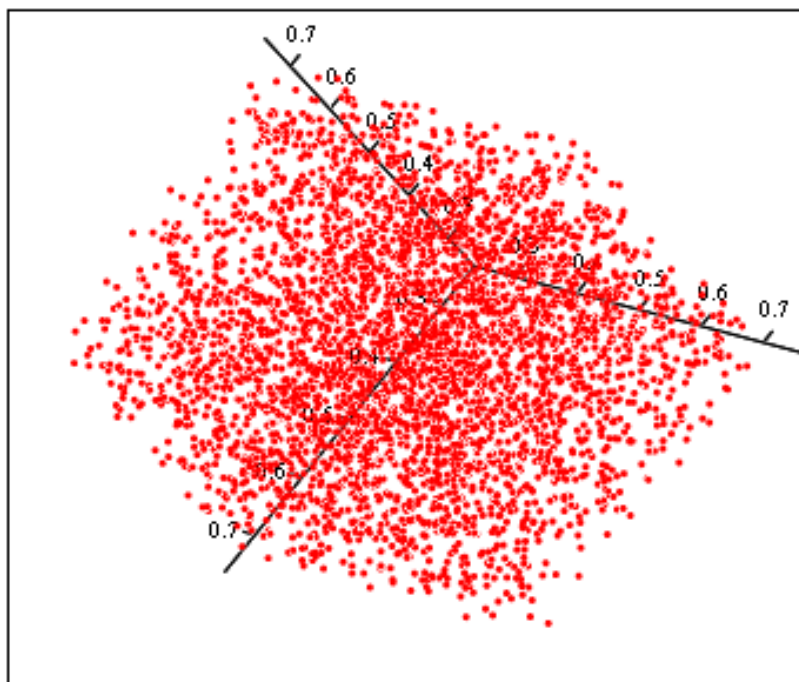
координаты точек,  
попавших в область

Облако точек, попавших в область

$$\alpha := \left[ (s_0)^{\langle 0 \rangle} \right]$$

$$\beta := (s_0)^{\langle 1 \rangle}$$

$$\gamma := (s_0)^{\langle 2 \rangle}$$



$(\alpha, \beta, \gamma)$

Геометрическое множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

$$\begin{cases} x^2 \cdot \sin(10 \cdot \pi \cdot y) \geq \sqrt{z} \\ x \cdot y \cdot z \geq 0,001 \\ 0 \leq x, y, z \leq 1 \end{cases}$$

ORIGIN := 0

Исходные функции:

$$f(x, y, z) := \begin{cases} 1 & \text{if } \left[ \left( \sqrt{z} < x^2 \cdot \sin(10\pi \cdot y) \right) \cdot (0.001 < x \cdot y \cdot z) \cdot (0 < x < 1) \cdot (0 < y < 1) \cdot (0 < z < 1) \right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Вспомогательные функции       $ab(x, y, z) := x$        $cd(x, y, z) := y$        $Ef(x, y, z) := z$

Начальные "затравочные" значения       $x := 0.5$        $y := 0.5$        $z := 0.5$

Поиск границ области:

Given       $\left( \sqrt{z} < x^2 \cdot \sin(10\pi \cdot y) \right)$        $(0.001 < x \cdot y \cdot z)$        $(0 < x < 1)$        $(0 < y < 1)$        $(0 < z < 1)$   
 $p := \text{Minimize}(ab, x, y, z)$        $a := ab(p_0, p_1, p_2)$        $a = 0.331027$

Given       $\left( \sqrt{z} < x^2 \cdot \sin(10\pi \cdot y) \right)$        $(0.001 < x \cdot y \cdot z)$        $(0 < x < 1)$        $(0 < y < 1)$        $(0 < z < 1)$   
 $p := \text{Maximize}(ab, x, y, z)$        $b := ab(p_0, p_1, p_2)$        $b = 1.000001$

Given       $\left( \sqrt{z} < x^2 \cdot \sin(10\pi \cdot y) \right)$        $(0.001 < x \cdot y \cdot z)$        $(0 < x < 1)$        $(0 < y < 1)$        $(0 < z < 1)$   
 $p := \text{Minimize}(cd, x, y, z)$        $c := cd(p_0, p_1, p_2)$        $c = 0.20224$

Given       $\left( \sqrt{z} < x^2 \cdot \sin(10\pi \cdot y) \right)$        $(0.001 < x \cdot y \cdot z)$        $(0 < x < 1)$        $(0 < y < 1)$        $(0 < z < 1)$   
 $p := \text{Maximize}(cd, x, y, z)$        $d := cd(p_0, p_1, p_2)$        $d = 0.499035$

Given       $\left( \sqrt{z} < x^2 \cdot \sin(10\pi \cdot y) \right)$        $(0.001 < x \cdot y \cdot z)$        $(0 < x < 1)$        $(0 < y < 1)$        $(0 < z < 1)$   
 $p := \text{Minimize}(Ef, x, y, z)$        $e := Ef(p_0, p_1, p_2)$        $e = 0.002005$

Given       $\left( \sqrt{z} < x^2 \cdot \sin(10\pi \cdot y) \right)$        $(0.001 < x \cdot y \cdot z)$        $(0 < x < 1)$        $(0 < y < 1)$        $(0 < z < 1)$   
 $p := \text{Maximize}(Ef, x, y, z)$        $ff := Ef(p_0, p_1, p_2)$        $ff = 1.000691$

Функция, вычисляющая количество точек, попавших в область и их координаты:

```

p(n) := | n1 ← -1
        | x ← runif(n, a, b)
        | y ← runif(n, c, d)
        | z ← runif(n, e, ff)
        | for K ∈ 0..n - 1
        |   if 1 = (f(xK, yK, zK))
        |     | n1 ← n1 + 1
        |     | tn1,0 ← xK
        |     | tn1,1 ← yK
        |     | tn1,2 ← zK
        |   rez ← ( t
        |           |
        |           | n1
        |           |
        |           |
        | rez

```

n := 40000     $\overset{\text{рез}}{s} := p(n)$

прора := s<sub>1</sub>    прора = 3931    Количество точек, попавших в область

V<sub>kub</sub> := (b - a) · (d - c) · (ff - e)    Объем области, ограничивающей тело

$\overset{\text{рез}}{V} := V_{\text{kub}} \cdot \frac{\text{прора}}{n}$     V = 0.019487    Вычисленный Объем тела

$$s_0 =$$

	0	1	2
0	0.82312	0.221336	0.037957
1	0.900846	0.227805	0.221148
2	0.916684	0.258414	0.301825
3	0.790273	0.434849	0.173765
4	0.720251	0.248573	0.164093
5	0.651052	0.258922	0.105258
6	0.875669	0.21774	0.107915
7	0.755838	0.46454	0.222678
8	0.91721	0.425903	0.183298
9	0.753274	0.262163	0.255046
10	0.946985	0.243347	0.363633
11	0.948197	0.480502	0.175054
12	0.638449	0.268262	0.046192
13	0.908441	0.458829	0.311144
14	0.977915	0.222505	...

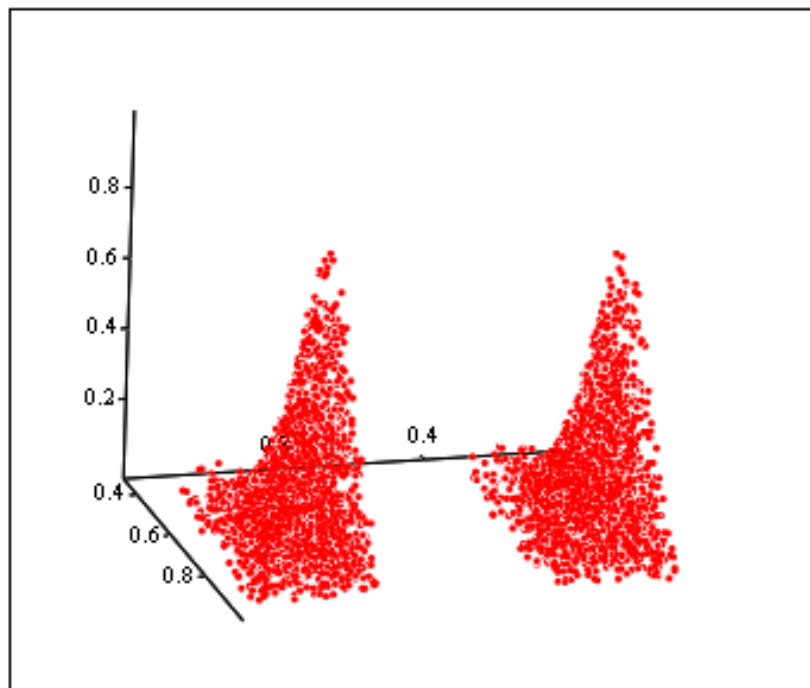
координаты точек,  
попавших в область

Облако точек, попавших в область

$$\alpha := \left[ (s_0)^{\langle 0 \rangle} \right]$$

$$\beta := (s_0)^{\langle 1 \rangle}$$

$$\gamma := (s_0)^{\langle 2 \rangle}$$



$(\alpha, \beta, \gamma)$

### Использование случайных блужданий для решения граничных задач теории потенциалов. Метод Судзуо Какутани

Рассмотрим следующий процесс. Из заданной точки в случайном направлении выполнен шаг заданной величины. Из вновь полученной точки ещё раз в случайном направлении выполняется шаг такой же величины. Такой процесс называется случайным блужданием. Он хорошо описывает человека после праздника. Физическое явление – броуновское движение пылинки.

Оказывается, можно доказать следующий очевидный факт: при неограниченном увеличении количества шагов расстояние от начальной точки до текущей пропорционально величине  $A \cdot \sqrt{n}$ , где  $A$  – константа. Это означает, что любая сколь угодно удаленная граница будет достигнута при увеличении числа блужданий.

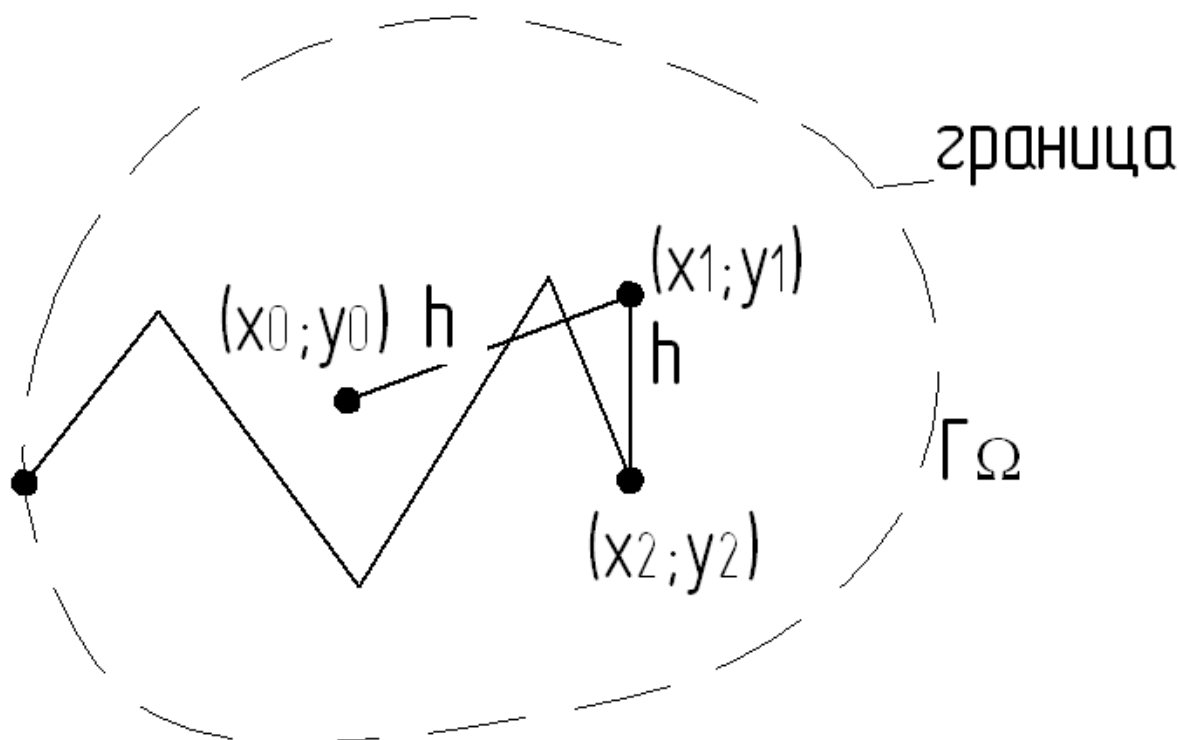


Рисунок 4.6. Иллюстрация случайных блужданий.

Японский ученый Судзуо Какутани предложил использовать этот факт для решения граничных задач теории потенциала.

Под граничной задачей понимается следующее: нужно найти значение некоторой функции, которая внутри области  $\Omega$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (ДУ), чаще всего в частных производных, вида

$$B \cdot u = r, \quad (4.1)$$

где  $B$  – дифференциальный оператор,  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_k)$  – неизвестная функция,  $r = r(x_1, x_2, \dots, x_k)$  – заданная функция).

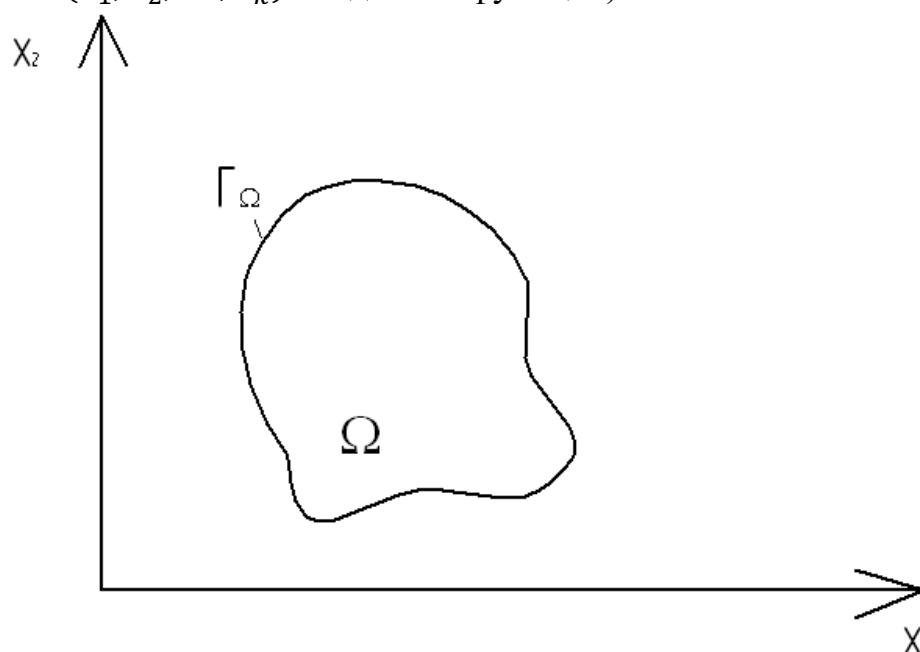


Рисунок 4.7. Область  $\Omega$  в двумерном случае

На границе  $\Gamma_\Omega$  области  $\Omega$  задаются известные значения

$$C \cdot u = q \quad (4.2)$$

где  $C$  – другой дифференциальный оператор,  $q = q(x_1, x_2, \dots, x_k)$  – заданная функция.

Пример.

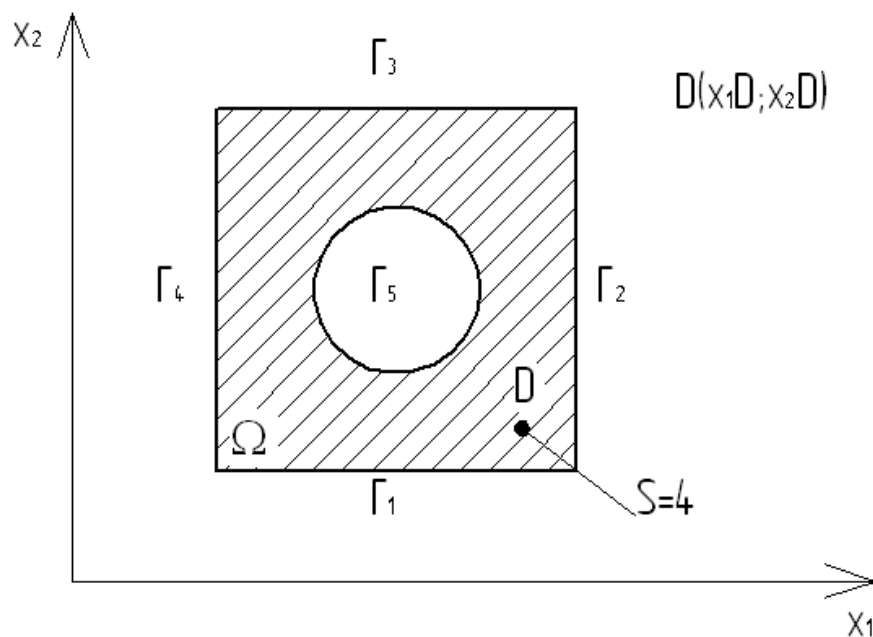


Рисунок 4.8. Распределение температуры в данной области.

Рассмотрим задачу о распределении температур внутри этой области. Пусть у нас на внешней границе происходит теплообмен с окружающей средой. На



внутренней границе  $\Gamma_5$  известно значение температуры в каждой точке, и в точке  $D$  расположен источник тепла с постоянной интенсивностью равной 4,  $k$  – коэффициент теплопроводности материала.

Можно показать, что распределение температуры  $u = u(x_1, x_2)$  внутри области  $\Omega$  описывается следующим ДУ:

$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{в } \Omega) \quad (4.3)$$

$$\text{где } f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \neq x_D, x_2 \neq x_D \\ 4, & \text{если } x_1 = x_D, x_2 = x_D \end{cases}$$

Тогда дифференциальный оператор  $B$  из уравнения (4.1) в этом случае имеет вид:

$$B = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$r = f(x_1, x_2)$$

Граничные условия, описывающие теплообмен на границе области, словами можно сформулировать так: поток тепла по направлению нормали к поверхности пропорционален разности между температурой точки поверхности и температурой окружающей среды.

Пусть температура окружающей среды  $u_{\text{возд}}$ .

На  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  можно записать:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = H(u - u_{\text{возд}}) \quad (4.4)$$

Тогда дифференциальный оператор  $C$  из соотношения (4.2) в данном случае применительно к (4.4):

$$C = \frac{\partial}{\partial x_1} n_{x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} n_{x_2} - H$$

$$\vec{n} = (n_{x_1}, n_{x_2})$$

$$q = -H \cdot u_{\text{возд}}$$

На границе  $\Gamma_5$ :

$$u = u_{\text{жидк}}$$

Здесь дифференциальный оператор имеет вид  $C=1$

$$q = u_{\text{жидк}}$$

### [Граничная задача теории потенциалов](#)

Оказывается, что различные по своей физической сущности процессы описываются одинаковыми по виду ДУ в частных производных:

1. Задача о чистом кручении стержня произвольного сечения
2. Задача о распределении тепла
3. Задача об уровне жидкости в пористом материале

## 4. Задача о распределении электрических потенциалов и т.д.

Эти задачи описываются уравнениями вида

$$L \cdot u = f$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

Оказывается, что решения таких уравнений обладают следующими свойствами: Решение в точке  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})$  будет средним из значений этой функции на произвольной границе  $\Gamma_\xi$ , окружающей эту точку

$$u(x_0, y_0) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u(x_i^*, y_i^*) \quad (4.5)$$

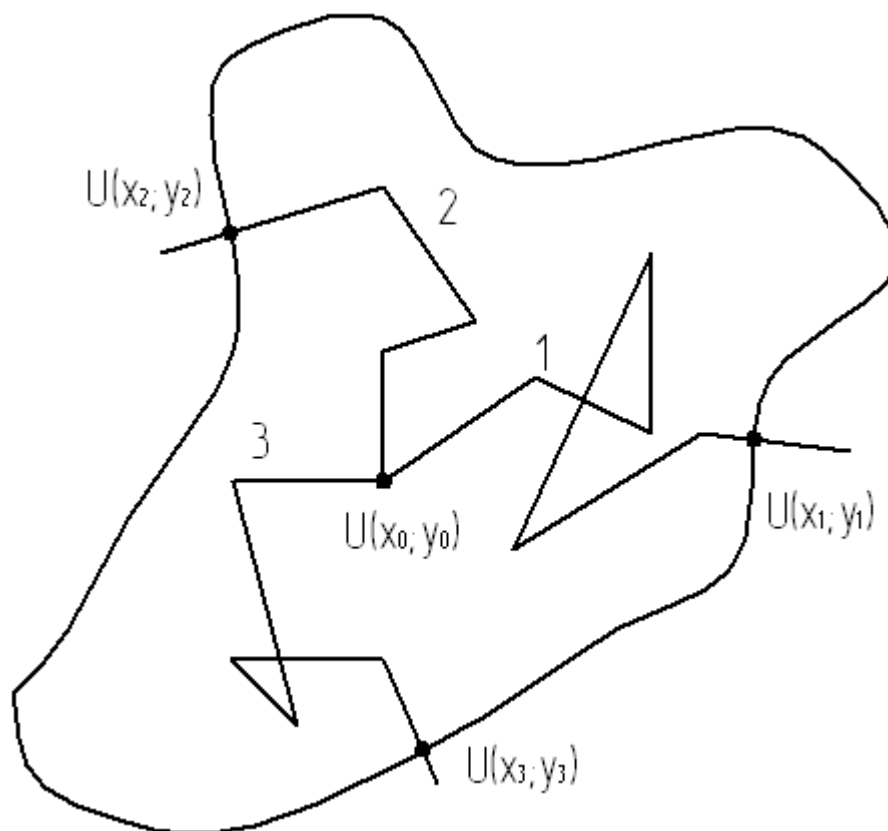


Рисунок 4.9. Иллюстрация метода Какутани.

Таким образом выполняется отдельное случайное блуждание. Оно прекращается, когда достигнута граница области. Значение функции на границе запоминается. Выполняется  $m$  блужданий и вычисляется усредненное значение. Физический смысл такого процесса понятен: если точка начала блужданий расположена ближе к какой-то части границы, то большее количество блужданий будут заканчиваться на этой части граница, а значит, что и в сумме (4.5) большее количество слагаемых будет отражать температуру этой части. Фрагмент документа MATHCAD для реализации случайных блужданий, соответствующих следующему рисунку, представлен ниже.

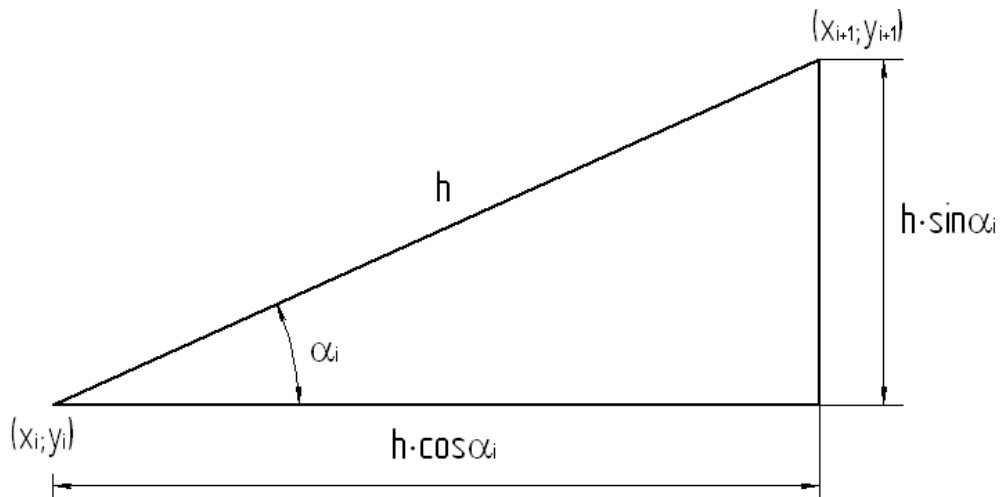


Рисунок 4.10. Шаг случайного блуждания с шагом  $h$ .  
Для двумерного случая фрагмент документа MATHCAD:

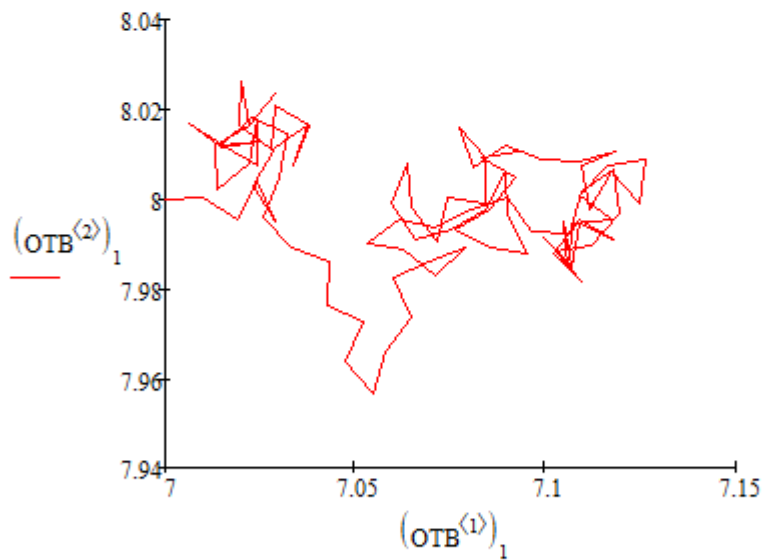
$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot \cos(\alpha_i) & h &= \text{const} \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot \sin(\alpha_i) & \alpha_i &\in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

ORIGIN := 1

```
SLB(x0,y0,h,N,xx) := | Seed(xx)
                    | alfa ← runif(N,0,2·π)
                    | x1 ← x0
                    | y1 ← y0
                    | for i ∈ 2..N
                    |   | xi ← xi-1 + h·cos(alfai-1)
                    |   | yi ← yi-1 + h·sin(alfai-1)
                    | rez ← (x y)
```

x0 := 7    y0 := 8    xx := 6    N := 100    h := 0.01

OTB := SLB(x0,y0,h,N,xx)      OTB = ( {100,1} {100,1} )



$$\left( \text{OTB}^{(1)} \right)_1^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	7	7.01	7.019	7.024	7.029	7.023	...

$$\left( \text{OTB}^{(2)} \right)_1^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	8	8	7.995	8.004	7.995	8.003	...

Для трехмерного случая фрагмент документа MATHCAD:

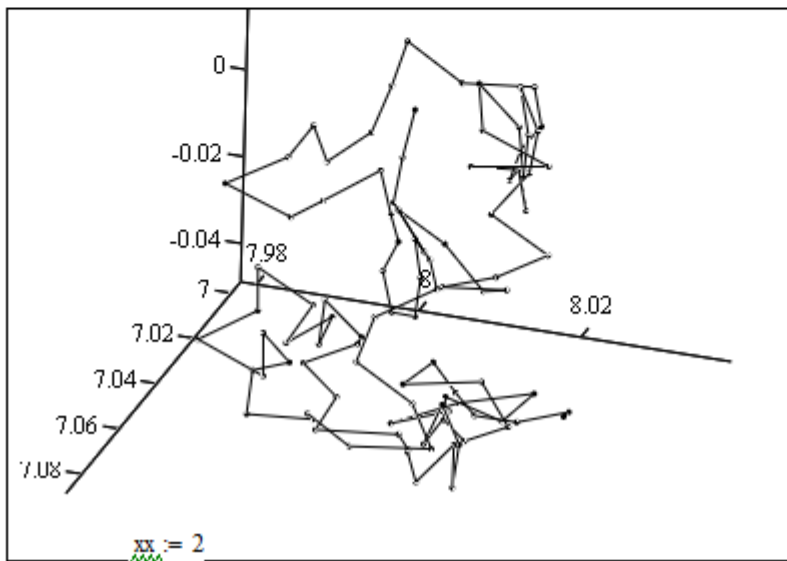
```

SLB(x0,y0,z0,h,N,xx) := Seed(xx)
                        alfa ← runif(N,0,2·π)
                        tt ← runif(N, -π/2, π/2)
                        x1 ← x0
                        y1 ← y0
                        z1 ← z0
                        for i ∈ 2..N
                            x1 ← x1 + h·cos(alfa)·cos(tt)
                            y1 ← y1 + h·sin(alfa)·cos(tt)
                            z1 ← z1 + h·sin(tt)
                        rez ← (x y z)

```

z0 := 0    x0 := 7    y0 := 8    xx := 6    N := 100    h := 0.01

OTB := SLB(x0,y0,z0,h,N,xx)  
 $\alpha := (\text{OTB}^{(1)})_1$      $\beta := (\text{OTB}^{(2)})_1$      $\gamma := (\text{OTB}^{(3)})_1$



$(\alpha, \beta, \gamma)$

### [Укрупненный алгоритм метода Какутани. Решение граничной задачи теории потенциалов](#)

1. Выбрать случайное направление.
2. Выполнить шаг фиксированной величины в этом направлении.
3. Есть ли пересечение с контуром границы на выполненном шаге?

Если да, то перейти к шагу 4.

Если нет, то перейти к шагу 1.

4. Запомнить значение искомой функции в точке пересечения с границей, исходя из граничных условий.

5. Найти новое среднее значение искомой функции в точке начала блужданий по формуле (5).

6. Отличается ли новое среднее от старого больше, чем на  $\xi$ ?

Если да, то перейти к шагу 7.

Если нет, то вычисления прекращаем.

7. Переходим в точку начала блужданий и возвращаемся к шагу 1.

В этом алгоритме предполагается, что у пользователя имеется процедура, возвращающая ему точку пересечения двух геометрических объектов: отрезка, соответствующего очередному шагу блужданий, и кривой, описывающей нужный участок границы:

## Тема 5. Метод наилучшего случая и статистический анализ

### Понятие о параметрах математической модели

Рассмотрим пример объекта проектирования (рисунок 5.1.).

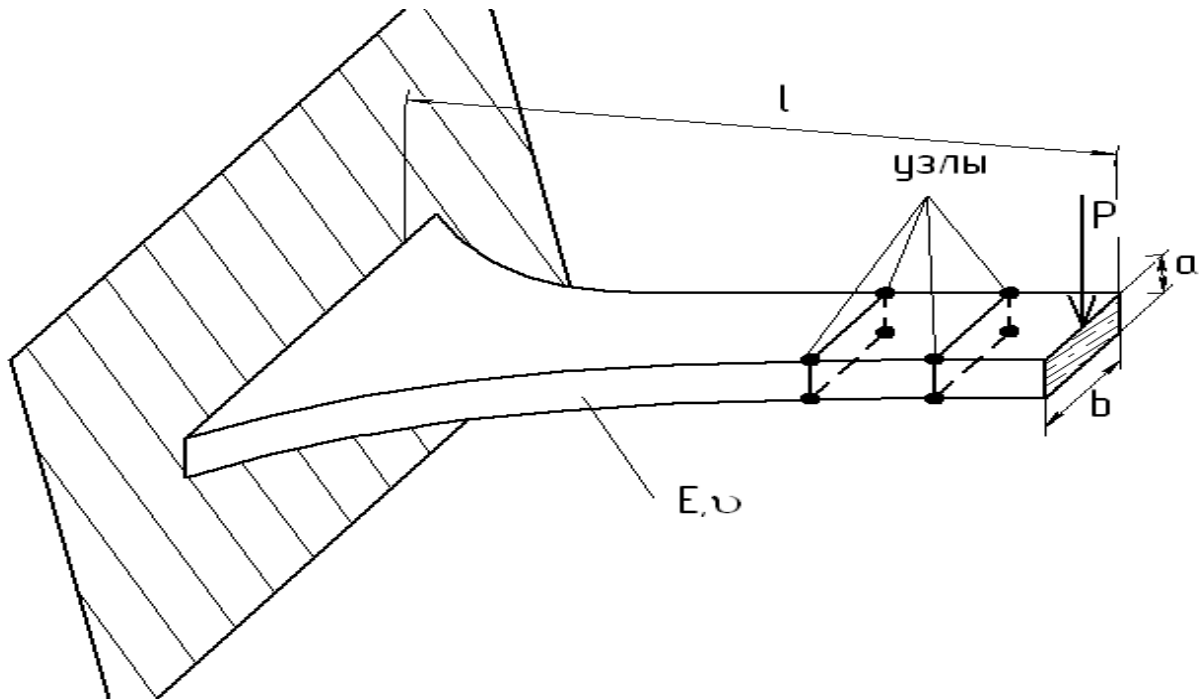


Рисунок 5.1. Консольная балка.

В результате расчета исследователя интересует  $u_{max}$  - перемещения правого конца и  $\sigma_{max}$  - максимальные напряжения в материале балки.

Расчеты выполняются либо с использованием аналитических формул, либо на основании какого-либо численного метода.

Тогда формально можно считать, что имеет место связь:

$$\bar{Y} = \vec{F}(\bar{X}, \bar{Q}), \quad (5.1)$$

где

$\bar{X}$  - вектор внутренних параметров модели;

$\bar{Q}$  - вектор внешних параметров модели;

$Y$  – вектор выходных параметров;

$\vec{F}(\bar{X}, \bar{Q})$  - связь между  $\bar{X}, \bar{Q}$  и  $Y$ .

Соотношение (1) мы и будем называть математической моделью объекта.

Например, в методе конечных элементов решение подобной задачи сводится к решению системы ОДУ второго порядка:

[Оглавление](#)

$$K \cdot \bar{U} + C \cdot \dot{\bar{U}} + M \cdot \ddot{\bar{U}} = \vec{P}(t)$$

$\vec{U} = \bar{U}(t)$  - вектор узловых перемещений.

На основании полученных узловых перемещений по формуле можно вычислить  $\sigma_{max}$ , а  $u_{max}$  будет совпадать с перемещением одного из узлов. При моделировании всегда система или объект мысленно отделяются от окружающей среды. Сама же внешняя среда заменяется воздействиями на этот объект. Эти воздействия задаются в виде сил, перемещений, температур и т.д., на которые исследователь повлиять не может.

Понятно, что такое разделение на объект и внешнюю среду носит условный характер.

Применительно к рассматриваемому примеру, вектор  $\bar{X}$  имеет следующие компоненты:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} E \\ \nu \\ a \\ b \\ L \\ \dots \end{pmatrix}$$

Здесь E- модуль Юнга материала,  $\nu$  - коэффициент Пуассона материала, a,b,L- геометрические размеры.

Как видно, компоненты этого вектора могут иметь разную физическую природу.

$\vec{Q} = \begin{pmatrix} p(t) \\ t^0 \\ \dots \end{pmatrix}$  - перемещения заделки, температуры и т.д.

$\vec{Y} = \begin{pmatrix} u_{max} \\ \sigma_{max}() \end{pmatrix}$  - это вектор, состоящий из компонент, которые мы хотим наблюдать.

$\vec{F}(\bar{X}, \vec{Q})$  - модель.

### [Понятие о работоспособности технического объекта.](#)

Под работоспособностью будем понимать выполнение ограничений на выходные параметры.

Эти ограничения обычно задаются в виде односторонних или двусторонних неравенств, где  $u_{i_{доп}}$  - допустимые заданные величины.

Например



$$i = \overline{1, n} \quad y_i \leq y_{i_{\text{доп}}}$$

$y_{i_{\text{доп}}}$  задают исходя из технических требований, сформулированных заказчиком.

Метод наихудшего случая при анализе работоспособности технического объекта.

При изготовлении технического объекта в силу особенностей технологического процесса могут возникнуть отличия в значениях предполагаемых и фактических внутренних параметров.

Предполагаемые значения называются **номинальными**.

$$x_{j_{\text{ном}}}, \text{ где } j = \overline{1, m}$$

Значения внешних параметров тоже могут отличаться от номинальных.

$$q_{k_{\text{ном}}}, \text{ где } k = \overline{1, l}$$

Из этого следует, что и значения выходных параметров, получаемых при реальной эксплуатации изделия могут отличаться от значений, соответствующих номинальным входным параметрам.

Возникает вопрос: если условие работоспособности выполняется для  $y_{i_{\text{номинального}}}$ , то выполнится ли оно для реального  $y_i$ ? Из этого следует, что однократного анализа недостаточно для ответа на вопрос о работоспособности технического объекта.

Одним из способов более обоснованного ответа является метод наихудшего случая. Идея этого метода предполагает, что известны отклонения для каждого из внутренних параметров от их номинальных значений (рисунок 5.2).

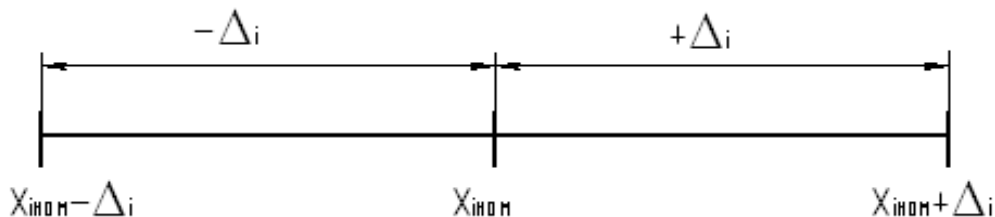


Рисунок 5.2. Отклонения для каждого из внутренних параметров

Аналогично и для внешних параметров.

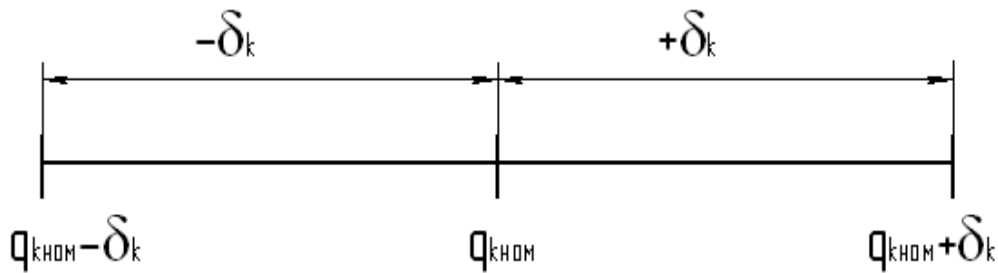


Рисунок 5.3. Отклонения для каждого из внешних параметров

Для параметра  $x_1$  выберем теперь значение на том из концов интервала (значений  $x_{1\text{номинальное}} - \Delta_i$  и  $x_{1\text{номинальное}} + \Delta_i$ ), которое обеспечивает **приближение** выходного параметра у к ограничениям (по сравнению с номинальным значением) и назовём его  $x_{1\text{наихудшее}}$ ; зафиксируем его и повторим то же для второй, третьей и так далее компоненты - вектора  $\bar{X}$  внутренних параметров модели.

Затем выполним все то же самое для всех компонент вектора  $\bar{Q}$  внешних параметров модели.

Таким образом мы получим вектор  $\bar{X}_{\text{наихудшее}}$  и  $\bar{Q}_{\text{наихудшее}}$ .

Если окажется, что компоненты вектора

$$\bar{Y}_{\text{наихудшее}} = \vec{F}(\bar{X}_{\text{наихудшее}}, \bar{Q}_{\text{наихудшее}}),$$

еще удовлетворяют условиям работоспособности, то технический объект признается работоспособным **в смысле метода наихудшего случая**.

Понятно, что такой подход приведет к **излишнему завышению требований для технического объекта**, т.к. возникновение ситуации, когда одновременно «все стало плохо» (одновременно стали плохими все компоненты) едва ли возможно.

Это приведет к завышению массы и стоимости изделия, однако этот подход все же используют при проектировании объектов, функционирование которых может привести к гибели людей или экологической катастрофе, связывая это с безопасностью.

### Статистический анализ работоспособности

Более обоснованным подходом для оценки работоспособности технического объекта является вероятностная оценка выходных параметров. При этом можно поступать примерно так:

- изучить поведение  $x_i$  (например, с помощью наблюдений) и подобрать соответствующий закон распределения, описывающий  $x_i$  как случайную величину  $i = \overline{1, m}$ .

- выполнить отдельный анализ на основе математической модели, при этом:

- сформировать  $x_i$  с помощью подобранного распределения
- выбрать компоненты  $q_i$  исходя из требований наихудшего случая

Таких экспериментов выполнить  $p$  штук. При этом для компоненты  $y_k$  получится  $p$  значений.

$$y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \dots, y_k^{(p)}$$

Остается выполнить осреднение и принять

$$\tilde{y}_k \approx \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p y_k^{(s)} \quad (5.2)$$

Эту величину теперь можно использовать для проверки условия работоспособности. Возникает вопрос о количестве экспериментов, которое гарантирует достоверность результатов. Для ответа на этот вопрос поступают так. Кроме величины  $\tilde{y}_k$  вычисляют такую величину:

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{s=1}^p \left( y_k^{(s)} - \tilde{y}_k \right)^2 \quad (5.3)$$

Это несмещенная оценка дисперсии.

Если теперь вычислить величину

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot t_\gamma \cdot \sigma_k, \quad (5.4)$$

$p$  – количество экспериментов,

$t_\gamma$  - величина, определяемая из соотношения:

$$\gamma = \Phi(t_\gamma),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$\gamma$  - задаваемая достоверность.

то можно гарантировать, что

$$|\tilde{y}_k - M_k| \leq \xi$$

и  $\tilde{y}_k$  отличается от ожидаемого не больше, чем на  $\xi$ .

Связь между  $\gamma$  и  $t_\gamma$  можно найти либо по таблице, либо по встроенной процедуре MATHCAD. Чаще всего используются следующие значения:

$$\gamma = 0,95 \rightarrow t_\gamma = 1,96$$

$$\gamma = 0,945 \rightarrow t_\gamma = 2$$

Тогда формула (3) примет вид для  $\gamma = 0,945$

$$p=50 \quad \xi_M = 0,28\sigma_K$$

$$p=100 \quad \xi_M = 0,196\sigma_K$$

$$p=1000 \quad \xi_M = 0,062\sigma_K$$

## Понятие о чувствительности математической модели

Пусть задана математическая модель:

$$\vec{Y} = F(\vec{X}, \vec{Q}).$$

Анализ чувствительности заключается в определении матрицы чувствительности  $A$ , элементами которой являются абсолютные коэффициенты влияния (коэффициенты чувствительности), вычисляемые так:

$$A_{ji} = \frac{dy_j}{dx_i}, \quad (5.5)$$

где  $y_j$ -  $j$ -ый выходной,  $x_i$ -  $i$ -ый внутренний (или внешний параметры).

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Через коэффициенты матрицы чувствительности иногда определяют относительный коэффициент влияния:

$$B_{ji} = A_{ji} \cdot \frac{x_{iном}}{y_{jном}}, \quad (5.7)$$

Из (5.5) видно, что  $A_{ji}$  представляет собой скорость изменения  $j$ -того выходного параметра по отношению к изменению  $i$ -того внутреннего параметра.

Заметим, что выбор значения внутреннего параметра метода наихудшего случая, рассмотренного ранее, при наличии одного выходного параметра может быть представлен следующими аналитическими выражениями:

$$x_{iн.с.} = x_{iном} - \text{sign}(A_i) \cdot \Delta x_{iпред}$$

в том случае, когда условие работоспособности сформулировано в виде

$$y \geq y_{доп}.$$

Или в виде

$$x_{iн.с.} = x_{iном} + \text{sign}(A_i) \cdot \Delta x_{iпред}$$

в том случае, когда условие работоспособности сформулировано в виде

$$y \leq y_{доп}.$$

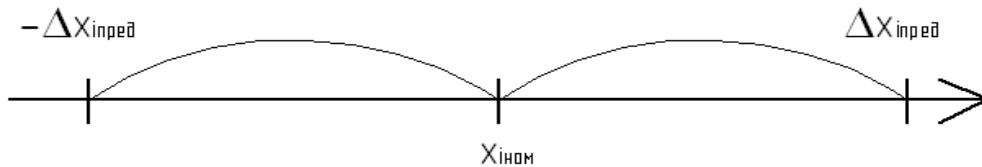


Рисунок 5.4. Графическая иллюстрация условия работоспособности  
где

$$\text{sign}(A_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i > 0 \\ 0, & \text{если } A_i = 0 \\ -1, & \text{если } A_i < 0 \end{cases}$$

То же касается и выбора внешних параметров.

Анализ чувствительности имеет смысл выполнять, например, при использовании оптимизации в том случае, когда однократное обращение к математической модели требует большего времени расчета.

### Пошаговый метод анализа чувствительности (метод приращений)

Запишем разложение функции  $y_j(\vec{X})$  в ряд Тейлора в окрестности аргумента  $\vec{X} = \vec{X}_{\text{ном}}$

$$y_j(\vec{X}) = y_j(\vec{X}_{\text{ном}}) + \left( \frac{\partial y_j}{\partial \vec{X}}, \Delta \vec{X} \right) + \frac{1}{2} (\Delta \vec{X})^T \frac{\partial^2 y_j}{\partial \vec{X}^2} \cdot \Delta \vec{X} + \dots$$

Если удерживать в этой формуле только линейные слагаемые, то получим

$$y_j \approx y_{j\text{ном}} + \left( \frac{\partial y_j}{\partial \vec{X}}, \Delta \vec{X} \right)$$

Выражая отсюда коэффициент:

$$A_{ji} \approx \frac{y_j - y_{j\text{ном}}}{\Delta x_i} \quad (5.8)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{i-1} = 0 \\ \Delta x_i &\neq 0 \\ \Delta x_{i+1} &= \Delta x_{i+2} = \dots = \Delta x_n = 0 \end{aligned}$$

Тогда

$$y_j \approx y_{j\text{ном}} + A_{ji} \cdot \Delta x_i$$

Таким образом для получения коэффициента  $A_{ji}$  методом приращений можно поступить так:

1. выполнить вычисление  $j$ -того выходного параметра при номинальных значениях внутренних параметров;
2.  $i$ -тому внутреннему параметру дать приращение  $\Delta x_i$ , а по другим параметрам приращение запретить  $\Delta x_k = 0$  ( $k \neq i$ );

3. Вычислить  $u_j$  для такого вектора внутренних параметров.
4. По формуле (5.5) вычислить коэффициент чувствительности.
5. При необходимости повторить эти шаги для остальных внутренних параметров.

Таким образом, если внутренних параметров  $n$ , то для вычисления коэффициента  $A_{ji}$  при фиксированном  $j$  потребуется  $n+1$  обращений к математической модели.

Иногда для повышения точности используют следующую формулу:

$$A_{ji} \approx \frac{y_j^+ - y_j^-}{2 \cdot \Delta x_i} \quad (5.9)$$

$y_j^+$  - вычисляется на положительных приращениях  $\Delta x_i$ .

$y_j^-$  - вычисляется на отрицательных приращениях  $\Delta x_i$ .

Формула (5.9) соответствует аппроксимации производной центральной разностью и имеет более высокий порядок точности, чем формула (5.8).

За повышение точности нужно заплатить  $2n$  обращениями к математической модели в формуле (5.9).

Понятно, что в силу выполненной линеаризации, метод приращений может быть «хорошо» использован для медленно меняющихся функций. Это его главный недостаток.

К достоинствам относятся простота и универсальность.

## Тема 6. Моделирование конкурирующих стратегий

### Пример конкурирующих стратегий

Поясним идею моделирования конкурирующих стратегий на примере задачи о выборе стратегии эксплуатации автобуса.

Пусть автобус с регулярным маршрутом должен выполнить в день  $N$ -рейсов. При этом каждый день он начинает работу в хорошем состоянии. Если рейс выполняется в хорошем состоянии, то существует вероятность  $a$  того, что он закончит рейс в ухудшенном состоянии А (небольшая поломка, не влияющая на возможность выполнить очередной рейс). На устранение этой поломки для восстановления автобуса до исходного состояния требуется время, за которое автобус пропустит один рейс. Стратегию эксплуатации автобуса, когда возникшая небольшая поломка устраняется сразу же после рейса, в котором она возникла, назовем « $\alpha$ ».

Если же не проводить этот ремонт, и продолжать рейсы в ухудшенном состоянии, то существует вероятность  $b$  критической поломки автобуса (назовем такое состояние В), когда рейс будет прерван, и потребуются незамедлительный ремонт. При этом больше ни одного рейса до конца дня нельзя будет выполнить. Назовем эту стратегию эксплуатации автобуса « $\beta$ ». Эти две стратегии эксплуатации автобуса представлены в схемах на рисунке 6.1.

Вопрос заключается в том, какая из этих стратегий окажется лучшей при заданных вероятностях  $a$ ,  $b$  и заданном числе предполагаемых рейсов  $N$  в день. В этом смысле стратегии конкурируют между собой.

В изложенной постановке такая задача была решена Морзом, а после него Крайзенем. В этой постановке были получены оценки среднего числа рейсов в день для стратегий « $\alpha$ » и « $\beta$ » соответственно:

$$M_{\alpha} = \frac{N}{1+a} + a \frac{1-(1-a)^N}{(1+a)^2},$$

$$M_{\beta} = \frac{a^2(1-(1-b)^N) - b^2(1-(1-b)^N)}{ab(a-b)}.$$

Здесь

$a$  – вероятность перехода в фазу А в данном рейсе;

$b$  – вероятность перехода в фазу В, если автобус выполняет рейс в фазе А;

$N$  – число запланированных рейсов в день.

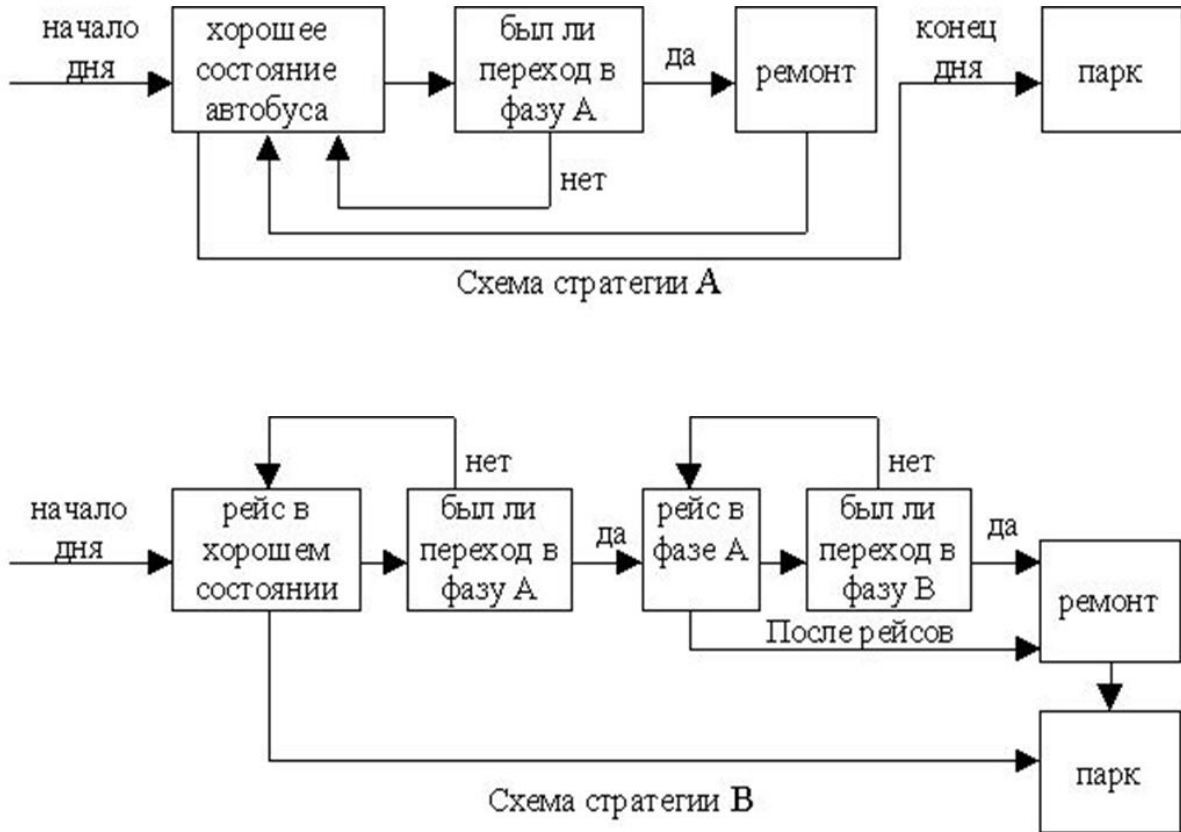


Рисунок 6.1 Схемы стратегий «а» и «б».

### [Построение алгоритмической модели конкурирующих стратегий](#)

Получение представленных выше аналитических выражений даже при незначительном усложнении стратегий крайне затруднительно. В то же время, построение алгоритмической модели затруднений не вызывает, и позволяет легко модифицировать модель при изменении формулировки задачи.

На рисунке 6.2 представлена схема алгоритма для вычисления среднего числа рейсов в день при стратегиях «а» и «б».

Пояснения к схеме:

SG1 – флаг, который обозначает хорошее или ухудшенное состояние при стратегии «а»;

SG1=1 – автобус находится в хорошем состоянии,

SG1=0 – автобус находится в ухудшенном состоянии;

SG2 – флаг, который обозначает хорошее или ухудшенное состояние при стратегии «б»;

SG2=1 – автобус находится в хорошем состоянии,

SG2=0 – автобус находится в ухудшенном состоянии;

SB2 – флаг, который обозначает фазу В при стратегии «б»;



$SB2=1$  – автобус находится в фазе В при стратегии « $\beta$ »,

$SB2=0$  – в иных случаях;

$D_{max}$  – число дней, которые мы хотим моделировать;

$D$  – номер моделируемого дня;

$RA, RB$  – количество действительно выполненных рейсов в течение рассматриваемого дня при стратегиях « $\alpha$ » и « $\beta$ » соответственно;

$SRA, SRB$  – общее число выполненных рейсов за  $D$  рассмотренных дней при стратегиях « $\alpha$ » и « $\beta$ » соответственно;

$AVERA, AVERB$  – среднее число выполненных рейсов за день при стратегиях « $\alpha$ » и « $\beta$ » соответственно;

$Z = RA - RB$  - разность между количеством рейсов при стратегиях « $\alpha$ » и « $\beta$ » соответственно;

$SZ = \sum_D Z$  - общая сумма разностей между количеством рейсов при стратегиях « $\alpha$ » и « $\beta$ » соответственно;

$AVE = AVERA - AVERB$  - разность средних значений между количеством рейсов за день при стратегиях « $\alpha$ » и « $\beta$ » соответственно;

#### ЗАМЕЧАНИЯ:

Автобус начинает рейс в хорошем состоянии.

Для получения в среде MathCAD значения случайной величины  $r$  с равномерным законом распределения на интервале  $(c,d)$  используем встроенную функцию  $\text{runif}(k,c,d)$  (где в нашем случае  $c=0, d=1$ ). Описание функции можно найти в системе помощи. Здесь  $k$  – количество значений.

Если  $r$  попадает на интервал  $[0, a]$ , то можно считать, что с вероятностью  $a$  рассматриваемое событие происходит.

При тестировании программы вычислений на основе данного алгоритма можно использовать следующие крайние ситуации:

а) Если  $a=0$ , то при стратегии « $\alpha$ » общее число выполненных рейсов должно быть равным  $SRA=N \cdot D_{max}$ , и  $SRB$  тоже будет таким же.

б) Если  $a=1$  и  $b=1$ , то при стратегии « $\beta$ » за один день будет выполнен 1 рейс, а общее число выполненных рейсов за все дни будет  $D_{max}$ .

с) Если  $a=1$  и  $b=0$ , то при стратегии « $\beta$ »

$$SRB = D_{max} \cdot N, \text{ при стратегии } \alpha \text{ } SRA = D_{max} \cdot \left(\frac{N}{2}\right).$$

Можно, например, рассмотреть и стратегию « $\gamma$ », отличие которой от стратегии « $\beta$ » заключается в том, что автобус закончивший день в фазе А не ремонтируется.

В данном методическом пособии стратегия « $\gamma$ » подробно не рассматривается.

Попробуйте самостоятельно произвести изменения в схеме алгоритма так, чтобы она соответствовала стратегии «γ».

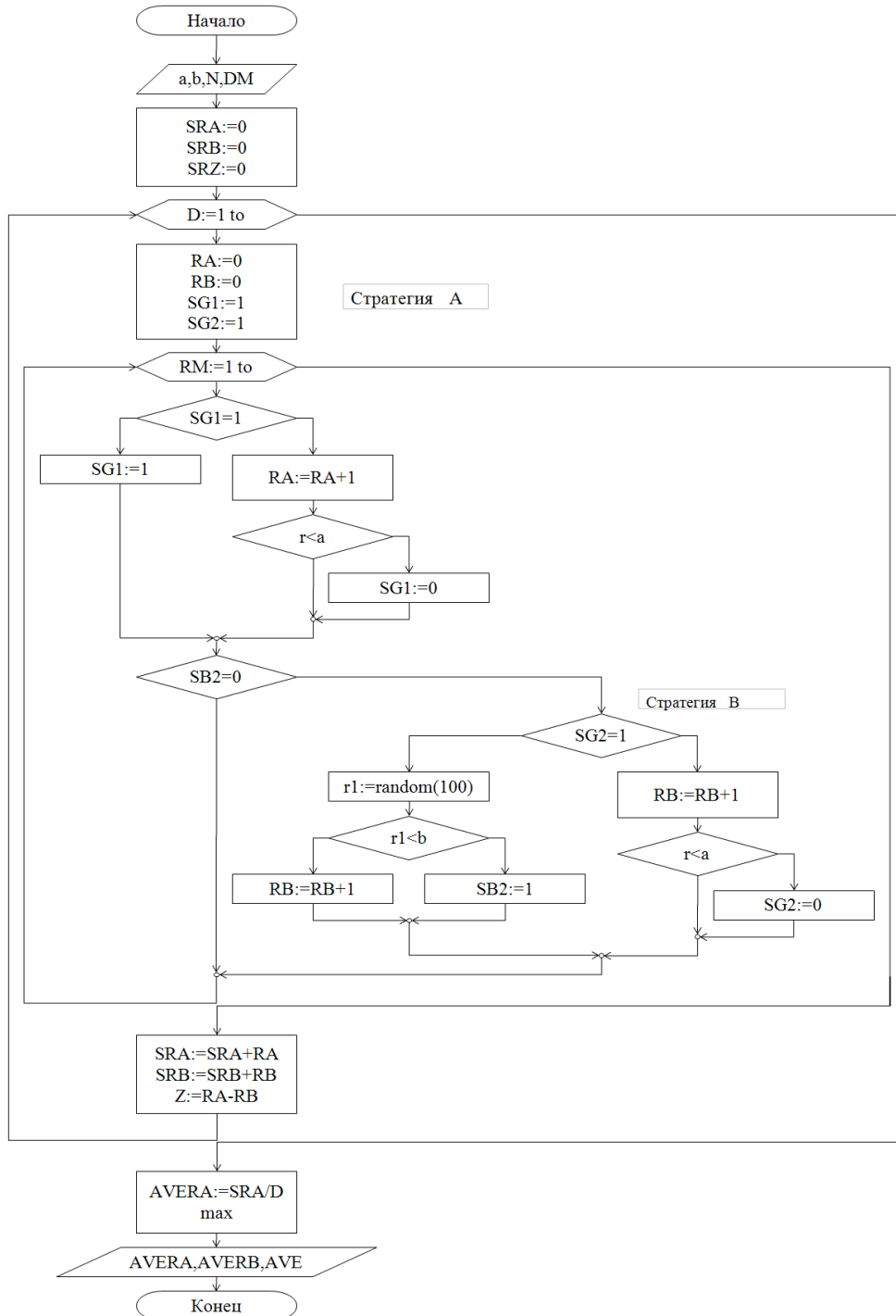


Рисунок 6.2 Схема алгоритма моделирования конкурирующих стратегий

## Программная реализация в среде MATHCAD алгоритмической модели конкурирующих стратегий

ORIGIN := 1

Процедура вычисления числа передач при стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ , а также разницы в рейсах при данных стратегиях

```

Func(a,b,N,Dmax) :=
  D ← 0      Текущий номер моделируемого дня
  SRA ← 0    Общее число передач за D
  SRB ← 0    дней при стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ 
  SZ ← 0     Разница в числе передач в стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ 
  SG2 ← 1    Флаг обозначает хорошее состояние стратегии  $\beta$ .
  SB2 ← 0    НЕ критическое состояние при стратегии  $\beta$ 
  while D < Dmax
    RA ← 0    Количество действительно выполненных рейсов
    RB ← 0    в течении дня при стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ 
    RM ← 0    соответственно.
    SG1 ← 1
    if SB2 = 1 ПОЛНЫЙ ремонт ПРОПУСК всех рейсов дня стратегии  $\beta$ .
      SB2 ← 0  НЕ критическое состояние при стратегии  $\beta$ 
      SG2 ← 1  Хорошее состояние стратегии  $\beta$ .
    while RM < N
      RM ← RM + 1
      if SG1 = 1 Хорошее состояние при стратегии  $\alpha$ 
        RA ← RA + 1 Счётчик рейсов в день при стратегии  $\alpha$ 
        R $\alpha$  ← runif(1,0,1)
        SG1 ← 0 if R $\alpha$  <  $a$  Есть переход в ухудшенное состояние
                  при стратегии  $\alpha$ .
        SG1 ← 1 otherwise
      if SB2 = 0 НЕ критическое состояние при стратегии  $\beta$ 
        R $\beta$  ← runif(1,0,1)
        if SG2 = 1 Хорошее состояние стратегии  $\beta$ .
          SG2 ← 0 if R $\alpha$  <  $a$  Есть переход в ухудшенное состояние
                    при стратегии  $\beta$ .
          RB ← RB + 1 Счётчик рейсов в день при стратегии  $\beta$ 
        otherwise
          SB2 ← 1 if R $\beta$  <  $\beta$  |Переход в критическое состояние при стратегии
                     $\beta$ 
          RB ← RB + 1 otherwise Рейс выполняется, если не было
                    перехода в критическое состояние при
                    стратегии  $\beta$ 
      SRA ← SRA + RA
      SRB ← SRB + RB
    Z ← RA - RB
    SZ ← SZ + Z
    D ← D + 1      Увеличиваем номер дня
  AVERA ←  $\frac{SRA}{Dmax}$ 
  AVERB ←  $\frac{SRB}{Dmax}$  Среднее число передач в день при стратегиях
                     $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.
  AVERZ ←  $\frac{SZ}{Dmax}$  Средняя разница в числе передач
                    между стратегиями  $\alpha$  и  $\beta$  за один день.
  return (AVERA AVERB AVERZ)

```

### **Полученные результаты тестирования**

Пример при вероятности перехода в ухудшенное и совсем плохое состояние =1

$$\text{Func}(1,1,100,4) = (50 \ 1 \ 49)$$

Пример при вероятности перехода в ухудшенное =1 и совсем плохое состояние =0

$$\text{Func}(1,0,100,4) = (50 \ 100 \ -50)$$

Пример при вероятности перехода в ухудшенное =0 и совсем плохое

$$\text{Func}(0,1,100,4) = (100 \ 100 \ 0)$$

Пример при вероятности перехода в ухудшенное =0 и совсем плохое

$$\text{Func}(0,0,100,4) = (100 \ 100 \ 0)$$

Эта задача может быть переформулирована и применительно к другим ситуациям (к станку, к компьютеру и другим объектам).

Рассмотрим реализацию различных законов распределения в среде MathCAD.

#### Различные законы распределения случайных величин

##### ***Геометрическое распределение***

Случайные числа получаются из случайных чисел  $r_i$ , распределенных равномерно на  $[0,1]$ , на основе соотношения

$$x_i = \left[ \frac{\ln r_i}{\ln(1 - \rho)} \right],$$

где  $[..]$  – целая часть числа.

##### ***Экспоненциальное распределение***

Моделирующая формула имеет вид:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i, \quad r_i \in R[0,1].$$

##### ***Распределение Вейбулла***

Моделирующая формула имеет вид:

$$x_i = \left( -\frac{1}{\lambda} \ln r_i \right)^{1/\alpha}, \quad r_i \in R[0,1].$$

##### ***Распределение Парето***

Моделирующая формула имеет вид:

$$x_i = x_0 \left( \frac{1}{r_i} \right)^{1/\alpha}, r_i \in R[0,1].$$

Здесь  $x_0$  – параметр положения (левая граница области возможных значений).

### ***Распределение Эрланга***

Моделирующая формула имеет вид:

$$x_i \leftarrow -\beta \cdot \ln \left( \prod_{j=0}^{\alpha} r_{j+i\alpha} \right) \quad x_i = -\beta \ln(\prod_{i=1}^{\alpha+1} r_i), r_i \in R[0,1].$$

### ***Распределение Коши***

Моделирующая формула имеет вид:

$$x_i = \lambda \cdot \tan \left[ \pi \cdot \left( r_i - \frac{1}{2} \right) \right] + \mu, r_i \in R[0,1].$$

### ***Логистическое распределение***

Моделирующая формула имеет вид:

$$x_i = \mu - \lambda \ln \frac{1 - r_i}{r_i}, r_i \in R[0,1].$$

### ***Нормальное распределение***

Моделирующая формула имеет вид:

$$x_i = m_x + \sigma_x \left( \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right), r_i \in R[0,1].$$

Здесь  $r_i$  – значение случайной величины, равномерно распределенной на интервале  $[0,1]$ . Эти значения в MathCAD можно получить с помощью встроенной функции `runif`.

Все греческие буквы – параметры соответствующих распределений.

### **[Пример программной реализации закона распределения Коши в среде MATHCAD](#)**

Процедура формирования массива случайных величин  $x$ , распределённых по закону Коши в MathCAD.

$$\text{KORASP}(\lambda, \mu, n) := \left\{ \begin{array}{l} r \leftarrow \text{runif}(n, 0, 1) \\ \text{for } i \in 1 .. n - 1 \\ \quad x_i \leftarrow \lambda \cdot \tan \left[ \pi \cdot \left( r_i - \frac{1}{2} \right) \right] + \mu \\ x \end{array} \right.$$

Процедура вычисления количества случайных величин из заданного массива  $x$ , попадающих на каждый из подинтервалов длиной

$$\Delta = \frac{x_{\text{end}} - x_{\text{beg}}}{N}$$

из интервала

$$[x_{\text{beg}}, x_{\text{end}}]$$

может выглядеть так:

```

Raspr(x,x_beg,x_end,N) :=
| Δ ←  $\frac{x\_end - x\_beg}{N}$ 
| curX ← x_beg
| j ← 0
| while curX < x_end
|   | a ← 0
|   | for i ∈ 0..length(x) - 1
|   |   a ← 1 + a if curX ≤ x1 < curX + Δ
|   | freqj,1 ← curX +  $\frac{\Delta}{2}$ 
|   | freqj,0 ← a
|   | j ← j + 1
|   | curX ← curX + Δ
| freq

```

Обращение к этим процедурам (n – количество моделируемых случайных величин):

$\lambda := 1$     $\mu := 2$     $n := 5000$

$X := \text{KORASP}(\lambda, \mu, n)$     $S := \text{Raspr}(X, 0, 6, 50)$

Обращение к встроенной в MathCAD процедуре rcauchy формирования массива случайных величин, распределённых по закону Коши:

$X1 := \text{rcauchy}(n, \mu, \lambda)$     $S1 := \text{Raspr}(X1, 0, 6, 50)$

Графическое представление результатов для написанной и встроенной процедур в виде гистограммы:

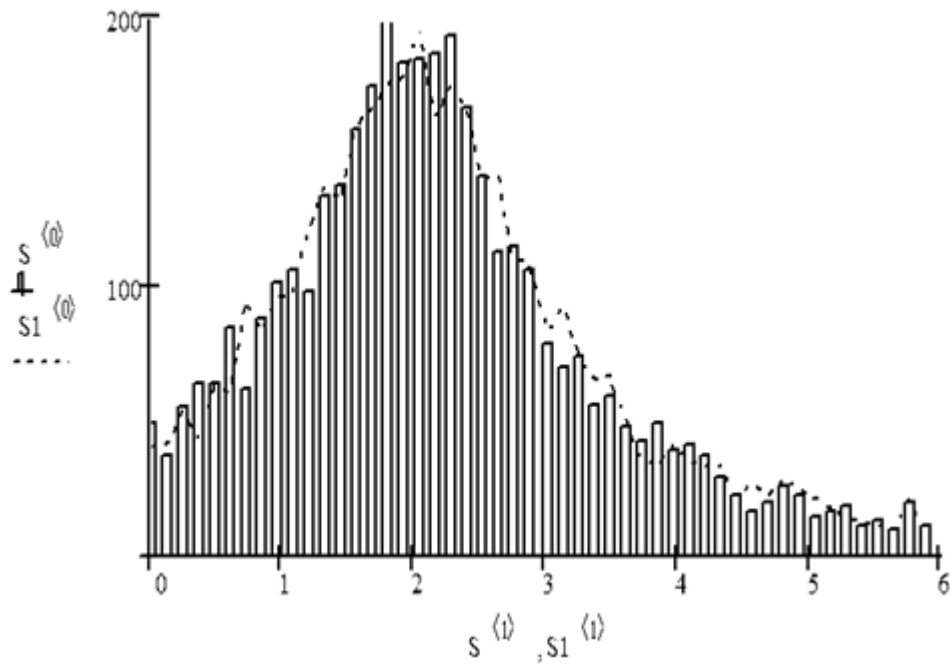


Рисунок 6.3 Гистограмма

Процедура вычисления массива накопленных частотей:

$$\text{NAK\_castot}(f) := \left| \begin{array}{l}
 n \leftarrow \sum_{j=0}^{\text{length}(f)-1} f_j \\
 \text{for } k \in 0.. \text{length}(f) - 1 \\
 \quad \sum_{j=0}^k f_j \\
 \text{REZ}_k \leftarrow \frac{\sum_{j=0}^k f_j}{n} \\
 \text{REZ}
 \end{array} \right.$$

Вычисление значений функции распределения:

$$FS := \text{NAK\_castot}(S^{(0)})$$

График функции распределения:



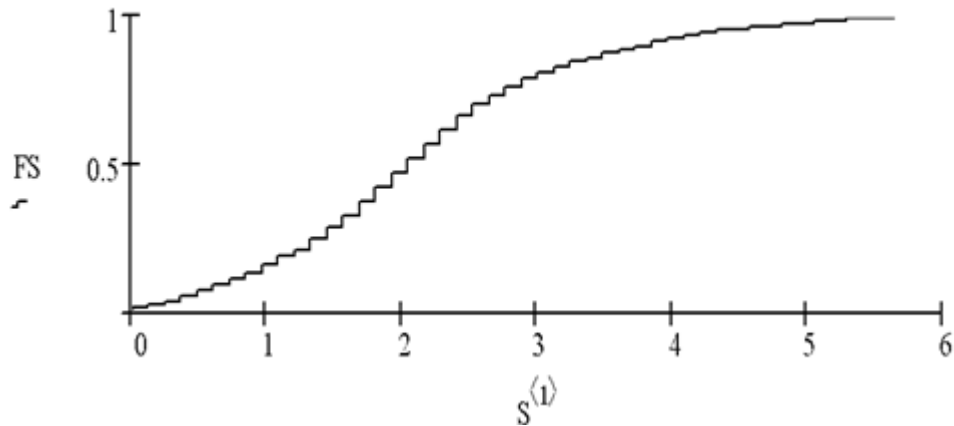


Рисунок 6.4 График функции распределения

Генерация двух векторов  $XX$  и  $YY$ , компоненты которых есть значения случайной величины с распределением по закону Коши.

$\lambda:=1$   $\mu:=2$   $n:=100$   $XX:=\text{KORASP}(\lambda,\mu,n)$   $YY:=\text{KORASP}(\lambda,\mu,n)$

Отображение точек с координатами  $(XX_i, YY_i)$  на координатной плоскости.

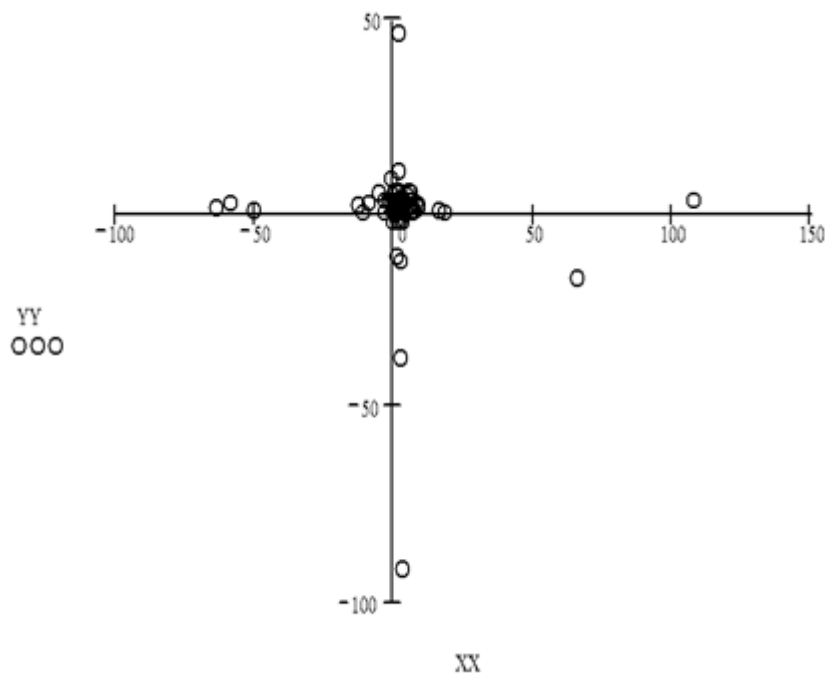


Рисунок 6.5 Значения случайной величины с распределением по закону Коши в двумерном случае

Отображение этих же точек с координатами  $(XX_i, YY_i)$ , попадающих в прямоугольник с координатами левого нижнего угла  $(-2;-2)$  и правого верхнего угла  $(6;6)$ , на координатной плоскости.

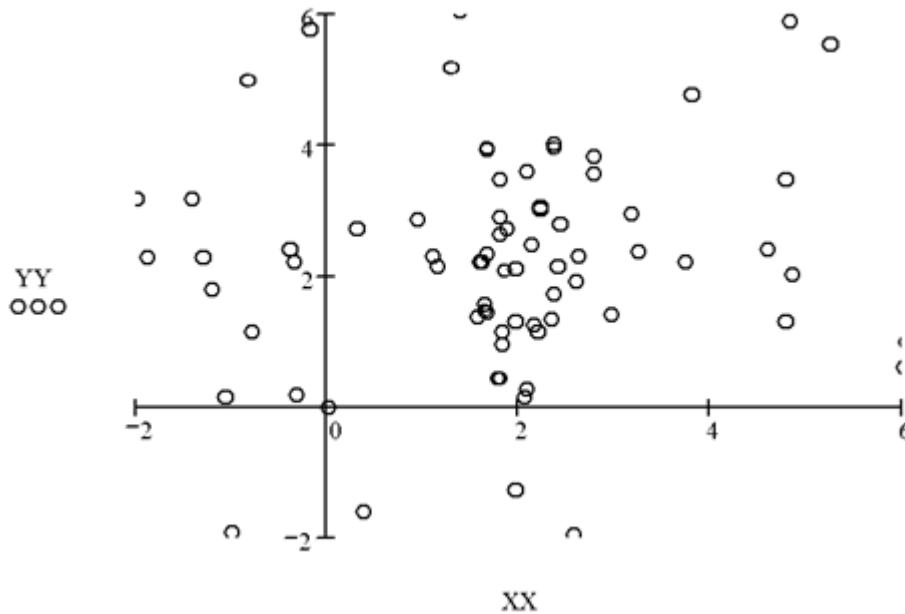


Рисунок 6.6 Значения случайной величины с распределением по закону. Коши.  
Увеличение

### *Задание по работе*

Наземное устройство наблюдения в дневное время суток передаёт порциями информацию пролетающему над ним спутнику. Спутник пролетает над объектом  $N$  раз в дневное время суток. За каждый пролёт передаётся одна порция информации.

В передающем устройстве в течение одного сеанса связи может возникнуть несущественная неисправность с вероятностью  $a$ . При этом передатчик будет продолжать функционировать. Однако, в этой ситуации при следующем сеансе с вероятностью  $b$  может возникнуть критическая неисправность, после которой передатчик не сможет функционировать. При этом ремонт передатчика займёт столько времени, что все сеансы связи до конца дня, включая текущий, будут отменены. Если же выполнять ремонт передатчика после завершения сеанса, в ходе которого возникла несущественная неисправность, то будет пропущен только следующий сеанс.

Возникает вопрос: какая из двух стратегий эксплуатации предпочтительней в этом смысле, что за  $M$  дней эксплуатации при  $N$  планируемых сеансах связи в день, количество фактически завершённых сеансов будет наибольшим?

Рассмотрим две стратегии эксплуатации передающего устройства. Первая стратегия (назовем её « $\alpha$ ») заключается в том, что ремонт производится после несущественной поломки, а вторая стратегия (назовём её « $\beta$ ») заключается в том, что ремонт производится только

после критической поломки. Поскольку из двух стратегий нужно выбрать наилучшую, то они называются конкурирующими.

В работе требуется с использованием среды MathCAD составить программу, позволяющую при заданных законах распределения случайной величины, описывающих ситуацию возникновения несущественной и критической неисправностей в передатчике, получить среднее число сеансов связи за  $M$  дней (при  $N$  планируемых сеансах в день) при стратегиях « $\alpha$ » и « $\beta$ », и выбрать наилучшую стратегию.

Схема алгоритма, реализующая эти стратегии, практически такая же, как в рассмотренной задаче об эксплуатации автобуса.

Очевидно, что эту задачу можно сформулировать и в более общем виде, заменив условие вида «с вероятностью  $c$ » на условие вида «значение случайной величины, с заданным законом распределения, попало в заданный интервал».

При создании программной реализации границы интервалов, соответствующих событиям «возникла несущественная неисправность» и «возникла критическая неисправность», задайте в программе самостоятельно, в соответствии с параметрами закона распределения из задания по варианту.

Возможный порядок выполнения работы в соответствии с заданием варианта.

- Создать и протестировать часть программы, реализующую получение случайной величины с заданным законом распределения в среде MathCAD (согласно варианту) так же, как это сделано в рассмотренном выше примере о распределении Коши.
- Модифицировать схему алгоритма, представленную на рис.2 применительно к своей задаче.
- Реализовать модифицированный алгоритм в среде MathCAD.
- Выполнить вычисления и на их основе рекомендовать рациональную стратегию.
- Написать отчёт по работе.

Варианты заданий для законов распределения и их параметров

Таблица 6.1

№	Входные параметры	Закон распределения
1	$\rho = 0.1$	Геометрическое
2	$m_x := 3; \sigma_x := 0.5$	Нормальное
3	$\lambda := 1$	Экспоненциальное
4	$\lambda := 1; \alpha := 1$	Вейбулла.
5	$\alpha := 0.5$	Парето.

6	$\beta := 4; \alpha := 2$	Эрланга.
7	$\lambda := 0.5; \mu := 2$	Коши.
8	$\lambda := 1; \mu := 1$	Логистическое.
9	$\lambda := 0.5$	Экспоненциальное
10	$\rho = 0.2$	Геометрическое
11	$\lambda := 1; \mu := 1$	Логистическое.
12	$\lambda := 0.5; \alpha := 1$	Вейбулла.
13	$\lambda := 0.7; \mu := 1.5$	Коши.
14	$m_x := 4; \sigma_x := 1$	Нормальное
15	$\alpha := 1$	Парето.
16	$\rho = 0.15$	Геометрическое
17	$\beta := 3; \alpha := 1$	Эрланга.
18	$\lambda := 2; \alpha := 1$	Вейбулла.
19	$\lambda := 0.7; \mu := 1.5$	Коши.
20	$\beta := 2; \alpha := 4$	Эрланга.
21	$\lambda := 0.5; \mu := 1$	Логистическое.
22	$\lambda := 2$	Экспоненциальное .
23	$m_x := 2; \sigma_x := 1.5$	Нормальное
24	$\alpha := 1.5$	Парето.
25	$\beta := 1; \alpha := 1$	Эрланга.
26	$\lambda := 0.8; \mu := 2$	Коши.
27	$\beta := 2; \alpha := 2$	Эрланга.
28	$\rho = 0.12$	Геометрическое
29	$\lambda := 2; \alpha := 0.5$	Вейбулла.
30	$m_x := 1; \sigma_x := 1$	Нормальное

## Тема 7. Моделирование систем массового обслуживания

Рассмотрим несколько примеров:

1. Портовый кран перегружает контейнеры с автотранспорта на корабль. Автомобили подвозят контейнеры через случайные промежутки времени. На перемещение контейнера требуется случайный промежуток времени.
2. Имеется цех. С предыдущей технологической операции к нему поступают детали через случайные промежутки времени. На обработку партии также требуется случайный промежуток времени.
3. Имеется стойка телефонной станции, на вход которой поступают вызовы абонентов через случайные промежутки времени. На обработку вызова требуется случайный промежуток времени.

Во всех примерах имеется нечто общее. Можно выделить так называемые *заявки*, которые образуют поток. Первый пример – автомобили, подвозящие контейнеры, во втором – партии деталей, в третьем – телефонные звонки.

Во всех примерах имеются *обслуживающие аппараты* (ОА). Их еще называют *каналами*. В первом примере – это портовый кран, во втором – цех, в третьем – стойка на телефонной станции.

Это примеры систем массового обслуживания (СМО).

В зависимости от соотношения производительности обслуживающего аппарата и интенсивности потока заявок может образовываться *очередь*. В простейшем случае эту ситуацию можно изобразить следующим образом:

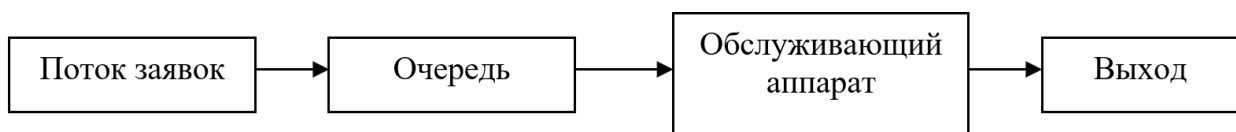


Рисунок 7.1. Схема простейшей системы массового обслуживания

Заметим, что СМО могут быть достаточно сложными: в них могут присутствовать несколько обслуживающих аппаратов (каналов) и несколько источников заявок. Обслуживание может вестись с учетом приоритетов заявок.

**Основными показателями СМО являются:**

1. Загрузка обслуживающих аппаратов.
2. Коэффициент простоя ОА:  $k = 1 - \rho$  (где  $\rho$  - загрузка).
3. Количество заявок, обслуженных за рассмотренный промежуток времени  $t$  (производительность).
4. Средняя и максимальная длина очереди.

## 5. Время пребывания заявки в очереди.

Понятно, что можно определенным образом построить модель, позволяющую вычислить эти характеристики. **Основная задача при моделировании СМО** – определить типы и количество обслуживающих аппаратов, а также их связь между собой (структуру СМО) так, чтобы обеспечить максимальную требуемую производительность системы массового обслуживания при выполнении заданных ограничений (например, стоимость ОА).

### Построение алгоритмической модели простейшей СМО

Введем следующие обозначения:

$t_i$  - момент поступления  $i$ -той заявки на вход очереди;

$w_i$  - время пребывания  $i$ -той заявки в очереди;

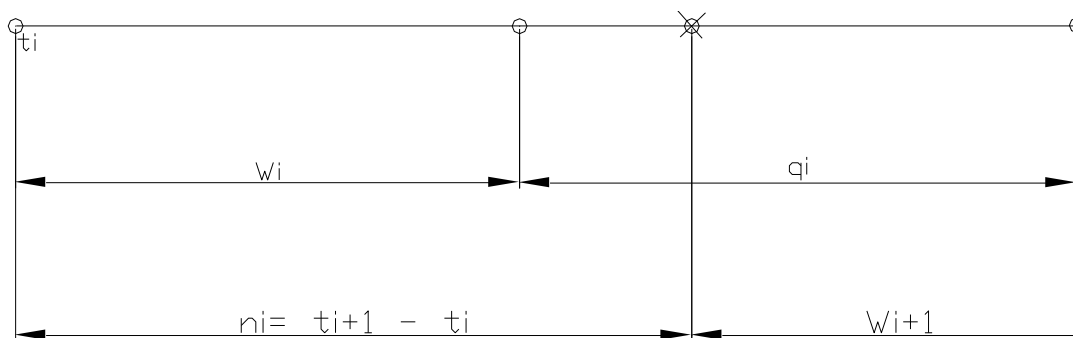
$q_i$  - время обслуживания  $i$ -той заявки ОА;

$\theta_i$  - момент выхода  $i$ -той заявки из ОА;

$\eta_i = t_{i+1} - t_i$  - интервал времени между поступлением  $i+1$  и  $i$ -той заявок на вход в очередь.

На следующем рисунке представлены две возможные ситуации для момента поступления  $i+1$  заявки:

#### а) Ситуация 1



#### б) Ситуация 2

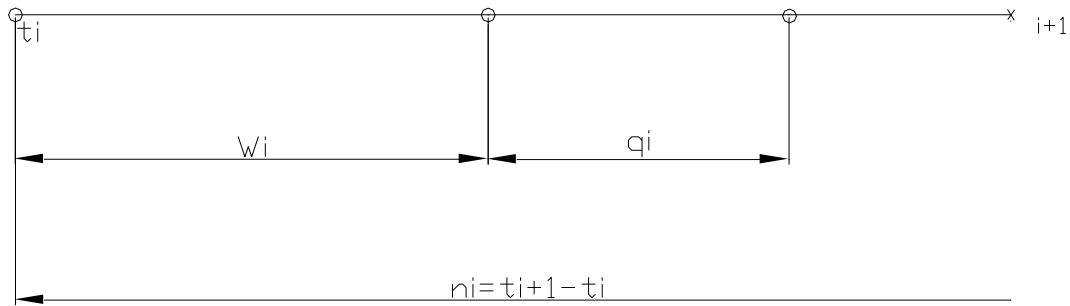


Рисунок 7.2. Две ситуации при поступлении очередной заявки

Разница в этих ситуациях заключается в том, что в ситуации а) ОА занят при поступлении  $i+1$  заявки, а в ситуации б) ОА свободен и значит,  $i+1$  заявка сразу начнет обрабатываться. Значит время пребывания  $i+1$ -той заявки в очереди определится в соответствии с рекуррентной формулой

$$w_{i+1} = \begin{cases} 0, & w_i + q_i < \eta_i \\ w_i + q_i - \eta_i, & w_i + q_i > \eta_i \end{cases}$$

При реализации этой модели на ЭВМ следует организовать цикл для перебора моделируемого количества заявок, ввести начальные заявки.

- 1)  $t_i = 0,$   
 $w_i = 0.$
- 2)  $i \geq 2$   
 $t_i = t_{i-1} + \eta_{i-1}$

Найти  $\theta_i = t_i + w_i + q_i$

3) На основании полученных данных необходимо вычислить характеристики:

- загрузку СМО;
- время загрузки;
- общее время функционирования СМО;
- производительность (среднее количество заявок, обслуживаемых за рассматриваемый период времени).

Возможная реализация этого алгоритма в MATHCAD представлена ниже.

Здесь

M1-математическое ожидание интервала между моментами поступления двух последовательных заявок (нормальный закон распределения),  $\sigma_1$  - среднее квадратическое отклонение этого закона.,

M2-математическое ожидание времени обслуживания заявки (нормальный закон распределения),  $\sigma_2$  - среднее квадратическое отклонение этого закона., n- количество заявок при моделировании. На выходе три значения – коэффициент загрузки, среднее и максимальное время пребывания заявки в очереди.

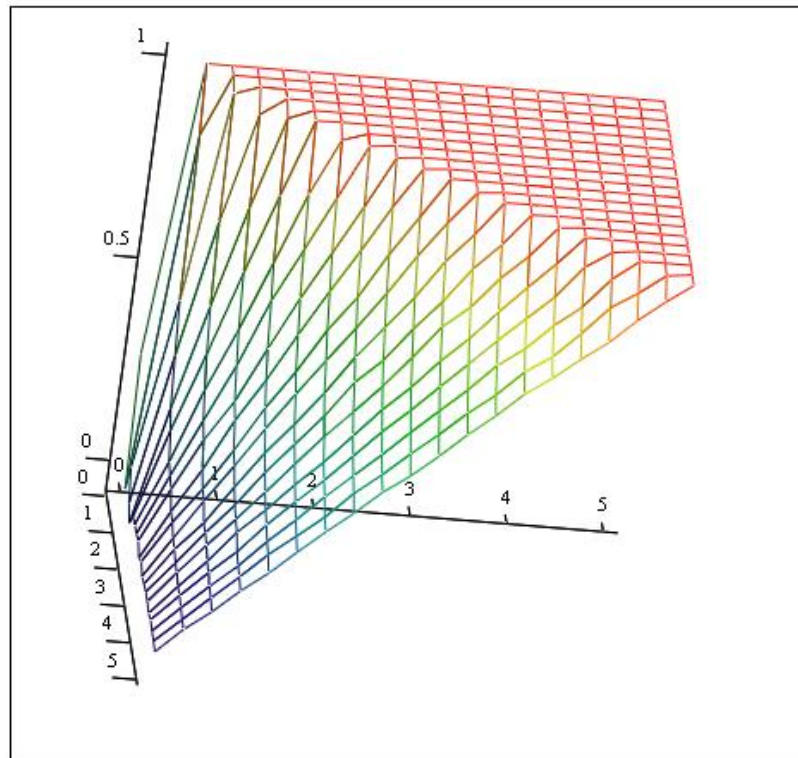


ORIGIN := 1

$F(M1, \sigma1, M2, \sigma2, n) :=$

$t_1 \leftarrow 0$
$\eta \leftarrow \text{morm}(n-1, M1, \sigma1)$
$q \leftarrow \text{morm}(n, M2, \sigma2)$
for $i \in 2..n$
$t_i \leftarrow t_{i-1} + \eta_{i-1}$
$w_1 \leftarrow 0$
for $i \in 2..n$
$w_i \leftarrow 0$ if $w_{i-1} + q_{i-1} < \eta_{i-1}$
$w_i \leftarrow w_{i-1} + q_{i-1} - \eta_{i-1}$ if $w_{i-1} + q_{i-1} \geq \eta_{i-1}$
$\Theta_1 \leftarrow q_1$
for $i \in 2..n$
$\Theta_i \leftarrow t_i + w_i + q_i$
$\sum_{i=1}^n q_i$
$\rho \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\Theta_n}$
$k \leftarrow 1 - \rho$
$pR \leftarrow \frac{n}{\Theta_n}$
$\sum_{i=1}^n w_i$
$wsr \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{n}$
$wmax \leftarrow \max(w)$
return ( $\rho$ $wsr$ $wmax$ )

$F(25, 0.1, 20, 0.1, 7) = (0.829 \ 0 \ 0)$

$$\begin{aligned} T(M1, M2) &:= (F(M1, 0.1, M2, 0.1, 50))^T_1 \\ Y(M1, M2) &:= (F(M1, 0.1, M2, 0.1, 50))^T_2 \\ U(M1, M2) &:= (F(M1, 0.1, M2, 0.1, 50))^T_3 \\ \\ x &:= 5 & y &:= 5 & \text{mesh} &:= 20 \\ \\ \rho &:= \text{CreateMesh}(T, 0, x, 0, y, \text{mesh}) \end{aligned}$$


ρ

### Простейшие потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Такой поток можно изобразить как последовательность точек  $t_1 \dots t_n$  на числовой оси, соответствующих случайным моментам появления событий (Рисунок 7.3):



Рисунок 7.3. Последовательность однородных событий

Поток событий называется **стационарным**, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси  $Ot$  расположен этот участок.

Поток событий называется **потоком без последствия**, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. Поток событий называется **ординарным**, если вероятности попадания на участок времени малой длины двух или более событий пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью попадания на этот участок одного события.

**Стационарность** потока означает, что вероятностные характеристики этого потока не должны меняться в зависимости от времени. Например, такая характеристика, как **интенсивность** потока событий, **равная математическому ожиданию числа событий в единицу времени**, должна оставаться постоянной для стационарного потока.

На практике часто встречаются потоки событий, которые стационарны только на ограниченном участке времени. Например, поток вызовов, поступающих на телефонную станцию в дневное время, может считаться таковым. Тот же поток в течение целых суток уже не будет стационарным, поскольку ночью интенсивность вызовов гораздо меньше, чем днем.

**Отсутствие последствия** в потоке означает, что события появляются в последовательные моменты времени **независимо друг от друга**. Например, поток пассажиров, входящих на станцию метро, можно считать потоком без последствия потому, что причины, обусловившие приход отдельного пассажира именно в тот, а не другой момент, не связаны с аналогичными причинами для других пассажиров. Однако условие отсутствия последствия может быть нарушено за счет появления такой зависимости. Например, поток пассажиров, покидающих станцию метро, уже не может считаться потоком без последствия, так как моменты выхода пассажиров, прибывших одним и тем же поездом, зависимы между собой.

**Ординарность** потока означает, что события в потоке приходят **поодиночке**, а не парами, тройками и т. д. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую, практически можно считать ординарным, чего нельзя сказать о потоке клиентов, идущих в ЗАГС для регистрации брака.

Простейший поток играет среди потоков событий особую роль, до некоторой степени аналогичную роли нормального закона среди других законов распределения. Согласно центральной предельной теореме, при суммировании большого числа независимых случайных величин, подчиненных практически любым законам распределения, получается случайная величина, приближенно распределенная по нормальному закону. Аналогично можно сказать, что *при суммировании (взаимном наложении) большого числа ординарных, стационарных потоков с практически любым последствием получается поток, сколь угодно близкий к простейшему*. Условия, которые должны для этого соблюдаться, аналогичны условиям центральной предельной теоремы, а именно: складываемые потоки должны оказывать на сумму приблизительно равномерно малое влияние.

### Замкнутые системы массового обслуживания

Рассмотрим системы массового обслуживания, в которых *интенсивность потока поступающих заявок зависит от состояния самих систем*. Такие системы массового обслуживания называются *замкнутыми*.

Пусть система состоит из  $n$  каналов обслуживания и  $m$  источников заявок,  $m > n$ .

Предположим, что каждый источник порождает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ , *причем источник не может посылать следующую заявку до завершения обслуживания своей предыдущей заявки* (в этом и выражается замкнутость данной системы). Предположим также, что каждый канал порождает простейший поток обслуженных заявок с интенсивностью  $\mu$ . Все состояния данной системы можно разбить условно на три группы:

$S_0$  - "все каналы свободны",

$S_i$  - "ровно  $i$  каналов занято и поступило ровно  $i$  заявок",  $i = 1, \dots, n$ ,

$S_j$  - "все каналы заняты и ровно  $j-n$  заявок находятся в очереди для обслуживания",  $j = n + 1, \dots, m$ .

Графически все возможные переходы из состояния в состояние, а также интенсивности потоков событий, под воздействием которых эти переходы возможны, можно изобразить в виде размеченного графа так, как это показано на Рисунок 2. Действительно, если система находится в состоянии  $S_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , то в состояние " $i+1$  каналов занято" она может перейти под

воздействием суммарного потока заявок от  $m - i$  источников с интенсивностью  $(m - i)\lambda$ ; из состояния  $S_i$  в состояние  $S_{i-1}$  " $i - 1$  каналов занято" она может перейти под воздействием суммарного потока обслуженных заявок, поступающего от  $i$  каналов обслуживания с интенсивностью  $i\mu$ .. Напомним, что  $i$  источников прекращают поставку заявок до завершения обслуживания своих последних заявок. Если же система находится в состоянии  $S_j, j = n, \dots, m - 1$ , то в состояние  $S_{j+1}$  она может перейти под воздействием суммарного потока заявок с интенсивностью  $(m - j)\lambda$ , а в состояние  $S_{j-1}$  — под воздействием суммарного потока обслуженных заявок с интенсивностью  $n\mu$ , поступающего от  $n$  каналов обслуживания.

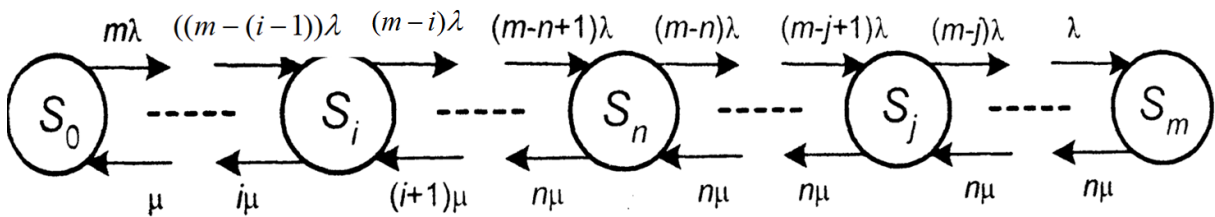


Рисунок 7.4. Размеченный граф многоканальной замкнутой СМО

Составим на основе этого размеченного графа уравнения Колмогорова. Эти уравнения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую вероятности  $P_r(t)$  нахождения данной системы в состоянии  $S_r$  в момент времени  $t, r = 0, 1, \dots, m$

$$\begin{cases} P_0'(t) = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t) \\ P_i'(t) = (m - i + 1)\lambda P_{i-1}(t) + (i + 1)\mu P_{i+1}(t) - ((m - i)\lambda + i\mu)P_i(t), \quad i = 1, \dots, n - 1 \\ P_j'(t) = (m - j + 1)\lambda P_{j-1}(t) + n\mu P_{j+1}(t) - ((m - j)\lambda + n\mu)P_j(t), \quad j = n, \dots, m - 1 \\ P_m'(t) = \lambda P_{m-1}(t) - n\mu P_m(t) \end{cases}$$

Особый интерес представляют вероятности  $P_r(t)$  в предельном **стационарном** режиме, т. е. при  $t \rightarrow \infty$ , которые называются предельными вероятностями состояний системы.

### Открытые системы массового обслуживания

Рассмотрим системы массового обслуживания, в которых **интенсивность потока поступающих заявок не зависит от состояния самих систем**. Такие системы массового обслуживания

называются *открытыми*.

Пусть интенсивность простейшего потока поступающих заявок равна  $\lambda$  и не зависит от состояния системы. Предполагается, что система состоит из  $n$  каналов обслуживания и каждый канал порождает простейший поток обслуженных заявок с интенсивностью  $\mu$ . Заявки, поступающие в момент, когда заняты все каналы, становятся в *очередь* ожидая обслуживания. Количество мест в очереди ограничено числом  $k$ : при наличии в очереди  $k$  заявок вновь поступающие заявки покидают систему необслуженными.

Все состояния данной системы можно разбить условно на три группы:

$S_0$ - "все каналы свободны",

$S_i$ - "ровно  $i$  каналов занято и поступило ровно  $i$  заявок",  $i = 1, \dots, n$ ,

$S_j$ - "все каналы заняты и ровно  $j-n$  заявок находятся в очереди для обслуживания",  $j = n + 1, \dots, n+k$ .

Графически все возможные переходы из одного состояния в другое, а также интенсивности потоков событий, под воздействием которых эти переходы возможны, можно изобразить в виде размеченного графа так, как это показано на рисунке ниже. Здесь  $m=n+k$ .

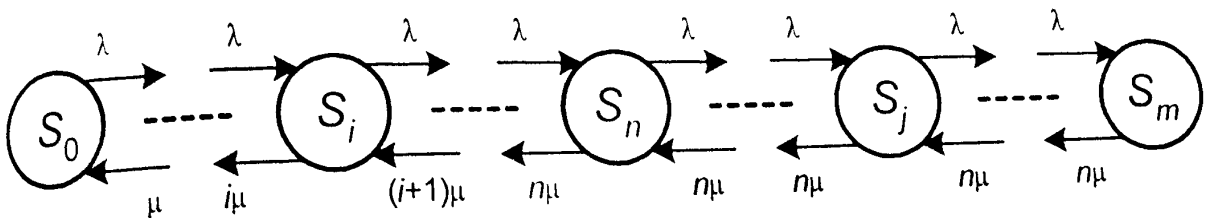


Рисунок 7.5. Размеченный граф многоканальной открытой СМО

Действительно, если система находится в состоянии  $S_i$   $i = 0, 1, \dots, m$ , то в состояние  $S_{i+1}$  " $i+1$  каналов занято" она может перейти под воздействием потока заявок с интенсивностью  $\lambda$ ;

Из состояния  $S_i$  в состояние  $S_{i-1}$  " $i-1$  каналов занято"  $i = 1, \dots, n$  она может перейти под воздействием суммарного потока обслуженных заявок, поступающего от  $i$  каналов, с интенсивностью  $i\mu$ .

Из состояния  $S_j$  в состояние  $S_{j-1}$   $j = n + 1, \dots, m$ , система может перейти под воздействием суммарного потока обслуженных заявок, поступающего от  $n$  каналов с интенсивностью  $n\mu$ .

Составим на основе этого размеченного графа уравнения Колмогорова. Приравнивая производные нулю для стационарного случая, получим систему линейных алгебраических уравнений,

описывающую предельные вероятности состояний системы:

$$\begin{cases} 0 = \mu P_1 - \lambda P_0 \\ 0 = \lambda P_{i-1} + (i+1)\mu P_{i+1} - (\lambda + i\mu)P_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ 0 = \lambda P_{j-1} + n\mu P_{j+1} - (\lambda + n\mu)P_j, & j = n, \dots, m-1, \\ 0 = \lambda P_{m-1} - n\mu P_m \\ P_0 + P_1 + \dots + P_m = 1 \end{cases}$$

Если мест в очереди не предусмотрено ( $k=0$ ), то имеем частный случай открытой системы массового обслуживания. Графически этот случай описывается на рисунке 7.6.

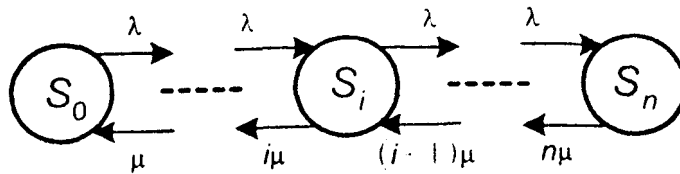


Рисунок 7.6. Размеченный граф многоканальной открытой СМО без очереди.

Для получения системы алгебраических уравнений, описывающей стационарный режим в этом случае, достаточно из последней системы удалить третий блок уравнений (при  $j = n, \dots, m-1$ ) и положить  $m = n$ .

Если рассматриваемая система массового обслуживания одноканальная, то из системы линейных алгебраических уравнений исключается второй блок уравнений; если система одноканальная и без очереди, то исключаются второй и третий блоки уравнений.

Пусть система находится в предельном стационарном режиме. Тогда можно показать, что:

- вероятность  $P_{om}$  отказа заявке на обслуживание равна  $P_m$ ;
- вероятность  $Q$  принятия заявки на обслуживание равна  $1 - P_m$ ;
- среднее число  $A$  заявок, принимаемых системой на обслуживание в единицу времени, равно  $\lambda Q$ ;
- среднее число  $N_{зан}$  занятых каналов равно  $A/\mu$ ;
- среднее число  $N_{оч}$  заявок в очереди равно  $\sum_{i=1}^{m-n} iP_{n+i}$
- среднее время  $t_w$  ожидания заявки в очереди равно  $\frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^{m-n} iP_{n-1+i}$ ;
- среднее время  $t_{sys}$  нахождения заявки в системе равно  $t_w + Q/\mu$ ;

## Некоторые функции MATHCAD для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

В Mathcad имеются встроенные функции, которые позволяют решать задачу Коши различными численными методами.

- $\text{rkfixed}(y_0, t_0, t_1, M, D)$  — метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом,
- $\text{Rkadapt}(y_0, t_0, t_1, M, D)$  — метод Рунге-Кутты с переменным шагом;
- $\text{Buistoer}(y_0, t_0, t_1, M, D)$  — метод Булирша-Штера;
  - $y_0$  — вектор начальных значений в точке  $t_0$  размера  $N \times 1$ ;
  - $t_0$  — начальная точка расчета,
  - $t_1$  — конечная точка расчета,
  - $M$  — число шагов, на которых численный метод находит решение;
  - $D$  — векторная функция размера  $N \times 1$  двух аргументов — скалярного  $t$  и векторного  $y$ . При этом  $y$  — искомая векторная функция аргумента  $t$  того же размера  $N \times 1$ .

Соблюдайте регистр первой буквы рассматриваемых функций, поскольку это влияет на выбор алгоритма счета, в отличие от многих других встроенных функций Mathcad.

Каждая из приведенных функций выдает решение в виде матрицы размера  $(M+1) \times (N+1)$ . В ее левом столбце находятся значения аргумента  $t$ , делящие интервал на равномерные шаги, а в остальных  $N$  столбцах — значения искомых функций  $y_0(t), y_1(t), \dots, y_{N-1}(t)$ , рассчитанные для этих значений аргумента. Поскольку всего точек (помимо начальной)  $M$ , то строк в матрице решения будет всего  $M+1$ .

В подавляющем большинстве случаев достаточно использовать первую функцию  $\text{rkfixed}$ ,

$\text{rkfixed}(y, x_1, x_2, N, F)$  — выдает таблицу результатов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности с фиксированным шагом интегрирования  $\frac{x_2 - x_1}{N}$

$y$  — вектор начальных значений искомого решения;



$x_1$  – начальное значение независимой переменной;

$x_2$  – конечное значение независимой переменной;

$N$  – фиксированное число шагов интегрирования на отрезке от  $x_1$  до  $x_2$ :

$F$  – правые части системы уравнений, записанные в символьном виде.

Пример использования функции `rkfixed` приведен ниже:

$$F(x, Y) := \begin{bmatrix} 1 + Y_0 + x^2 \\ \sin(Y_1 + x^2) + Y_2 \\ 2 \cdot x \cdot (Y_1)^2 \end{bmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 := 0 \\ x_2 := 1 \\ N := 5 \end{array}$$

$$\text{rkfixed}(Y, x_1, x_2, N, F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.224 & 1.181 & 0.05 \\ 0.4 & 0.515 & 1.404 & 0.254 \\ 0.6 & 0.906 & 1.689 & 0.736 \\ 0.8 & 1.437 & 2.062 & 1.725 \\ 1 & 2.155 & 2.583 & 3.664 \end{pmatrix}$$

Результатом решения функции `rkfixed` является матрица. Первый столбец этой матрицы – это независимая переменная  $x$  с  $N=5$  равномерными интервалами разбиения заданного отрезка  $x_1-x_2$ . Второй и так далее столбцы – это решения для соответствующих функций  $Y_i(x)$  с заданными начальными значениями.

**`Rkadapt(y,x1,x2,N,F)`** - выдает таблицу результатов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты с адаптивным шагом интегрирования. Список параметров аналогичен функции `rkfixed`.

Пример использования функции `Rkadapt` приведен ниже.

Результирующая матрица имеет такой же вид, что и в функции `rkfixed`. Как видно, для одного и того же примера, приведенного для `rkfixed` и для `Rkadapt` решения немного расходятся. Следует ожидать, что решение по функции `Rkadapt` будет более точным.

$$F(x, Y) := \begin{bmatrix} 1 + Y_0 + x^2 \\ \sin(Y_1 + x^2) + Y_2 \\ 2 \cdot x \cdot (Y_1)^2 \end{bmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x1 := 0 \\ x2 := 1 \end{array}$$

$$Rkadapt(Y, x1, x2, 5, F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.224 & 1.181 & 0.05 \\ 0.4 & 0.515 & 1.404 & 0.253 \\ 0.6 & 0.906 & 1.689 & 0.735 \\ 0.8 & 1.437 & 2.063 & 1.724 \\ 1 & 2.155 & 2.584 & 3.662 \end{pmatrix}$$

Во-первых, функция D, входящая в число параметров встроенных функций для решения ОДУ, должна быть функцией обязательно двух аргументов. Во-вторых, второй ее аргумент должен быть вектором того же размера, что и сама функция D. В-третьих, точно такой же размер должен быть и у вектора начальных значений.

Не забывайте, что векторную функцию D(t,y) следует определять через компоненты вектора y с помощью кнопки нижнего индекса (Subscript) с наборной панели Calculator (Калькулятор) или нажатием клавиши <[>. В третьей строке листинга определено число шагов, на которых рассчитывается решение, а его последняя строка присваивает матричной переменной и результат действия функции rkfixed.

При решении систем ОДУ многие проблемы могут быть устранены при помощи простой попытки увеличить число шагов численного метода. В частности, сделайте так при неожиданном возникновении ошибки "Found a number with a magnitude greater than 10^307" (Найдено число, превышающее значение 10<sup>307</sup>) Данная ошибка может означать не то, что решение в действительности расходится, а просто недостаток шагов для корректной работы численного алгоритма

В заключение следует сказать несколько слов об особенностях различных численных методов. Все они основаны на аппроксимации дифференциальных уравнений разностными аналогами. В зависимости от конкретной формы аппроксимации, получаются алгоритмы различной точности и быстродействия. В Mathcad использован наиболее

популярный алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка, описанный в большинстве книг по методам вычислений. Он обеспечивает малую погрешность для широкого класса систем ОДУ за исключением жестких систем. Поэтому в большинстве случаев стоит применять функцию `rkfixed`. Если по различным причинам время расчетов становится критичным или точность неудовлетворительна, стоит попробовать вместо `rkfixed` другие функции, благо сделать это очень просто, благодаря одинаковому набору параметров. Для этого нужно только поменять имя функции в программе.

Функция `Rkadapt` может быть полезна в случае, когда известно, что решение на рассматриваемом интервале меняется слабо, либо существуют участки медленных и быстрых его изменений. Метод Рунге-Кутты с переменным шагом разбивает интервал не на равномерные шаги, а более оптимальным способом. Там, где решение меняется слабо, шаги выбираются более редкими, а в областях его сильных изменений — частыми. В результате, для достижения одинаковой точности требуется меньшее число шагов, чем для `rkfixed`. Метод Булирша-Штера `Vuistoer` часто оказывается более эффективным для поиска гладких решений.

### [Пример решения в среде MathCAD. Открытая СМО с очередью](#)

Автозаправочная станция имеет **2** заправочных колонки. Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более **3** машин одновременно. Если площадка занята, то очередная машина проезжает мимо. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность **2** машины в минуту, а процесс заправки одной машины в среднем длится **2** мин. Определить основные характеристики данной системы массового обслуживания.

#### ***Ответы:***

Вероятность того, что машина будет вынуждена проехать мимо станции необслуженной, равна **0.512**; среднее число машин, обслуживаемых станцией за минуту, равно **0.976**; среднее число занятых колонок равно **1.952**; среднее число машин в очереди равно **2.176**; среднее время ожидания в очереди равно **1.088** мин; среднее время пребывания машины на станции равно **2.064** мин.

## Открытая система массового обслуживания МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ НА БАЗЕ MATHCAD

### Глава 41, с. 319-323

#### Пример K41.12

#### ПОСЛЕДНЕЕ уравнение системы

**должно быть заменено нормирующим**

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

$n := 2$	Число каналов (Две заправочные колонки)		
$\mu := \frac{1}{2}$	Интенсивность обслуживания канала (К-во машин, заправляемых за ед. времени)		
$r := 3$	Максимальная длина очереди		
$m := n + r$	Число источников заявок		
$\lambda := 2$	Интенсивность поступления заявок (К-во машин, приходящих на заправку за ед. времени)		
$j := 1..m$	$P_j := 0$	$P_0 := 1$	Начальные условия для вероятностей состояний СМО
$\lambda := \lambda$	$\mu := \mu$	$P := P$	

НЕИЗМЕНЯЕМАЯ процедура формирования левой части системы линейных алгебраических уравнений относительно вероятностей состояний СМО

$$D(P) := \left\{ \begin{array}{l} D_0 \leftarrow P_1 \cdot \mu - P_0 \cdot \lambda \\ \text{for } i \in 1..n-1 \quad \quad \quad \text{if } n > 1 \\ \quad D_i \leftarrow P_{i-1} \cdot \lambda + P_{i+1} \cdot (i+1) \cdot \mu - P_i \cdot (i \cdot \mu + \lambda) \\ \text{for } j \in n..m-1 \quad \quad \quad \text{if } m > n \\ \quad D_j \leftarrow P_{j-1} \cdot \lambda + P_{j+1} \cdot n \cdot \mu - P_j \cdot (n \cdot \mu + \lambda) \\ D_m \leftarrow 1 - \sum_{i=0}^m P_i \\ D \end{array} \right.$$

Сформированные левые части системы линейных алгебраических уравнений относительно вероятностей состояний СМО для данной задачи

$$D(P) \rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \cdot \mu - P_0 \cdot \lambda \\ P_0 \cdot \lambda + 2 \cdot P_2 \cdot \mu - P_1 \cdot (\mu + \lambda) \\ P_1 \cdot \lambda + 2 \cdot P_3 \cdot \mu - P_2 \cdot (2 \cdot \mu + \lambda) \\ P_2 \cdot \lambda + 2 \cdot P_4 \cdot \mu - P_3 \cdot (2 \cdot \mu + \lambda) \\ P_3 \cdot \lambda + 2 \cdot P_5 \cdot \mu - P_4 \cdot (2 \cdot \mu + \lambda) \\ 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 \end{bmatrix}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений относительно вероятностей состояний

Given

$$D(P) = 0$$

$$\text{Prez} := \text{Find}(P)$$

Полученное решение

$$\text{Prez}^T = \left( 8 \times 10^{-3} \quad 0.032 \quad 0.064 \quad 0.128 \quad 0.256 \quad 0.512 \right)$$

На его основе вычисляем:

$$\text{Potv} := \text{Prez}_m \quad \text{Potv} = 0.512 \quad \text{Машина проедет необслуженной}$$

$$Q := 1 - \text{Potv} \quad Q = 0.488$$

$$A := \lambda \cdot Q \quad A = 0.976 \quad \text{Среднее число машин, обслуживаемых станцией за ед. времени}$$

$$\frac{1}{A} = 1.025 \quad \text{Среднее время обслуживания заявки} \quad +$$

$$\text{Nzan} := \frac{A}{\mu} \quad \text{Nzan} = 1.952 \quad \text{Среднее число занятых каналов (колонок)}$$

$$\text{Nojid} := \sum_{i=1}^{m-n} i \cdot \text{Prez}_{n+i} \quad \text{Nojid} = 2.176 \quad \text{Среднее число машин в очереди}$$

$$\text{tw} := \frac{1}{n \cdot \mu} \cdot \sum_{i=1}^{m-n} i \cdot \text{Prez}_{n-1+i} \quad \text{tw} = 1.088 \quad \text{Среднее время ожидания в очереди}$$

$$\text{tsys} := \text{tw} + \frac{Q}{\mu} \quad \text{tsys} = 2.064 \quad \text{Среднее время пребывания машины на станции}$$

### [Пример решения в среде MathCAD. Нестационарный режим, замкнутая СМО с очередью](#)

Задана система "экскаватор - самосвалы". Экскаватор погружает за один

рабочий цикл 1 т грунта. Грузоподъемность самосвала равна 7 т. Число самосвалов, обслуживающих экскаватор, равно 5. Рабочий цикл экскаватора длится 0.295 мин, а время обращения самосвала равно 10 мин. Проанализировать поведение данной системы массового обслуживания за первые полчаса ее функционирования. Определить промежуток времени, в течение которого система переходит в стационарный режим. Определить продуктивность экскаватора, а также среднее число простаивающих машин.

**Ответы:**

- система переходит в стационарный режим приблизительно через **18** мин.
- среднее число простаивающих машин равно **0.746**;
- экскаватор обслуживает один самосвал в среднем в течение **2.84** минут.
- предельные вероятности состояний равны соответственно: **0.272, 0.281, 0.232, 0.144, 0.059, 0.012**.

**Замкнутая система массового обслуживания**  
**МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ НА БАЗЕ MATHCAD**  
**Глава 40, с. 316**  
**Пример K40.11**

$n := 1$	Число каналов (эскаваторов)	
$\mu := \frac{1}{7 \cdot 0.295}$	Интенсивность обслуживания канала (К-во самосвалов, загружаемых за ед. времени (минуту))	
$r := 4$	Максимальная длина очереди (кол-во самосвалов, которые могут ожидать погрузки)	
$m := n + r$	Число источников заявок	$m = 5$
$\lambda := \frac{1}{10}$	Интенсивность поступления заявок (К-во самосвалов, подъезжающих к эскаватору за ед. времени (минуту))	

Начальные условия для вероятностей состояний СМО

$$j := 1..m \quad P_j := 0 \quad P_0 := 1$$

$$\lambda := \lambda \quad \mu := \mu \quad P := P$$

НЕИЗМЕНЯЕМАЯ процедура формирования левой части системы линейных алгебраических уравнений относительно вероятностей состояний СМО

+

$$D(P) := \left\{ \begin{array}{l} D_0 \leftarrow P_1 \cdot \mu - P_0 \cdot \lambda \cdot m \\ \text{for } i \in 1..n-1 \quad \text{if } n > 1 \\ \quad D_i \leftarrow P_{i-1} \cdot (m-i+1) \lambda + P_{i+1} \cdot (i+1) \cdot \mu - P_i \cdot [i \cdot \mu + \lambda \cdot (m-i)] \\ \text{for } j \in n..m-1 \quad \text{if } m > n \\ \quad D_j \leftarrow P_{j-1} \cdot \lambda \cdot (m-j+1) + P_{j+1} \cdot n \cdot \mu - P_j \cdot [n \cdot \mu + \lambda \cdot (m-j)] \\ D_m \leftarrow 1 - \sum_{i=0}^m P_i \\ D \end{array} \right.$$

Сформированные левые части системы линейных алгебраических уравнений относительно вероятностей состояний СМО для данной задачи

$$D(P) \rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \cdot \mu - 5 \cdot P_0 \cdot \lambda \\ 5 \cdot P_0 \cdot \lambda + P_2 \cdot \mu - P_1 \cdot (\mu + 4 \cdot \lambda) \\ 4 \cdot P_1 \cdot \lambda + P_3 \cdot \mu - P_2 \cdot (\mu + 3 \cdot \lambda) \\ 3 \cdot P_2 \cdot \lambda + P_4 \cdot \mu - P_3 \cdot (\mu + 2 \cdot \lambda) \\ 2 \cdot P_3 \cdot \lambda + P_5 \cdot \mu - P_4 \cdot (\mu + \lambda) \\ 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 \end{bmatrix}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений относительно предельных вероятностей состояний

Given

$$D(P) = 0$$

$$\text{Prez} := \text{Find}(P)$$

Полученное решение (**предельные вероятности состояний**)

$$\text{Prez}^T = ( 0.272 \ 0.281 \ 0.232 \ 0.144 \ 0.059 \ 0.012 )$$

На его основе вычисляем:

Среднее число занятых каналов

$$N_{\text{zan}} := \sum_{i=1}^n i \cdot \text{Prez}_i + n \cdot \sum_{j=n+1}^m \text{Prez}_j \quad N_{\text{zan}} = 0.728$$

Среднее число заявок, обслуживаемых СМО в ед. времени

$$A := N_{\text{zan}} \cdot \mu \quad A = 0.353$$

Среднее время обслуживания заявки (самосвала) **минут на самосвал**

$$\frac{1}{A} = 2.836$$

Среднее число заявок, поступивших

$$N_{\text{post}} := m - \frac{A}{\lambda} \quad N_{\text{post}} = 1.474$$

Среднее число заявок в очереди (**Среднее число простаивающих машин**)

$$N_{\text{ocer}} := N_{\text{post}} - N_{\text{zan}} \quad N_{\text{ocer}} = 0.746$$

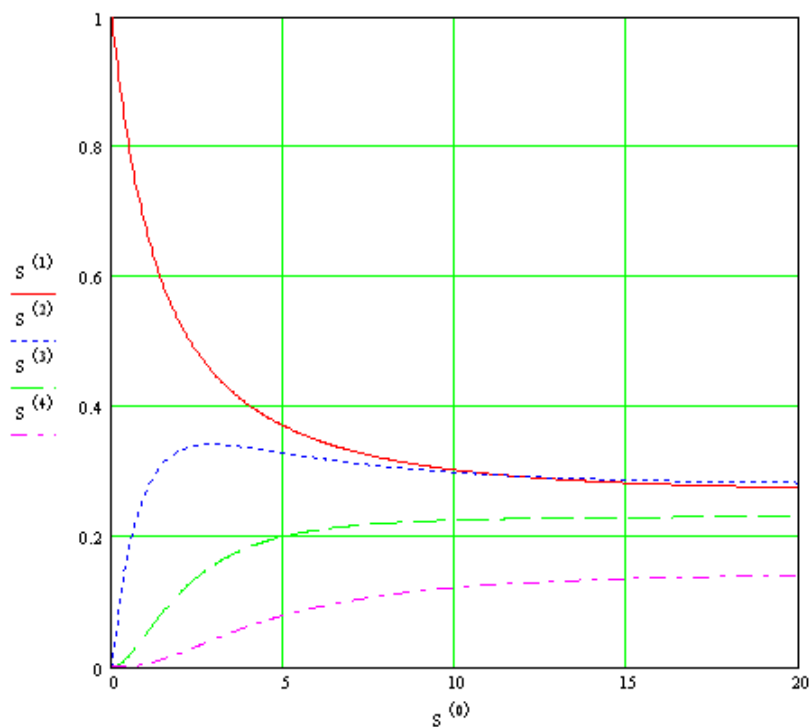


Получение функций с зависимостью от времени, описывающих изменение вероятностей нахождения системы в разных состояниях

---

$t_{begin} := 0$	Начальный момент наблюдения
$t_{end} := 20$	Конечный момент наблюдения
$N := 500$	Количество шагов для решения ОДУ
$DR(t,P) := D(P)$	Описание правых частей ОДУ в предписанном стандартном виде
$S := rkfixed(P,t_{begin},t_{end},N,DR)$	Вызов стандартной процедуры для решения ОДУ

Изменение вероятностей нахождения системы в разных состояниях в виде графиков



### *Литература.*

1. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера., «Техніка»,1975,768с.
2. Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. Математика для экономистов на базе MathCAD. –СПб.: БХВ-Петербург, 2003,496 с.

## Тема 8. Моделирование систем с распределенными параметрами

Официальный сайт QForm [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <https://www.qform3d.ru>. – Дата доступа: 23.10.2022.

Официальный сайт Ansys [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <https://www.ansys.com>. – Дата доступа: 23.10.2022.

Официальный сайт Deform [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <https://www.deform.com>. – Дата доступа: 23.10.2022.

### [Понятие о методах решения задач расчета сплошных сред](#)

Поведение любой сплошной среды упругой, газообразной и т.д. описывается дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП). Эти дифференциальные уравнения для разных видов сред имеют разный вид.

В них могут возникать поля различной природы: поля скоростей, поля температур, электрические, магнитные и т. д.

Иногда приходится учитывать воздействие этих полей. Например: так называемая пьезокерамика позволяет преобразовать электрический потенциал, заданный на границах тела, в деформации этого тела. В этом случае нужно решать так называемую задачу электроупругости.

Во всех перечисленных случаях имеется нечто общее:

- исследователь мысленно выделяет из окружающей среды объект, поведение которого будет описывать соответствующими уравнениями;
- взаимодействие этого объекта с отброшенной окружающей средой воспроизводится условиями на его границе (которые поэтому и называют граничными условиями).

Таким образом, схема состоит из двух частей:

- дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие поведение сплошной среды;
- граничные условия для рассматриваемого объема сплошной среды.

Совокупность этих двух частей и составляют граничную задачу.

### [Метод взвешенных невязок для решения граничной задачи](#)

Пусть ДУЧП, описывающие сплошную среду, имеют вид:

$$L\phi + \gamma = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (8.1)$$

$L$  — оператор, действующий на функцию  $\phi$

$\phi$  — неизвестное решение ДУ  $\phi = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - $n$ -мерное пространство геометрических переменных.

Граничные условия имеют вид:

$$\mu\phi + \beta = 0 \quad \text{на } \Gamma_\Omega \quad (8.2)$$

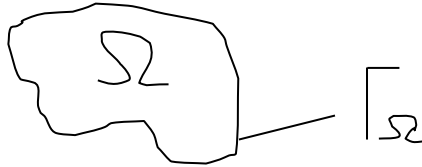


Рисунок 8.1. Область и ее граница

Неизвестной в граничной задаче является функция.

Используем идею приближенной замены этой функции аппроксиматором вида.

$$\phi \approx \bar{\phi} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \phi_i^* \quad (8.3)$$

где  $\phi_i^*$  — известные базисные функции,

$a_i$  — неизвестные числовые коэффициенты.

Сформулируем теперь критерий близости аппроксиматора к неизвестному решению.

Если подставить (8.3) в (8.1), то получим

$$L\bar{\phi} + \gamma = R_\Omega(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

функция  $R_\Omega$  — представляет собой так называемую невязку внутри области. Эту невязку графически можно изобразить как поверхность в  $n+1$ -мерном пространстве, построенную подобластью  $\Omega$ . («шапка» под  $\Omega$ ).

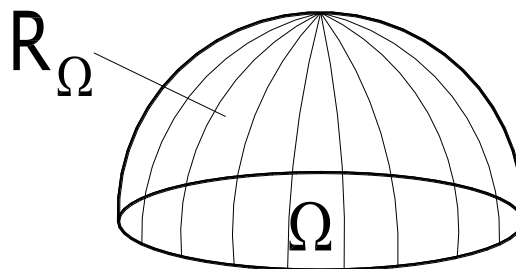


Рисунок 8.2 Невязка над областью в случае двумерной области.

Аналогично, подставляя (8.3) в (8.2), получим

$$\mu\bar{\phi} + \beta = R_{\Gamma_{\Omega}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

функция  $R_{\Gamma_{\Omega}}$  — представляет невязку на границе («забор» на границе).

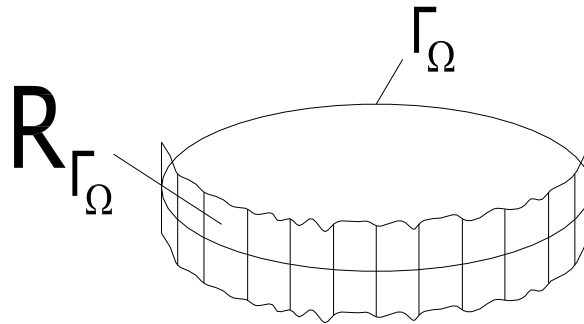


Рисунок 8.3 Невязка на границе в случае двумерной области.

Тогда осмысленно потребовать, чтобы сумма взвешенных величин объёма «шапки» + площади «забора» была минимальна.

$$\int_{\Omega} N \cdot R_{X_{\Omega}} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_{\Omega}} M \cdot R_{\Gamma_{\Omega}} \cdot d\Gamma_{\Omega} \xrightarrow{a_1, a_2, \dots, a_n} \min \quad (8.4)$$

где  $N$  и  $M$  — весовые функции (веса).

Эти веса позволяют выбирать предпочтительность погрешности, либо на границе, либо внутри. Заметим, что в такой постановке неизвестными оказались числовые коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Оказывается, что в зависимости от выбора весовой функции из рассмотренного метода взвешенных невязок получится целый спектр современных методов решения граничных задач, в том числе метод конечных элементов, метод граничных элементов.

[Метод сеток](#)

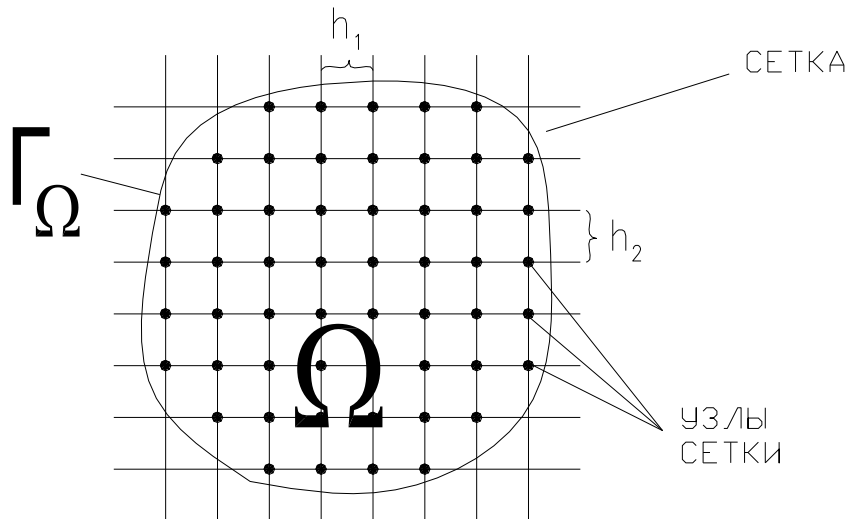


Рисунок 8.4 Иллюстрация для метода сеток.

В этом методе по отдельной независимой переменной наносится равномерная сетка с заданным шагом  $h_1$ . Затем по второй переменной наносится равномерная сетка (может быть со своим шагом  $h_2$ ). Точки пересечения делений называются узлами. Как видно из рисунка 8.4 узлы не всегда попадают на границу.

Преимуществом этого метода является относительно простая численная реализация. Неизвестными в процессе решения являются значения функций  $\varphi$  в узлах.

К недостаткам относятся:

- необходимость снесения граничных условий на какие-то узлы на границе, стоящие рядом с исходными узлами;
- поскольку сетка равномерная, то сложно учитывать большие градиенты решения.

### [Метод конечных элементов](#)

В этом методе область  $\Omega$  разбивают нерегулярной сеткой на подобласти, называемые конечными элементами.

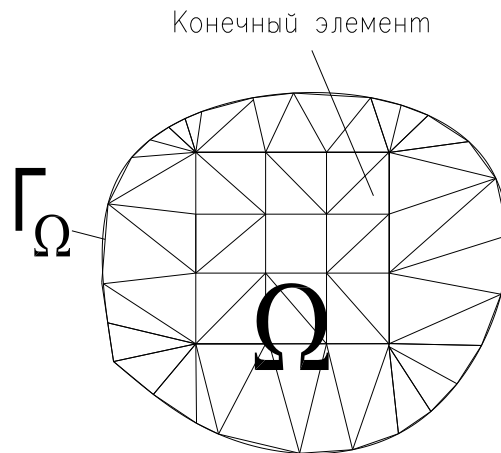


Рисунок 8.5 Иллюстрация конечно-элементного разбиения.

Эти элементы могут иметь разные размеры и разную форму. Такой подход позволяет хорошо учитывать специфику геометрии рассматриваемой области и большие градиенты решения в некоторых подобластях.

К определенным недостаткам относятся:

- необходимость получения своих матриц для каждого типа конечных элементов;
- определенная сложность математического аппарата и его программной реализации;
- с увеличением размерности пространства резко возрастает количество узлов, а значит и число неизвестных разрешающих уравнений.

В этом методе, после того как найдены значения неизвестного решения в узлах, решение внутри элемента приближенно строится с помощью, так называемой функций формы, которые представляют собой интерполирующие функции.

### [Метод граничных элементов](#)

Основным требованием к базисным функциям  $\phi_i^*$  из соотношения (3) в этом методе является то, что они должны быть решениями дифференциального уравнения (1).

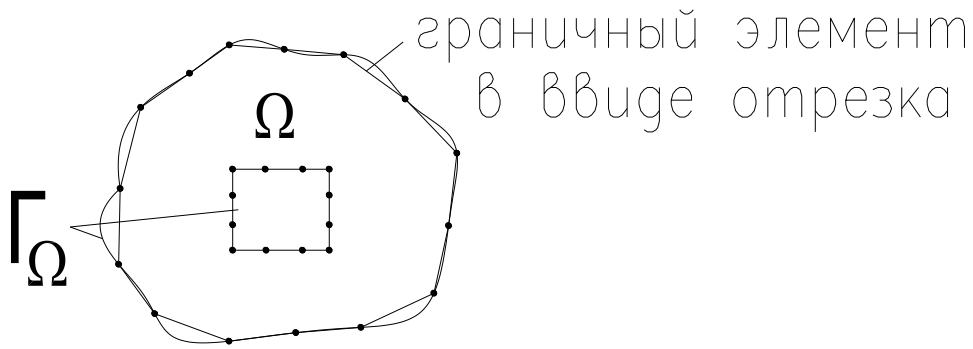


Рисунок 8.6 Иллюстрация гранично-элементного разбиения.

Понятно, что первое слагаемое в сумме (4) равно нулю. Как видно из рисунка 8.6 на элементы разбивается лишь граница области. Элементы могут иметь разную форму (простейшие — это отрезки).

Преимущества: резкое сокращение числа неизвестных в решаемой задаче, что особенно важно в задачах большой размерности. Поскольку базисные функции являются решением дифференциального уравнения, то, как только найдены решения на границах, решение в любой точке внутри области на их основе будет получено без погрешности.

Основным недостатком является необходимость предварительного получения в аналитическом виде так называемых сингулярных решений исходного дифференциального уравнения. Эта задача является очень сложной и не всегда удается её решить, для данного вида сплошной среды.

Наиболее употребительным из рассмотренных в настоящее время является метод конечных элементов.

### [Подробнее о конечно-элементном моделировании](#)

При расчете технических систем с использованием метода конечных элементов (МКЭ) сначала сам объект разбивают на части, называемые конечными элементами. Эти части должны иметь простую геометрию: стержни сплошного или тонкостенного сечения, пластины, оболочки, массивные элементы.

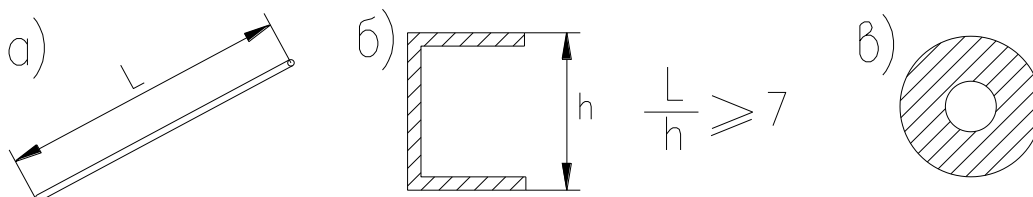


Рисунок 8.7 Стержень а) и примеры его сечений б), в).

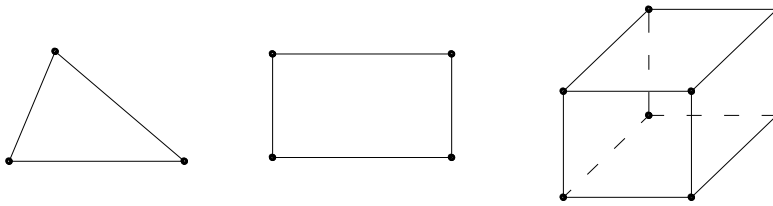


Рисунок 8.8 Виды двумерных и трехмерных конечных элементов.

Элементы могут быть и специализированными (рисунок 8.9)

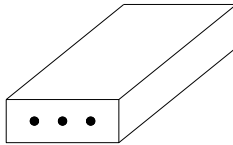


Рисунок 8.9 Конечный элемент, учитывающий армирование.

Для каждого типа конечных элементов строится так называемая матрица жесткости  $K$ , которая описывает упругие свойства элемента, матрица масс  $M$ , которая описывает инерционные характеристики конечного элемента, матрица затухания (демпфирования)  $C$ , которая описывает способность рассеивать энергию данного элемента.

Матрицы  $M$  и  $C$  используются только при решении задач динамики, то есть тогда, когда рассматривается поведение конструкции при изменяемых во времени нагрузках. Если же решается задача статики, то достаточно матрицы  $K$  для получения её решения.

Пример построения таких матриц будет рассмотрен в дальнейшем. Заметим только, что для каждого типа конечных элементов такие матрицы разработаны, их вид приведен в соответствующих справочниках.

В промышленных конечно-элементных комплексах (NASTRAN, ANSYS, COSMOS) после того, как конструкция разбита на конечные элементы, нужно для каждого из них указать тип, в соответствии с которым из базы данных будет выбрана нужная матрица. Библиотеки конечно-элементных матриц достаточно велики, чтобы охватить практически все встречающиеся задачи.

Существуют специальные конечно-элементные комплексы, предназначенные для решения частных задач: расчет строительных конструкций, расчет форм для литья и т. д.



Наиболее мощные конечно-элементные это LSDYNE, ANSYS, NASTRAN.

Конечные элементы взаимодействуют между собой в узлах. При этом считается, что на границах между двумя элементами поля перемещений и напряжений изменяются непрерывно. Неизвестными, относительно которых решается задача, являются значения перемещений (температур или других полей) в узлах конечно-элементной сетки.

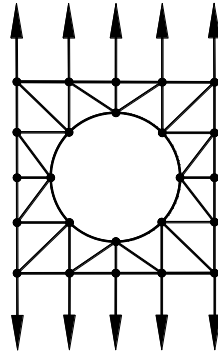


Рисунок 8.10 Пример конечно-элементной расчетной схемы в задаче о пластине с отверстием, подверженной растяжению.

В зависимости от выбранного типа элемента в узле может быть различное количество неизвестных. Например, если плоскую деталь, которая подвержена растяжению (рисунок 8.10), разбить на треугольные элементы, то в отдельном узле треугольного элемента нужно учитывать два перемещения в плоскости.

Эти неизвестные еще называются степенями свободы. Когда их значение определены, с помощью интерполирующих функций, называемых функциями формы, можно рассчитать значения соответствующих неизвестных в любой внутренней точке элемента. Выбор функции формы, в конце концов, определяет вид матрицы жесткости.

### [Краткий обзор существующих систем конечно-элементного моделирования](#)

Средства автоматизации инженерного анализа, основанные на численных методах, стали неотъемлемой частью процесса проектирования и исследования изделий. Для успешного применения каждый расчетный пакет должен соответствовать двум требованиям:

- воплощать самые эффективные численные алгоритмы;

- предоставлять пользователю развитый набор сервисных функций по подготовке исходных данных и обработке результатов расчета.

### *Pro/Engineer*

Pro/MESH, Pro/FEM-POST и Pro/SURFACE – модули Pro/Engineer для расчета на прочность методом конечных элементов.

Pro/MESH обеспечивает конструктору возможность создания сетки конечных элементов для моделей, полученных в Pro/Engineer. Тонкостенные и твердотельные объекты могут автоматически моделироваться, разбиваться и экспортироваться в различные программы для дальнейшего анализа. Pro/MESH является дополнительным модулем семейства Pro/Engineer.

Pro/FEM-POST обеспечивает полный набор возможностей постпроцессора для анализа результатов, полученных методом конечных элементов, и предоставляет пользователям возможность отображать результаты анализа в среде Pro/Engineer. Pro/FEM-POST упрощает процесс сквозного проектирования/анализа в интегрированной среде, объединяющей полную ассоциативность Pro/Engineer с возможностями современного постпроцессора, для анализа результатов, полученных методом конечных элементов. Дружественный пользователю интерфейс обеспечивает проверку правильности решений при проектировании и оптимизации на ранних этапах разработки изделия. Pro/MESH является необходимым условием построения сетки для Pro/FEM-POST.

### *MSC NASTRAN*

В MSC/N4W широко представлены процедуры создания объемов, твердотельных примитивов, тел и выполнения различных операций над ними. MSC.NASTRAN for Windows мощный пакет для расчета и моделирования нагрузок, вибраций, термодинамики, гидродинамики в различных системах. Поддерживает большинство CAD-форматов и программ, моделирование геометрии и 3D. Элементы конструкций и сборочные единицы в большинстве случаев создаются в различных CAD-программах (AutoCAD, Solid Works и др.), принятых в практике проектирования того или иного предприятия, поэтому в MSC/N4W представлены многочисленные средства экспорта/импорта геометрических моделей. Рассматриваются вопросы, связанные с конечно-элементным представлением моделей разрабатываемых конструкций:

- определение необходимых свойств используемых материалов;
- выбор типа конечных элементов и их параметров;
- создание и редактирование конечно-элементной сетки.

Задаются различные виды материалов: изотропные, ортотропные и анизотропные; приводится описание типов и видов конечных элементов, определенных в MSC/N4W, различные способы построения конечно-элементной сетки (автоматический, ручной, с помощью выдавливания, копирования, преобразования типов элементов и т.д.), вопросы обеспечения согласования узлов на частях модели (в сборках), средства контроля и редактирования сетки конечных элементов.

### *FlexPDE*

FlexPDE предоставляет конструктору возможность создать конечно-элементную модель объекта и решить ее численными методами. Выполняя программы, написанные пользователями, FlexPDE переводит описания системы дифференциальных уравнений в конечную модель объекта, решает систему и предоставляет результат в графическом виде.

FlexPDE содержит в себе весь диапазон функций, необходимых для решения системы дифференциальных уравнений: редактор для подготовки программ, генератор сетки для построения конечно-элементных сетей, конечно-элементный решатель для поиска решения и графическую систему вывода результатов.

FlexPDE не имеет predeterminedной проблемной области или списка уравнений. Выбор дифференциальных уравнений предоставлен пользователю.

Встроенный язык программирования позволяет пользователю описывать математику его системы дифференциальных уравнений и геометрию проблемной области в виде, подобном тому, которым он мог бы описывать другому конструктору.

FlexPDE позволяет решать системы дифференциальных уравнений первого или второго порядка в декартовой или асимметрической двумерной геометрии или в трехмерной декартовой геометрии.

Число решаемых FlexPDE уравнений ограничено только возможностями компьютера, на котором эти уравнения решаются.

### *ANSYS*

ANSYS - многоцелевой конечно-элементный пакет для проведения анализа в широком круге инженерных дисциплин (прочность,

теплофизика, динамика жидкостей и газов и электромагнетизм). В 2003г. ANSYS насчитывал 90000 коммерческих и 130000 университетских рабочих мест в мире.

ANSYS является универсальным так называемым “тяжелым” конечно-элементным пакетом, предназначенным для решения в единой среде (и на одной и той же конечно-элементной модели) задач:

- прочности;
- изучения температурных полей ;
- электромагнетизма;
- гидрогазодинамики;
- многодисциплинарного связанного анализа, объединяющего все четыре типа;
- оптимизации на основе всех вышеприведенных типов анализа.

Препроцессор ANSYS позволяет создавать геометрические модели собственными средствами и импортировать готовые. Геометрическая модель в дальнейшем может быть модифицирована любым образом, поскольку при импорте осуществляется перетрансляция данных в геометрический формат ANSYS и деталь не подменяется “неприкасаемой” конечно-элементной сеткой. Пользователь может удалять несущественные мелкие детали, достраивать определенные детали, проводить сгущение-разрежение сетки и другие важнейшие операции, без которых, порой, дальнейшее решение будет совершенно некорректно или вообще не сможет быть достигнуто. Построение поверхностной, твердотельной и каркасной геометрии и внесение изменений осуществляется средствами геометрического моделера.

### *Геометрический моделер*

- создание геометрических моделей сверху-вниз (операции с геометрическими примитивами) и снизу-вверх (точки-линии-поверхности-объемы). построение твердотельной модели возможно в ANSYS двумя путями и их комбинацией: при помощи набора готовых примитивов (как то – параллелепипед, цилиндр и др.) и булевых операций над ними, либо последовательным иерархическим построением, начиная с опорных точек, далее линии, сплайны, и т.п. до твердого тела. наличие обоих вариантов дает гибкие возможности для

быстрейшего создания сложных моделей только средствами ansys.

- булевы операции (сложение, вычитание, и др.) над "своими" и импортированными моделями
- связь с большинством cad-систем (с UG, PRO/E, CATIA, CADDs прямой интерфейс) и чтение нейтральных геометрических форматов iges, sat, parasolid (подробнее см. далее)
- возможность слияния нескольких геометрических моделей в одну (как собственных, так и импортированных из разнородных CAD-систем)
- параметрическое задание геометрии (для дальнейшей оптимизации конструкции)

### ***Операции над импортированными моделями***

- проверка на наличие малых геометрических объектов, сингулярностей, несовместностей с возможностью визуального контроля
- средства восстановления утраченных элементов модели (например, восстановление поверхности по сохранившемуся окаймляющему контуру)
- удаление ненужных свойств
- прямое объединение (сложение) поверхностей двоякой кривизны произвольного вида
- деление и объединение поверхностей и линий, принадлежащих твердому телу
- параметрическое "схлопывание" линий и поверхностей твердого тела
- развернутый сервис – запрос объема, площади поверхности, длины линии и др. данных

### ***Сеточный генератор***

- полностью автоматизированная процедура разбиения на тетраэдры твердых тел произвольной геометрии
- создание регулярных сеток из объемных кирпичей в сложных объемах (в т.ч. операция экструдирования поверхностной сетки в имеющемся твердом теле)
- автоматическое построение переходных сеток гексаэдр-пирамида-тетраэдр для элементов второго порядка

- автоматическое сопряжение областей, разбитых элементами первого и второго порядков - программное удаление среднего узла по границам
- построение нерегулярных сеток на произвольных поверхностях только из четырехугольных элементов (без треугольников)
- создание объемной трехмерной сетки по имеющейся поверхностной при отсутствии твердотельной модели (заполнение пирамидами и тетраэдрами)
- использование уже построенной сетки при наличии сопряженных поверхностей и линий у геометрических моделей (автоматическая сшивка сеток)
- импорт сеток и двусторонняя связь с большинством cae и тяжелых CAD-систем (PRO/E, UG, ABAQUS, NASTRAN, I-DEAS и др.)
- наличие отдельной операции оптимизации и сглаживания уже имеющейся сетки
- создание сеток при экструдировании линий и поверхностей по произвольному пути
- функция проверки качества сетки со средствами визуализации
- сгущение (как двух, так и трехмерное) на уже имеющемся разбиении

### *Нагрузки и граничные условия*

- приложение к геометрическим объектам (точки, линии, поверхности, объемы) и к сетке
- табличный и функциональный ввод (function builder) изменяемых граничных условий и нагрузок.

### *Решатели*

- прямые
- итерационные
- явный (ANSYS/LS-DYNA)

ANSYS предлагает уникальный набор различных решателей к каждому из типов анализа (статика – 6 типов, модальный анализ – 6 типов, и т.д.) с функцией программного автоподбора типа решателя в зависимости от типа и размерности решаемой задачи. Такая гибкость и поддержка многопроцессорного режима на персональных компьютерах открывают новые горизонты в области инженерных расчетов.

Решение переходных динамических задач проводится методом Ньюмарка. Используется полная и модифицированная процедура Ньютона-Рафсона,.

## *Параллелизм и многопроцессорные системы*

ANSYS поддерживает многопроцессорный режим на персональных Windows-Intel компьютерах и на всех типах Unix-платформ.

Специализированный модуль Parallel performance (Distributed Domain Solver) позволяет распараллеливать вычисления на сетевых кластерных платформах. В настоящий момент поддерживаются до 700 процессоров. Помимо сетевых кластеров, данный блок работает и на обычных многопроцессорных комплексах. Модуль поставляется как опция только к коммерческим версиям.

### *Постпроцессинг*

- постпроцессинг истории нагружения
- регулируемый масштаб изображения деформаций (реальный, задаваемый пользователем и др.)
- цветные контурные и векторные представления, эпюры, таблицы, графики
- представление результатов в виде изоповерхностей и изолиний в прозрачном теле
- построение сечений и разрезов и вывод в них любых результатов
- вычисление интеграла любой характеристики в произвольном плоском сечении и по сферической поверхности
- графический запрос любых результатов указанием мыши
- построение эпюр для стержневых и балочных элементов
- расчет коэффициентов безопасности (запаса)

Исходя из изложенного, в дальнейшем отдадим предпочтение системе ANSYS.

## 2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

### Лабораторная работа №1. Модели колебательных систем

Исследуйте поведение одномассовой колебательной системы, расчетная схема которой представлена на рисунке ниже при различных законах действия внешней нагрузки  $P(t)$  и сочетаниях параметров  $k$ ,  $c$ ,  $m$ .

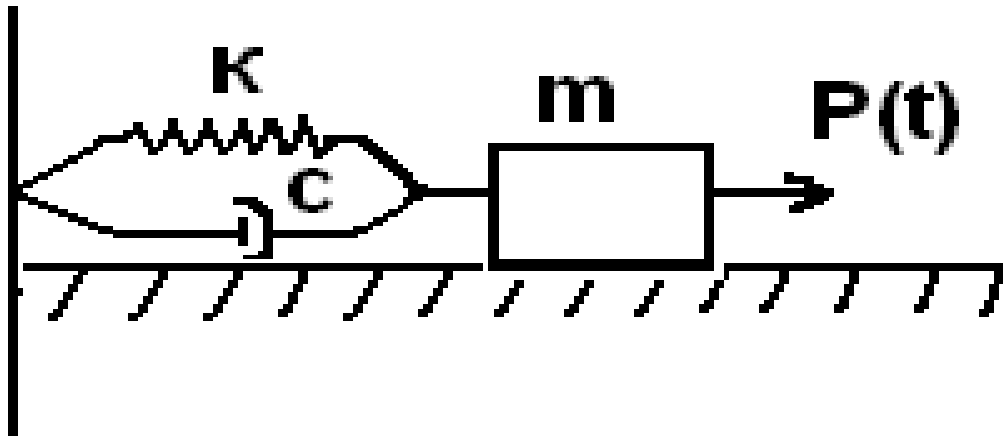


Рисунок П2.1 Колебательная одномассовая система.

1. Свести ДУ второго порядка вида

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = p(t)$$

к системе ДУ первого порядка.

2. При  $p(t)=0$  получить  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  при разных  $c$ .
3. При  $c=0$  для разных законов  $p(t)$  получить  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ 
  - $p(t)=\text{const}$ ;
  - $p(t)=\sin(2\omega t)$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;
  - $p(t)=\sin(\omega t)$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;
  - $p(t)=t$ ;
4. При  $c \neq 0$  для разных законов  $p(t)$  получить  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ 
  - $p(t)=\text{const}$ ;
  - $p(t)=\sin(2\omega t)$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;



- $p(t) = \sin(\omega t)$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;
- $p(t) = t$ .

Вы можете использовать в качестве примера следующий документ MATHCAD

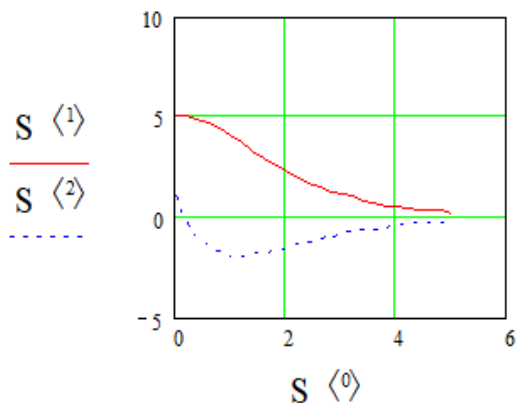
$$t_0 := 0 \quad t_1 := 5 \quad h := 0.2$$

$$N := \frac{t_1 - t_0}{h} \quad M := 1 \quad K := 1 \quad p(t) := 0$$

$$f(t, z) := \begin{pmatrix} z_1 \\ \frac{p(t) - C \cdot z_1 - K \cdot z_0}{M} \end{pmatrix} \quad R := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектор начальных значений}$$

$$S := \text{Rkadapt}(R, t_0, t_1, N, f)$$

метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом



### Лабораторная работа №2. Модель «хищник жертва»

Исследуйте поведение системы «хищник жертва» на основе системы ОДУ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a - bx_2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= (-c + dx_1)x_2 \end{aligned}$$

Задавайте разные начальные условия и значения параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Данные возьмите из таблицы, представленной ниже.

Таблица П2.1. Начальные условия и значения параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$

Вариант 1.

[Оглавление](#)

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	30	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

Вариант 2.

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

Вариант 3.

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	100	200
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

Вариант 4.

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,02	4
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

Вариант 5.

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,04	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

Вариант 6.

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	200	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,004	0,01

Вы можете использовать в качестве примера следующий документ MATHCAD.

Параметр	Львы	Антилопы
Начальная численность	30	100
Прирост/Смертность	0,02	2
Межвидовое взаимодействие	0,001	0,01

ORIGIN := 1

$x_{begin} := \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \end{pmatrix}$  начальная численность Антилоп  
 начальная численность Львов

$c := 0.02$  Прирост (смертность) Львов

$a := 2$  Прирост (смертность) Антилоп

$d := 0.001$  Межвидовое взаимодействие Львы-Антилопы (коэффициент защищенности жертв от хищников)

$b := 0.01$  Межвидовое взаимодействие Антилопы-Львы (коэффициент уничтожения хищниками жертв).

$t_{begin} := 0$  Начальный момент наблюдения

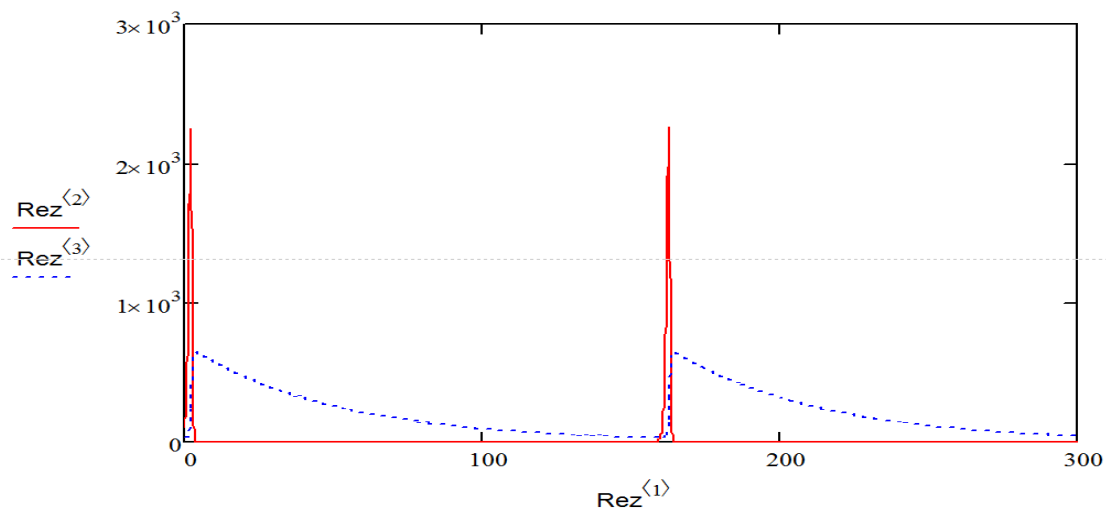
$t_{end} := 300$  Конечный момент наблюдения

$N := 4000$  Количество шагов по времени

$P(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \cdot (a - b \cdot x_2) \\ x_2 \cdot (-c + d \cdot x_1) \end{bmatrix}$  Правые части системы ОДУ модели "хищник-жертва"

$Rez := rkfixed(x_{begin}, t_{begin}, t_{end}, N, P)$

График изменения количества хищников и количества жертв от времени



### Лабораторная работа №3. Случайные величины в моделировании

Задание 1.

Для разных вариантов вычислите значения площадей фигур, точки которых удовлетворяют одновременно двум ограничениями вида

$$f(x, y) > 0$$

$$g(x, y) < 0$$

Предварительно изобразите кривые, описывающие границы:

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

Номер варианта	$f(x, y)$	$g(x, y)$
1	$-(x + 5)^2 - y + 6$	$\sin(x) - y - 7$
2	$\sqrt{ x  + 1} - y$	$x^3 - y$
3	$x - y^2$	$x^2 + y^2 - 1$
4	$\cos(x) - y$	$x^2 - y - 5$
5	$-y^2 - x^2 + 5$	$\cos(x - 1) + 1.1 - y$
7	$-y^2 - x^2 + 7$	$e^{-x} - y$
8	$y -  x - 2 $	$y - \sin(x - 1)$

Используйте пример документа MATHCAD для вычисления площади фигуры, ограниченной двумя кривыми с уравнениями:

$$-(x + 5)^2 - y + 6 = 0$$

$$\sin(x) - y - 7 = 0$$

Исходные функции:  $f(x, y) := -(x + 5)^2 + 6 - y$      $g(x, y) := \sin(x) - 7 - y$

Вспомогательные функции     $ab(x, y) := x$      $cd(x, y) := y$

Начальные "затравочные" значения     $x := 0$      $y := 0$

Поиск границ области:

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Minimize}(ab, x, y)$      $a := ab(z_0, z_1)$      $a = -8.697$

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Maximize}(ab, x, y)$      $b := ab(z_0, z_1)$      $b = -1.264$

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Minimize}(cd, x, y)$      $c := cd(z_0, z_1)$      $c = -8$

Given

$f(x, y) \geq 0$      $g(x, y) \leq 0$      $z := \text{Maximize}(cd, x, y)$      $d := cd(z_0, z_1)$      $d = 6$

Функция, вычисляющая количество точек, попавших в область и их координаты:

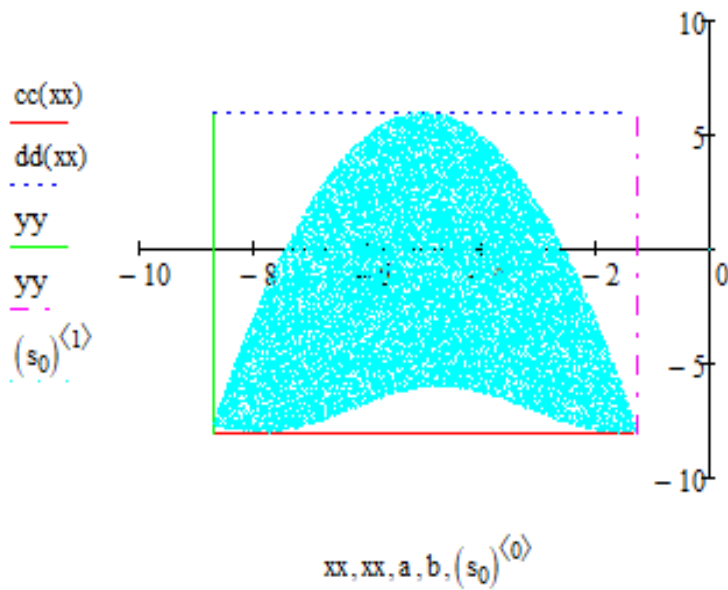
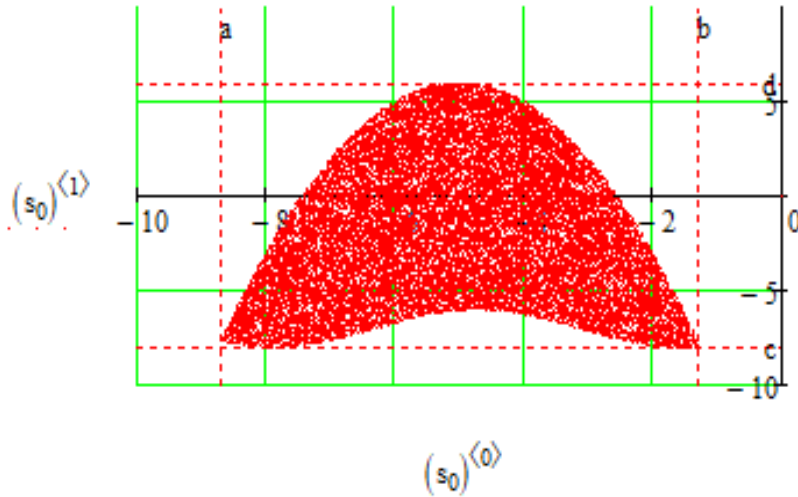
```

p(n) :=
  n1 ← 0
  for i ∈ 1..n
    x ← md(b - a) + a
    y ← md(d - c) + c
    if 1 = (g(x, y) ≤ 0) · (f(x, y) ≥ 0)
      n1 ← n1 + 1
      ti,0 ← x
      ti,1 ← y
  rez ← ( t
          n1 )
  rez
n := 40000
s := p(n)

```

$cc(x) := c$        $dd(x) := d$        $aa(x) := x$        $bb(x) := x$   
 $xx := a, a + 0.1.. b$   
 $yy := c, c + 0.1.. d$

Графическое отображение:



Сравнение полученного значения с значением вычисленным интегралом

$$s := (b - a) \cdot (d - c) \cdot \frac{s_1}{n} \quad s = 63.999$$

$$s1 := \int_a^b 13 - \sin(x) - (x + 5)^2 dx \quad s1 = 63.452$$

На рисунке красным цветом отображены точки, попавшие в область.

#### Задание 2.

На основе изложенной методики вычислите объем тела, ограниченного цилиндрической поверхностью с радиусом 2 единицам. Подошва цилиндра расположена на плоскости OXY. Высота цилиндрической поверхности равна 3 единицам. Сверху цилиндр накрыт полусферой.

#### Лабораторная работа №4. Конкурирующие стратегии эксплуатации автобуса

Для разных вариантов заданных вероятностей поломок  $a$ ,  $b$  и заданном числе предполагаемых рейсов  $N$  в день вычислите количество выполненных рейсов в день для двух стратегий эксплуатации автобуса.

Номер варианта	$a$	$b$	$N$
1	0.1	0.7	50
2	0.2	0.1	100
3	0.3	0.5	150
4	0.4	0.2	50
5	0.5	0.4	100
6	0.6	0.3	150
7	0.7	0.8	50

Вы можете использовать в качестве примера следующий документ MATHCAD, где приведено решение для трех ситуаций при

$$a=0, b=1, N=100.$$

$$a=1, b=0, N=100$$

$$a=1, b=1, N=100$$

ORIGIN := 1

Процедура вычисления числа передач при стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ , а также разницы в рейсах при данных стратегиях

```

Func(a,b,N,Dmax) :-
  D ← 0      Текущий номер моделируемого дня
  SRA ← 0    Общее число передач за D
  SRB ← 0    дней при стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ 
  SZ ← 0     Разница в числе передач в стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ 
  SG2 ← 1    Флаг обозначает хорошее состояние стратегии  $\beta$ .
  SB2 ← 0    НЕ критическое состояние при стратегии  $\beta$ 
  while D < Dmax
    RA ← 0    Количество действительно выполненных рейсов
    RB ← 0    в течении дня при стратегиях  $\alpha$  и  $\beta$ 
    RM ← 0    соответственно.
    SG1 ← 1
    if SB2 = 1 ПОЛНЫЙ ремонт ПРОПУСК всех рейсов дня стратегии  $\beta$ .
      SB2 ← 0  НЕ критическое состояние при стратегии  $\beta$ 
      SG2 ← 1  Хорошее состояние стратегии  $\beta$ .
    while RM < N
      RM ← RM + 1
      if SG1 = 1 Хорошее состояние при стратегии  $\alpha$ 
        RA ← RA + 1 Счётчик рейсов в день при стратегии  $\alpha$ 
        R $\alpha$  ← runif(1,0,1)
        SG1 ← 0 if R $\alpha$  <  $\alpha$  Есть переход в ухудшенное состояние
                  при стратегии  $\alpha$ .
        SG1 ← 1 otherwise
      if SB2 = 0 НЕ критическое состояние при стратегии  $\beta$ 
        R $\beta$  ← runif(1,0,1)
        if SG2 = 1 Хорошее состояние стратегии  $\beta$ .
          SG2 ← 0 if R $\alpha$  <  $\alpha$  Есть переход в ухудшенное состояние
                    при стратегии  $\beta$ .
          RB ← RB + 1 Счётчик рейсов в день при стратегии  $\beta$ 
        otherwise
          SB2 ← 1 if R $\beta$  <  $\beta$  Переход в критическое состояние при стратегии
                                $\beta$ 
          RB ← RB + 1 otherwise Рейс выполняется, если не было
                               перехода в критическое состояние при
                               стратегии  $\beta$ 
      SRA ← SRA + RA
      SRB ← SRB + RB
    Z ← RA - RB
    SZ ← SZ + Z
    D ← D + 1      Увеличиваем номер дня
  AVERA ←  $\frac{SRA}{Dmax}$ 
  AVERB ←  $\frac{SRB}{Dmax}$  Среднее число передач в день при стратегиях
                     $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.
  AVERZ ←  $\frac{SZ}{Dmax}$  Средняя разница в числе передач
                    между стратегиями  $\alpha$  и  $\beta$  за один день.
  return (AVERA AVERB AVERZ)

```



## *Полученные результаты тестирования*

Пример при вероятности перехода в ухудшенное и совсем плохое состояние =1

$$\text{Func}(1,1,100,4) = (50 \ 1 \ 49)$$

Пример при вероятности перехода в ухудшенное =1 и совсем плохое состояние =0

$$\text{Func}(1,0,100,4) = (50 \ 100 \ -50)$$

Пример при вероятности перехода в ухудшенное =0 и совсем плохое

$$\text{Func}(0,1,100,4) = (100 \ 100 \ 0)$$

Пример при вероятности перехода в ухудшенное =0 и совсем плохое

$$\text{Func}(0,0,100,4) = (100 \ 100 \ 0)$$

## Лабораторная работа №5. Моделирование прочности деталей

### РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ В ANSYS

#### Какая конструкция называется фермой

*Фермой* называется неизменяемая конструкция из прямых стержней, соединенных между собой шарнирами. Силы прикладываются к шарнирам – узлам фермы. Закрепления выполняются также в узлах. В стержнях фермы действуют только продольные (нормальные к поперечным сечениям) внутренние силы.

Статический расчет фермы заключается в определении перемещений узлов, реакций опор, усилий в стержнях, напряжений и деформаций стержней.

Реальная стержневая конструкция с жесткими узлами – сварными, болтовыми или заклепочными соединениями – может рассматриваться как ферма, если размеры узлов значительно меньше расстояний между узлами. В таких конструкциях, как и в фермах, вдали от узлов действуют только продольные внутренние силы. В области жестких узлов картина внутренних сил более сложная и может исследоваться только приближенными методами сопротивления материалов или теории деформированного твердого тела.

Рассмотрим ферму, показанную на рис. 5.1, имеющую  $n$  узлов и  $m$  стержней, у которой оси стержней и силы лежат в одной плоскости. Перемещения также ограничим этой плоскостью. Такая ферма называется плоской, или двумерной.

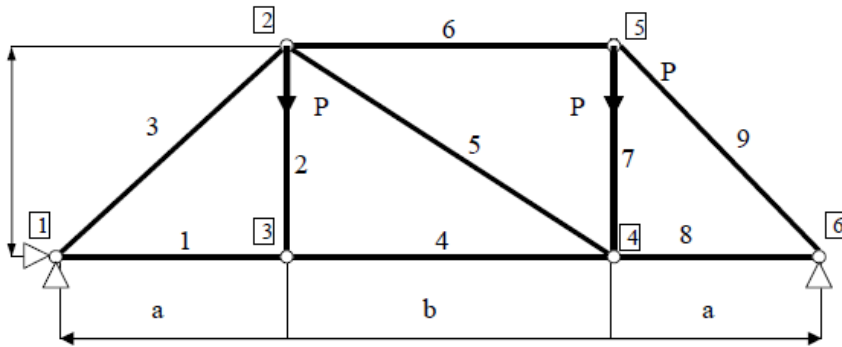


Рис. 5.1. Пример конечно-элементной модели фермы

Ферму сразу можно анализировать как конечно-элементную модель. Стержни являются одномерными конечными элементами, испытывающими только деформацию растяжения-сжатия, их называют ферменными конечными элементами. Шарнирные соединения являются узлами конечно-элементной модели. В качестве степеней свободы берутся узловые перемещения, которые полагаются малыми.

Ферменный (одномерный) конечный элемент показан на рис. 5.2.

С ним связана местная (локальная) система координат (на рисунке символы  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  подчеркнуты). Общая (глобальная) для всей фермы система координат  $x$ ,  $y$  перенесена параллельным переносом в узел  $i$ .

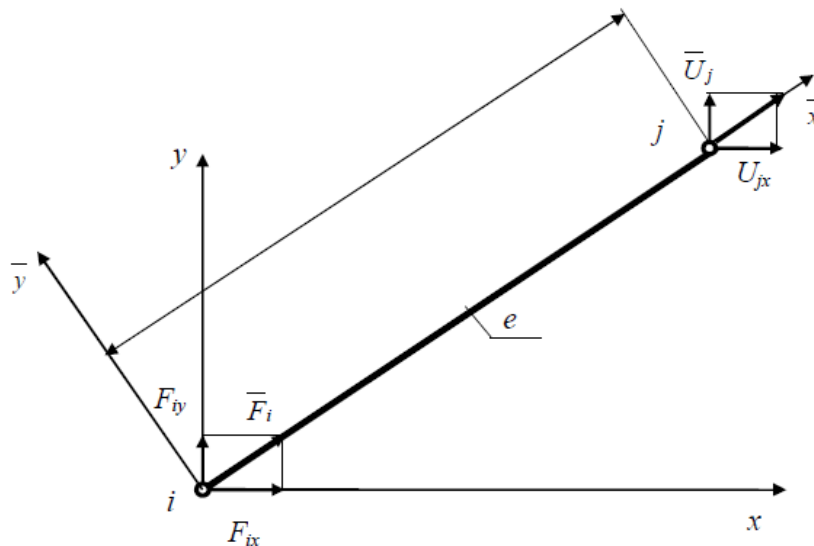


Рис. 5.2. Ферменный (одномерный) конечный элемент

[Пример расчета фермы с использованием графического интерфейса пользователя](#)

В качестве примера расчета фермы рассмотрим задачу № 5.67 (5.7) из задачника [1]. В данной задаче требуется определить опорные реакции и

[Оглавление](#)

усилия в стержнях фермы, показанной на рис. 5.3, вместе с действующими в узлах силами.

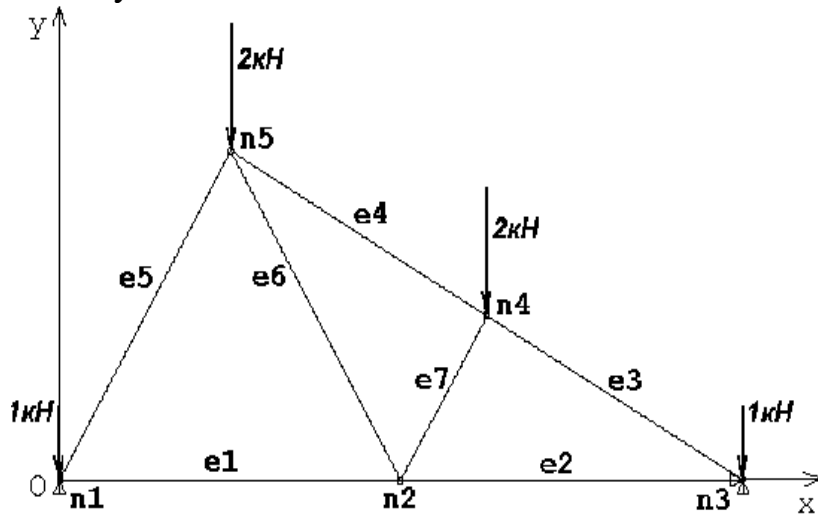


Рис. 5.3. Конечно-элементная расчетная схема фермы

В данном примере рассматривается расчет фермы с использованием графического интерфейса пользователя. Одновременно будут представлены команды ANSYS, позволяющие выполнить те же действия. Ферменная конструкция с точки зрения геометрической модели представляет собой последовательность точек, соединенных линиями.

Для решения представленной задачи в качестве элементов был выбран стержневой конечный элемент LINK1, потому что элементы заданных конструкций не испытывают изгибающих и крутящих моментов, следовательно стержни конструкции испытывают только растяжение или сжатие.

Элемент LINK1 может использоваться в различных инженерных задачах. В зависимости от применения этот элемент может использоваться в качестве фермы, связи, упругого элемента (пружины) и так далее. Двумерный (2D) элемент стержня имеет одну ось, может воспринимать растяжение и сжатие.

Как стержневой элемент, он не имеет свойств изгиба. Трехмерным (3D) элементом стержня является элемент LINK8.

Отнесем ферму к декартовой системе координат  $Oxy$  (рис. 5.3) и по рисунку, приведенному в задачнике, рассчитаем координаты ее узлов. На рис. 5.3 точки, где стержни соединены шарнирами, обозначены номерами  $n1, \dots, n5$ . Эти точки имеют следующие координаты (в метрах):

$$n1 - (0; 0), n2 - (2; 0), n3 - (4; 0), n4 - (2,5; \sqrt{3} / 2), n5 - (1; \sqrt{3}).$$

Для КЭ LINK1 (или LINK8) требуется задать по крайней мере одно материальное свойство (модуль Юнга  $E$ ) и одну константу КЭ (площадь поперечного сечения AREA).

### 5.2.1. Построение геометрической части модели

Предварительно в командной строке введем  $S3 = \text{SQRT}(3)$ , как на рис. 5.5.

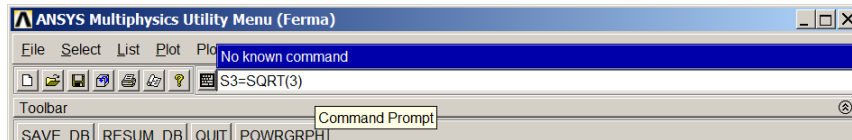


Рис. 5.5. Вид меню

Мы определили значение для скалярного параметра S3. Создадим точки. Выполним следующее:

*Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Keypoints > In Active CS.*

В появившемся окне на первой строке Keypoint number указываем номер точки. Во второй строке Location in active CS вводим координаты точки (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Координаты точек

№ точки	X	Y	Z
1	0	0	0
2	2	0	0
3	4	0	0
4	2,5	S3/2	0
5	1	S3	0

При вводе координат точек от 1 до 5 нажимаем кнопку Apply, после введения координат последней точки нажимаем ОК.

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

$K,1,0,0$

$K,2,2,0$

$K,3,4,0$

$K,4,2.5,S3/2$

$K,5,1,S3$ .

или эквивалентную этим командам более короткую запись

$K,1,0,0 \$ K,2,2,0 \$ K,3,4,0$   
 $K,4,2.5,S3/2 \$ K,5,1,S3$ .

То есть через знак «\$» можно записывать несколько команд в одной строке.

В графическом окне отобразятся точки с их номерами, как это представлено на рис. 5.5.

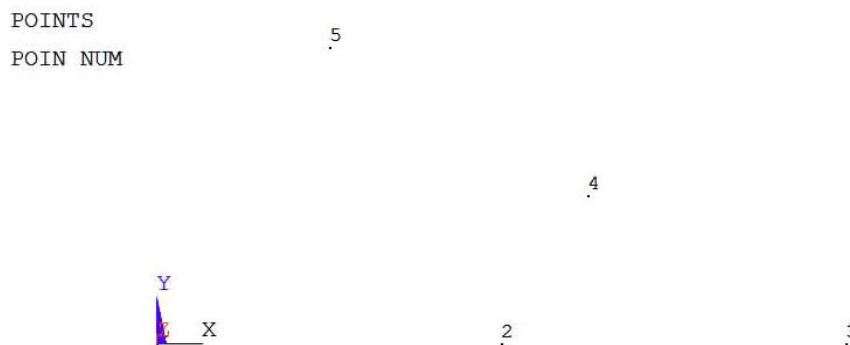


Рис. 5.5. Точки с номерами

Заметим, что для создания отчета рисунок можно сохранить в файле. Выполним следующее:

*Utility Menu > Plot Crlts > Hard Copy.*

Настройки укажите, как на рис. 5.6.

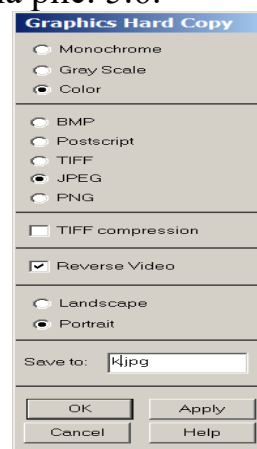


Рис. 5.6. Меню с настройками

Соединим точки линиями. Выполним следующее:

*Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > -Lines- Lines > Straight Line.*

Выделяем точку (щелчок мышью), направляем указатель мышки к другой точке и щелкаем на ней. При этом появится линия. Попарно выделяя необходимые точки, построим линии. При появлении линий нажимаем кнопку Apply, после появления последней линии нажимаем ОК. Результат отображен на рис. 5.7.

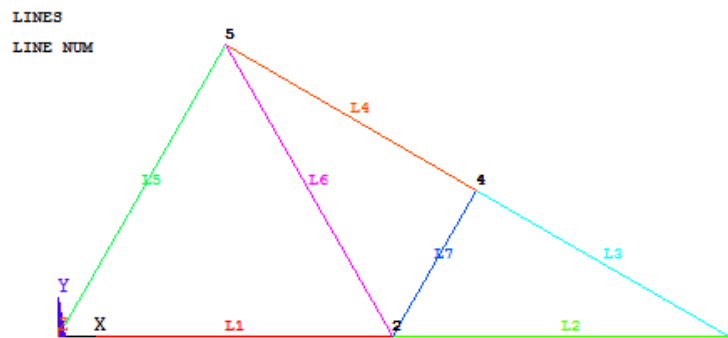


Рис. 5.7. Плоская ферма. Геометрическая часть модели  
Того же можно достигнуть, введя в командной строке

*L,1,2 \$ L,2,3 \$ L,3,4 \$ L,4,5*  
*L,5,1 \$ L,5,2 \$ L,2,5.*

### 5.2.2. Выбор типа конечного элемента

Выполним следующее:

*Main Menu > Preprocessor > Element Types >*  
*Add/Edit/Delete... > Add.*

В появившемся окне выбираем тип элемента. Нажимаем ОК. В окне Element Types нажимаем кнопку Close.

В этом примере мы поступим несколько иначе: в командной строке введем

*ET,1,LINK1.*

Это связано с тем, что элемент LINK1 удобно использовать для моделирования плоских ферм. Однако в последних версиях ANSYS описание этого типа элемента отсутствует, хотя программа поддерживает

работу с ним. Описание элемента можно найти, например, в файле помощи по ANSYS10.

Установим константы элемента. Выполним следующее:

*Main Menu > Preprocessor > Real Constants >  
Add/Edit/Delete... > Add > OK.*

В появившемся окне Real constants нажимаем Add. В окне Element type for real constants – OK. В меню *Real Constants Set Number* в окне Area вводим площадь сечения балки величиной  $1e-5$ . Нажимаем *OK > Close*.

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

*R,1,1e-5.*

### **5.2.3. Задание свойств материала**

Выполним следующее:

*Main Menu > Preprocessor > Material Props >  
-Material Models- Isotropic > OK.*

В появившемся окне вводим: модуль Юнга *EX* и коэффициент Пуассона – Poisson's ratio (minor) *PRXY*. Модуль Юнга –  $2e11$ , коэффициент Пуассона – 0,3. Нажимаем OK.

В данной задаче коэффициент Пуассона фактически использоваться не будет.

Того же для модуля Юнга можно достигнуть, введя в командной строке

*MP,EX,1,2E11.*

### **5.2.4. Построение конечно-элементной сетки**

Сначала необходимо задать количество элементов вдоль каждой линии. Для расчета ферм достаточно задать один элемент вдоль линии. Выполним следующее:

*Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Tool.*

В появившемся окне Mesh Tool нажимаем кнопку Set в ряду Lines. В Picking Menu нажимаем Pick All. В появившемся окне Element Sizes on Picked Lines в строке No. of element division указываем число разбиений – 1. Нажимаем OK.

Результат отображен на рис. 5.8.

[Оглавление](#)

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

```
LSEL,all
CM,ALL_LINE,LINE
LESIZE, ALL_LINE , , 1, , , , 1.
```

Далее нажимаем на Mesh и в Picking Menu нажимаем Pick All. Результат отображен на рис. 5.9.

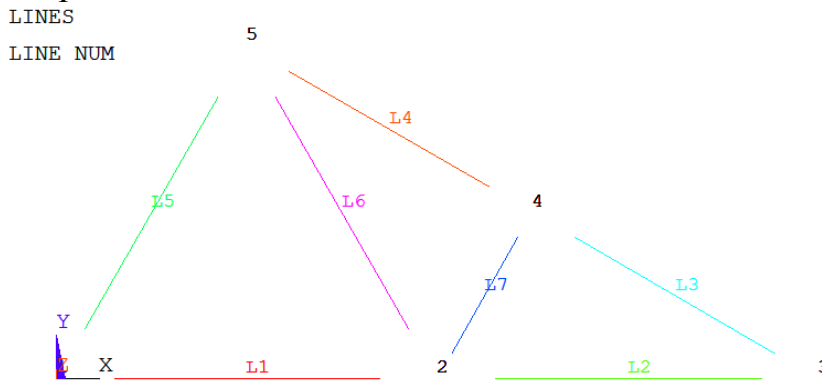


Рис. 5.8. Плоская ферма. На каждой линии один конечный элемент

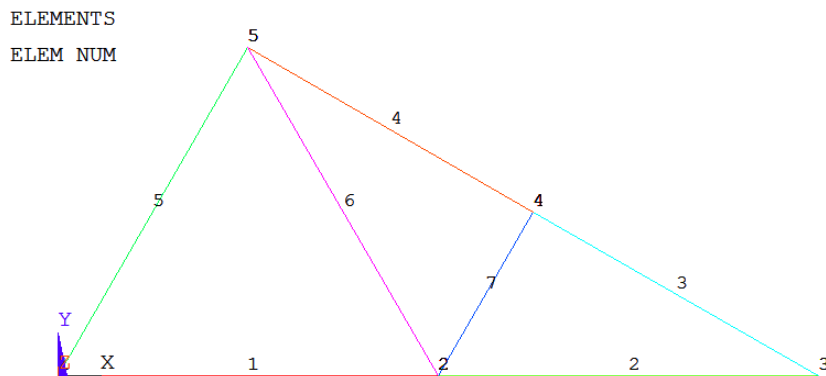


Рис. 5.9. Плоская ферма. Конечно-элементная схема.  
Номера элементов и узлов

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

```
LMESH,ALL.
```

### 5.2.5. Задание условий закрепления конструкции

Для того чтобы корректно задать условия закрепления, необходимо знать, сколько степеней свободы необходимо закрепить и сколько степеней свободы имеется в узле элемента выбранного типа. У данного LINK1 две степени: это продольные перемещения первого узла (узел I) и второго узла (узел J). Таким образом, в глобальной системе



координат в каждом узле имеются два перемещения  $U_X$ ,  $U_Y$ , соответствующие проекциям на направления глобальных осей (рис. 5.2). Выполним следующее:

*Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes.*

Открывается Picking Menu. Выделяем мышью правый узел фермы. В Picking Menu выбираем ОК. В появившемся окне Apply U, Rotonnodes выбираем нужное направление закрепления (в нашем случае  $U_Y$ ,  $U_X$ ) и нажимаем ОК. Повторяем операции с нижним левым узлом фермы. Здесь направление закрепления  $U_Y$ .

Результат отображен на рис. 5.10.

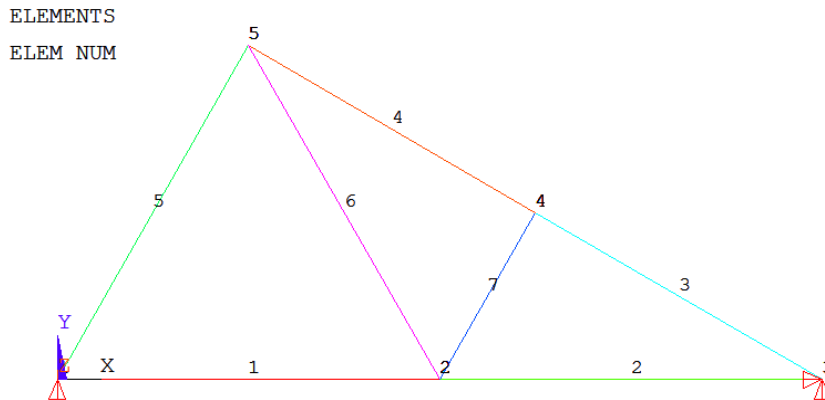


Рис. 5.10. Конечно-элементная схема с заданными закреплениями

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

```
D,1,UY $ D,3,UY      ! UY=0 в узлах 1 и 3
D,3,UX              ! UX=0 в узле 3
```

Обратим внимание на то, что весь текст после знака «!/» до конца строки воспринимается как комментарий.

### **5.2.6. Задание внешних сил, приложенных к конструкции**

Выполним следующее:

*Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Force/Moment > On Nodes.*

Открывается Picking Menu. Выделяем мышью пятый узел фермы. В Picking Menu – ОК. В появившемся окне Apply F/M on nodes в

выпадающем меню Direction of force/moment задаем нужное силовое воздействие FY.

Во второй строке Value задаем величину силы:  $-2e3$ . Нажимаем ОК. Аналогично задаем нагрузки в узлах по другим степеням свободы.

Результат отображен на рис. 5.11.

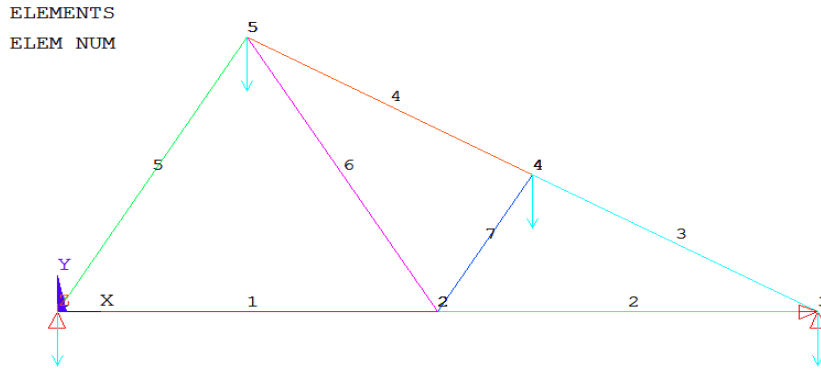


Рис. 5.11. Плоская ферма с приложенными нагрузками и условиями закрепления

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

$F,1,FY,-1E3$  \$  $F,3,FY,-1E3$  !FY=-1e3 в узлах 1 и 3;  
 $F,4,FY,-2E3$  \$  $F,5,FY,-2E3$  !FY=-2e3 в узлах 4 и 5.

Можно при необходимости вывести на экран значения введенных нагрузок в текстовом виде, выполнив действия, представленные на рис. 5.12.

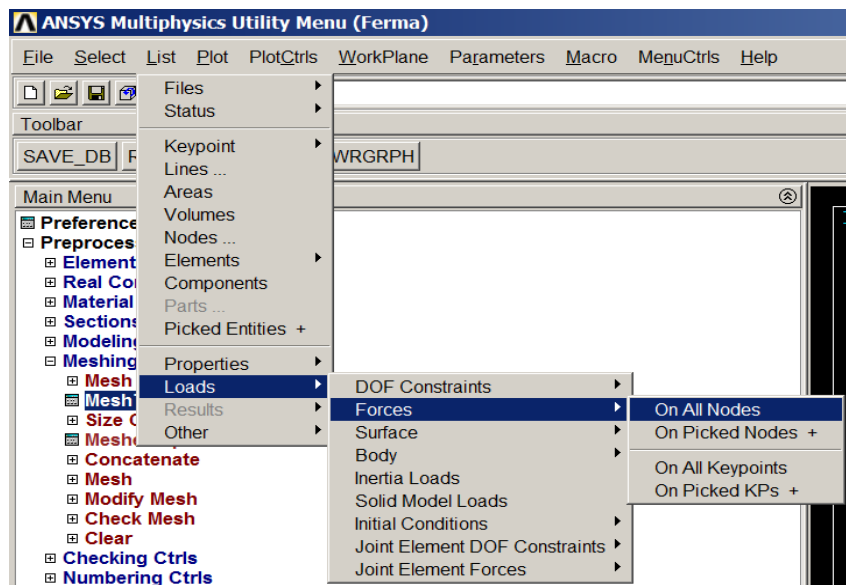
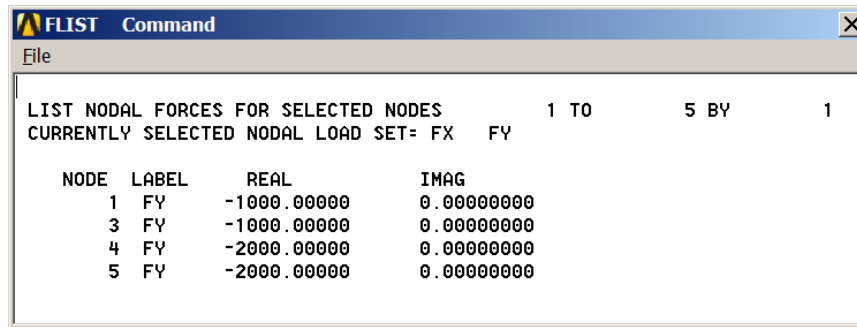


Рис. 5.12. Вид меню

Результат представлен на рис. 5.13.

[Оглавление](#)



The screenshot shows a window titled 'FLIST Command' with a menu bar containing 'File'. The main area displays the following text:

```

LIST NODAL FORCES FOR SELECTED NODES          1 TO          5 BY          1
CURRENTLY SELECTED NODAL LOAD SET= FX  FY

```

NODE	LABEL	REAL	IMAG
1	FY	-1000.00000	0.00000000
3	FY	-1000.00000	0.00000000
4	FY	-2000.00000	0.00000000
5	FY	-2000.00000	0.00000000

Рис. 5.13. Значения введенных нагрузок в текстовом виде

На этом ввод данных завершается, и остается решить задачу.

### 5.2.7. Запуск решателя и просмотр результатов

Для запуска решателя необходимо выполнить:

*Main Menu > Solution > -Solve- Current LS > OK.*

При правильном решении появится окно *Solution is done!* (задача решена).

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

```

/SOLU
ANTYPE,STATIC ! Статический анализ
SOLVE ! решаем СЛАУ
FINISH.

```

После решения надо посмотреть деформированное состояние балки. Для этого выполним:

*Main Menu > General Postproc > -Read Results- First Set,*

затем

*Plot Results > Deformed Shape.*

В появившемся окне выбираем вторую строку и нажимаем ОК. Результат представлен на рис. 5.15.

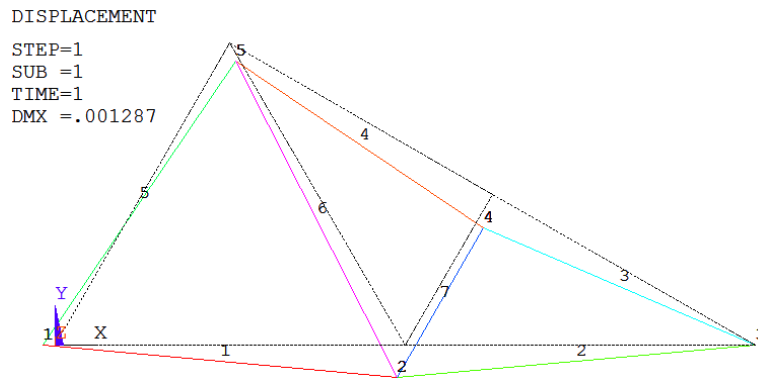


Рис. 5.15. Деформированное и недеформированное состояния плоской фермы

Просмотр эпюр усилий в стержнях.

Для построения эпюр усилий в стержнях необходимо по результатам расчетов создать электронные таблицы данных.

Выполним следующее:

*Main Menu > General Postproc > Element Table > Define Table.*

В появившемся меню Element Table Data нажать Add. Далее в появившемся меню задаем имя электронной таблицы FI и тип таблицы (SMISC,1) (рис. 5.15).

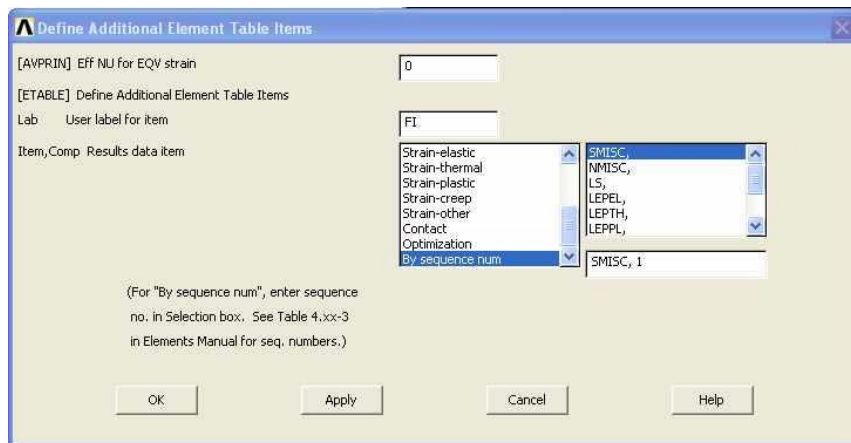


Рис. 5.15. Диалоговое окно Define Additional Table Items

Таким образом, мы создали таблицу с именем FI значений осевых усилий в узлах I (первый узел) конечных элементов.

Повторяем аналогичные действия для создания таблицы с именем FJ значений осевых усилий в узлах J (второй узел) конечных элементов. Закрываем меню.

Выполним следующее:

*Main Menu > General Postproc > Plot Results >*

*Control Plot > Line Elem Res.*

В появившемся меню выбираем значения, как показано на рис. 5.16.

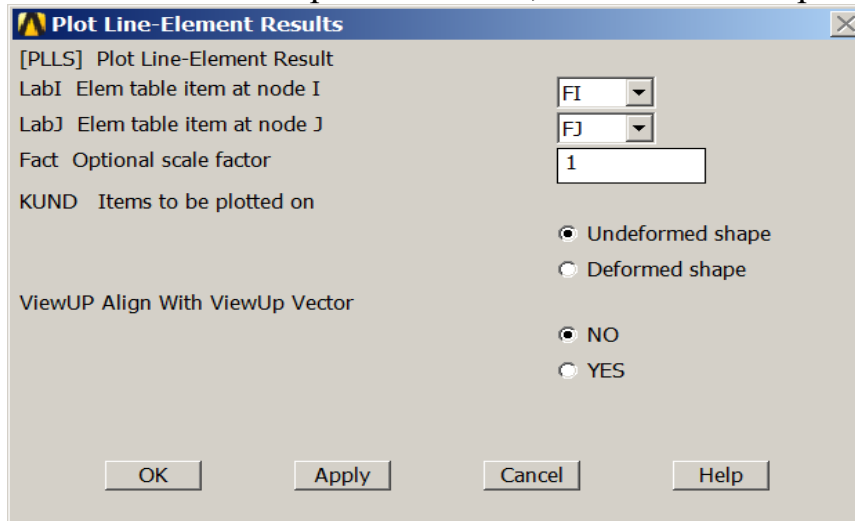


Рис. 5.16. Диалоговое окно Plot Line-Element Results

Нажимаем ОК и получаем эпюры сил (рис. 5.17).

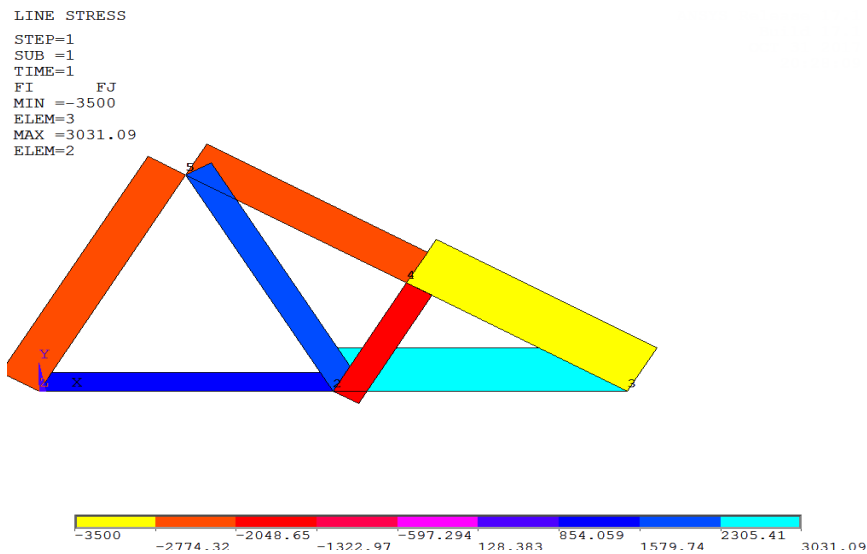


Рис. 5.17. Эпюры осевых сил

Для вывода реакций в текстовом виде выполним следующее:

*Main Menu > General Postproc > List Results > Reaction Solu.*

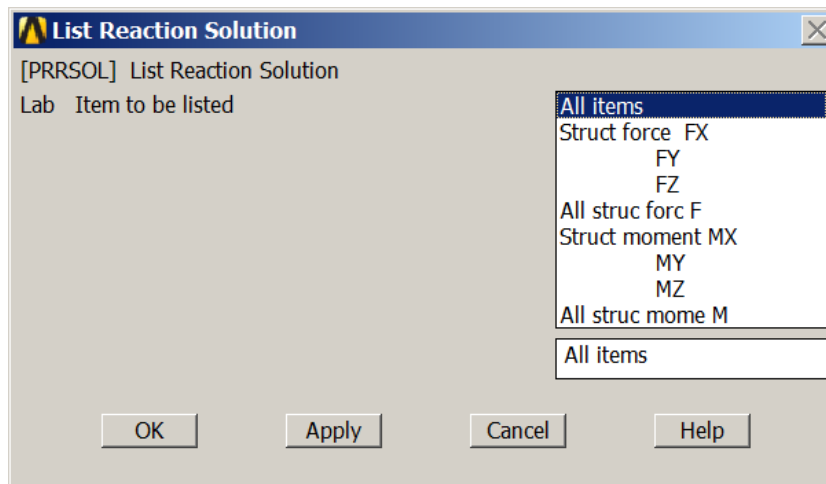


Рис. 5.18. Вид меню для текстового вывода значений реакции в узлах

Результат отображен на рис. 5.19.

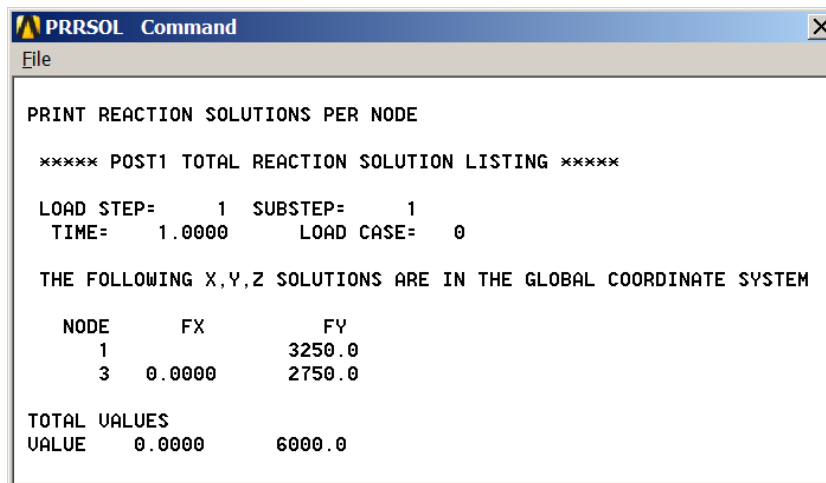


Рис. 5.19. Значения реакций

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

*PRRSOL ! Печатаем опорные реакции.*

Для вывода в текстовом виде значений осевых сил выполняем следующее:

*Main Menu > General Postproc > List Results > Element Table Data*

и выбираем *FI*, как показано на рис. 5.20.

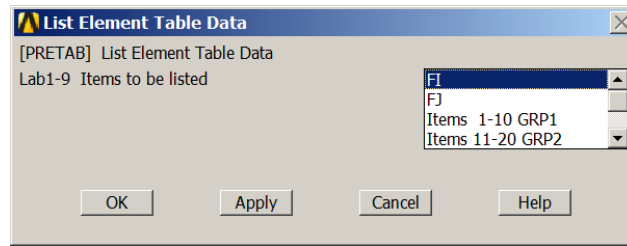


Рис. 5.20. Вид меню

Результат отображен на рис. 5.21.

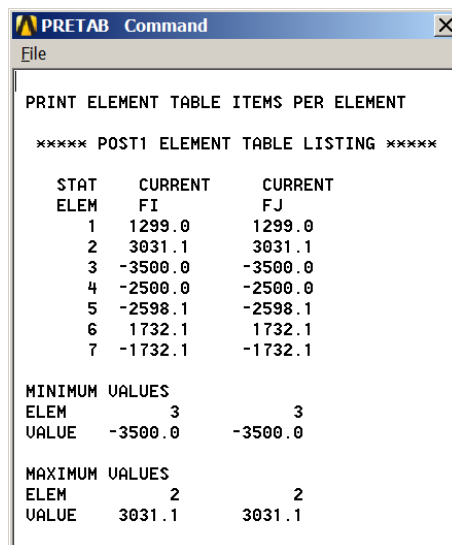


Рис. 5.21. Значения осевых сил

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

*PRESOL,SMISC,1!* Печатаем усилия в стержнях.

Для вывода в текстовом виде всех результатов на всех элементах выполняем следующее:

*Main Menu > General Postproc > List Results > Element Solution*

и выбираем *Line Element Results > Element Results*, как показано на рис. 5.22.

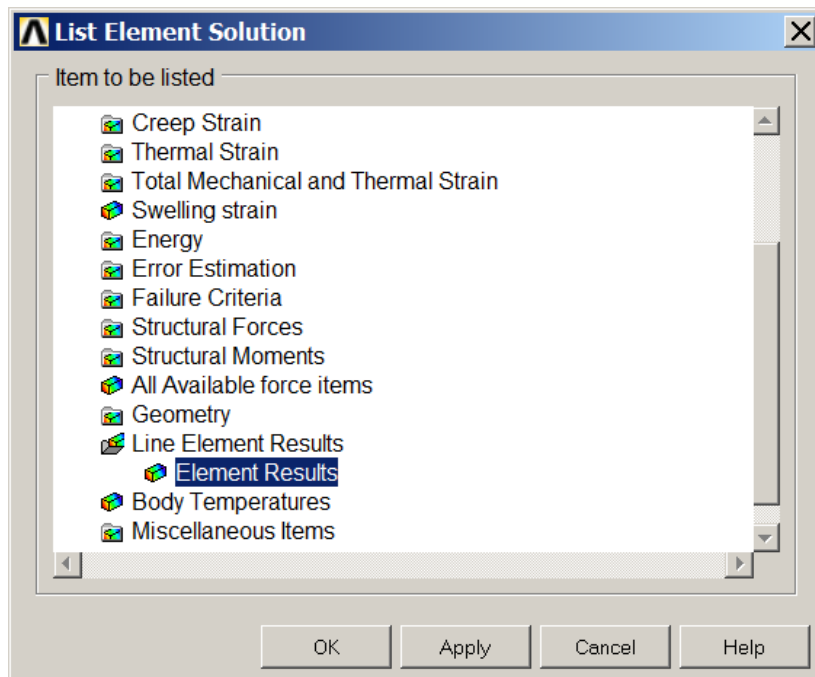


Рис. 5.22. Вид меню

Результат отображен на рис. 5.23.

Того же можно достигнуть, введя в командной строке

*PRESOL,ELEM.*

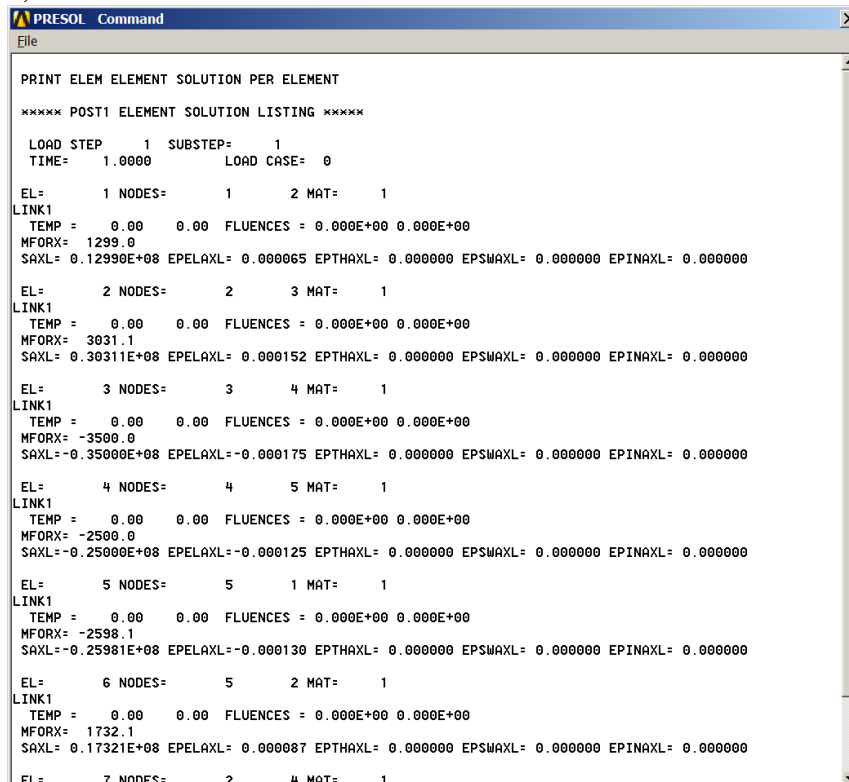


Рис. 5.23. Все результаты по элементам



### 5.2.8. Анализ результатов решения

Анализируя полученные результаты, видим, что максимальная сжимающая нагрузка (NFORX) возникает на элементе с номером 3 и равна  $-3500$  Н, а максимальная растягивающая нагрузка возникает на элементе с номером 2 и равна  $3031,1$  Н. Поскольку площадь всех элементов одинакова и равна  $10^{-4}$  м<sup>2</sup>, то максимальные сжимающие напряжения (SAXL) возникают на элементе с номером 3 и равны  $-3500$  Н /  $10^{-4}$  м<sup>2</sup> =  $-0,35 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>, а максимальные растягивающие напряжения (SAXL) возникают на элементе с номером 2 и равны  $3031,1 \cdot 10^{-4}$  Н/м<sup>2</sup> =  $0,30311 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>.

Таблица 5.1

#### Задания к расчету ферм

№ варианта	№ фермы	Размеры фермы, м					Углы, град		Силы, кН		
		a	b	c	d	l	$\alpha$	$\beta$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
1	1	1	1	2			30	45	2	3	4
2	1	2	3	1			60	30	3	2	5
3	2	2	2	3	2		45	60	1	2	3
4	2	1	1	4	3		30	45	3	1	2
5	3	2	2	1	3		60	45	2	1	3
6	3	1	1	1	2		30	60	1	3	2
7	4	2	2	1	1		60	30	1	2	3
8	4	3	1	2	2		30	45	3	4	2
9	5	1	1	1	1	2	45	60	4	2	1
10	5	2	1	1	2	1	60	30	3	3	2
11	6	2	2	1	1		30	45	2	1	1
12	6	3	3	2	1		45	60	1	2	2

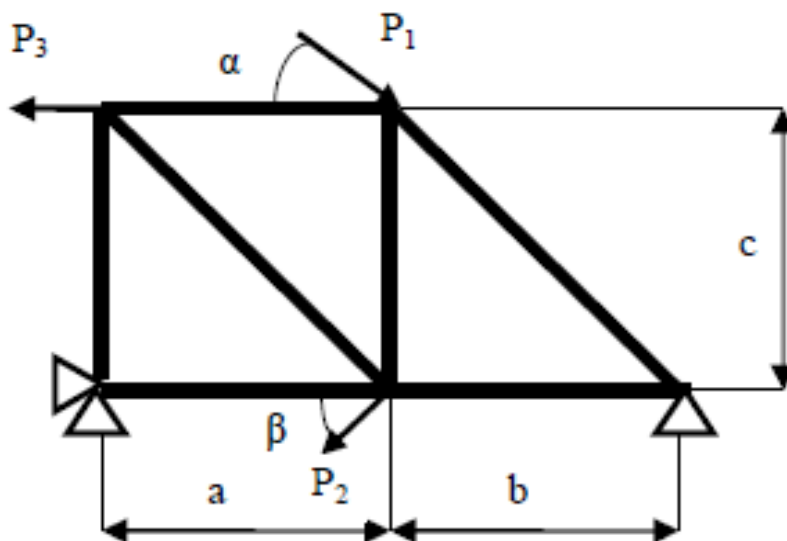


Рис. . Ферма № 1

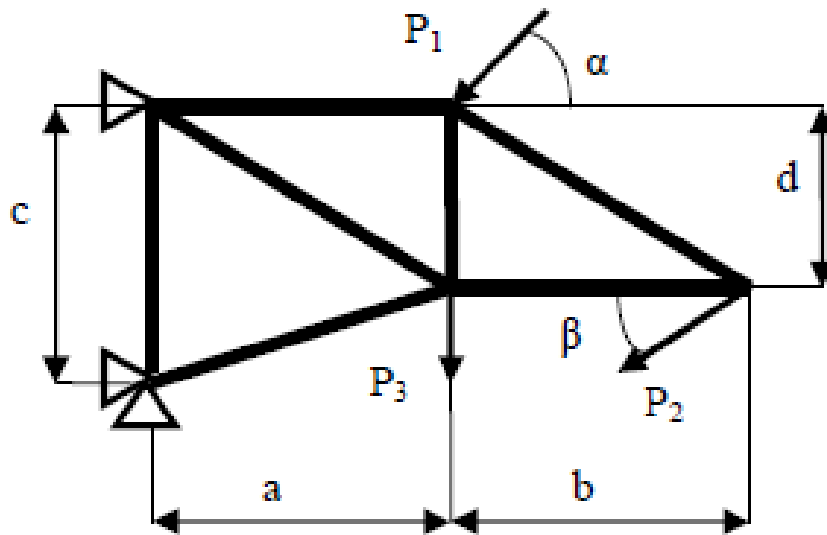


Рис. Ферма № 2

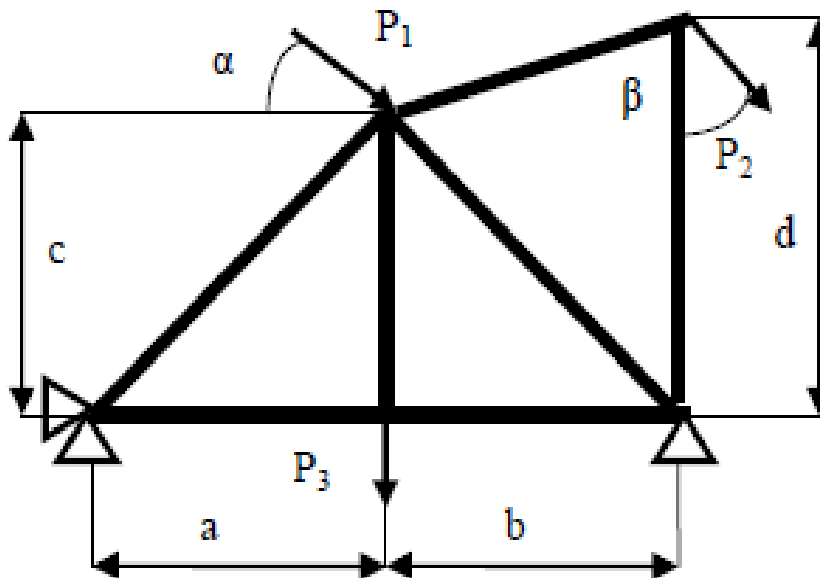


Рис. Ферма № 3

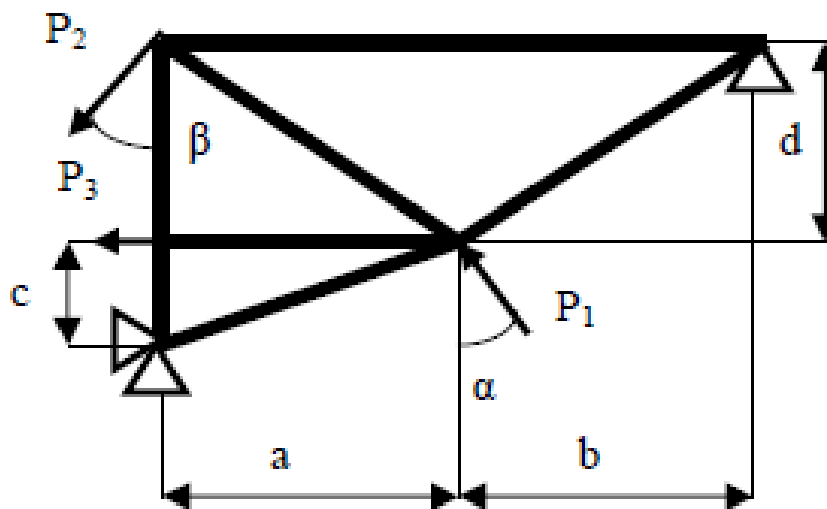


Рис. 6. Ферма № 4

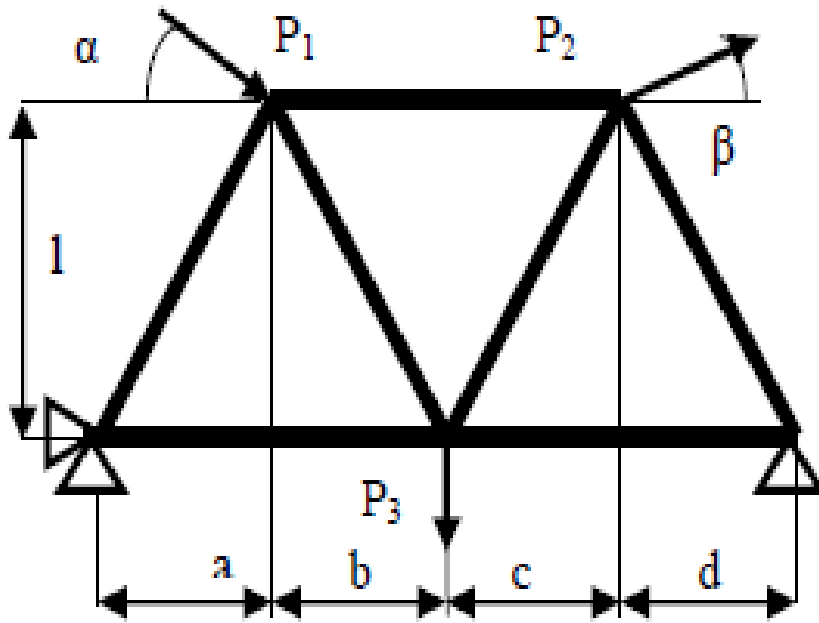


Рис. Ферма № 5

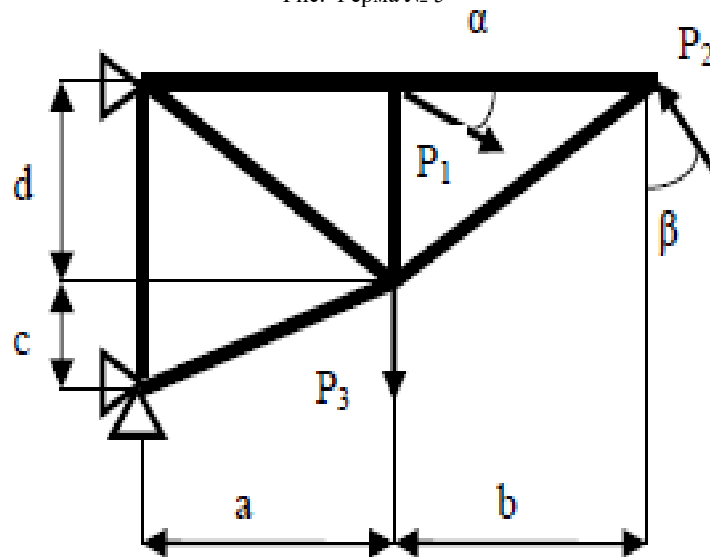


Рис. Ферма № 6

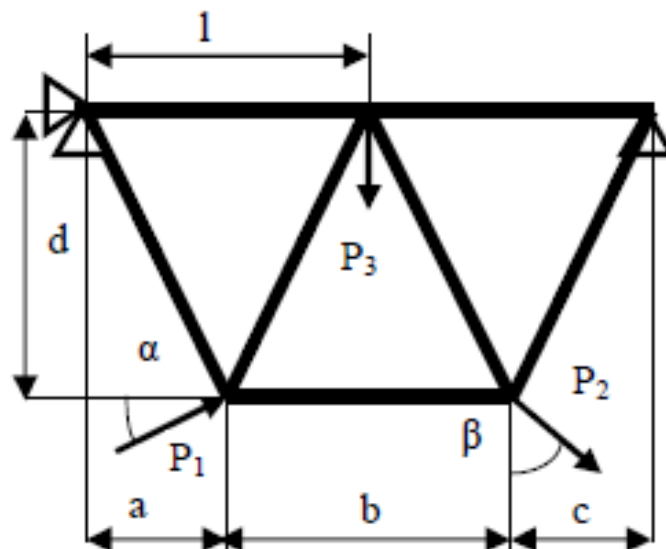


Рис.. Ферма № 7

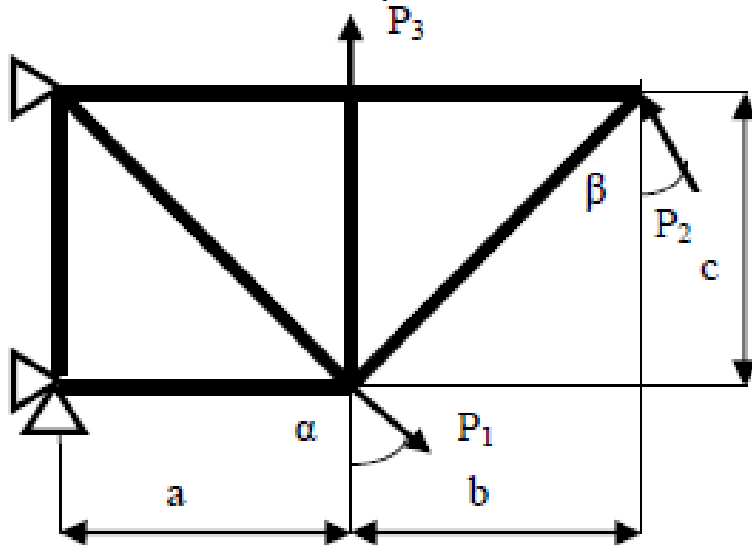


Рис. Ферма № 8

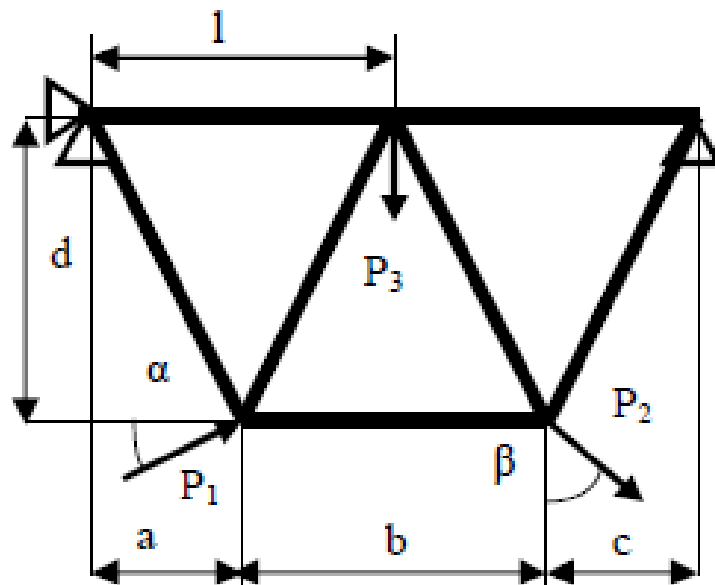


Рис.. Ферма № 9

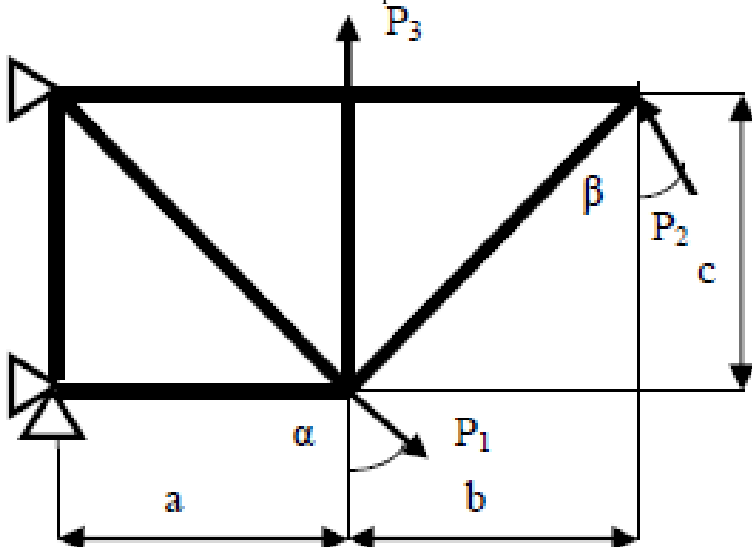


Рис. Ферма № 10

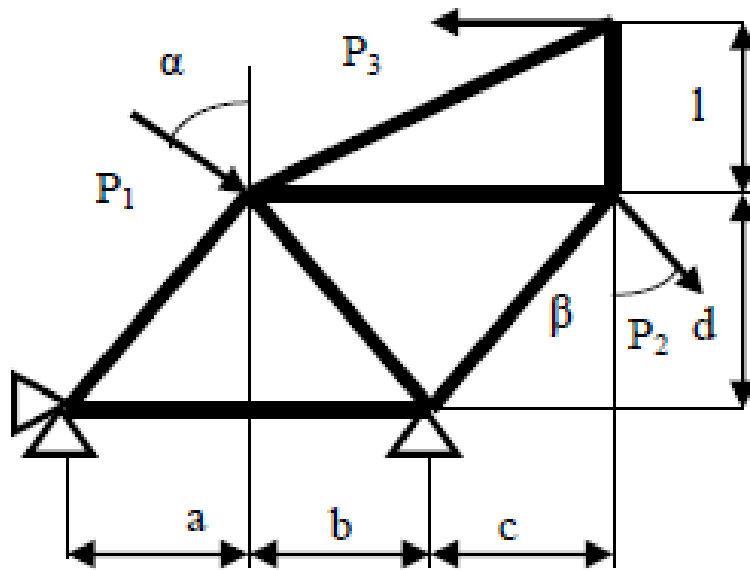


Рис.. Ферма № 11

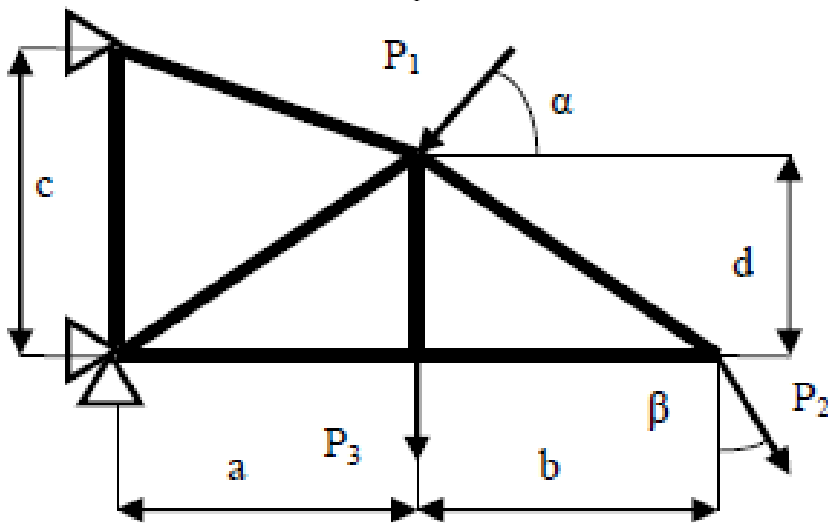


Рис. Ферма № 12

## ЛИТЕРАТУРА К ЭТОМУ РАЗДЕЛУ

1. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

2. Наседкин, А. В. Конечно-элементное моделирование на основе ANSYS: Программы решения статических задач сопротивления материалов с вариантами индивидуальных заданий / А. В. Наседкин. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1998. – 44 с.

3. Расчет с помощью пакета ANSYS ферм. Расч. граф. раб № 1 по курсу «Численные методы расчета в инженерных задачах» / сост. В. Г. Фокин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 14 с.

4. Клебанов, Я. М. Современные методы компьютерного моделирования процессов деформирования конструкций : учеб. пособие / Я. М. Клебанов, В. Г. Фокин, А. Н. Давыдов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2004. – 100 с.
5. Конюхов, А. В. Основы анализа конструкций в ANSYS / А. В. Конюхов. – Казань: Казанский государственный университет, 2001. – 142 с.
6. Каплун, А. Б. ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
7. Напрасников, В. В. Построение конечно-элементной модели на основе языка APDL : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск: БНТУ, 2009. – 51 с.
8. Напрасников, В. В. Создание конечно-элементной модели для расчета контейнера в процессе прессования порошковой заготовки : лабораторный практикум / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск: БНТУ, 2008. – 89 с.
9. Напрасников, В. В. Конечно-элементное моделирование в ANSYS в режиме удаленного доступа к суперкомпьютеру «СКИФ» : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников, А. В. Бородуля, В. А. Кочуров. – Минск: БНТУ, 2008. – 65 с.
10. Напрасников, В. В. Моделирование колебаний рамной конструкции на основе метода конечных элементов : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск: БНТУ, 2010. – 43 с.
11. Напрасников, В. В. Создание 3D конечно-элементной модели в среде ANSYS : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск: БНТУ, 2010. – 37 с.
12. Напрасников, В. В. Расчет температурных полей на основе конечно-элементного моделирования : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск: БНТУ, 2011. – 22 с.
13. Напрасников, В. В. Оптимизационные расчеты на основе командного файла в ANSYS : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников, Ю. В. Напрасникова. – Минск: БНТУ, 2014. – 20 с.
14. Напрасников, В. В. Особенности расчета конструкций с шарнирами в ANSYS / В. В. Напрасников, Ю. В. Напрасникова, А. Н. Соловьев. – Минск: БНТУ, 2013. – 37 с.
15. Волков, В. М. Алгоритмическая реализация численных методов: учебно-методический комплекс / В. М. Волков, И. Л. Ковалева, В. В. Напрасников. – Минск: БНТУ, 2018. – 63 с.
16. ANSYS. Basic Analysis Procedures Guide. Rel. 5.3. / ANSYS Inc. Houston [Электронный ресурс]. – 1994. – Режим доступа: <https://ru.scribd.com/document/144635033/Ansys-Basic-Analysis-Guide>. – Дата доступа: 25.05.2018.
17. ANSYS Mechanical APDL Element Reference [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/vem/ansys\\_14\\_element\\_reference.pdf](https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/vem/ansys_14_element_reference.pdf). – Дата доступа: 24.05.2018.

18. ANSYS. Theory Reference. Rel. 5.3. Ed. P. Kothnke / ANSYS Inc. Houston [Электронный ресурс]. – 1994. – Режим доступа: <http://research.me.udel.edu/~lwang/teaching/MEx81/ansys56manual.pdf>. – Дата доступа: 24.05.2018.

19. ANSYS Mechanical APDL Verification Manual. Release 15.0 / ANSYS, Inc Houston [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://docshare01.docshare.tips/files/22829/228290690.pdf>. – Дата доступа: 24.05.2018.

20. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference, Release 15.0 / ANSYS, Inc Houston [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://imee.univ-evry.fr/~hello/ENS/CS93/ANSYS/ANSYS%20Mechanical%20APDL%20Theory%20Reference.pdf>. – Дата доступа: 24.05.2018.

## Дополнительные задания. Моделирование систем массового обслуживания

### Задание 1. Стационарный режим, открытая СМО.

#### Задача 1 (По вариантам)

Имеется  $n$  телефонных линий. Вызов, пришедший в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Интенсивность потока вызовов в минуту равна  $L$ . Средняя продолжительность одного разговора равна  $t$  минут. Определить основные характеристики данной системы массового обслуживания в стационарном режиме.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Эта СМО без очереди, в отличие от рассмотренного ниже демонстрационного примера. Внимательно прочтите теорию!

Таблица 7.1

Номер варианта	$n$	$L$	$t$	Номер варианта	$n$	$L$	$t$	Номер варианта	$n$	$L$	$t$
1	1	0,8	1,5	13	2	0,7	1,5	25	3	0,85	1,5
2	10	0,6	1,6	14	9	0,65	1,6	26	7	0,65	1,1
3	2	0,8	1,5	15	12	0,8	1,3	27	6	0,8	1,1
4	8	0,7	1,4	16	8	0,6	1,4	28	8	0,7	1,6
5	1	0,5	1,8	17	1	0,5	1,4	29	2	0,3	1,4
6	10	0,6	1,4	18	5	0,6	1,4	30	10	0,7	1,5
7	5	0,2	2	19	5	0,3	2	31	5	0,4	2
8	4	0,3	1,9	20	4	0,3	2	32	4	0,5	1,4

<b>9</b>	7	0,2	1,3	<b>21</b>	8	0,5	1,3	<b>33</b>	7	0,4	1,3
<b>10</b>	6	0,1	1,5	<b>22</b>	7	0,5	1,5	<b>34</b>	6	0,2	1,6
<b>11</b>	4	0,3	1,5	<b>23</b>	5	0,3	1,6	<b>35</b>	4	0,4	1,3
<b>12</b>	5	0,4	1,2	<b>24</b>	4	0,3	1,3	<b>36</b>	5	0,5	1,2

## Задание 2. Нестационарный режим, замкнутая СМО с очередью

### Задача 2 (По вариантам)

$n$  рабочих обслуживают  $k$  станков. Каждый станок останавливается в среднем **2** раза в час. Процесс наладки одного станка занимает у рабочего в среднем **10** мин. Определить:

1. предельные вероятности состояний данной системы;
2. промежуток времени, в течение которого система переходит в стационарный режим;
3. среднее число неисправных станков.

Таблица 7.2

Номер варианта	$n$	$k$	Номер варианта	$n$	$k$	Номер варианта	$n$	$k$
<b>1</b>	1	3	<b>13</b>	2	6	<b>25</b>	3	7
<b>2</b>	2	6	<b>14</b>	3	4	<b>26</b>	3	19
<b>3</b>	3	8	<b>15</b>	5	8	<b>27</b>	2	17
<b>4</b>	4	10	<b>16</b>	4	10	<b>28</b>	4	15
<b>5</b>	5	12	<b>17</b>	1	12	<b>29</b>	2	11
<b>6</b>	1	6	<b>18</b>	5	14	<b>30</b>	5	10
<b>7</b>	2	10	<b>19</b>	5	16	<b>31</b>	5	8
<b>8</b>	3	14	<b>20</b>	4	18	<b>32</b>	4	20
<b>9</b>	4	16	<b>21</b>	3	20	<b>33</b>	3	16
<b>10</b>	5	20	<b>22</b>	2	12	<b>34</b>	5	18
<b>11</b>	3	12	<b>23</b>	5	14	<b>35</b>	4	14
<b>12</b>	5	6	<b>24</b>	4	16	<b>36</b>	1	12

### Задача 3 (Для всех вариантов)

Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профосмотра танков подразделения, в котором **18** единиц боевой техники и **8** групп технического осмотра танков. На осмотр и выявление дефектов каждого



танка затрачивается в среднем одной группой техосмотра **6** часов. На осмотр в среднем поступает **3** танка за **12** часов. Найти основные характеристики данной системы массового обслуживания. Определить также максимально возможную интенсивность поступления танков на профилактику с тем, чтобы среднее число машин в очереди не превышало **50%** от общего числа поступающих машин. Построить графики вероятностей нахождения системы в различных состояниях в зависимости от времени  $t$ .

### 3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

#### Контрольные вопросы

1. Модель и расчётная схема. Виды моделирования.
2. Математическое моделирование. Основные этапы и источники ошибок.
3. Необходимость тестирования компьютерной модели. Способы тестирования.
4. Сравнение некоторых пакетов инженерных расчётов и моделирования.
5. Понятие о системах с сосредоточенными и распределёнными параметрами.
6. Примеры систем, модель для которых описывается дифференциальными уравнениями
7. Сведение произвольной системы ОДУ к системе ОДУ I-го порядка в нормализованном виде Коши. Пример.
8. Получение модели колебательной системы со сосредоточенными параметрами на основе уравнений Лагранжа 2-го порядка.
9. Пример получения уравнений движения для двухмассовой системы с поступательным движением масс.
10. Пример получения уравнений, описывающих колебания механической системы со сосредоточенными параметрами при наличии вращательных степеней свободы.
11. Необходимость статистического анализа при моделировании технических объектов.
12. Модель «хищник-жертва».
13. Метод Какутани для решения граничных задач.
14. Моделирование конкурирующих стратегий.
15. Пример построения алгоритмической модели для одноканальной системы массового обслуживания и заявок без приоритета.
16. Моделирование процессов систем массового обслуживания.
17. Терминология для СМО. Понятие о простейшем потоке событий
18. Уравнения Колмогорова.
19. Открытые системы массового обслуживания.
20. Замкнутые системы массового обслуживания.
21. Современные численные методы решения граничных задач, обзор. Метод конечных элементов, метод граничных элементов. Их сравнительные преимущества и недостатки. Метод взвешенных невязок.

## 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

**Белорусский национальный технический университет**

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе

Белорусского \_\_\_\_\_ национального  
технического университета

\_\_\_\_\_ Ю.А. Николайчик

Регистрационный № УД- \_\_\_\_\_ /уч.

## **Компьютерное моделирование прикладных задач**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности  
1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий  
Специализация  
1-40 01 01 01 Веб-технологии и программное обеспечение мобильных  
систем**

2021 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-40 01 01 -2021 и типового учебного плана (рег. № I 40-1-003/пр-тип. от 08.04.2021). специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий, специализация 1-40 01 01 01 Веб-технологии и программное обеспечение мобильных систем.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

**В. В. Напрасников**, канд. техн. наук, доцент кафедры Белорусского национального технического университета, кандидат технических наук, доцент.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**А.Л. Кочеров**, доцент кафедры управления информационными ресурсами Академии управления при Президенте Республики Беларусь, кандидат технических наук, доцент.

**Н.Н. Гурский**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных систем и технологий» Белорусского национального технического университета, кандидат технических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой «Информационные системы и технологии» Белорусского национального технического университета  
(протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_г.)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
О.А.Бояршинова

Методической комиссией факультета Международного института дистанционного образования Белорусского национального технического университета (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_г.)

Председатель методической комиссии \_\_\_\_\_ И. А. Сатиков

Научной библиотекой БНТУ \_\_\_\_\_

Научно-методическим советом Белорусского национального технического университета (протокол №\_\_\_\_\_ секции №\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_г.)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа «Компьютерное моделирование прикладных задач» разработана для специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий, специализация 1-40 01 01 01 Веб-технологии и программное обеспечение мобильных систем.

Целью дисциплины является формирование навыков и знаний по разработке и использованию математических моделей для технических объектов и соответствующей программной поддержки для реализации этих моделей.

Задачами изучения дисциплины являются:

- 1) Изучение взаимосвязи характера модели с упрощающими предположениями.
- 2) Изучение способов построения моделей для конкретных классов технических объектов.
- 3) Изучение особенностей работы с моделями при сведении их к последовательности простейших операций.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

### **знать:**

- взаимосвязь характера модели с упрощающими предположениями;
- способы построения моделей для конкретных классов технических объектов;
- особенности работы с моделями при сведении их к последовательности простейших операций;

### **уметь:**

- выбирать методы решения уравнений, соответствующих моделям для разных объектов и явлений;
- создавать математические модели для систем со сосредоточенными параметрами;
- создавать специальные математические модели;

### **владеть:**

- навыками использования встроенных средств современных компьютерных систем для реализации различного класса математических моделей;

- навыками создания собственных программных средств на основе современных компьютерных систем для реализации различного класса математических моделей.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

СК-7. Владеть навыками использования современных систем конечно-элементного анализа при проектировании технических систем

СК-12. Применять современные программные средства для реализации различного класса математических моделей

Согласно учебному плану для заочной (дистанционной) формы получения высшего образования на изучение учебной дисциплины отведено всего **108** часов, в том числе **18** часов аудиторных занятий.

Распределение аудиторных часов по семестрам приведено в таблице 1.

Таблица 1.

Заочная (дистанционная) форма получения высшего образования					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
3	5	8	10		зачет

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Тема 1. Понятие о моделировании

Понятие о моделировании. Виды моделей. Математическое моделирование. Необходимость тестирования компьютерной модели. Способы тестирования компьютерной модели.

### Тема 2. Моделирование в механических системах

Механические системы с сосредоточенными параметрами. Примеры задач, приводящих к ОДУ. Модели, описывающие колебания мобильных транспортных средств, на примере движения автомобиля по дороге с заданным микропрофилем и подрессоренным грузом на кузове. Понятие о граничной задаче для ОДУ. Задача об изгибе балки переменного сечения, как пример граничной задачи для ОДУ. Решение граничных задач методом стрельбы. Метод стрельбы для решения граничных задач. Реализация метода стрельбы в среде MATHCAD.

### Тема 3. Моделирование в экологии и экономике

Моделирование взаимодействия популяций. Исторические корни Модель Лотки – Вольтерры (модель Лотки - Вольтерра) - модель

взаимодействия двух видов. Модель «хищник-жертва». Приложение модели типа «хищник - жертва» в экономике для исследования циклично изменяющихся процессов (макроэкономическая модель Гудвина).

#### **Тема 4. Использование случайных величин для моделирования**

Понятие о граничной задаче. Определяющие уравнения и граничные условия. Примеры различных процессов, описываемых эллиптическими уравнениями. Случайные блуждания при моделировании температурных полей. Метод Судзуо Какутани для решения граничных задач теории потенциала как пример метода решения детерминированной задачи Алгоритм метода. Особенности создания собственных процедур в MATHCAD, использующих идеи методов Монте-Карло.

#### **Тема 5. Метод наихудшего случая и статистический анализ**

Исследование работоспособности объекта на основе математической модели. Необходимость статистического анализа при моделировании технических объектов. Метод наихудшего случая. Анализ чувствительности. Матрица чувствительности. Метод приращений для получения матрицы чувствительности, его достоинства и недостатки. Статистический анализ работоспособности технического объекта на основе математической модели.

#### **Тема 6. Моделирование конкурирующих стратегий**

Понятие о конкурирующих стратегиях. Преимущества алгоритмических моделей в задачах определения рационального подхода при выборе вариантов периодичности ремонтов станочного парка. Схема для программной реализации двух простейших стратегий эксплуатации станка. Реализация в среде MATHCAD.

#### **Тема 7. Моделирование систем массового обслуживания (СМО)**

Моделирование систем массового обслуживания (СМО). Общая структура СМО. Критерии качества и цели моделирования СМО. Алгоритмическая модель простейшей системы массового обслуживания. Особенности программной реализации моделей СМО. Марковские процессы. Состояние СМО. Вероятности состояний СМО. Открытые СМО. Замкнутые СМО. Уравнения Колмогорова. Размеченный граф СМО. Стационарный режим как предельный режим функционирования СМО. Уравнения для стационарного режима. Реализация моделей СМО в среде MATHCAD.

#### **Тема 8. Моделирование систем с распределенными параметрами**

Современные численные методы решения граничных задач, обзор. Метод конечных элементов, метод граничных элементов. Их

сравнительные преимущества и недостатки. Метод взвешенных невязок. Обзор промышленных конечно-элементных комплексов (ANSYS, NASTRAN, FlexPDE). "Тяжелые" и "легкие" пакеты. Меню ANSYS. Файлы ANSYS. Диалоговый и командный режимы работы. Особенности построения командного файла. Примеры командных файлов при моделировании некоторых задач. Постановка оптимизационных задач и особенности их решения в среде ANSYS.



**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**заочная (дистанционная) форма получения высшего образования**

Номер раздела, темы,	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов			Количество часов СР	Форма контроля знаний
		лекции	Практические занятия	лабораторные занятия		
1	2	3	4	5	8	9
<b>5 семестр</b>						
1.	Понятие о моделировании	1				Опрос
2.	Моделирование в механических системах <i>Лабораторная работа №1. Модели колебательных систем</i>	1		2		Опрос <i>Защита Лр</i>
3.	Моделирование в экологии и экономике <i>Лабораторная работа №2. Модель «хищник жертва»</i>	1		2		Опрос <i>Защита Лр</i>
4.	Использование случайных величин для моделирования <i>Лабораторная работа №3. Случайные величины в моделировании.</i>	1		2		Опрос <i>Защита Лр</i>
5.	Метод наилучшего случая и статистический анализ	1				Опрос
6.	Моделирование конкурирующих стратегий <i>Лабораторная работа №4. Конкурирующие стратегии эксплуатации автобуса</i>	1		2		Опрос <i>Защита Лр</i>
7.	Моделирование систем массового обслуживания (СМО)	1				Контрольная работа
8.	Моделирование систем с распределенными параметрами <i>Лабораторная работа №5. Моделирование прочности деталей</i>	1		2		Опрос <i>Защита Лр</i>
	Итого за семестр	8		10		зачет
	Всего аудиторных часов	<b>8</b>		<b>10</b>		



## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Список литературы

#### Основная литература

1. Информационные технологии в автоматизированном проектировании машиностроительных конструкций: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)»: в 3 ч. / А. В. Бородуля [и др.]; Белорусский национальный технический университет, Кафедра «Программное обеспечение информационных систем и технологий». – Минск: БНТУ, 2020. – Ч. 1. – 98 с.
2. Компьютерное конечно-элементное моделирование : пособие для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» направления специальности 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)» : в 2 ч. / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск : БНТУ, 2021. – Ч. 1. – 83 с.
3. Компьютерное конечно-элементное моделирование : пособие для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» направления специальности 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)» : в 2 ч. / В. В. Напрасников [и др.] ; Белорусский национальный технический университет, Кафедра «Программное обеспечение информационных систем и технологий». – Минск : БНТУ, 2021. – Ч. 2. – 79 с.
4. Волков, В. М. Алгоритмическая реализация численных методов: учебно-методический комплекс / В. М. Волков, И. Л. Ковалева, В. В. Напрасников. – Минск: БНТУ, 2018. – 63 с.
5. Волков, В.М. Численные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для магистрантов специальности 1-31 81 12 "Прикладной компьютерный анализ данных" / В.М. Волков, Ирина Львовна Ковалева; кол. авт. Белорусский национальный технический университет, Кафедра "Системы автоматизированного проектирования". – Электрон. дан. – Минск: БНТУ, 2016. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Режим доступа : <https://rep.bntu.by/handle/data/27855>.
6. Напрасников, В. В. Оптимизационные расчеты на основе командного файла в ANSYS : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников, Ю. В. Напрасникова. – Минск: БНТУ, 2014. – 20 с.
7. Краков, Михаил Самуилович. Численные методы и обработка данных: пособие / М. С. Краков, С. Г. Погирницкая; Министерство образования

- Республики Беларусь, Белорусский национальный технический университет, Кафедра ЮНЕСКО "Энергоснабжение и возобновляемые источники энергии". – Минск: БНТУ, 2021. – 86, [1] с.: ил., табл., схемы. – Режим доступа : <https://rep.bntu.by/handle/data/102987>.
8. Тухфатуллин, Б.А. Численные методы расчета строительных конструкций. Метод конечных элементов: учебное пособие для академического бакалавриата/ Б.А.Тухфатуллин — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 157 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/442338>
  9. Мулярчик, С.Г. Численные методы: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по специальностям "Радиофизика", "Физическая электроника", "Компьютерная безопасность (по направлениям)", "Прикладная информатика (по направлениям)" / С.Г. Мулярчик. – Минск: РИВШ, 2017. – 317 с.: ил. Шимкович, Д.Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов / Д.Г. Шимкович. - М.: ДМК Пресс, 2018. -738 с.
  - 10.Кремень, Е.В. Численные методы: практикум в MathCad: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько. – Минск: Вышэйшая школа, 2019. – 254, [1] с.: ил., табл.
  - 11.Лабораторные работы по дисциплине "Численные методы решения задач": методические указания для студентов специальностей 1-70 02 01 "Промышленное и гражданское строительство" и 1-74 04 01 "Сельское строительство и обустройство территорий" дневной и заочной форм обучения / Министерство образования Республики Беларусь, Учреждение образования "Брестский государственный технический университет", Кафедра прикладной механики; [В. И. Игнатюк, Н. В. Бочарова]. – Брест: БрГТУ, 2019. – 66 с.: ил., табл.:
  - 12.Численные методы решения задач строительства [Электронный ресурс]: лабораторный практикум / кол. авт. Белорусский национальный технический университет, Кафедра "Строительная механика"; сост. Александр Владиславович Стрелюхин, Гелена Станиславовна Богомолова, Е.Л. Сорокина. – Электрон. дан. – Минск: БНТУ, 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Режим доступа : <http://rep.bntu.by/handle/data/5353>
  - 13.Численные методы решения задач строительства: лабораторный практикум для студентов специальности 1-70 02 01 "Промышленное и гражданское строительство" / кол. авт. Белорусский национальный технический университет, Кафедра "Строительная механика"; сост. Александр Владиславович Стрелюхин, Гелена Станиславовна Богомолова, Е.Л. Сорокина. – Минск: БНТУ, 2016. – 115, [1] с.: ил., табл. – Режим доступа : <http://rep.bntu.by/handle/data/25885>

## Дополнительная литература

14. Напрасников, В. В. Построение конечно-элементной модели на основе языка APDL : учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск: БНТУ, 2009. – 51 с.
15. Напрасников, В. В. Создание конечно-элементной модели для расчета контейнера в процессе прессования порошковой заготовки : лабораторный практикум / В. В. Напрасников [и др.]. – Минск: БНТУ, 2008. – 89 с.
16. Напрасников, В. В. Конечно-элементное моделирование в ANSYS в режиме удаленного доступа к суперкомпьютеру «СКИФ»: учебно-методическое пособие / В. В. Напрасников, А. В. Бородуля, В. А. Кочуров. – Минск: БНТУ, 2008. – 65 с.
17. Крушевский, Евгений Александрович. Вычислительная математика: пособие для студентов специальностей 1-70 01 01 "Производство строительных изделий и конструкций", Белорусский национальный технический университет, Кафедра "Высшая математика N3". – Минск: БНТУ, 2018. – 66, [1] с.: табл. – Режим доступа: <http://rep.bntu.by/handle/data/47583>. - ISBN 978-985-550-695-0: 0.65.

## Средства диагностики результатов учебной деятельности

Оценка уровня знаний студента производится по десятибалльной шкале в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки достижений студента используется следующий диагностический инструментарий:

- защита выполненных на лабораторных занятиях заданий;
- собеседование при проведении индивидуальных и групповых консультаций;
- проведение текущих контрольных опросов по отдельным темам;
- сдача зачета по дисциплине.

## Перечень контрольных вопросов и заданий

### для самостоятельной работы студентов

22. Понятие о моделировании.
23. Модель и расчётная схема. Виды моделирования.
24. Математическое моделирование. Основные этапы и источники ошибок.
25. Необходимость тестирования компьютерной модели. Способы тестирования.
26. Сравнение некоторых пакетов инженерных расчётов и моделирования.
27. Понятие о системах с сосредоточенными и распределёнными параметрами.
28. Примеры систем, модель для которых описывается дифференциальными уравнениями
29. Сведение произвольной системы ОДУ к системе ОДУ I-го порядка в нормализованном виде Коши. Пример.
30. Получение модели колебательной системы со сосредоточенными параметрами на основе уравнений Лагранжа 2-го порядка.
31. Пример получения уравнений движения для двухмассовой системы с поступательным движением масс.
32. Пример получения уравнений, описывающих колебания механической системы со сосредоточенными параметрами при наличии вращательных степеней свободы.
33. Необходимость статистического анализа при моделировании технических объектов.
34. Модель «хищник-жертва».
35. Метод Какутани для решения граничных задач.
36. Моделирование конкурирующих стратегий.
37. Пример построения алгоритмической модели для одноканальной системы массового обслуживания и заявок без приоритета.
38. Моделирование процессов систем массового обслуживания.
39. Терминология для СМО. Понятие о простейшем потоке событий
40. Уравнения Колмогорова.
41. Открытые системы массового обслуживания.
42. Замкнутые системы массового обслуживания.
43. Современные численные методы решения граничных задач, обзор. Метод конечных элементов, метод граничных элементов. Их сравнительные преимущества и недостатки. Метод взвешенных невязок.

### Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- решение индивидуальных заданий (задач);

- подготовка сообщений, тематических докладов, презентаций по заданным темам;
- составление тематической подборки литературных источников, интернет-источников;
- проработка тем (вопросов), вынесенных на самостоятельное изучение.

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола заседания кафедры)
Согласование не требуется	Кафедра «Информационные системы и технологии»		Содержание данной учебной программы не требует согласования с другими учебными дисциплинами специальности. Протокол № 4 от 27.12.2021

Заведующий кафедрой  
О.А.Бояршинова

\_\_\_\_\_