

ИЗМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ ПРИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

В.Т. Калайда, А.И. Шапошников,
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
пр. Ленина, 36, 634050, г. Томск, Российская Федерация, albertelena@mail.ru.

В работе рассматривается несовпадение результатов даваемых методом box counting для различных объектов. Цель работы найти такие тестовые примеры изображений множеств, для которых можно оценить фрактальную размерность, найденную методом box counting или сравнить фрактальную размерность, найденную методом box counting с ее истинным значением. Исследования основано на изучении свойств изображений различных множеств и на использовании программ подсчета фрактальной размерности, имеющих в открытом доступе. Были найдены тестовые образцы, для которых теоретические и расчетные значения размерностей совпадают абсолютно точно. Построены примеры, дающие фрактальную размерность, рассчитанную методом box counting, равную точно 1 и 2. Для тестов, для которых теоретические и расчетные значения фрактальной размерности различаются, дается оценка погрешности. Значения, получаемые методом box counting, в общем случае фрактальной размерностью не являются, но могут быть использованы для получения оценки фрактальной размерности.

Ключевые слова: фрактальная размерность, box counting, оценка, ошибка, погрешность.

Введение

Исследование свойств окружающего нас пространства неизбежно заставляет математиков пытаться определить понятие размерности пространства. Существует несколько различных концепций определения размерности множества. Оставляя в стороне причину выбора, мы называем, следуя, например, Википедии [1], размерностью Минковского множества величину $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_{\varepsilon} N(\varepsilon)$, где ε – размер шара (для метрики играет роль и форма «шара») и $N(\varepsilon)$ – количество шаров, достаточное для покрытия этого множества.

Еще в 1917 году Феликс Хаусдорф описал структуру, свойства которой совпадают с интуитивными размерностями геометрических тел. Однако, до него Анри Леон Лебег дал свое определение размерности, которая теперь называется топологической размерностью. Герман Минковский, один из учителей Альберта Эйнштейна, использовал свойства размерности, чтобы дать определение, позже дополнительно уточненное Жоржем Булиганом. В настоящее время именно эта конструкция широко используется для практических расчетов.

Тот факт, что размерность может быть нецелочисленной [2], кажется уже привычным. Но на самом деле это состояние размерности оказалось настолько удивительным для специалистов, что дробная размерность получила собственное родовое прозвище – фрактальная, а первооткрыватели множеств имеющих дробную размерность увековечили свои имена в названиях этих множеств [2].

Успехи последних десятилетий в применении знаний о фракталах в медицине [3], особенно при обнаружении раковых клеток, дают исследователю необходимые моральные стимулы, а успехи применения фракталов в экономике вселяют достаточную надежду на неспонтанное, независимое и регулярное финансирование работ.

Эффективный и популярный метод расчета размерностей – box counting вместе с методом наименьших квадратов, на самом деле, дает только оценку размерности. Этот факт вызывает ряд вопросов:

Нужно ли уточнять результат, получаемый с помощью метода box counting, или в некоторых задачах такой необходимости нет («и так сойдет»)?

Какова природа ошибки или же погрешность является не ошибкой, а отклонением (например, как описано в [4])?

Какова величина ошибки?

Материалы и методы. Фрактальная размерность изображений

В качестве примера рассмотрим автодорогу Витебск – Брест, проходящую по территории Белоруссии. На рис. 1 слева показан участок карты [5] а справа выделена сама дорога для вычисления её фрактальной размерности.

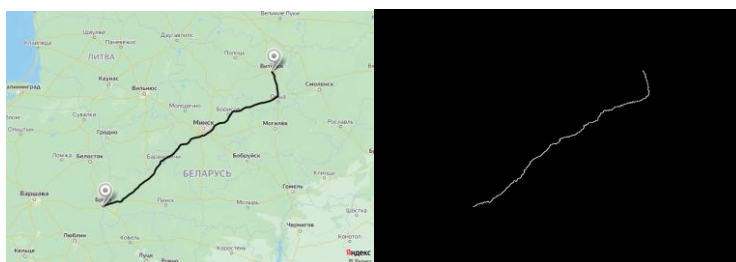


Рис. 1. Фрактальная размерность этого изображения дороги $D = 0,975451$

Но ведь карта вполне может оказаться повернутой на некоторый угол (рис. 2, 3). Заметить этот факт можно разве что по надписям на картах, но не по земле: земля Белоруссии не подписана. Фрактальная размерность от такого изменения изображения изменится не может, а результат вычислений вполне имеет право измениться.

Как видно из приведенных выше примеров (рис. 1-3), результат применения метода box counting чувствителен к эквиаффинным преобразованиям. Отметим так же и точность результатов. Хотя значащие цифры выписаны так, чтобы при округлении ничего не менялось, округление уже третьей цифры после запятой даст различие четвертого результата от первых трех.

Складывается впечатление, что метод box counting и должен давать лишь приближенную оценку фрактальной размерности, однако, существуют объекты, фрактальные размерности которых, найденные с помощью box-counting, инвариантны относительно эквиаффинных преобразований и идеально совпадают с теоретическим значением (Рис. 4 и 5).

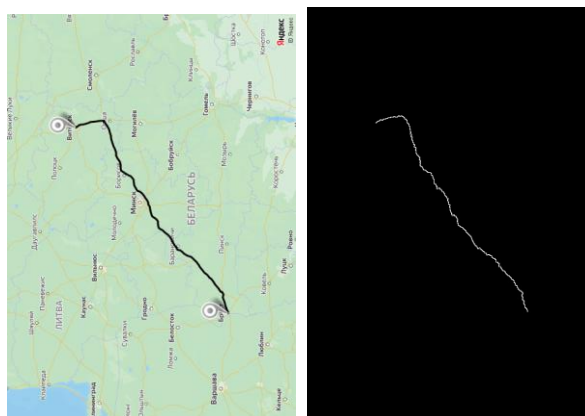


Рис. 2. Фрактальная размерность другого изображения той же самой дороги $D = 0,979672$

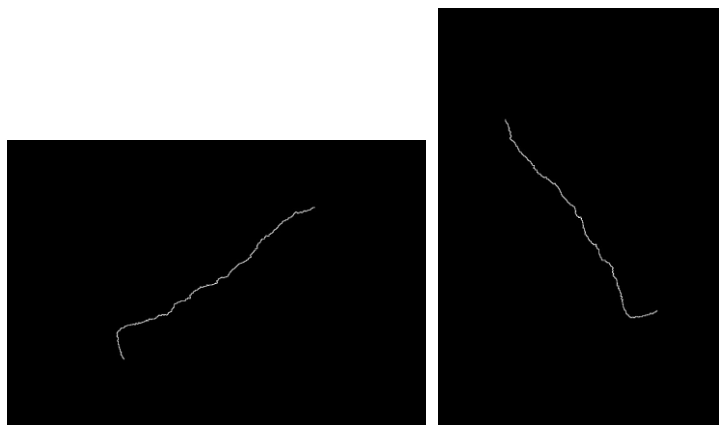


Рис. 3. Изображения той же самой дороги, что и на верхних двух снимках имеют фрактальные размерности 0,978963 и 0,972545571

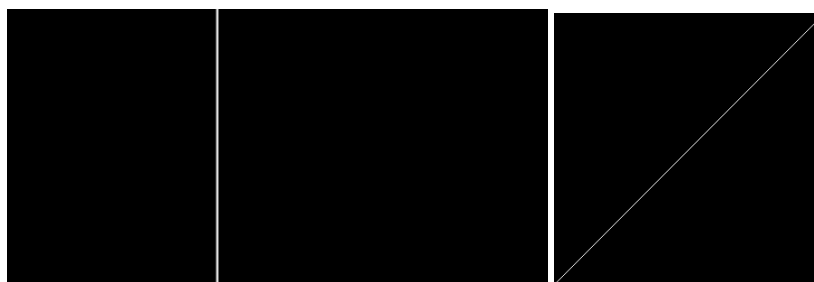


Рис. 4. Бесконечная тонкая линия и теоретически, и в расчетах имеет фрактальную размерность $D = 1$

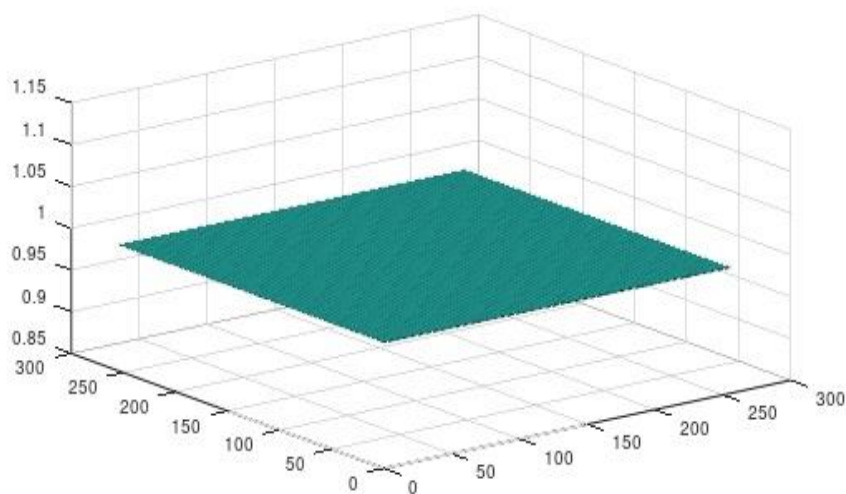


Рис. 5. И расчеты, и теория дают для бесконечной плоскости фрактальную размерность $D = 2$

Результаты

Результаты исследований собраны в представленной ниже таблице 1.

Заключение

Метод box counting широко применяется для оценки (дробной) размерности множеств, порождаемых самыми ранними объектами потому, что он прост и нагляден. Однако дискуссионным является вопрос какая именно величина получается в качестве итога и насколько точным является результат применения метода. Поэтому на текущий момент сфера применения метода box counting ограничивается сравнением характеристик одного объекта при его видоизменениях. Выяснение погрешностей и ошибок даваемых методом box counting позволит расширить область его применимости.

Таблица 1. Объекты и их размерности – точная, получаемая из теории и расчетная, получаемая как итог применения метода box counting.

№	Описание	Размерность	Оценка размерности	Ошибка
1	Бесконечные тонкая линия и тонкая плоскость	1 и 2	1	10^{-16}
2	Дорога на карте	1	0,972545571 – 0,979672	0,006 или 0,03
3	Изображения облаков	2	1.484094 – 1.522049	0,04 или 0,5

Литература

1. Minkowski– Bouligand dimension [Электронный ресурс] // Википедия, 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski-Bouligand_dimension (access date: 07.07.2022). – Access mode: free.
2. List of fractals by Hausdorff dimension [Электронный ресурс] // Статья в википедии, 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension (access date: 07.07.2022). – Access mode: free.
3. Box counting [Электронный ресурс] // Статья в википедии, 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_counting (access date: 07.07.2022). – Access mode: free.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов: учебник для немашиностроительных вузов: Москва : Высшая школа, 1988. – 367 с..
5. Электронные карты Яндекс [Электронный ресурс] // Яндекс Карты, 2022. URL : <https://yandex.ru/maps> (access date: 07.07.2022). – Access mode: free.

УДК 625.855.3

ОПТИЧЕСКИ-МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МИНЕРАЛЬНОГО ПОРОШКА ИЗ СЛАНЦЕВЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

И. С. Садиков, А. М. Карабаев, Ш. Ч. Буриев
Ташкентский государственный транспортный университет,
ул. Адылходжаева, 1, 100067, г. Ташкент, Узбекистан, ab.karabayev@gmail.com

В статье приводятся результаты исследований асфальтобетонной смеси на основе минерального порошка из сланцевых горных пород. Приведен оптически-микроскопический анализ минерального порошка. Выявлены преимущества этих порошков: - размеры частиц минерального порошка, полученного из сланцевой породы, расположены в близкой последовательности. Преимущество этого в том, что он позволяет почти полностью занять ту часть, которую необходимо заполнить между крупными и мелкими заполнителями в смеси: - минеральный порошок, полученный из сланцевых пород по сравнению с минеральным порошком известняка и ацикрета, кубической формой частиц и наличием очень малого количества игольчатых частиц. Даны количества в процентном отношении отдельных фракций частиц порошка. Указаны содержание частиц кубической, игольчатой и листовидной формы. Проведен анализ на влияния различных минеральных порошков на свойства асфальтобетонных смесей.

Ключевые слова: асфальтобетонная смесь, минеральный порошок, сланцевая порода, известняк, химический анализ.