УДК 514.742.2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В n - МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А. Акимов
Белорусский национальный технический университет,
пр-т Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь

Данная работа расширяет наше формальное представление о n-мерных пространствах. Оно основано на простейших алгебраических преобразованиях, не выходящих за рамки таких основополагающих понятий векторной алгебры как векторное и скалярное произведение двух векторов, изучаемых в первом семестре. Это делает материал доступным не только студентам первых курсов, но также и учащимся тех школ, где изучают основы векторной алгебры. Такая простота способствует широкому пониманию предлагаемого материала для всех заинтересованных лиц, а не только узкого круга математиков.

Ключевые слова: векторная алгебра, площадь параллелограмма, скалярное и векторное произведение векторов, трехмерное и четырехмерное пространства.

Первоначально напомним некоторые известные и малоизвестные соотношения, являющиеся переходными от геометрии к векторной алгебре в трехмерном пространстве. Начнем с простейших из них, а именно с площади треугольника, построенного по двум сторонам-векторам $OA=\vec{a}$ и $OB=\vec{b}$, исходящих из начала координат $O(0;0)$ рис.1. Чтобы в дальнейшим не писать все время коэффициент $1/2$, соответствующий площади треугольника, достроим его до параллелограмма

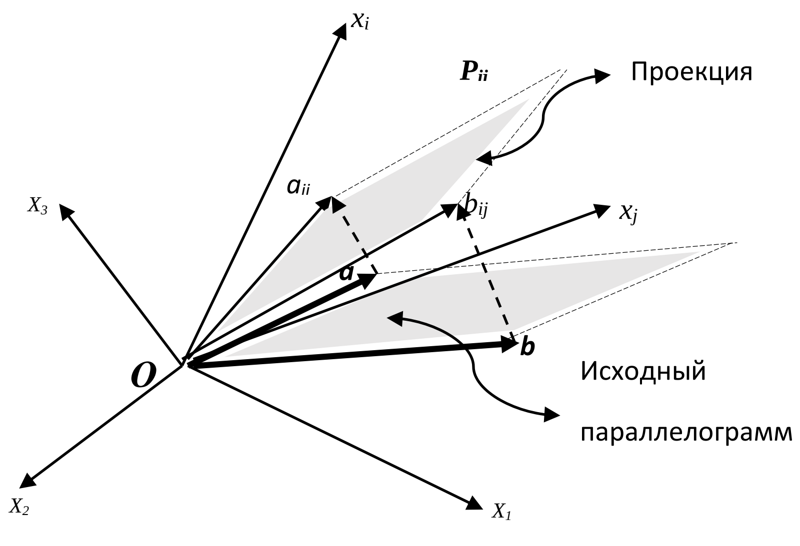

Рис.1. Проецирование исходного параллелограмма, построенного на векторах a и b, на координатную плоскость Pij , построенную на координатных осях xi и xj.

Как известно

$$S_{\square}^2=|OA|^2|OB|^2\sin^2\alpha=|OA|^2\left|OB^2\right|-|OA|^2|OB|^2\cos^2\alpha \qquad (1)$$

На языке векторов, используя скалярное произведение, перепишем формулу (1) в виде:

$$S_{\square}^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a}\square\vec{b})^2 \qquad (2)$$

Это соотношение можно читать как высказывание:

Лемма 1. Квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, равен алгебраическому произведению скалярных квадратов этих векторов минус квадрат их скалярного произведения.

В развернутом виде, в случае произвольного пространства размерности n, формулу (2) можно записать в виде:

$$S_{\square}^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n)^2 \qquad (3)$$

Для простоты запишем формулу (3) для трехмерного пространства $n = 3$

$$S_{\square}^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

или

$$S_{\square}^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что три последних слагаемых являются нечем иным, как квадратом модуля векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix})^2, \text{ или}$$

$$\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a}\square\vec{b})^2 = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 \qquad (5)$$

Таким образом мы получили еще одну лемму:

Лемма 2. В пространстве *n = 3* алгебраическое произведение квадратов двух векторов без квадрата их скалярного произведения равно квадрату модуля векторного произведения этих же векторов.

Этой формулировке, при желании можно придать аналог теоремы Пифагора, а именно:

Лемма 3. Сумма квадратов скалярного произведения двух произвольных векторов и квадрата модуля их векторного произведения равна произведению квадратов модулей этих векторов.

$$(\vec{a}\square\vec{b})^2 + \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \qquad (6)$$

С целью геометрической интерпретации леммы 3 введем в пространстве размерности n единичные орты $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$, где $\vec{e}_i = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots \underset{n}{0})$. Тогда координатные плоскости можно представить в виде векторных уравнений $\vec{P}_{ij} = \vec{e}_i t_i + \vec{e}_j t_j$ для $\forall t_i, t_j \in R$, где $\vec{P}_{ij}$ – вектор, направленный из начала координат в произвольную точку плоскости, указанную параметрами t_i, t_j или : на координатную плоскость построенную на координатных осях x_i и x_j. По существу параметры t_i и t_j являются проекциями координат вектора $\vec{P}_{ij}$ на координатные оси x_i и x_j. В дальнейшем нам понадобятся только два вектора, образующие две стороны проекции, поэтому обозначим их $\vec{a}_{ij}$ и $\vec{b}_{ij}$, а их координаты образуются из координат векторов $\vec{a}(a_1, a_2, \ldots a_n)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, \ldots b_n)$ через матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$.

В формулу (5) входят сумма квадратов произведений одноименных компонент этой матрицы $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2$ и сумма квадратов ее миноров второго порядка $\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$ $i < j$ в количестве $N = c_2^2 \cdot c_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ штук.

Здесь $c_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n элементов по m.

Теорема 1. Квадрат площади произвольного параллелограмма (треугольника) в трехмерном пространстве равен сумме квадратов его проекций на координатные плоскости.

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы приведем небольшие численные примеры, которые как нельзя лучше иллюстрируют утверждения приведенные выше лемм.

Пример 1. Возьмем для начала матрицу второго порядка вида: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. На основании формулы (6) получим: $(2\cdot1 + 1\cdot3)^2 + (2\cdot3 - 1\cdot1)^2 = (2^2 + 1^2)(1^2 + 3^2)$; $50 = 50$. Причем площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2,1)$ и $\vec{b}(1,3)$, как на сторонах, будет равна $S_{\square}^2 = (2^2 + 1^2)(1^2 + 3^2) - (2\cdot1 + 1\cdot3)^2 = 25$, $S_{\square} = 5$.

Пример 2. Теперь возьмем матрицу вида: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда получим:

$$(1\cdot5 + 2\cdot4 + 3\cdot3)^2 + (2\cdot3 - 3\cdot4)^2 + (1\cdot3 - 3\cdot5)^2 + (1\cdot4 - 2\cdot5)^2 =$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2)(5^2 + 4^2 + 3^2); \ 700 = 700.$$

А площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1,2,3)$ и $\vec{b}(5,4,3)$, как на сторонах, будет равна

$$S_{\square}^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2)(5^2 + 4^2 + 3^2) - (1\cdot5 + 2\cdot4 + 3\cdot3)^2 = 216, S_{\square} = 6\sqrt{6}.$$

Точно также и для других значений n можно привести большое количество численных примеров с произвольными векторами $\vec{a}(a_1, a_2, \ldots a_n)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, \ldots b_n)$ из которых составлены матрицы размерности $2 \times n$.

Начнем доказательство с хорошо изученного 3-х мерного пространства.

Выпишем матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$. Для ее миноров будем иметь следующие соотношения: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \to (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

или $$S_{12}^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \to (a_1b_1 + a_3b_3)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 = (a_1^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_3^2)$$

или $$S_{13}^2 = (a_1b_3 - a_3b_1)^2 = (a_1^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_3b_3)^2 \qquad (8)$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \to (a_2b_2 + a_3b_3)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 = (a_2^2 + a_3^2)(b_2^2 + b_3^2)$$

или $$S_{23}^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 = (a_2^2 + a_3^2)(b_2^2 + b_3^2) - (a_2b_2 + a_3b_3)^2 \qquad (9)$$

С учетом формулы (4) и тождеств

$$\begin{aligned}
&(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) + (a_1^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_3^2) + (a_2^2 + a_3^2)(b_2^2 + b_3^2) = \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^3) + (a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_3b_3)^2 = \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_1 + a_3b_3)^2 + (a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + (a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_3b_3)^3
\end{aligned}$$

получаем основную теорему: $S_{\square}^2 = S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2$

По формулам (7), (8), (9) находим:

$$S_x^2 = (2^2 + 3^2)(4^2 + 3^2) - (2 \cdot 4 + 3 \cdot 3)^2 = 36$$

$$S_y^2 = (1^2 + 3^2)(5^2 + 3^2) - (1 \cdot 5 + 3 \cdot 3)^2 = 144$$

$$S_z^2 = (1^2 + 2^2)(5^2 + 4^2) - (1 \cdot 5 + 2 \cdot 4)^2 = 36$$

И тогда мы видим: $36 + 144 + 36 = 216$ или $S_{\square}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ т.е. условия теоремы выполняются.

Теперь рассмотрим 4-х мерное пространство. По аналогии будем иметь:

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_1+a_3b_3)^2+(a_2b_2+a_3b_3)^2+$$
$$+(a_1b_1+a_4b_4)^2+(a_2b_2+a_4b_4)^2+(a_3b_3+a_4b_4)^2=$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+2(a_1b_1)^2+2(a_2b_2)^2+2(a_3b_3)^2+2(a_4b_4)^2$$
$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)+(a_1^2+a_3^2)(b_1^2+b_3^2)+(a_2^2+a_3^2)(b_2^2+b_3^2)+$$
$$+(a_1^2+a_4^2)(b_1^2+b_4^2)+(a_2^2+a_4^2)(b_2^2+b_4^2)+(a_3^2+a_4^2)(b_3^2+b_4^2)=$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+$$
$$+2(a_1b_1)^2+2(a_2b_2)^2+2(a_3b_3)^2+2(a_4b_4)^2$$

и мы также приходим к следующему утверждению:

Теорема 2. Квадрат площади произвольного параллелограмма (треугольника) в четырехмерном пространстве равен сумме квадратов его проекций на координатные плоскости $S_{\square}^2=S_{12}^2+S_{13}^2+S_{23}^2+S_{14}^2+S_{24}^2+S_{34}^2$.

Пример 3. В евклидовом пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением возьмем два вектора $\vec{a}_1=(1,1,1,1)$ и $\vec{a}_2=(1,2,2,-1)$. Для удобства запишем их компоненты в виде матрицы $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&-1\end{pmatrix}$. По аналогии с выше изложенным будем иметь: $S_{\square}=(1^2+1^2+1^2+1^2)(1^2+2^2+2^2+(-1)^2)-$

$-(1\cdot1+1\cdot2+1\cdot2+1\cdot(-1))^2=24$. Далее определяем:

$S_{12}^2=1$ $S_{13}^2=1$ $S_{14}^2=4$ $S_{23}^2=0$ $S_{24}^2=9$ $S_{34}^2=9$

Очевидно выполнение равенства $S_{\square}^2=S_{12}^2+S_{13}^2+S_{14}^2+S_{23}^2+S_{24}^2+S_{34}^2$.

Пример 4. А теперь будем считать, что $L=\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle$, т. е. вектора $\vec{a}_1$ и a_2 образуют подпространство L. Разложим вектор $\vec{x}=(4,-1,-3,4)$ на сумму проекции на L и ортогональной к ней составляющей. А также найдем расстояние от вектора x до L и угол φ между x и L.

Разложение x будем искать в виде $\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\vec{z}$, $(\vec{a}_1,\vec{z})=(\vec{a}_2,\vec{z})=0.$

Здесь и далее, заключенные через запятую в круглую скобку векторы будут означать их скалярное произведение [1].

Умножим желаемое равенство скалярно сначала на $\vec{a}_1$, потом на $\vec{a}_2$:

$$(x,a_1)=\alpha_1(a_1,a_1)+\alpha_2(a_2,a_1)+(z,a_1)=\alpha_1(a_1,a_1)+\alpha_2(a_2,a_1),$$
$$(x,a_2)=\alpha_1(a_1,a_2)+\alpha_2(a_2,a_2)+(z,a_2)=\alpha_1(a_1,a_2)+\alpha_2(a_2,a_2)$$

Для нахождения α_1,α_2 получим систему уравнений

$\begin{cases}\alpha_1(a_1,a_1)+\alpha_2(a_2,a_1)=(x,a_1)\\ \alpha_1(a_1,a_2)+\alpha_2(a_2,a_2)=(x,a_2)\end{cases}$. В нашей задаче

$(a_1,a_1)=4$, $(a_1,a_2)=(a_2,a_1)=4$, $(a_2,a_2)=10$, $(x,a_1)=4$, $(x,a_2)=8$, так что

$$\begin{cases} 4a_1 + 4a_2 = 4 \\ 4a_1 + 10a_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a_1 = 3, a_2 = -2,$$

$$y = 3a_1 - 2a_2 = (3,3,3,3) - (2,4,4,-2) = (1,-1,-1,5)$$

$$z = x - y = (4,-1,-3,4) - (1,-1,-1,5) = (3,0,-2,-1).$$

Значит, $\rho(x, L) = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{13}$,

$$\cos\varphi(x, L) = \frac{|y|}{|x|} = \frac{\sqrt{1+1+1+25}}{\sqrt{16+1+9+16}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Итак, $\varphi = \arccos(\frac{\sqrt{6}}{3})$.

Пример 4 осуществляет взаимосвязь предложенной новой идеи с известными ранее работами в данной области и, как нельзя лучше, подчеркивает актуальность решаемой здесь задачи в новой постановке.

Литература

1.Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. / Д.Т. Письменный-15-е издание. – Москва: Айрис-пресс, 2018. – 602 с.

2.Акимов В.А., Новиков А.А. Теорема Пифагора в n-мерном пространстве. // Материалы Международной научно-технической конференции. / Дорожное строительство и его инженерное обеспечение. Секция «Математические методы в строительстве». Минск, БНТУ, 2021, с. 212-217.

УДК 624.073

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ НА ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

О.Л. Вербицкая, Л.И. Шевчук

Белорусский национальный технический университет,

пр-т Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь

Выполнен динамический расчет балочной прямоугольной железобетонной плиты. Для сгущения массы плиты в ее центре использован принцип эквивалентности энергий. Расчет выполнен по авторской программе *Sturm*, реализующей МКЭ. В результате расчета получены прогибы плиты под центрами назначенных ячеек. Приведены график свободных колебаний плиты со сгущенной массой, график колебания возмущающей силы, вызванной движущейся частью внутришлифовального станка 3Б250, график колебаний плиты, вызванных возмущающей силой станка 3Б250. Источником возмущающих колебаний является внутришлифовальный станок 3Б250. Определены максимальный прогиб плиты, а также изгибающие моменты.

Ключевые слова: динамический расчет, плиты, колебания, прогиб.

Выполним динамический расчет балочной прямоугольной железобетонной плиты, шарнирно опертой по двум противоположным краям. Размеры плиты 1,80х5,76 м с толщиной 120 мм. Плита армирована тяжелой сеткой второго типа с размерами 200х200х20 с площадью по ширине плиты 37,68 см^2. Модуль упругости арматуры и бетона соответственно равны E_a = 200 ГПа, E_b =39 ГПа. Коэффициент Пуассона бетона ν = 0,22. Плотность бетона принимаем равной ρ = 2500 кг/м^3.