GENERALIZED ARGUMENT PRINCIPLE FOR $A(z)$-ANALYTIC FUNCTIONS

M.D. Ne'matillayeva
National university of Uzbekistan
E-mail: muhayyo.rn@gmail.com

The present work is devoted to the theory of analytic solutions of the Beltrami equation

$$f_{\bar z}(z)=A(z)f_z(z), \qquad (1)$$

which is directly related to the quasi-conformal mappings. The function $A(z)$ is, in general, assumed to be measurable with $|A(z)|\le C<1$ almost everywhere in the domain $D\subset\mathbb{C}$ under consideration. Solutions of equation (1) are often referred to as $A-$analytic functions in the literature.

Theorem 1. (an analog of Cauchy theorem [3]). If $f\in O_A(D)\cap C(\bar D)$, where $D\subset\mathbb{C}$ is a domain with rectifiable boundary ∂D, then the following identity holds:

$$\int_{\partial D} f(z)\left(dz+A(z)d\bar z\right)=0.$$

Let $D\subset\mathbb{C}$ be a convex domain and $\xi\in D$ be fixed point. Let us consider the Cauchu – type kernel

$$K(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar A(\tau)d\tau}}, \qquad (2)$$

where $\gamma(\xi,z)$ is a smooth curve which connects the points $\xi,z\in D.$ Since the domain is simply - connected and the function $\bar A(z)$ is analytic, the integral

$$I(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar A(\tau)d\tau$$

is independent of the path of integration; it coincides with the antiderivative $I'(z)=\bar A(z).$

Theorem 2. (Cauchy formula, see.[4]). Let $D\subset\mathbb{C}$ be convex domain and $G\subset D$ be an arbitrary subdomain with a smooth or piecewise smooth boundary ∂G that compactly lies in D. Then for any function $f(z)\in O_A(G)\cap C(\bar{G})$, the following formula holds:

$$f(z)=\int_{\partial G}K(\xi,z)f(\xi)\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ \ z\in G. \tag{3}$$

Generalized argument principle for $A(z)$- analytic functions.

Definition. An $A(z)$- analytic function $f(z)$, which does not have other singularities except for poles in a domain D, is said to be $A(z)$- meromorphic in the D.

Let a function $f\in O_A\left(0<\left|\psi(z,a)\right|<R\right),\ 0<R,$ not vanish in a punctured neighborhood of a. The residue of the logarithmic derivative of $f(z)$ at the point a is called the $f(z)$ - logarithmic residue of the $A(z)$- analytic function $f(z)$ at the point a:

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right)=dLnf(z).$$

One can prove the relation

$$d\left(Lnf(z)\right)=\frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right)=\frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+A\frac{\partial f}{\partial z}d\bar{z}\right)=$$
$$=\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right).$$

Let be $a\in\mathbb{C}$ the zero of the order n $A(z)$- analytic function $f(z)$.Then in some neighborhood $A(z)$- lemniscate $L(a,r)$ we have $f(z)=\psi(z,a)^n h(z)$, where $h(z)\in O_A(D),\ h(a)\neq 0$. Therefore , in $A(z)$- lemniscate $L(a,r)$

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} = \frac{n}{\psi(z,a)} + \frac{\frac{\partial h(z)}{\partial z}}{h(z)}$$

If $b \in$ the pole of $f(z)$ the function is of order m, then we have $f(z) = \frac{g(z)}{\psi^n(z,b)}$, where $g(z) \in O_A(D),\ g(b) \neq \infty$. Therefore, in $A(z)$ - lemniscate $L(b,r)$

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} = \frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z}}{g(z)} - \frac{m}{\psi(z,b)}.$$

Theorem A (*Generalized argument principle*). Let $f(z)$ be an $A(z)$-analytic function, except for the poles in a domain $D \subset$ and $G \subset\subset D$, whose border ∂G is piecewise smooth, ∂G is a continuous curve that does not contain zeros or poles of the $A(z)$-analytic function $f(z)$. Then for any $A(z)$-analytic in D function $\varphi(z)$, the equality holds:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \varphi(z)\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}(dz + A(z)d\bar{z}) = \sum_{i=1}^{k} n_i\varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{l} m_j\varphi(b_j).$$

References

1. **Ahlfors L.** Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York-London, 1966,133 pp.
2. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции, М., «Наука», 1988, 512 с.
3. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.** Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2014, №1, стр. 15-18.
4. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У**. Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2016, №4, стр. 50-59.
5. **Sadullaev A.,Jabborov N.M.** On a class of A-analitic functions, Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016 y 9(3), c. 374-383.

6. **J.K.Tishabaev, T.U.Otaboyev, Sh.Ya. Khursanov**. Residues and argument prinsple for $A(z)-$ analytic functions,Journal of Mathematical Sciences,Vol.245,No. 3, March, 2020. 350-358.

РАСЧЕТ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ БОРОАЛЮМИНИЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Икрамов А.М., Полатов А.М., Жуманиёзов С.П., Ш.О. Сапаев

Национальный университет Узбекистана

Рассматривается упругопластическая среда, которая представляет собой неоднородный сплошной материал, состоящий из двух компонент: армирующие элементы и матрица (или связующая), которая обеспечивает совместную работу армирующих элементов.

Известно, что волокнистый материал и трансверсально-изотропная среда являются эквивалентными понятиями. В связи с этим, при решении задачи физически нелинейного деформирования волокнистых композитов применяется теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропной среды и метод конечных элементов. В которой отмечается, что при рассмотрении армированного композита, жесткость армирующих элементов которого существенно превышает жесткость связующего, появляется возможность использования упрощенной деформационной теории пластичности [1].

Общая постановка упругопластических задач для однородных тел представляется следующими уравнениями:

$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V$ – уравнение равновесия; (1)

$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ – соотношение Коши; (2)

$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{\hat{e}\hat{e}}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - \bar{S}_{ij}\omega$ – физический закон; (3)

$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^o, x_i \in \Sigma_1$ – граничные условия в перемещениях; (4)

$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2} = P_i^o, \quad x_i \in \Sigma_2$ – граничные условия в напряжениях. (5)

Для решения задачи рассматривается ее вариационная постановка, которая позволяет применять приближенные методы решения, одним из которых является МКЭ. Вариационная постановка представляется в виде [1]: