

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ
РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.Дилмурадов, А. Халилов

Каришинский государственный университет

Рассматривается дискретная система управления ($\dim X_k = m$)

$$X_{k+1} = A(k, \zeta_k) X_k + B(k, \zeta_k) U_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где ζ_k -полумарковская цепь, принимающая значения $\theta_1, \dots, \theta_n$ и определённая интенсивностями $q_{ls}(k)$ ($l, s = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots$) перехода из состояния θ_s в состояние θ_l .

Ищем вектор управления U_k из условия минимума квадратичного функционала

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle X_k^* Q(k, \zeta_k) X_k + U_k^* L(k, \zeta_k) U_k \rangle, \quad (2)$$

где $Q(k, \zeta_k), L(k, \zeta_k)$ – симметрические, положительно определённые матрицы, а верхний индекс $*$ означает транспонирование. Предполагаем, что при $k_j \leq k < k_{j+1}, \zeta_k = \theta_s$ матричные коэффициенты в формулах (2), (3) определяются выражениями

$$\begin{aligned} A(k, \zeta_k) &= A_s(k - k_j); B(k, \zeta_k) = B_s(k - k_j); \\ Q(k, \zeta_k) &= Q_s(k - k_j); L(k, \zeta_k) = L_s(k - k_j) \quad (s = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (3)$$

где $A_s(k), B_s(k), Q_s(k), L_s(k), (s = 1, \dots, n)$ – наперёд заданные детерминированные матрицы, зависящие от дискретного времени $k = 0, 1, 2, \dots$.

Предполагаем, что оптимальное управление имеет вид

$$U_k = S(k, \zeta_k) X_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

где $S(k, \zeta_k)$ матрица с полумарковскими коэффициентами. Предполагаем далее, что при $k_j \leq k < k_{j+1}$ будут справедливы равенства

СЕКЦИЯ 4. Полупроводниковая микро- и наноэлектроника в решении проблем информационных технологий и автоматизации

$$S(k, \zeta_k) = S_s(k - k_j) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Введём обозначения

$$H(k, \zeta_k) = A(k, \zeta_k) + B(k, \zeta_k)S(k, \zeta_k); \quad (6)$$

$$G(k, \zeta_k) = Q(k, \zeta_k) + S(k, \zeta_k)L(k, \zeta_k)S(k, \zeta_k). \quad (7)$$

При этом приходим к системе линейных разностных уравнений

$$X_{k+1} = H(k, \zeta_k)X_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

для которой ищется квадратичный функционал

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle X_k G(k, \zeta_k) X_k \rangle. \quad (9)$$

Введём основные стохастические функции Ляпунова

$$v_s(X) \equiv X^* C_s X = \sum_{k=0}^{\infty} \langle X_k^* G(k, \zeta_k) X_k | X_0 = X, \zeta_0 = \theta_s \rangle \quad (s = 1, \dots, n). \quad (10)$$

Если функции $v_s(X)$ ($s = 1, \dots, n$) известны, то величину функционала v (3.41) можно найти из формулы

$$v = \int_{R^m} \sum_{s=1}^n v_s(X) f_s(0, X) dX = \int_{R^m} \sum_{s=1}^n X^* C_s X f_s(0, X) dX = \sum_{s=1}^n C_s \circ D_s(0). \quad (11)$$

где используются матрицы частных моментов второго порядка

$$D_s(k) = \int_{R^m} X X^* f_s(k, X) dX; \quad dX = dx_1, \dots, dx_n, \quad (12)$$

а $f_s(k, X)$ частная плотность распределения $(X_k, \zeta_k = \theta_s)$. Рассмотрим системы линейных разностных уравнений (8). Будем предполагать, что решение системы (8) умножается дополнительно на постоянные матрицы C_{sl} , $\det C_{sl} \neq 0$ ($s, l = 1, \dots, n$) в момент k_j , когда случайный процесс ζ_k имеет скачок и $\zeta_{k_{j-1}} = \theta_l$, $\zeta_{k_j} = \theta_s$.

Пусть системы линейных разностных уравнений

СЕКЦИЯ 4. Полупроводниковая микро- и наноэлектроника в решении проблем информационных технологий и автоматизации

$$X_{k+1}^{(s)} = H_s(k)X_k^{(s)} \quad (s = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

имеют фундаментальные матрицы решений $N_s(k)$

$$X_k^{(s)} = N_s(k)X_0^{(s)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Будем предполагать, что при выполнении условий

$$\zeta_k = \theta_l, k_{j-1} \leq k < k_j; \quad \zeta_k = \theta_s, k_j \leq k < k_{j+1}$$

будут справедливы соотношения $(k_{j-1} \leq k < k_j)$

$$X_k = N_l(k - k_{j-1})X_{k_{j-1}}; \quad X_{k_j} = C_{sl}N_l(k - k_{j-1})X_{k_{j-1}}, \det C_{sl} \neq 0; \quad X_k = N_s(k - k_j)X_{k_j} \quad (15)$$

т.е. в момент k_j скачка полумарковской цепи ζ_k решение системы (8) умножается слева дополнительно на необратимую матрицу C_{sl} . Из формул (11) находим систему уравнений

$$v_s(X) \equiv X^* C_s X = \sum_{k=0}^{\infty} X^* N_s^*(k) \left(\psi_s(k) G_s(k) + \sum_{l=1}^n q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} N_s(k) \right) X, \\ q_{ls}(0) = 0, \quad \psi_s(t) = \int_t^{\infty} \sum_{l=1}^n q_{ls}(\tau) d\tau \quad (s = 1, \dots, n) \quad (16)$$

Полагая

$$G_s(k) = Q_s(k) + S_s^*(k) L_s(k) S_s(k); \quad U_k^{(s)} = S_s(k) X_k^{(s)} \quad (s = 1, \dots, n) \quad (17)$$

перепишем формулы (16) в виде

$$v_s(X) \equiv X^* C_s X = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(X_k^{(s)} \right)^* \left(\psi_s(k) Q_s(k) + \sum_{l=1}^n q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} \right) X_k^{(s)} + \right. \\ \left. + \left(U_k^{(s)} \right)^* \psi_s(k) L_s(k) U_k^{(s)} \right]. \quad (18)$$

Минимизация функционала v (11) сводится к минимизации функций $v_s(X)$ ($s = 1, \dots, n$). Таким образом, задача отыскания оптимального

СЕКЦИЯ 4. Полупроводниковая микро- и наноэлектроника в решении проблем информационных технологий и автоматизации

управления (5) распадается на n задач оптимизации детерминированных систем управления

$$X_{k+1}^{(s)} = A_s(k) X_k^{(s)} + B_s(k) U_k^{(s)} \quad (s=1, \dots, n), \quad (19)$$

где оптимальное управление $U_k^{(s)}$ ищется из условия минимума квадратичного функционала $v_s(X) \quad (s=1, \dots, n)$.

Используем известные методы отыскания оптимального управления для линейной системы разностных уравнений, изложенных, например, в работе [14].

Вводим квадратичные формы (3.26)

$$\begin{aligned} V_s(k, X_k^{(s)}) &= (X_k^{(s)})^* K(k) X_k^{(s)} = \\ &= \min_{U_s(i, X), j \geq k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\psi_s(j) g_s(j, X_j^{(s)}) + \sum_{l=1}^n q_{ls}(j) V_l(X_j^{(s)}) \right) \right) \\ &\quad (s=1, \dots, n; \quad k=0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (20)$$

где положено

$$V_s(X_0^{(s)}) = (X_0^{(s)})^* C_s X_0^{(s)} = V_s(0, X_0^{(s)}) \quad (s=1, \dots, n).$$

При этом приходим к системе нелинейных матричных разностных уравнений типа Риккати $(s=1, \dots, n)$:

$$\begin{aligned} K_s(k) &= \psi_s(k) Q_s(k) + \sum_{l=1}^n q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} + A_s^*(k) R_s(k), \\ R_s(k) &\equiv (E + K_s(k+1) B_s^*(k) \psi_s^{-1}(k) L_s^{-1}(k) B_s(k))^{-1} K_s(k+1) A_s(k), \end{aligned} \quad (21)$$

а оптимальное управление имеет вид

$$U_k^{(s)} = -\psi_s^{-1}(k) L_s^{-1}(k) B_s^*(k) R_s(k) X_k^{(s)}. \quad (22)$$

При этом будут справедливы формулы

$$C_l = K_l(0) \quad (l=1, \dots, n). \quad (23)$$

Систему уравнений (21)-(23) можно записать в равносильной форме

**СЕКЦИЯ 4. Полупроводниковая микро- и нанoeлектроника в
решении проблем информационных технологий и автоматизации**

$$S_s(k) = -\left(L_s(k)\psi_s(k) + B_s^*(k)K_s(k+1)B_s(k)\right)^{-1} B_s^*(k)K_s(k+1)A_s(k), \quad (24)$$

где симметрические матрицы $K_s(k)$ удовлетворяют матричным разностным уравнениям

$$K_s(k) = \psi_s(k)Q_s(k) + \sum_{l=1}^n q_{ls}(k)C_{ls}^*K_l(0)C_{ls} + \\ + A_s^*(k)K_s(k+1)(A_s(k) + B_s(k)S_s(k)) \quad (s=1, \dots, n; k=0, 1, 2, \dots) \quad (25)$$

Чтобы упростить выкладки, введём вспомогательные матрицы

$$P_s(k+1) = \frac{1}{\psi_s(k)} K_s(k+1) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

Тогда система уравнений (24), (25) примет простой вид

$$S_s(k) = -\left(Q_s(k) + B_s^*(k)P_s(k+1)B_s(k)\right)^{-1} B_s^*(k)P_s(k+1)A_s(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (27)$$

где

$$P_s(k) = \frac{\psi_s(k)}{\psi_s(k-1)} \left(Q_s(k) + A_s^*(k)P_s(k+1)\right) (A_s(k) + B_s(k)S_s(k)) + \\ + \sum_{l=1}^n \frac{q_{ls}(k)}{\psi_s(k-1)} C_{ls}^* K_l(0) C_{ls} \quad (s=1, \dots, n; k=0, 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Уравнение (25), соответствующие индексу $k=0$ выписывается по особой формуле

$$K_s(0) \equiv K_s = Q_s(0) + A_s^*(0)P_s(1)(A_s(0) + B_s(0)S_s(0)) \quad (29)$$

так как $q_{ls}(0) = 0 \quad (l, s=1, \dots, n)$.

Полученный вывод сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть дискретная система управления (2) имеет полумарковские коэффициенты, зависящие от полумарковской цепи ζ_k ,

СЕКЦИЯ 4. Полупроводниковая микро- и наноэлектроника в решении проблем информационных технологий и автоматизации

определяемой интенсивностями $q_{ls}(k)$ ($l, s = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots$). Пусть коэффициенты системы управления (2) и функционала (3) определяются системой уравнений (4). Пусть оптимальное управление U_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) ищется в виде (5) и решения оптимизированной системы управления имеют скачки решения, определяемые формулами (15). Если оптимальное управление ищется из условия минимума квадратичного функционала (3), то необходимые условия оптимальности определяются системой уравнений (27) - (29).

Использованные литературы

1. Валеев К.Г., Дильмурадов Н. О синтезе оптимального управления для линейных разностных уравнений со случайными коэффициентами, зависящими от марковской цепи // ДАН Украины. -1993, № 12.- С. 22-24.
2. Валеев К. Г., Дильмурадов Н. Необходимые условия оптимальности решений системы нелинейных разностных уравнений, зависящих от полумарковской цепи. //Доклады НАН Украины, 1996, №4, - С. 8-11.
3. Дильмурадов Н. О распределении случайных решений систем дискретных уравнений, зависящих от конечнозначной полумарковских цепи // Материалы научно-практической конференции, посвященной 600-летию Улугбека. –Карши: Каршинский госуниверситет, 1994.-С. 25-30.
4. Дильмурадов Н. Стохастические динамические системы. Карши: Насаф, 2013. – 178 с.
5. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения.- Киев: Наукова думка, 1976. - 182 с.
6. Королюк В.С. Стохастические модели систем. Киев: Наукова думка, 1989. - 208 с.
7. Тихонов В.И., Миронов М.А.. Марковские процессы.- М.: Сов. радио, 1977. - 488 с.
8. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем.- М.: Мир, 1971.- 312 с.
9. Qureshi M. T., Shen X., Gajic Z. Optimal output feedback control of discrete linear, singularly perturbed, stochastic systems. // Int. J. Control. -1992. –Vol. 55, №2. –Р. 361- 371.