«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА R-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ»

А. Сайдуллаев

Национальный университет Узбекистана

Доклад посвящается $R-$аналитическим (вещественно-аналитическим) функциям в пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним, что функция $f(x)$, определенная в области $D\subset\mathbb{R}^n$ называется $R-$аналитической, если в некоторой окрестности каждой точки $x^0\in D$ функция f представляется как сумма сходящегося степенного ряда. Отсюда следует, что если $\mathbb{R}^n_x$ вложено в комплексное пространство $\mathbb{C}^n_z,\ z=x+iy,$ то $f(x)$ голоморфно продолжается в некоторую окрестность $\hat{D}\subset\mathbb{C}^n_z,\ \hat{D}\supset D,$ т.е. $\exists\,\hat{f}(z)\in O(\hat{D}):\ \hat{f}(x)=f(x)\ \forall x\in D.$ Таким образом $R-$аналитические функции тесно связаны с голоморфными функциями в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Однако, во многих вопросах сильно отличаются. К примеру, для голоморфных функций имеется Теорема Форелли [1], что если $f(z)-$ бесконечно гладкая функция в точке $0\in\mathbb{C}^n$, т.е. для нее есть формальный однородный степенной ряд

$$f\sim\sum_{m=0}^{\infty}c_m(z), \tag{1}$$

где $c_m(z)=\sum_{|k|=m}c_kz^k,\ |k|=(k_1,k_2,...,k_n),\ |k|=k_1+k_2+...+k_n,\ z^k=z_1^{k_1}z_2^{k_2}...z_n^{k_n}-$ однородные полиномы, и сужения $f|_l-$ голоморфны в круге $U(0,1)=l\cap B(0,1)$ для всех комплексных прямых $l\ni 0,$ то f голоморфно продолжается в шар $B(0,1)\subset\mathbb{C}^n$.

Пример функции $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^{k+1}}{x_1^2+(x_2-1)^2}$ показывает, что она вещественно-аналитическая в окрестности $0\in\mathbb{R}^2,$ сужение $f|_l$ на любую прямую $l: x_1 = \lambda_1 t,\ x_2 = \lambda_2 t,\ t \in \mathbb{R}$, вещественно аналитическая на всей прямой $\mathbb{R}$. Однако f не является вещественно-аналитической в точке $(0,1)$.

Тем не мене имеет место следующий основной результат работы.

Теорема А. *Пусть функция* $f(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n),$ *бесконечно гладкая в точке* $0 \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in C^\infty\{0\}$ *и пусть для любой вещественной прямой* $l: x = \lambda t,\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in S(0,1) \subset \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} -$ *параметр, сужение* $f|_l = f(\lambda t)$ *является вещественно-аналитической (*R*-аналитической) в интервале* $t \in (-1,1)$. *Тогда существует замкнутое плюриполярное множество* $P \subset B(0,1)$ *такое, что* $f(x)$ *является* R*-аналитической в* $B(0,1) \setminus P,$ *где* $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n -$ *единичный шар, а* $S(0,1) = \partial B(0,1) -$ *единичная сфера.*

Ниже мы неоднократно используем вложение $\mathbb{R}_x^n \subset \mathbb{C}_z^n$, полагая $z = x + iy$ и используя терминологию, что множество $P \subset \mathbb{R}_x^n$ является плюриполярным, если оно плюрполярное в $\mathbb{C}_z^n$. Заметим, что если $P \subset \mathbb{R}_x^n -$ плюриполярное, то $mesP = 0.$

Отметим, что доказательство теоремы Форелли и дальнейшие ее обобщения основывается на свойствах сходимости однородного степенного ряда (1) в круговых областях. Однако, доказательство Теоремы А. существенно отличается от доказательства голоморфности функции комплексного аргумента. Если в случае голоморфности функции $f(z)$ комплексного аргумента $z \in \mathbb{C}^n$ мы смогли использовать сходимостью сужения формального степенного ряда (1)

$$f|_l(\xi) = \sum_{m=0}^\infty c_m(w)\xi^m,\ \ \xi \in l$$

в круге $|\xi| < 1$, то в случае R- аналитичности такое свойства формального ряда

$$f \sim \sum_{m=0}^\infty c_m(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (3)$$

не имеет место. Поэтому в доказательстве Теоремы А. используется другие методы: вложим пространство $\mathbb{R}^n(x)$ в пространство $\mathbb{C}^n(z)$, полагая $z = x + iy;$ затем используя бесконечно гладкость функции $f(x)$ в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ и используя обобщение Теоремы Форелли (работа автора [2]), мы докажем, что $f(x)-$голоморфно продолжается в некоторую окрестность $0 \in U \subset \mathbb{C}^n,\ \exists f(z) \in O(U):\ f(z)|_{\mathbb{R}^n \cap U} = f(x);$ далее, из R- аналитичности сужений $f|_l$ в интервале $(-1,+1)$ мы находим богатый набор эллипсов $e_j : x + jy < 1,\ j = 1,2,...,$ в которые $f(z)$ голоморфно продолжается; используя опять одну теорему автора [2] о продолжении однородных рядов, мы построим открытое множество $G^f:\ f(z) \in O(G^f)$ и такое, что $G^f \supset B_x^n(0,1).$ В доказательстве Теоремы существенно используются также методы теории плюрипотенциала, неравенство Бернштейна-Уолша и свойства непрерывности слева функции Грина.

Функции, R- аналитические на пучках прямых пожалуй, впервые изучены Й. Сичаком. В работах [5-7] (см. также [8]) им доказана, что если функция $f(x),$ бесконечно гладкая в области $D \subset \mathbb{R}^n,\ f \in C^\infty(D),$ обладает тем свойством, что для любой вещественой прямой $l : x = x^0 + \lambda t,\ x^0 \in D,\ \lambda \in \mathbb{R}^n, |\lambda| = 1,\ t \in \mathbb{R},$ сужение $f|_l -$вещественна-аналитична по t в некоторой окрестности нуля, то $f(x)$ является R- аналитической в $D.$ В работе [9] построен интересный пример функции $f(x_1, x_2)$двух переменных, сужение которой на любую аналитическую кривую является аналитической, однако $f(x)$ не является даже непрерывной функцией в области.

Использованные литературы

1. F. Forelli, Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices, Math. Scand.,

V. 41,1977, 358-364.

2. A. Sadullaev, Holomorphic continuation of a formal series along analytic curves, Complex Variables and Elliptic Equations, Published on: 22

Sep 2020, 1-10, permanent link: https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1818734.

5. J. Siciak, A characterization of analytic functions of n variables, Studia Mathematica, 35 (1970), 293-297.

6. J. Siciak, Singular sets of separately analytic functions, Coll. Math. 60/61(1990), 281-290.

7. J. Siciak, On series of homogeneous polynomials and their partial sums, Ann. Pol. Math. 51 (1990), 289-302.

8. J. Bochnak , Analytic functions in Banach space , Studia Mathematica, 35 (1970), 273-292.

9. E. Bierstone, P.D. Milman, A. Parusiński, A function which is arc-analytic but not continuous, Proceedings of the American Mathematical society, 113:2 (1991), 419-423.

СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

[1]Э. Аликулов, [2]Ш. Жураев

[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
[2]Каршинский государственный университет

Известное утверждения из классического анализа гласит: еслинепрерывная функция обладает частными производными в области и эти производные непрерывны в некоторой точке, то функция дифференцируема в этой точке. Имеются различные обобщения и усиления этого утверждения[1-3].Например, для липшицевой функции(вещественной, или комплексной) существование пределовеё частных производныхв некоторой точке по точкам дифференцируемости также приводят к дифференцируемости в этой точке; при этом о существовании частных производных в ней ничего не предполагается. К сожалению, в общем случае это утверждение не верно [1]. Тем не менее, в работе [2] было доказано усиление вышеуказанного утверждения, рассматривая общий случай комплексной функции заменой её частных производных комплексными производными. Более того, для липшицевой функции указанные выше пределы были заменены асимптотическими и получены условия дифференцируемости в смысле действительного и комплексного анализа.

В докладе будут приводится аналогичные утверждения для функций многих комплексных переменных с некоторыми дополнительными условиями.