МЕТОДЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЗИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Д. Утебаев [1], К.О. Тилеуов [2]

[1]Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, [2] Нукусский филиал Ташкентского университета информационных технологии имени Мухаммада аль Хорезми.

E-mail: dutebaev_56@mail.ru, quwat80@mail.ru

Многие прикладные задачи (математические модели) физики полупроводников, физики плазмы, гидродинамики стратифицированных и фильтрующихся жидкостей, теории «ползучести» элементов конструкции и т. д. приводят к неклассическим начально-краевым задачам для эволюционных уравнений в частных производных псевдопараболического типа вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(A(u)\big)+B(u)=0,$$

где $A(u)$ и $B(u)$ – это эллиптические операторы, вообще говоря, нелинейные. А также, задача Коши с физической точки зрения возникает в результате быстро протекающего лазерного облучения полупроводника [1]. Такие уравнения в литературе называется уравнениями соболевского типа.

В предлагаемой работе рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(u^2/2)_x+u^3=0,\ (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,t)=u_0(x,t),\quad t=0,\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\Gamma=\partial\overline{\Omega},\quad t\in(0,T]. \tag{3}$$

Здесь $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma,\quad \Omega=\{0<x<l\},\quad \Gamma=\{0,l\},\quad Q_T=\{(x,t):\ x\in\Omega,\ \ t\in(0,T]\}$. Данная задача описывает нестационарные процессы в полупроводниках при наличии источников и внешнего постоянного однородного электрического поля [1]. Уравнение (1) называется уравнением Осколькова-Бенджамена-Бона-Махони-Бюргерса с кубическим источником. Кроме краевых условий (3), можно рассматривать и другие краевые условия, в том числе нелокальные.

Аппроксимация задачи (1)-(3) на первом этапе осуществляется методом прямых, т.е. аппроксимируются только пространственные переменные методом конечных разностей [2]. В результате получаем абстрактную задачу Коши вида

$$D\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(u),\ t \in (0,T],\ u(0) = u_0, \qquad (4)$$

где $u \in \overset{\circ}{H}$ – пространство дискретных функции обращающихся в нуль на границах, D, A – матрицы получающихся при аппроксимации операторов Лапласа $\Delta u - u$ и Δu соответственно:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad D = A - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(u) = f_1(u) + f_2(u),\ f_1(u) = -(u_{i+1}^2 - u_{i-1}^2)/(4h),\ f_2(u) = -u^3$$

Далее для дискретизации полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяются следующая схемы метода конечных элементов четвертого порядков аппроксимации полученной с помощью кубического эрмитового сплайна [3]:

$$Dy_t - \gamma A\dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1,\ \gamma D\dot{y}_t + \alpha Ay_t - \beta A\dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \qquad (4)$$

где $\varphi_1 = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)dt$, $\varphi_2 = \frac{1}{\tau\gamma}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)(s_1\vartheta_2^{(1)} + s_2\vartheta_2^{(3)})dt,$ $s_1 = 15\gamma - 35\alpha/3,$ $s_2 = 140\gamma - 350\alpha/3$, $\vartheta_2^{(1)} = 1/2$, $\vartheta_2^{(3)} = \tau\xi(1-\xi)(\xi - 1/2)$, $\xi = (t - t_n)/\tau$.

Здесь $f(y) = f_1(y) + f_2(y)$, $f_1(y) = -[(y_{i+1}^n)^2 - (y_{i-1}^n)^2]/(4h)$, а для вычисления $f_2(y)$ используется специальное усреднение Стеклова [4], т.е.

$$f_2(y) = -\left(\frac{1}{y_i^{n+1} - y_{i-1}^n}\int\limits_{y_{i-1}^n}^{y_i^{n+1}} \frac{dy}{y^3}\right)^{-1}.$$

Начальные условия для схемы (4) задаются следующим образом:

$$y^0 = u_{0,h}, \; \dot{y}^0 = D^{-1}(f_h^0 - Au_{0,h}). \qquad (5)$$

Для вычисления интегралов в правой части (4) могут быть использована формула Эйлера-Маклорена, основанной на правиле трапеции [5].

Далее в работе доказана сходимость схемы (4), (5) к решению исходной задачи(1)-(3) со вторым порядком по шагу дискретизации пространственной переменной и четвертым по времени при выполнении условий на операторы и параметры схемы:

$$\alpha + \beta = \gamma, \; \gamma = \tau^2/12, \; \alpha, \beta = O(\tau^2), \quad A = A^* > 0, \; D \geq \tau A/2.$$

Разработан алгоритм реализации метода, проведено тестирование и сравнение с конечно-разностными методами различной точности, в частности схемой метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Результаты вычислительного эксперимента, приведенные в виде визуализации и таблиц, подтверждают эффективность предложенного метода. Исследования данной работы с успехом может быть применены для решения аналогичных многомерных нелинейных псевдопараболических уравнений.

Использованные литературы

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. – 616 с.
3. Москальков М.Н., Утебаев Д. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. Ташкент: Фан ва технология, 2012. – 160 с.
4. Матус П.П., Утебаев Б.Д. Монотонные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности для уравнения переноса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022, том 62, № 3, с. 367-380.
5. Калиткин Н.Н. Квадратуры Эйлера-Маклорена высоких порядков // Математическое моделирование. 2004, том 16, № 10, с. 64-66.