

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МАЛОЙ КАПЛИ ПО СМАЧИВАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

Авдейчик Е. В., Конон П. Н.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Движению капель и ривулетов по твердой плоской поверхности посвящено большое количество теоретических [1–3] и экспериментальных [4–7] работ. При этом полное моделирование течения внутри перемещающегося ограниченного слоя является достаточно сложной задачей, ввиду чего, как правило, вводятся различные упрощения. Например, можно избежать необходимости решать уравнения Навье-Стокса для определения движения жидкости в капле и перейти непосредственно к уравнению свободной поверхности, если предположить, что жидкий слой является тонким [1, 2]. Основную сложность при таком моделировании составляет выбор способа определения динамического краевого угла смачивания. Множество работ посвящено данной проблеме, в частности, в статье [8] произведен обзор различных моделей краевого угла и предложена собственная, а работы [9], [10] содержат эмпирическое исследование динамического угла смачивания конкретно между водой и парафином. В работе [1] использовано граничное условие скольжения Навье. Однако при переменных внешних условиях решение задачи о движении капли даже в упрощенной постановке требует значительных вычислительных мощностей. Причем для большинства прикладных целей является излишней достигаемая при этом точность, которая к тому же зависит от правильного подбора теории для определения динамического краевого угла, что и в настоящее время является предметом дискуссии. К таким инженерным задачам можно отнести, например, различные производственные процессы, осуществляемые центробежно-дисковым способом. В связи с этим в данной работе предлагается более простая модель движения малой капли по смачиваемой плоской вращающейся поверхности. Случай движения при отсутствии смачивания описан, например, в работе [3]. Новая модель может быть применена и к такой задаче путем выбора определенных значений входных параметров.

Постановка задачи и вывод уравнений движения. Рассматривается движение капли по горизонтальной плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω . Капля имеет малый объем, то есть ее характеристический размер намного меньше расстояния, которое ее центр масс C преодолевает в рассматриваемый промежуток времени, а также расстояния до оси вращения на протяжении всего времени движения. В качестве такого характеристического размера примем аппликату z точки C во вращающейся вместе с подложкой декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой соответствует поверхности диска, а начало координат O лежит на оси его вращения. Координаты x и y – это соответственно абсцисса и ордината точки C капли, или координаты проекции B этой точки на поверхность основания в системе Oxy . В следствие малости массы капли и горизонтального расположения подложки будем считать незначительным вклад силы тяжести в характеристики ее формы и движения.

Капля скользит по смачиваемой поверхности и оставляет на ней след, ввиду чего постепенно теряет вещество. Данный след будем рассматривать не как часть капли, а как отделившуюся массу. Вблизи капли он представляет собой слой жидкости малой толщины $h \ll z$. Будем полагать, что продольный и поперечный размеры проекции ка-

пли на плоскость Oxy имеют тот же порядок, что и характеристический размер z , который будем называть условным радиусом капли.

Введем следующие обозначения:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = w, \quad V_B = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (1)$$

где u, v, w – компоненты относительной скорости центра масс C во вращающейся системе координат $Oxyz$, V_B – величина скорости движения точки B в этой системе. Здесь и далее точка обозначает производную по времени t , если не указано иное. Обозначим (ξ, η) координаты в системе Oxy точки A – геометрического центра проекции капли на диск. Пусть δ – длина отрезка AB , θ – угол между положительным направлением Ox и вектором AB , отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного значения z . Тогда:

$$\delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad c = \delta^{-1}(x - \xi) = \cos \theta, \quad s = \delta^{-1}(y - \eta) = \sin \theta. \quad (2)$$

Для упрощения задачи будем описывать форму капли единственным параметром δ / z , который представляет собой тангенс угла ACB . Таким образом, в рассматриваемой постановке капля имеет только две независимые характеристики размера: δ и z . При этом будем полагать, что существуют безразмерный положительный параметр P_0 и безразмерный параметр P_1 ($0 < P_1 < 1$) такие, что если $\delta \leq P_0 z$ и точка B приближается к точке A или $\delta \leq P_0 P_1 z$, то точка A остается на месте, поскольку поверхностное натяжение следа уравнивается поверхностными силами капли. Данное допущение обуславливает возможность остановки точки A , а затем и капли в целом, при δ / z меньшем, чем предельное значение $P_0 P_1$, а также запрещает точке A опережать точку B при движении относительно поверхности диска. Кроме того, это вводит понятие предельной формы $\delta = P_0 P_1 z$, до достижения которой изначально покоящаяся капля не начинает скольжение по поверхности, что согласуется с опытными данными. Если $\delta = P_0 z$ и точка B стремится удалиться от точки A , то будем считать, что равенство $\delta = P_0 z$ сохраняется, а точка A движется по направлению (c, s) к точке B с необходимой для этого скоростью за счет преобладания сил поверхностного натяжения в капле над поверхностными силами следа. При этом неравенство $\delta > P_0 z$ не достигается ни при каких условиях, то есть форма капли не может быть сильно вытянутой, что также имеет эмпирическое основание. При $P_0 P_1 z < \delta < P_0 z$ и движении B в направлении от A точка A также движется по направлению (c, s) , однако со скоростью, недостаточной для сохранения параметра δ / z постоянным. P_0 и P_1 в общем случае могут зависеть от характера течения внутри капли и от ее формы. На протяжении почти всего пути, за исключением начала и конца, выполняется $\delta = P_0 z$ и величина P_0 определяет форму капли. В рассматриваемой задаче примем P_0 и P_1 постоянными. Данные допущения могут быть выражены следующими уравнениями:

$$\text{Если } cu + sv \leq 0 \text{ или } \delta \leq P_0 P_1 z, \text{ то } \dot{\xi} = \dot{\eta} = 0, \quad \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = V_A = 0; \quad (3.1)$$

$$\text{если } cu + sv > 0 \text{ и } \delta = P_0 z, \text{ то } \dot{\xi} = cV_A, \quad \dot{\eta} = sV_A, \quad \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = V_A = cu + sv - P_0 w, \quad (3.2)$$

где V_A – модуль скорости точки A относительно поверхности диска. При $cu + sv > 0$ и $P_0 P_1 z < \delta < P_0 z$ зависимость V_A от $cu + sv$ полагается линейной с такими коэффициентами, чтобы функция $V_A(cu + sv, \delta)$ была непрерывной. Можно отметить, что на участ-

ках движения капли, где радиус кривизны ее траектории намного больше z , вектор (c, s) указывает примерное направление скорости точки B .

Пусть практически на всем рассматриваемом промежутке времени скорости движения боковых и заднего фронтов следа за счет стягивания под действием поверхностного натяжения малы в сравнении со скоростью V_A в достаточной мере, чтобы было допустимо ими пренебречь и считать, что ширина следа пропорциональна z , а масса, теряемая каплей на единице пройденного ей пути, не зависит от скорости точки A . Также будем полагать, что поперечное сечение следа вблизи капли в различные моменты времени имеет примерно одинаковую форму, значит, $h/z = \text{const}$. Тогда будем описывать массу капли m и ее изменение следующими формулами:

$$m = \rho z^3 f_m, \quad \dot{m} = -\rho h z f_t V_A, \quad h = f_h z, \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости, f_m, f_t – безразмерные параметры, не являющиеся малыми или очень большими значениями, f_h – малый постоянный безразмерный параметр.

Пограничный слой в капле будем считать достаточно тонким в сравнении с z , при этом его толщина должна оставаться значительно больше высоты возможных неровностей подложки. Параметры p и q определим следующим образом:

$$u_r = u - zq, \quad v_r = v + zp, \quad V_r = \sqrt{u_r^2 + v_r^2}, \quad (5)$$

где u_r и v_r – проекции скорости жидкости относительно поверхности диска непосредственно над пограничным слоем на оси Ox и Oy соответственно, V_r – величина этой скорости. То есть. Вектор (p, q) в системе координат Oxy представляет собой аналог угловой скорости массы в капле, если бы жидкость внутри двигалась как твердое шарообразное тело S , катящееся с проскальзыванием по диску. В предлагаемом упрощении рассматривается подобная модель, отличающаяся тем, что тело S , представляющее основную часть капли, может не являться твердым шаром, а центр масс C тела S притягивается по некоторому закону к точке A , что соответствует тормозящему действию силы поверхностного натяжения. Таким образом, параметры p и q являются единственными рассматриваемыми характеристиками течения жидкости внутри капли. Вектор (p, q) будем называть условной угловой скоростью капли. Кинетический момент K капли относительно точки C будем определять по формуле:

$$(K_x, K_y) = \rho f_k z^5 (p, q), \quad (6)$$

где K_x, K_y – соответственно проекции на оси Ox и Oy кинетического момента K , f_k – безразмерный параметр. Если рассматривать тело S как абсолютно твердый шар, то значения f_m и f_k принимают конкретные значения $f_m = 4\pi/3$, $f_k = 8\pi/15$. Однако в более общем случае эти коэффициенты отличаются и могут изменяться в процессе движения капли.

Будем полагать, что на тело S действует только две внешние силы, имеющие ненулевые проекции на плоскость Oxy : равнодействующая сил поверхностного натяжения $F_\sigma = (F_{\sigma x}, F_{\sigma y}, F_{\sigma z})$, приложенная к C по направлению CA , и равнодействующая сил вязкого трения о поверхность диска $F_\mu = (F_{\mu x}, F_{\mu y}, 0)$, приложенная к B . Пусть горизонтальные компоненты данных сил определяются формулами:

$$(F_{\sigma x}, F_{\sigma y}) = -\sigma f_\sigma (x - \xi, y - \eta), \quad (7)$$

$$(F_{\mu x}, F_{\mu y}) = -zf_{\mu} \sqrt{\rho \mu z V_r} (u_r, v_r), \quad (8)$$

где f_{σ}, f_{μ} – безразмерные параметры. Формула (7) получена на основе анализа размерности с учетом введенных допущений, формула (8) – из оценки силы сопротивления пластины при ламинарном обтекании и предположения тонкого пограничного слоя. При этом его толщина предполагается пропорциональной $(\mu z / (\rho V_r))^{1/2}$ [11], следовательно последнее предположение допустимо при достаточно маленькой вязкости и достаточно большой скорости V_r на протяжении основной части движения. Сила F_{σ} не дает момента относительно точки C , сила F_{μ} создает относительно этой точки момент $M_{\mu} = (M_{\mu x}, M_{\mu y}, 0)$, где:

$$M_{\mu x} = zF_{\mu y}, \quad M_{\mu y} = -zF_{\mu x}. \quad (9)$$

В модели также будем учитывать аналог момента трения качения, возникающий за счет перепада давления у поверхности диска. Пусть он определяется по формуле:

$$\vec{M}_p = (M_{px}, M_{py}, 0) = -\rho z^5 f_p \alpha (p, q, 0), \quad \alpha = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (10)$$

где f_p – безразмерный параметр, α – величина вектора условной угловой скорости капли. В виду малости капли пренебрежем возможными моментами сил инерции. Уравнения движения капли в относительной системе координат получаются из теоремы об изменении количества движения системы (11) и теоремы об изменении кинетического момента системы (12) [12]:

$$m(\dot{u} - 2\omega v - \omega^2 x) + \dot{m}u = F_{\mu x} + F_{\sigma x}, \quad m(\dot{v} + 2\omega u - \omega^2 y) + \dot{m}v = F_{\mu y} + F_{\sigma y}, \quad (11)$$

$$\dot{K}_x - \omega K_y + \dot{m}z v = M_{\mu x} + M_{px}, \quad \dot{K}_y + \omega K_x - \dot{m}z u = M_{\mu y} + M_{py}. \quad (12)$$

Параметры $f_m, f_t, f_k, f_{\sigma}, f_{\mu}, f_p$ в общем случае могут зависеть от характеристик течения в капле, ее скорости, размера и формы. В рамках рассматриваемой модели примем все эти параметры постоянными и определяемыми, как и f_h , только свойствами взаимодействующих фаз. Таким образом, для конкретных веществ и характеристик поверхности подложки данные параметры следует определять экспериментально, что требует дополнительного эмпирического исследования в данной области. Из введенных предположений о постоянстве коэффициентов f_m, f_t и f_h , а также из (3.2, 4) следует, что при достаточно большой скорости движения капли ширина ее следа будет уменьшаться примерно по линейной зависимости от пройденного точкой A пути. Данное утверждение уже является простым для опытной проверки. В частности, оно достаточно точно описывает движение капли воды по деревянной поверхности. Пусть R – некоторое характеристическое расстояние. Определим следующие безразмерные параметры:

$$P_2 = \frac{f_t f_h}{3f_m}, \quad P_3 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho \omega}} \frac{f_{\mu}}{f_m R}, \quad P_4 = \frac{f_{\sigma} \sigma}{f_m R^3 \omega^2 \rho}, \quad P_5 = \frac{f_m}{f_k}, \quad P_6 = \frac{f_p}{f_k}, \quad (13)$$

где P_2 – малый параметр, характеризующий скорость потери массы; P_3, P_4, P_5, P_6 описывают степени влияния на движение капли сил вязкого трения и поверхностного натяжения, соотношение инерционных характеристик и вклад внутреннего перепада давления соответственно. В рассматриваемой задаче параметры P_3, P_4 также принимаются

малыми. Пусть H – значение z в начальный момент времени $t = 0$, так что $z(0) = H$. Если $P_2 = 0$, то есть след не образуется и капля имеет постоянную массу, то в качестве R можно выбрать, например, радиус диска, если он известен, или расстояние до оси вращения в начальный момент, значит, $x^2(0) + y^2(0) = R^2$, или, если движение исследуется на известном промежутке времени T , то $R = (x^2(0) + y^2(0))^{1/2} \text{Exp}(T\omega)$. Если $P_2 > 0$ и движение капли исследуется на всем времени ее существования, то можно принять $R = H / P_2$. Перейдем к безразмерным величинам в соответствии со следующими соотношениями:

$$t = \omega^{-1}t_0, \quad x = Rx_0, \quad y = Ry_0, \quad z = Rz_0, \quad \xi = R\xi_0, \quad \eta = R\eta_0, \quad p = \omega p_0, \quad q = \omega q_0. \quad (14)$$

Пусть тогда:

$$u = \omega Ru_0, \quad v = \omega Rv_0, \quad V_A = \omega RV_{A0}, \quad V_B = \omega RV_{B0}, \quad x_0 - \xi_0 = \Phi_0 z_0, \quad y_0 - \eta_0 = \Psi_0 z_0, \quad (15)$$

$$u_{r0} = u_0 - z_0 q_0, \quad v_{r0} = v_0 + z_0 p_0, \quad V_{r0} = \sqrt{u_{r0}^2 + v_{r0}^2}, \quad \alpha_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}. \quad (16)$$

Введем для упрощения записи следующие обозначения:

$$\beta_0 = \Phi_0 u_0 + \Psi_0 v_0, \quad \vartheta_0 = \sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2}, \quad \lambda_0 = \frac{\beta_0 \chi(\beta_0) (\vartheta_0 - P_0 P_1) \chi(\vartheta_0 - P_0 P_1)}{P_0^2 (1 - P_0 P_2) (1 - P_1)}, \quad (17)$$

где χ – функция Хевисайда, то есть $\chi(\varepsilon) = [\varepsilon \geq 0]$, где $[]$ – скобка Айверсона. Тогда из (1–17) получим итоговую систему дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \dot{t}_0 &= z_0^{5/2}, \quad \dot{x}_0 = z_0^{5/2} u_0, \quad \dot{y}_0 = z_0^{5/2} v_0, \quad \dot{z}_0 = -P_2 z_0^{5/2} \lambda_0, \\ \dot{\Phi}_0 &= z_0^{3/2} (u_0 - P_0^{-1} (1 - P_0 P_2) \lambda_0 \Phi_0), \quad \dot{\Psi}_0 = z_0^{3/2} (v_0 - P_0^{-1} (1 - P_0 P_2) \lambda_0 \Psi_0), \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\dot{u}_0 = z_0^{5/2} (2v_0 + x_0) + 3P_2 z_0^{3/2} \lambda_0 u_0 - P_3 z_0 V_{r0}^{1/2} u_{r0} - P_4 z_0^{1/2} \Phi_0, \quad (18.2)$$

$$\dot{v}_0 = z_0^{5/2} (-2u_0 + y_0) + 3P_2 z_0^{3/2} \lambda_0 v_0 - P_3 z_0 V_{r0}^{1/2} v_{r0} - P_4 z_0^{1/2} \Psi_0,$$

$$\dot{p}_0 = z_0^{5/2} (q_0 - P_6 \alpha_0 p_0) + (5z_0^{3/2} p_0 + 3P_5 z_0^{1/2} v_0) P_2 \lambda_0 - P_5 P_3 V_{r0}^{1/2} v_{r0}, \quad (18.3)$$

$$\dot{q}_0 = -z_0^{5/2} (p_0 + P_6 \alpha_0 q_0) + (5z_0^{3/2} q_0 - 3P_5 z_0^{1/2} u_0) P_2 \lambda_0 + P_5 P_3 V_{r0}^{1/2} u_{r0}.$$

где точка означает производную по условному безразмерному времени t_0 , растягивающему по мере уменьшения радиуса капли действительное безразмерное время t_0 по закону, описанному первым дифференциальным уравнением системы (18). В (17, 18) отсутствует явная запись условия $\delta \leq P_0 z$, или $\vartheta_0 \leq P_0$, однако оно достигается автоматически при решении (16–18). Начальные условия при моделировании будем выбирать следующим образом:

$$\begin{aligned} t_0(0) &= 0, \quad x_0(0) = 0, \quad y_0(0) = Y_0, \quad z_0(0) = H_0 = H/R, \quad \Phi_0(0) = 0, \quad \Psi_0(0) = 0, \\ u_0(0) &= Y_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0(0) = 0, \quad q_0(0) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где Y_0 – начальное безразмерное расстояние от капли до оси вращения. В данной постановке направление оси Oy выбрано по вектору OB в начальный момент времени. Считается, что диск перешел от покоя к вращению с заданной угловой скоростью ω в

момент $t = 0$ резко, так что капля не успела изменить форму по сравнению с состоянием равновесия в отсутствие сил и точки A и B совпадают в начальный момент времени. Центр масс C капли, как и практически весь ее объем, за исключением тонкого пограничного слоя у поверхности подложки, в начальный момент времени остался неподвижен в абсолютной системе координат.

Результаты моделирования и анализ уравнений движения.

На рисунках 1–2 представлены траектории движения точки A (рисунок 1, a) в безразмерной вращающейся системе координат (ξ_0, η_0) , а также графики зависимостей от безразмерного времени t_0 безразмерных условного радиуса z_0 (рисунок 1, b), скорости V_{A0} точки A (рисунок 2, a) и условной угловой скорости α_0 (рисунок 2, b). На всех рисунках сплошным черным графикам соответствуют $Y_0 = 0,5$, $H_0 = 0,01$, $P_0 = 1$, $P_1 = 0,5$, $P_2 = 0,008$, $P_3 = 0,002$, $P_4 = 0,00002$, $P_5 = 2$, $P_6 = 0,5$. Остальные графики демонстрируют эффект от уменьшения одного из параметров при неизменных значениях остальных входных данных. Так, красным штриховым линиям с коротким штрихом соответствует значение $P_2 = 0,006$, черным штрихпунктирным линиям с одной точкой – $P_3 = 0,001$, черным пунктирным – $P_4 = 0,0000125$, синим штрихпунктирным с двумя точками – $P_5 = 0,5$, черным штриховым графикам с длинным штрихом – $P_6 = 0,1$.

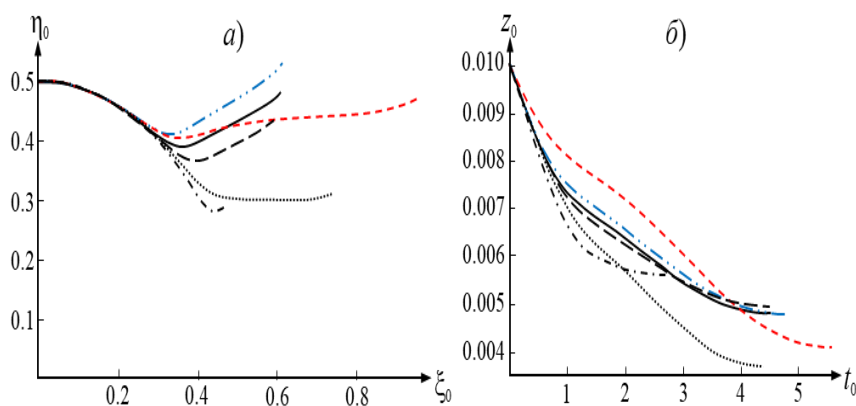


Рис. 1. Траектории движения (a) и графики изменения размеров (b) капель

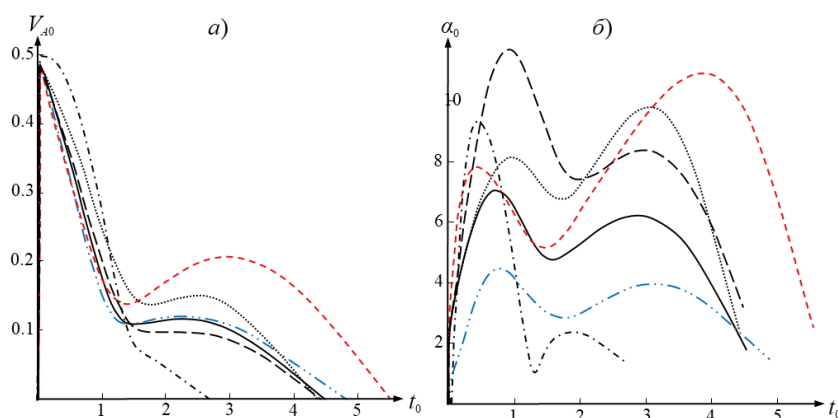


Рис. 2. Графики изменения скоростей (a) и условных угловых скоростей (b) капель

Проанализировав систему (16–19) и результаты моделирования на ее основе при различных входных параметрах, можно сделать ряд общих выводов, позволяющих дать

качественное описание движения капли. Оно может быть условно разделено на два основных этапа, во время первого из которых доминирует окружная компонента скорости, то есть расстояние OA меняется слабо по отношению к первоначальному значению, а во время второго – возрастает вклад радиальной компоненты и капля начинает удаляться от оси вращения. Обозначим эти этапы I и II соответственно. Этап I может быть также разделен на периоды Ia , Ib и Ic , сменяющие друг друга в порядке перечисления. На протяжении почти всего пути капли условная угловая скорость достаточно мала, чтобы в приближенном анализе системы (18) при оценке вязких сил можно было заменить u_{r0} и v_{r0} на u_0 и v_0 соответственно. Также при приближенном описании изменения скорости точки A можно полагать ее примерно равной скорости точки B почти на всем времени движения, кроме малых периодов разгона и остановки капли. Первые два периода Ia , Ib очень короткие и определяются неравенствами $\delta \leq P_0 P_1 z$ и $P_0 P_1 z < \delta < 0,99 P_0 z$ соответственно. Вся остальная часть этапа I относится к периоду Ic . Периоду Ia соответствуют значения $V_{A0} = 0$, $z_0 = 0$, быстрый рост безразмерной условной угловой скорости капли α_0 за счет доминирующей силы вязкого трения, а также падение скорости V_{B0} из-за силы трения и поверхностного натяжения. За время периода Ib скорость V_{A0} возрастает примерно до значения Y_0 , безразмерный условный радиус капли z_0 начинает постепенно уменьшаться за счет образования следа, рост α_0 замедляется, а в некоторых случаях может смениться уменьшением. Периоду Ic на графиках $V_{A0}(t_0)$ преимущественно соответствует быстрое падение скорости, на графиках $\alpha_0(t_0)$ – первый пик. В это время в уравнениях (18.2), характеризующих изменение скорости движения капли, по мере уменьшения z_0 начинают доминировать тормозящие силы вязкого трения и поверхностного натяжения, поскольку им соответствуют наименьшие показатели степеней z_0 . Поэтому скорость капли также начинает стремительно снижаться. Вязкие силы, способствующие росту α_0 уменьшаются за счет падения скорости капли, но их вклад растет по мере уменьшения z_0 , как можно видеть из (18.3). Противодействие этих двух эффектов и приводит к первому пику на графиках функции $\alpha_0(t_0)$. При достаточно малых P_4 наступает момент, когда в уравнениях (18.2) резко возрастет роль центробежных сил, описанных в (18.2) слагаемыми $z_0^{5/2} x_0$ и $z_0^{5/2} y_0$, после чего происходит переход к этапу II. Если капля сохранила достаточно массы, то начинается вторичный разгон, что отражается в увеличении V_{A0} , V_{B0} и α_0 . В этом случае в их графиках образуются вторые пики. Для V_{A0} , V_{B0} они намного меньше максимальных значений за время движения, поскольку из-за быстрого уменьшения z_0 слагаемые $z_0^{5/2} x_0$ и $z_0^{5/2} y_0$ в (18.2) не могут начать доминировать над тормозящими силами, представленными двумя последними слагаемыми в правой части уравнений (18.2).

Моделирование при различных значениях P_1 в диапазоне от 0,1 до 0,9 показало, что изменение этого параметра почти не влияет на характер движения, поэтому предлагается принять, например, $P_1 = 0,5$ для модели (16–19) в целом. Влияние параметра P_0 главным образом заключается в том, что слагаемые, соответствующие поверхностному натяжению, в правой части уравнений (18.2) пропорциональны ему. Остальные эффекты от изменения P_0 почти полностью сглаживаются подбором P_4 таким образом, чтобы произведение $P_0 P_4$ осталось неизменным. Таким образом, для описываемого класса задач удобно взять $P_0 = 1$, что избавит от необходимости проводить дополнительные эксперименты по определению этого параметра.

Рассмотрим движение капли при двух различных наборах входных параметров. Пусть при этом значения H_0 и $P_0 P_4$ для этих двух случаев неизменны, этап I длится примерно одинаковое время, а скорость капли при первом наборе входных значений на данном этапе преимущественно превышает скорость капли при втором наборе. Тогда из-за более быстрой потери массы в первом случае на этапе II возрастает роль сил сопротивления в уравнениях (18.2), что приводит к тому, что более быстрая на этапе I ка-

пля имеет меньшую скорость на этапе II. В частности, увеличение P_2 (реактивных сил) или Y_0 (начальной скорости и центробежных сил) и уменьшение P_3 (вязких сил), согласно виду (18.2), приводят к в среднем большей скорости на начальном этапе движения и, соответственно, меньшей скорости в дальнейшем. Параметр P_6 характеризует сопротивление вращению жидкости внутри капли. Уменьшение данного параметра ускоряет это вращение, обеспечивая большую разницу между V_{B0} и V_{r0} , что при изначально равных V_{B0} уменьшает V_{r0} , а значит, и трение о подложку, что ведет к большей скорости V_{B0} и V_{A0} на этапе I и меньшей – на этапе II. Как было отмечено ранее, на промежутке времени Ia в уравнениях (18.3) решающую роль играют слагаемые, отвечающие за вязкое трение, а значит, параметры P_3 и P_5 . Увеличение любого из них приводит к большей безразмерной условной угловой скорости α_0 и уменьшению V_{r0} . Увеличение только P_3 не приводит к уменьшению вязких сил в (18.2), поскольку в соответствующие слагаемые входят как V_{r0} , так и P_3 , причем вклад последнего существеннее. Увеличение только P_5 в свою очередь уже вызывает уменьшение вязких сил в (18.2) и, соответственно, увеличение скорости на этапе I, что ведет к уменьшению на этапе II. Поскольку P_0P_4 характеризует сопротивление за счет сил поверхностного натяжения, а соответствующее слагаемое в уравнениях (18.2) имеет самый маленький показатель степени z_0 , то увеличение P_0P_4 ведет к преимущественному уменьшению скорости на всем рассматриваемом промежутке времени, а не только на этапе I.

При уменьшении начального безразмерного условного радиуса H_0 , а значит, и z_0 как минимум в начале движения, в уравнениях (18.2) увеличивается вклад сил сопротивления, что ведет к преимущественно меньшей скорости капли во все время движения. Также стоит отметить, что изменение H_0 и Y_0 можно свести к изменению других параметров. Пусть $t_0 = t_{00}$, $x_0 = x_{00}$, $y_0 = y_{00}$, $z_0 = z_{00}$, $\Phi_0 = \Phi_{00}$, $\Psi_0 = \Psi_{00}$, $u_0 = u_{00}$, $v_0 = v_{00}$, $p_0 = p_{00}$, $q_0 = q_{00}$ – решение системы (16–19) при начальных условиях $Y_0 = Y_{00}$, $H_0 = H_{00}$ и значениях определяющих параметров $P_i = P_{i0}$ ($i = 0, \dots, 6$), а $t_0 = t_{01}$, $x_0 = x_{01}$, $y_0 = y_{01}$, $z_0 = z_{01}$, $\Phi_0 = \Phi_{01}$, $\Psi_0 = \Psi_{01}$, $u_0 = u_{01}$, $v_0 = v_{01}$, $p_0 = p_{01}$, $q_0 = q_{01}$ – решение системы (16–19) при $Y_0 = Y_{01}$, $H_0 = H_{01}$ и $P_i = P_{i1}$. Тогда, если параметры P_i для двух случаев связаны соотношениями (20), то решения удовлетворяют (21).

$$P_{00} = H_{01}H_{00}^{-1}P_{01}, P_{10} = P_{11}, P_{20} = H_{00}H_{01}^{-1}P_{21}, P_{30} = H_{00}^{3/2}Y_{01}^{1/2}H_{01}^{-3/2}Y_{00}^{-1/2}P_{31}, \quad (20)$$

$$P_{40} = H_{00}^3Y_{00}H_{01}^{-3}Y_{01}^{-1}P_{41}, P_{50} = P_{51}, P_{60} = H_{00}Y_{01}H_{01}^{-1}Y_{00}^{-1}P_{61}.$$

$$\tau_{00} = H_{01}^{5/2}H_{00}^{-5/2}\tau_{01}, (x_{00}, y_{00}, u_{00}, v_{00}) = Y_{00}Y_{01}^{-1}(x_{01}, y_{01}, u_{01}, v_{01}), z_{00} = H_{00}H_{01}^{-1}z_{01}, \quad (21)$$

$$(\Phi_{00}, \Psi_{00}) = H_{01}H_{00}^{-1}(\Phi_{01}, \Psi_{01}), (p_{00}, q_{00}) = H_{01}H_{00}^{-1}Y_{00}Y_{01}^{-1}(p_{01}, q_{01}).$$

Отсюда следует, что можно определить, например, $Y_0 = 0,5$, $H_0 = 0,01$, а при отличающихся начальных условиях переходить к данным значениям, используя формулы (20), (21). Таким образом, в рассматриваемой задаче остается только пять ключевых параметров (13) из девяти введенных.

Заключение.

На основе вводимых допущений и метрических соображений получена, приведена к безразмерному виду и исследована численно и теоретически система обыкновенных дифференциальных уравнений движения малой капли по вращающейся плоской горизонтальной смачиваемой поверхности. Проанализировано влияние на характер движения в безразмерном виде девяти введенных определяющих параметров, в результате чего из них выделено пять ключевых характеристик. Данная модель может быть использована в производстве волокон и порошков и при нанесении смазок и покрытий центробежно-дисковым способом для определения соответственно диаметров образующихся частиц и нитей и распределения толщины пленки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belinov, E. S. A thin drop sliding down an inclined plate / E. S. Belinov, M.S. Belinov // *Journal of Fluid Mechanics*. – Cambridge University Press, 2015. – Vol. 773. – P. 75–102. – doi: 10.1017/jfm.2015.226.
2. Schwartz, L. W. On the shapes of droplets that are sliding on a vertical wall / L. W. Schwartz, D. Roux, J. J. Cooper-White // *Physica D Nonlinear Phenomena*. – 2005. – Vol. 209, No. 1. – P. 236–244. – doi: 10.1016/j.physd.2005.07.001.
3. Абрамович А. Е. Приближенная модель движения фронта жидкого слоя на вращающемся диске / А. Е. Абрамович, Е. В. Авдейчик, П. Н. Конон // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск : БНТУ, 2021. – Вып. 36.
4. Winkels, K. G. Receding contact lines: From sliding drops to immersion lithography / K. G. Winkels, I. R. Peters, F. Evangelista, M. Riepen, A. Daerr, L. Limat, J. H. Snoeijer // *The European Physical Journal Special Topics*, 2011. – Vol. 192. – P. 195–205. – doi: 10.1140/epjst/e2011-01374-6.
5. Bikerman, J. J. Sliding of drops from surfaces of different roughnesses / J. J. Bikerman // *Journal of Colloid Science*. – 1950. – Vol. 5, Issue 4. – P. 349–359.
6. Конон П. Н. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске / П. Н. Конон, А. Е. Кулаго, Г. Н. Сицко, Н. П. Конон // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск : БНТУ, 2016. – Вып. 31. – С. 87–94.
7. Дехтярь Р. А. Переходные режимы течения при гравитационном стекании ривулетов по нижней стороне наклонной пластины / Р. А. Дехтярь, В. Е. Накоряков, В. В. Овчинников, Е. Ю. Слесарева // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. – 2015. – Т. 326, № 8. – С. 102–109.
8. Shikhmurzaev, Y. D. The moving contact line on a smooth solid surface / Y.D. Shikhmurzaev // *International Journal of Multiphase Flow*. – Pergamon Press Ltd, 1993. – Vol. 19, No. 4. – P. 589–610.
9. Yarnold, G. D. The Angle of Contact Between Water and Wax / G. D. Yarnold, B. J. Mason // *Proceedings of the Physical Society Section B*. – 1949. – Vol. 62, No. 2. – P. 125–129. – doi: 10.1088/0370-1301/62/2/306.
10. Ablett, R. An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water / R. Ablett // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6*, 1923. – Vol. 46, Issue 272. – P. 244–256.
11. Ландау Л. Д. Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1987. – 736 с.
12. Вярвьильская О. Н. Теоретическая механика : учеб. Пособие / О. Н. Вярвьильская, Д. Г. Медведев, В. А. Савенков, В. П. Савчук; под редакцией Д. Г. Медведева. – Минск : БГУ, 2006. – 287с. : ил. – 500 экз. – ISBN 985-485-526-0.

Поступила: 31.01.2022