

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКОВ ТУРБИН ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРЕВЕ

Куликов И. С., Ширвель П. И.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Диски турбин авиационных двигателей являются одними из самых нагруженных элементов: внешнее и внутреннее давление, действие центробежных сил и главное – высокотемпературный неравномерный нагрев. Поскольку сегодня мы имеем тенденцию повышения рабочих параметров двигателей и увеличения их ресурса с одновременным уменьшением веса, то при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) дисков необходимо учитывать дополнительные факторы, которые ранее не принимались во внимание. Одним из них является неравномерность температурного поля по периметру диска наряду с неравномерным ее распределением по радиусу. Решение такой задачи даже в предположении упругого деформирования представляет значительные трудности, не говоря уже об учете физически нелинейных эффектов (пластичность и ползучесть). Развитие численных методов и компьютерной техники позволяет перейти к решению такого класса задач. В предположении обобщенной плоской деформации ($\epsilon_{zz} = const$) в качестве примера рассмотрим сплошную цилиндрическую область, нагруженную равномерным давлением $P_{ext}(t)$ и имеющую неравномерное стационарное несимметричное поле температур $T(r, \theta)$ (рисунок 1).

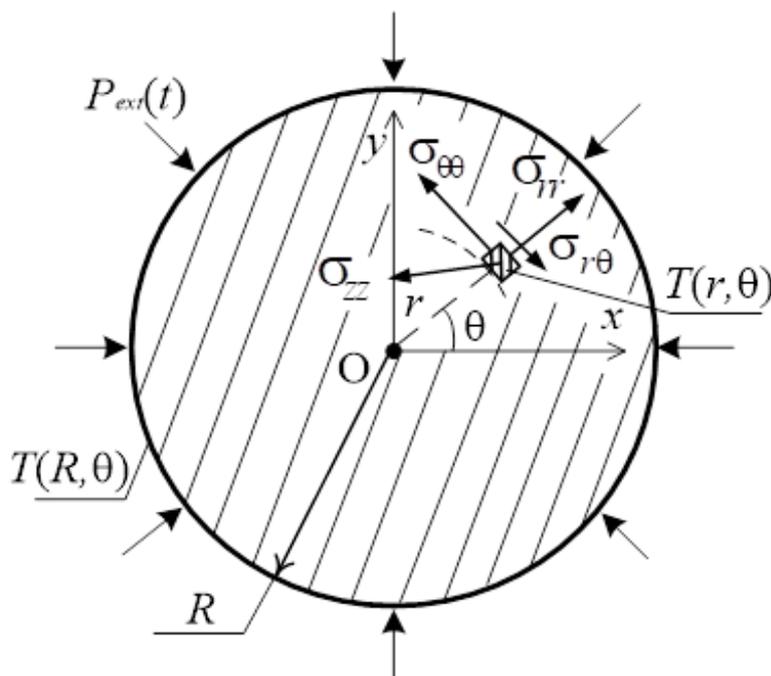


Рис. 1. Общая схема несимметричного НДС

Для решения задачи сделаем следующие предположения:

1. Уровень температур и закон их распределения в указанной плоской области зависят от теплофизических свойств материала и условий теплообмена на поверхности тела. При этом температурное поле в теле определяется либо экспериментально на основе теплового моделирования, либо путем решения задачи теплообмена с окружающей средой, которая сама по себе также является достаточно сложной. Иными словами считаем, что температурное поле в теле при решении задачи известно, т. е. деформации термического расширения могут быть определены в любой точке рассматриваемого тела.

2. Закон ползучести, полученный при одноосных испытаниях, распространяем на сложное напряженно-деформированное состояние (связь между интенсивностью скоростей деформаций ползучести и интенсивностью напряжений).

Таким образом, задача определения несимметричного НДС в данной постановке сводится к нахождению 10 функций: вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций. При этом эти функции должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия, физическим и геометрическим соотношениям, а также граничным условиям.

Задачу можно свести к решению двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для искомых функций перемещений $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$. Эта система уравнений будет иметь следующий вид [1]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{2r^2(1-\mu)} \left((1-2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} - (3-4\mu) \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) = \\ & = \frac{1-2\mu}{(1-\mu)r} \left(\varepsilon_{rr}^c - \varepsilon_{\theta\theta}^c + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^c}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^c}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^c}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{rr}^c}{\partial r} + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial \varepsilon^{th}}{\partial r}; \\ & \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r^2(1-2\mu)} \left(2(1-\mu) \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + (3-4\mu) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \\ & = \frac{4}{r} \varepsilon_{r\theta}^c + 2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^c}{\partial r} - \frac{2}{r(1-2\mu)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^c}{\partial \theta} (\mu-1) - \mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{rr}^c}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^c}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{2(1+\mu)}{r(1-2\mu)} \frac{\partial \varepsilon^{th}}{\partial \theta}, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где ε_{ij}^{th} , ε_{ij}^c – компоненты тензоров неупругих деформаций термического расширения и ползучести соответственно ($i, j = r, \theta, z$); μ – коэффициент Пуассона. Следует отметить, что (1) при отсутствии нагрева и ползучести вырождается в известные соотношения теории упругости и термоупругости [2], что доказывает правильность описания механико-математической модели.

Система уравнений (1) дополняется следующими смешанными граничными условиями:

$$u(0, \theta) = v(0, \theta) = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}(R, \theta) = -P_{ext}(t); \quad \sigma_{r\theta}(R, \theta) = 0. \quad (3)$$

После решения системы уравнений (1) согласно соотношениям Коши и физическим уравнениям можно определить распределение перемещений, напряжений и деформаций во всех точках, включая деформации ползучести, по периметру и радиусу диска с течением времени t , в данном случае являющимся параметром. Данную задачу можно также решать и в напряжениях, если на поверхности тела заданы усилия. В слу-

чае заданных перемещений решение задачи в напряжениях практически невозможно, поскольку такие условия будут содержать интегралы от напряжений и их производные. В некоторых простейших не имеющих практического значения случаях такое возможно путем специальные преобразований. Однако такие преобразования не всегда приводят к конечному результату даже для упругой среды [3].

Система (1) должна быть также замкнута условиями:

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \vartheta(r, \theta)}{\partial \theta} = 0, \theta = 0, \theta^0, \quad (4)$$

где θ^0 может принимать различные значения в зависимости от закона распределения заданной функции температур $T(r, \theta)$ по периметру сечения; $0 \leq \theta \leq \theta^0$ – условие возможной периодичности решения, определяемое периодом функции распределения температур. Расчетная область интегрирования для механико-математической модели квазистатического несимметричного деформирования диска может быть представлена в виде, показанном на рисунке 2.

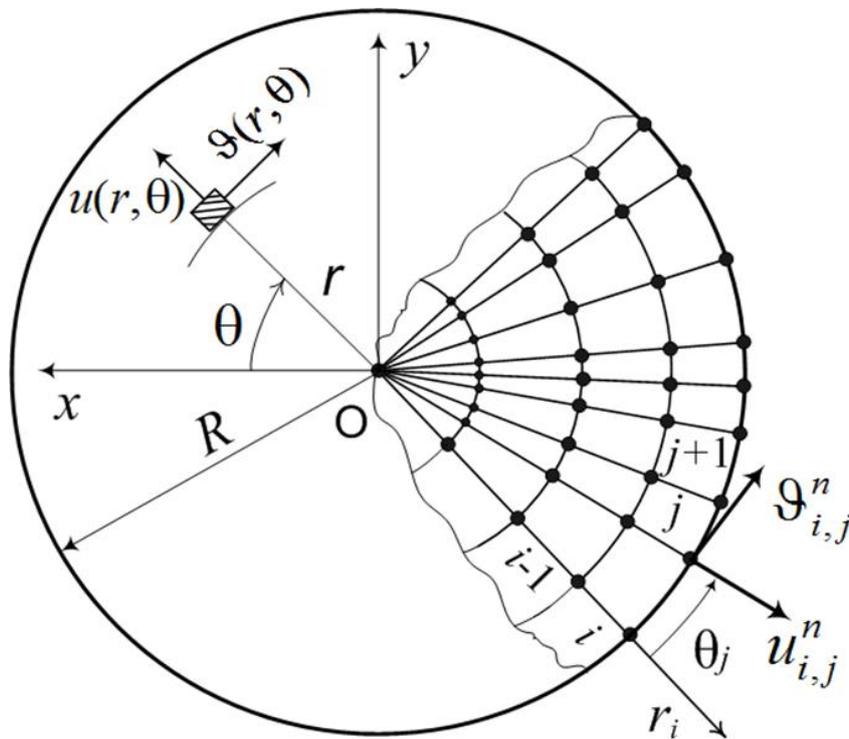


Рис. 2. Расчетная область неосесимметричной задачи

Для реализации численного подхода, в области изменения независимых переменных ($0 \leq \theta \leq \theta^0$, $0 \leq r \leq R$) строилась криволинейная структурированная сетка из линий $\theta = \text{const}$ и $r = \text{const}$, связанная с границами интегрируемой области (рисунок 2). Специальные дифференциальные операторы нелинейной системы аппроксимируем их конечно-разностными аналогами с учетом физических особенностей расчетной области. Для этого отрезок $[0, R]$ разбивается равноотстоящими точками: $r_0 = 0$, $r_k = R$, $r_i = ih_r$, $h_r = R/k$, $i = 0, 1, \dots, k$. Аналогично разобьем отрезок $[0, \theta]$: $\theta_0 = 0$, $\theta_m = \theta^0$; $\theta_i = jh_\theta$, $h_\theta = \theta^0/m$, $j = -1, 0, 1, \dots, m-1$, где h_r и h_θ – шаги сетки в ра-

диальном и окружном направлениях. Заметим, что слой по кольцевой координате $j = -1$ (т. е. плоскость $\theta = -h_\theta$,) является вспомогательным и служит исключительно для аппроксимации граничных условий. Регулярная структура такой сетки в дальнейшем должна позволить организовать эффективную работу с разреженными матрицами при решении систем уравнений, причем матрицы коэффициентов системы будут полнозаполненными. Для получения конечно-разностных уравнений заменим функции непрерывного аргумента u и ϑ их разностными, дискретными эквивалентами.

При построении шаблона использовались неявные разностные схемы с весовыми коэффициентами. В основу предлагаемого численного метода решения полученной разностной системы уравнений на основе заложены метод конечных разностей, метод матричной прогонки, идеи метода дробных шагов Н. Н. Яненко, теория аппроксимации, интерполяции и экстраполяции функции, а также итерационные методы. Окончательно, дискретная система, описывающая общий случай неосесимметричного НДС была представлена в виде:

$$\begin{cases} \chi_{1i} u_{i+1,j+1}^n - (1 + 2\chi_{1i}) u_{i,j+1}^n + \chi_{1,i} u_{i-1,j+1}^n = d_{i,j}^n; \\ \xi_{1i} \vartheta_{i+1,j+1}^n - (1 + 2\xi_{1i}) \vartheta_{i,j+1}^n + \xi_{1i} \vartheta_{i-1,j+1}^n = k_{i,j}^n. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \chi_{1i} &= \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \alpha; \quad \chi_{2i} = \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \beta; \\ \xi_{1i} &= \frac{r_i^2(1-2\mu)}{2(\mu-1)} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \alpha; \quad \xi_{2i} = \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \beta, \end{aligned}$$

где $d_{i,j}^n$, $k_{i,j}^n$ – функции от перемещений на предыдущих слоях по окружной координате $(j, j-1)$:

$$\begin{aligned} d_{i,j}^n &= -2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n(1 - \chi_{2i}\Lambda_2) - F_{1i,j}^n(u_{i,j}, \vartheta_{i,j})H_i, \\ H_i &= 2r_i^2(1-\mu)h_\theta^2/(2\mu-1); \quad k_{i,j}^n = -2\vartheta_{i,j}^n + \vartheta_{i,j-1}^n(1 - \xi_{2i}\Lambda_2) - F_{2i,j}^n(u_{i,j}, \vartheta_{i,j})M_i, \\ M_i &= r_i^2(1-2\mu)h_\theta^2/(2\mu-2); \quad \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Где нелинейные члены F_1 и F_2 определяются по выражениям, представленным в конечно-разностной форме, включающим частные производные от искомых функций и неупругие слагаемые в правой части (1): термическое расширение и деформации ползучести.

Для определения неизвестных функций $u_{i,j+1}$, $\vartheta_{i,j+1}$ на каждом шаге по окружной координате имеем систему уравнений с граничными условиями, которые в общем виде для n -го временного этапа деформирования переписываются в дискретной форме по формулам численного дифференцирования. Причем условия в напряжениях первоначально конвертируются в условия для перемещений через физические уравнения и формулы Коши. Полученные системы разностных уравнений имеют матрицы трехдиагональной структуры и могут быть решены по методу матричной прогонки, на основе модификации разработанной в [1] численной схемы.

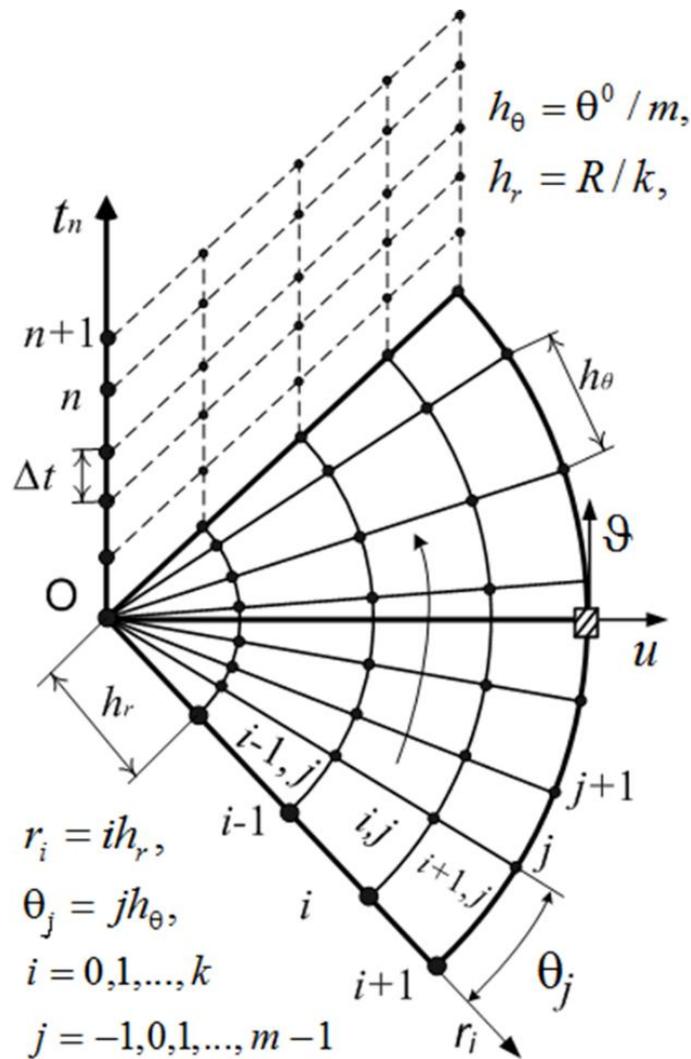


Рис. 3. Численная схема разбиения сечения модели

Так, система (1) расщепляется на две системы, которые решаются прогонками с учетом параметра времени t : первая по радиальному перемещению, а вторая по окружному. Прогонка осуществляется по радиусам, которые для каждого луча начинаются в центре сечения и оканчиваются на границах исследуемой области. Такие прогонки имеют свои особенности, вызванные характером сетки, расчетной областью и видом рассматриваемых физически нелинейных эффектов. По окончании текущего шага расчета в алгоритме, реализующем механико-математическую модель с учетом необратимых деформаций, фиксируются величины, характеризующие НДС каждой точки по периметру модельного тела в конце n -го этапа нагружения, и начинается расчет $(n + 1)$ -го этапа. В результате, для получения решения на следующем $n + 1$ временном слое решается новая система неоднородных линейных уравнений по изложенной выше численной методике. Таким образом, для любого текущего момента времени t_n имеем полную замкнутую систему из $2km$ неоднородных алгебраических уравнений с $2km$ неизвестными. Общая схема численного решения представлена на рисунке 2. Необходимая точность в процессе решения достигается, с одной стороны, измельчением шага криволинейной структурированной сетки в радиальном и окружном направлениях, с другой стороны повышением степени порядка аппроксимации выражений производных в конечных разностях.

Для проведения дальнейших исследований реализован алгоритм расчета несимметричного НДС и компьютерная программа решения $2D(r, \theta)$ задачи ползучести. Программная модель реализована на C# в среде Microsoft Visual Studio 2011 и позволяет обрабатывать и визуализировать результаты расчетов цилиндрических тел (сплошные, полые, многослойные диски и длинные цилиндры) для различных типов граничных условий и видов физической нелинейности. Архитектура программного комплекса является модульной, что дает возможность в дальнейшем добавлять новые функциональные возможности и вносить улучшения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, И. С. О неосесимметричном НДС неравномерно нагретых длинных цилиндрических тел в условиях ползучести и облучения / И. С. Куликов, А. В. Чигарев, П. И. Ширвель // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: в. 2 ч. Ч. 2. – Чебоксары, 2014. – Ч. 2. – С. 5–16.
2. Колтунов М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел / М. А. Колтунов, – М.: Высш. Школа, 1975. – 526 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

Поступила: 16.12.2021