УДК 539.374

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.

«Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева», Российская Федерация

Введение. Софус Ли [1] рассматривая дифференциальные уравнения с геометрической точки зрения, создал теорию непрерывных групп преобразований в 1870–1890 годах. Почти через 100 лет Л. В. Овсяников [2] использовал эту методику для исследования и решения дифференциальных уравнений механики сплошных сред. Основные направления этой методики были сосредоточены на построении точных решений и классификации уравнений по некоторым не фиксированным функциям и параметрам. Большой проблемой этой теории являлось то, что к построенным решениям приходилось подбирать краевые условия, чтобы эти решения описывали некоторые физические задачи. В 1918 году вышла знаменитая статья Э. Нетер [3], в которой было показано, что наличие группы симметрий влечет существование законов сохранения. Правда, это распространялось только на дифференциальные уравнения, выводимые из вариационных принципов. Развивая геометрический подход к дифференциальным уравнениям в 80-х года прошлого столетия А. М. Виноградов [4] показал, что на самом деле законы сохранения не связаны с группами симметрий и тем более с выводимостью уравнений из вариационного принципа, это позволило по-новому взглянуть на дифференциальные уравнения. Он же, и другие исследователи, существенно расширили классы возможных симметрий, допускаемых дифференциальными уравнениями. В 1987 году одним из авторов статьи и А. М. Виноградовым была сформулирована проблема: использовать законы сохранения для решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Эта идея появилась в беседах, в которых обращалось внимание на глобальности законов сохранения, в отличие от точечных и иных симметрий. Почти 20 лет эта проблема не поддавалась решению. Затем удалось построить законы сохранения, специального вида, которые позволили решить краевые задачи для двумерных уравнений идеальной пластичности [5–8]. Это дало началу нового метода решение краевых задач в основном для систем уравнений теории пластичности, упругости и упруго – пластичности, поскольку с этими уравнениями связаны научные интересы авторов. Работа продолжается уже более 20 лет. Какие же выводы можно сделать по истечению данного периода?

1. Законы сохранения, несомненно, полезны для изучения дифференциальных уравнений. Они позволяют вывести некоторые тождества, которые помогают доказывать теоремы существования и единственности, что было замечено еще Л. В. Овсянниковым [2].

2. С помощью законов сохранения можно и нужно решать краевые задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений. При этом надо понимать, что не все законы сохранения годятся для этой цели. Как правило, для этого подходят законы сохранения, у которых сохраняющийся ток зависит от искомых функций и независимых переменных. Авторы статьи заметили, что для гиперболических уравнений достаточно только зависимости от искомых функций, а для эллиптических нужны еще и независимые переменные.

3. Сначала удавалось решать краевые задачи только для двумерных уравнений с помощью законов сохранения. Теперь получилось решить трехмерные задачи для ли-

нейных эллиптических систем упругости и системы уравнений Моисила–Теодореску. На очереди линейные гиперболические системы, но там есть проблемы с характеристическими поверхностями. Авторы надеются их преодолеть в ближайшее время.

4. Необходимо переходить к решению краевых задач для нелинейных уравнений размерности три и выше. Для этого нужны глубокие геометрические знания о дифференциальных уравнениях и их структурах. Надеемся, что прогресс здесь будет, достигнут в недалеком будущем.

Проиллюстрируем использование законов сохранения на пространственных уравнениях упругости.

Постановка задачи. Решим краевую задачу теории упругости в перемещениях с помощью законов сохранения.

Для уравнений линейной теории упругости существует много способов построения точных решений с помощью гармонических функций (см., например [9]). Для этих уравнений упругости строились и законы сохранения [10], которые, однако, не нашли практического применения. В работе показано, что краевая задача в перемещениях может быть полностью решена с помощью законов сохранения, впервые приведенных в статье, и трех гармонических функций.

Рассмотрим уравнения линейной теории упругости в пространственном случае

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda+2\mu)u^1_{xx} + (\lambda+\mu)(u^2_{xy}+u^3_{xz}) + \mu(u^1_{yy}+u^1_{zz}) = 0,\\ F_2 &= (\lambda+2\mu)u^2_{yy} + (\lambda+\mu)(u^1_{xy}+u^3_{yz}) + \mu(u^2_{xx}+u^2_{zz}) = 0,\\ F_3 &= (\lambda+2\mu)u^3_{zz} + (\lambda+\mu)(u^1_{xz}+u^2_{yz}) + \mu(u^3_{xx}+u^3_{yy}) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь λ, μ – упругие постоянные Ламе, $u^i\,(i=1,2,3)$ компоненты вектора деформации, индекс внизу означает производную по соответствующим переменным.

Поставим для этих уравнений следующую краевую задачу

$$u^1\,|_S = u^1_0(x,y,z),\; u^2\,|_S = u^2_0(x,y,z),\; u^3\,|_S = u^3_0(x,y,z). \tag{2}$$

Здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $u^i_0(i=1,2,3)$ – некоторые заданные функции.

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (1) назовем выражение вида

$$A_x + B_y + C_z = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2 + \omega_3 F_3, \tag{3}$$

где A, B, C – называются компонентами сохраняющегося тока, $\omega_i\,(i=1,2,3)$ – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные тождественно нулю. В этой работе A, B, C, ω_i – функции, зависящие только от зависимых и независимых переменных.

Имеет место теорема.

Теорема. Система уравнений (1) допускает закон сохранения со следующими сохраняющимися токам

$$A = w^1u_x^1 + w^2u_x^2 + w^3u_x^3, B = w^1u_y^1 + w^2u_y^2 + w^3u_y^3,\ C = w^1u_z^1 + w^2u_z^2 + w^3u_z^3, \quad (4)$$

где $(u^1, u^2, u^3), (w^1, w^2, w^3)$ – произвольные решения системы уравнений (1).

Замечание. Система (1) допускает и другие законы сохранения с другими сохраняющимися токами, отличными от (3). Они здесь не приведены, поскольку не дают решение задачи (1, 2). Другое определение законов сохранения и способы их вычисления можно найти в [7, 8].

Решение задачи (1), (2).

Из (4) по формуле Гаусса – Остроградского следует, что

$$\oiiint_V A_x + B_y + C_z)dxdydz\,(= \oiint_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy = 0. \quad (5)$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) некоторая внутренняя точка области V и

$$u^1 = \frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r},\ u^2 = -\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r},$$
$$u^3 = -\alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r}, 4\alpha = \frac{1}{1-\nu}, r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2. \quad (6)$$

Тогда (5) есть решение системы уравнений (1) [9], ν – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим шар радиуса $\varepsilon : \varepsilon^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ описанный вокруг точки (x_0, y_0, z_0). Тогда из (5) имеем

$$\oiint_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy = -\oiint_\varepsilon Adydz + Bdzdx + Cdxdy. \quad (7)$$

Сделаем в правой части равенства (6) замену по следующим формулам

$$x = x_0 + \varepsilon\cos\psi\cos\varphi,\ y = y_0 + \varepsilon\sin\psi\cos\varphi,$$
$$z = z_0 + \varepsilon\sin\varphi, 0 \le \psi \le 2\pi, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ из (5–7) получаем

$$aw^1 = \oiint_S u_0^1(\frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r})dydz - u_0^2\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r}dzdx - u_0^3\alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r}dxdy. \quad (8)$$

Здесь a – постоянная.

Аналогично, если в (7) положить

$$u^1 = -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r}, u^2 = \frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r}, u^2 = \frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r}.$$

То получаем

$$bw^2 = \oiint\limits_S u_0^1(-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r})dydz + u_0^2\left(\frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r}\right)dzdx - u_0^3\alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r}dxdy. \tag{9}$$

Здесь b – постоянная.

Точно так же, если в (7) положить

$$u^1 = -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r}, u^2 = -\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r}, u^2 = -\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r}.$$

То получаем

$$cw^3 = \oiint\limits_S u_0^1(-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r})dydz + u_0^2\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r}\right)dzdx + u_0^3\left(\frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r}\right)dxdy. \tag{10}$$

Здесь c – постоянная.

Из формул (8–10) можно найти решение уравнений (1) в любой внутренней точке области V. Тем самым краевая задача (2) для системы уравнений (1) полностью решена.

Заключение. В работе построены законы сохранения специального вида для уравнений упругости в стационарном виде. Работа продолжает серию работ авторов [10–15], посвященные решению краевых задач МДТТ с помощью законов сохранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли. С. Теория групп преобразований. Часть 1. Москва – Ижевск, Ижевский институт компьютерных исследований., 2011. – 712 с.

2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978.

3. Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. Москва: Физматгиз, 1959.

4. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. Москва: Фактор, 1996.

5. Сенашов С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнеий идеальной пластичности. Доклады РАН. т. 345, 1995. с. 619–620.

6. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранеия к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск, СО РАН. – 201 с.

7. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity// Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. P. 415–439

8. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир. 1975.

9. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. Москва: Мир. 1989.

10. Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N., On elastoplastic torsion of a rod with multiply connected cross-section, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 8:3 (2015), с. 343–351

11. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Cherepanova O. N., Solution of boundary value problems of plasticity with the use of conservation laws, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 11:3 (2018), с. 356–363

12. Senashov S. I., Savostyanova I. L.,Cherepanova O. N., Elastoplastic bending of the console with transverse force, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 12:5 (2019), с. 637–643.

13. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Об упругом кручении вокруг трех осей, Сиб. журн. индустр. матем, 24:1 (2021), с. 120–125

14. Gomonova O. V., Senashov S. I., Cherepanova O. N., Distribution of zones of elastic and plastic deformation appearing in a layer under compression by two rigid parallel plates, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 14:4 (2021), с. 492–496

15. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J Non. Mech. 2019. V. 108. P. 7–10.

16. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. v.62, № 1. C. 179–186.

Поступила: 06.02.2022