

## О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ КОЛЕЦ

<sup>1</sup>Кафтайкина Е. Н., <sup>2</sup>Докукова Н. А.

<sup>1</sup>Иностранное общество с ограниченной ответственностью «Плэйтика Бел», Минск

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск

**Введение.** Упругие кольцевые и цилиндрические винтовые устройства используются во многих отраслях промышленности. В машино- и авиастроении, как элементы способные удерживать предельные нагрузки оболочечных конструкций [1, 2]. В строительстве энергетических объектов, как элементы, подкрепляющие крупные цилиндрические резервуары термоядерных установок. В связи с этим возникает необходимость создания точных методов расчета и вывода аналитических формул для последующих исследований на прочность и жесткость отдельных узлов и инженерных сооружений в целом [1–16].

Основная часть. Рассматривается бесконечно малый элемент кругового кольца  $ds$ , находящийся в сложном нагрузочном режиме на рисунке 1. Для его равновесия следует привести к соответствующим осям все действующие на него силы и моменты.

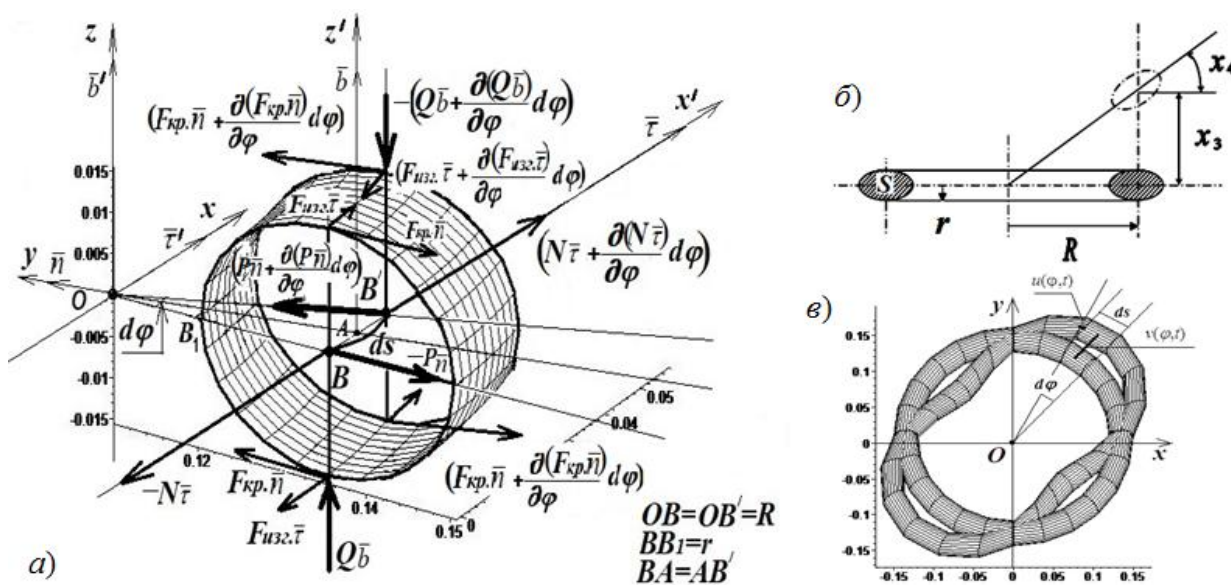


Рис. 1. Элемент кругового кольца  $ds$  на  $a$ , смещение  $x_3(\varphi, t)$  центра тяжести сечения из срединной плоскости кольца и угол поворота сечения  $x_4(\varphi, t)$  на  $b$ , радиальное смещение элемента  $ds$  кольца  $v(\varphi, t)$  и продольное –  $u(\varphi, t)$  на  $в$

Момент от перерезывающего поперечное сечение  $S$  усилия  $\bar{Q} = Q_b \cdot \bar{b}$ , представленного на рисунке 2,  $a$ , в естественной системе координат имеет вид  $(0; 0; Q_b)$  и определяется следующим образом:

$$\overline{M}_Q = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_b \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} + \frac{ds}{2} Q_b \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (1)$$

Здесь и далее положим, что модуль  $|\overline{Q}|$  равен  $Q = Q_b$ . Тогда момент в проекциях на оси естественного трехгранника будет таким:

$$\overline{M}_Q = \left( 0; \frac{RQ_b}{2} d\varphi; 0 \right). \quad (2)$$

Для усилия  $\overline{Q}' = -\left( Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \bar{b}$ , показанного на рисунке 2, б, определяются его проекции на координатные оси  $\overline{Q}' = \left( 0; 0; -\left( Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$ . Вычисляется момент

$$\overline{M}'_Q = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left( Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} + \frac{ds}{2} \left( Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (3)$$

Этот вектор-момент записывается в стандартном виде

$$\overline{M}'_Q = \left( 0; \frac{R}{2} \left( Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\varphi; 0 \right). \quad (4)$$

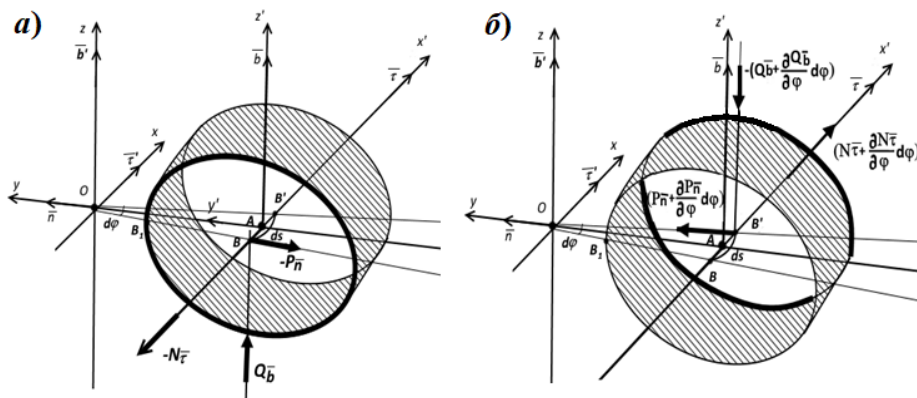


Рис. 2. Элемент  $ds$  кольца с перерезывающими силами  $\overline{N}$ ,  $\overline{P}$ ,  $\overline{Q}$  в сечении  $S$  и их приращения с противоположной стороны

Определяются осевые моменты от усилий  $\bar{P}$  и  $\bar{P}'$  благодаря относительно неподвижному центру начала координат – точке  $O$ , рисунок 2, а. Для этого находятся радиусы-векторы точки  $B$  из начала координат  $O \tau n'$   $\bar{r}_1 = \left(-\frac{ds}{2}; -R; 0\right)$  и до точки  $B'$

$$\bar{r}_2 = \left(\frac{ds}{2}; -R; 0\right);$$

$$\bar{M}_P = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & -R & 0 \\ 0 & -P_n & 0 \end{vmatrix} = \bar{\tau}(0) - \bar{n}(0) + \bar{b} \left(-\frac{ds}{2}\right) (-P_n) = \frac{ds}{2} P_n \bar{b}; \quad (5)$$

$$\bar{M}_P = \left(0; 0; \frac{RP_n}{2} d\varphi\right). \quad (6)$$

Сила  $\bar{P}' = \left(P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi\right) \bar{n}$  в координатной форме такова:  $\left(0; P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi; 0\right)$ , рисунок 2, б. Ее момент равен

$$\bar{M}'_P = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & -R & 0 \\ 0 & P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} - 0 \cdot \bar{n} + \frac{ds}{2} \left(P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi\right) \cdot \bar{b}. \quad (7)$$

При этом координатный вид представляется следующим образом:

$$\bar{M}'_P = \left(0; 0; \left(\frac{1}{2} P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi\right) R d\varphi\right). \quad (8)$$

Аналогичные вычисления осуществляются для растягивающих среднюю линию кольца сил  $\bar{N}$  и  $\bar{N}'$ . Момент силы  $\bar{N}$  относительно начала координат точки  $O$  будет таким:

$$\bar{M}_N = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & -R & 0 \\ -N_\tau & 0 & 0 \end{vmatrix} = -R \cdot N_\tau \bar{b}, \quad (9)$$

или в общем виде

$$\bar{M}_N = (0; 0; -RN_\tau). \quad (10)$$

Для сопряженной ей силы  $\bar{N}' = \left( N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) \bar{\tau}$  определяются проекции на оси естественного трехгранника  $\bar{N}' = \left( N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi; 0; 0 \right)$ . Аналогично предыдущим математическим операциям вычисляется ее момент

$$\bar{M}'_N = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & -R & 0 \\ N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} + 0 \cdot \bar{n} + R \left( N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{b}. \quad (11)$$

В каноническом виде он представим следующим образом:

$$\bar{M}'_N = \left( 0; 0; R \left( N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right). \quad (12)$$

На основании полученных расчетных данных моментов и схемы сил на рисунке 1 составляются соответствующие уравнения равновесия.

Записывается сумма проекций сил на ось  $A\tau$ :

$$m_0 R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi}, \quad (13)$$

где  $m_0$  – масса единицы длины кольца,  $m_0 = \rho F$ ;  $\rho$  – плотность материала;  $F$  – площадь поперечного сечения  $S$  кольца.

Записывается сумма проекций сил на ось  $An$ :

$$m_0 \omega^2 R = \frac{\partial P_n}{\partial s}. \quad (14)$$

В этой формуле нормальное ускорение элемента  $ds$  с элементарной массой  $m_0$  будет равно  $\omega^2 R = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ , поэтому справедливо равенство

$$m_0 R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial P_n}{\partial \varphi}. \quad (15)$$

Записывается сумма проекций сил на ось  $Ab$ :

$$m_0 R \left( \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} \right) = - \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi}, \quad (16)$$

где  $r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2}$  – касательная составляющая окружной доли ускорения,  $\frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2}$  – угловое ускорение. Последнее равенство проекций сил на ось  $Ab$  позволяет определить производную касательной силы  $Q_b$ , которая связана с инерцией подвижности бесконечно малого элемента  $ds$  вдоль оси  $\bar{b}$  и поворотом его относительно оси  $\bar{\tau}$ .

Записываются суммы моментов на оси  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}'$ , полученные ранее. Моменты относительно оси  $A\tau$ :

$$M_{изг} - \frac{\partial M_{кр}}{\partial \varphi} = 0. \quad (17)$$

Моменты относительно оси  $An$ :

$$-\frac{\partial M_{изг}}{\partial \varphi} d\varphi - M_{кр} d\varphi + \frac{d\varphi}{2} R Q_b + \frac{d\varphi}{2} R \left( Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) = 0. \quad (18)$$

Если пренебречь бесконечно малыми величинами порядка выше, чем  $d\varphi$ , получим окончательно

$$\frac{\partial M_{изг}}{\partial \varphi} + M_{кр} - R Q_b = 0. \quad (19)$$

Моменты относительно оси  $Ab'$ :

$$\frac{R P_n}{2} d\varphi + \frac{R}{2} \left( P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\varphi - R N_\tau + R \left( N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) = 0. \quad (20)$$

Упрощая последнее выражение, получается уравнение равновесия вида:

$$P_n + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} = 0. \quad (21)$$

Решая совместно равенства (13), (15) и (21), получается дифференциальное уравнение в частных производных для поперечных удлинений  $v(\varphi, t)$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Из известного условия растягивающей силы  $N_\tau = EF \frac{\partial u}{\partial s}$  и формулы равновесия (13) получается уравнение для определения продольных удлинений  $u(\varphi, t)$  средней линии балки в направлении оси  $\bar{\tau}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{EF}{m_0 R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (23)$$

На основании общих зависимостей изгибающих и крутящих моментов, приведенных в [1, 2, 8, 14], связанных с перемещениями  $x_3(\varphi, t)$  и поворотами  $x_4(\varphi, t)$

$$M_{изг} = \frac{EJ_1}{R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + x_4 \right), \quad (24)$$

$$M_{кр} = \frac{GJ_k}{R} \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_4}{\partial \varphi} \right), \quad (25)$$

выводятся общие уравнения равновесия относительно перечисленных переменных. Подстановкой формул (24) и (25) в (17), получается дифференциальное уравнение в частных производных относительно двух искомых величин  $x_3(\varphi, t)$  и  $x_4(\varphi, t)$

$$-\frac{GJ_k}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{GJ_k}{R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} - \frac{EJ_1}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} - \frac{EJ_1}{R} x_4 = 0, \quad (26)$$

которое делением на  $\left( -\frac{EJ_1}{R} \right)$  принимает свой канонический вид, полностью совпадающий с известными в научной литературе [1]

$$\left( 1 + \frac{GJ_k}{EJ_1} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + x_4 = 0. \quad (27)$$

Для полного завершения разрешающей системы уравнений следует добавить еще одно, основанное на равенстве моментов из формулы (19). Тогда заимствуя динамическое условие (16), связывающее инерцию поворота бесконечно малого элемента  $ds$  относительно своей оси, и свойств (24), (25), получается необходимое вспомогательное уравнение, связывающее основные искомые параметры для их однозначного определения,

$$\frac{EJ_1}{R^2} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} + \frac{EJ_1}{R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} - \frac{GJ_k}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{GJ_k}{R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + m_0 R^2 \left( \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (28)$$

Если последнее уравнение разделить на  $\frac{EJ_1}{R}$ , то получается уравнение, соответствующее своему каноническому представлению [1] без учета инерции поворота в формуле (16) – дополнительного слагаемого  $m_0 R r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2}$ ,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + \left( 1 + \frac{GJ_k}{EJ_1} \right) \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3 r}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} = 0. \quad (29)$$

**Выводы.** Система уравнений, состоящая из формул (27) и (29), описывает динамические смещения точек  $x_3(\varphi, t)$  и закручивания на углы  $x_4(\varphi, t)$  поперечных сечений  $S$  кольца, которые впоследствии могут быть использованы для вывода всех его деформированных состояний. Независимая система уравнений (22) и (23) позволяет определить радиальное  $v(\varphi, t)$  и продольное  $u(\varphi, t)$  смещения элемента  $ds$  кольца.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
2. Бидерман В. Л. Поперечные колебания пружин// Расчеты на прочность. – М., 1962. – Вып.8. – С.256–270.
3. Dokukova N. A. and Konon P. N. General laws governing in mechanical vibratory systems / JEPT, 2006. – V. 79. – N. 4. – P. 824–831.
4. Докукова Н. А., Мартыненко М. Д. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем / Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук, 1999. – Т. 3. – С. 108–111.
5. Мартыненко М. Д., Докукова Н. А., Бойко Л. И. О колебательных процессах в механических системах / Инженерно-физический журнал, 1999. – Т. 72 (3). – С. 491–494.
6. Dokukova N. A., Konon P. N. Equivalence of the Impedance Method and the Method of Amplitude-Frequency Characteristics for Investigations of Vibrations in Hydraulically Powered Supports / Journal of engineering physics and thermophysics, 2003/11. – V. 76 (6). – P. 1401–1404.
7. Dokukova N. A., Konon P. N. Generalities of passive vibration dampers isolating vibrations / Journal of engineering physics and thermophysics, 2006/3. – V. 79 (2). – P. 412–417.
8. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Исследование динамического деформируемого состояния упругой цилиндрической пружины// Scientific collection «Interconf», № 89. IV ISPC «Current issues and prospects for the development of scientific research», 7–8 December, 2021. Orleans, France. – 14 с.
9. Докукова Н. А., Конон П. Н. Исследование двух физических моделей вязкой среды в задаче гидромеханической виброизоляции// Scientific collection «Interconf», № 93. III ISPC «Scientific trends and trends in the context of globalization», 21–22 December, 2021. Umeå, Sweden. – 15 с.
10. Высоцкий М. С., Докукова Н. А., Конон П. Н. Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов / Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2006. – Т. 50. – С. 114–119.
11. Dokukova N. A., P. N. Konon, and Kaftaikina E. N. Nonnatural vibrations of hydraulic shock-absorbers / Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – V. 81 (6). – 2008. – P. 1191–1196.
12. Dokukova N. A., M. D. Martynenko, and E. N. Kaftaikina / Nonlinear vibrations of hydraulic // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – V. 81 (6). – 2008. – P. 1197–1200.
13. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N., Zenkovich V. V./ General patterns of improper vibrations of dynamical systems with arbitrary number of degrees of freedom// Proceedings of scientific progress – 2011: Proceedings of the 7th International Scientific Conference, Sofia. – 2011. – V. 9. – P. 56 – 64.

14. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N. Dynamics problem research of the longitudinal-radial oscillations of the ring / Образование и наука XXI века –2012: Материали за 8 – а международна научна практична конференция, «Образованието и науката на XXI век». – 2012. Том.– Т. 43. – С. 6 – 12.

15. Kaftaikina E. N., Dokukova N. A., Zenkovich V. V., Konon P. N. General characteristic equation of dynamic multielement system / Математика. Дифференциальные уравнения. – 2015

16. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N., Konon P. N. One method for solving the dynamics of bending and twisting of the ring / Математика. – 2015/4/29.

*Поступила: 31.03.2022*