

## РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ ИЗ ПОЛИМЕРОВ И КОМПОЗИТОВ

<sup>1</sup>Можаровский В. В., <sup>1</sup>Кузьменков Д. С., <sup>2</sup>Василевич Ю. В.

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск

### 1. Современные подходы при создании математических и механических моделей расчета.

Совершенствование конструкций современной техники в строительстве сопровождается сменой конструкционных материалов. В различных технических системах на место традиционных металлов и сплавов приходят композиционные материалы. На современном уровне развития математических моделей расчета напряженно-деформированного состояния труб из композиционных материалов имеется обширная литература, но в то же время возникает необходимость создания новых компьютерных программ расчета. Таким образом, актуальность работы определяется применением в инженерной практике строительства труб из композиционных материалов и необходимостью разработки современных методов определения их напряженно-деформированного состояния.

Обычно анализ напряженно-деформированного состояния производится в предположении однородности механических, в частности прочностных, свойств материала конструкции или какого-либо изделия, или сооружения. Однако некоторые конструкционные, строительные и другие виды материалов являются неоднородными уже вследствие условий их изготовления. Так, неоднородность бетонов, пластмасс и металлов или сплавов возникает в результате неравномерности их созревания, полимеризации или остывания соответственно. В частности, непрерывная неоднородность механических свойств композитного материала возникает в сосудах и трубопроводах АЭС (корпуса реакторов, главные циркуляционные трубопроводы, трубы отвода и коллектора парогенераторов и другие), которые эксплуатируются в течение длительного срока службы под воздействием высокого внутреннего давления в высокотемпературных, коррозионных и радиационных условиях, что приводит к неоднородным механическим свойствам материала по толщине этих конструкций. Таким образом, актуальность работы определяется применением в инженерной практике строительства труб из композиционных материалов и необходимостью разработки современных методов определения их напряженно-деформированного состояния.

#### 1.1. Обзор методов расчета цилиндрических труб из композитов.

Трубы из композиционных материалов широко применяются в трубопроводных системах, в том числе слоистые трубы, которые широко применяются в различных отраслях народного хозяйства. Расчет композиционных труб в основном строится по теории упругости анизотропного тела. В последнее время начали применять слоистые трубы из композиционных материалов. Создание и развитие новых расчетных методов для исследования напряженно-деформированного состояния труб из композитов с учетом их структурных особенностей, а также разработка на их основе автоматизированных программных комплексов, осуществляющих учет, контроль и диагностику трубопроводных систем различного назначения, способствуют повышению их безопасности и эксплуатационной надежности. Проведем краткий анализ современных исследований в области расчета цилиндрических труб слоистой структуры. Детальная разработка схем

и расчетов для композитов слоистых систем на основании теории анизотропной упругости дана в [3, 7, 10] и на основании теории слоистых систем – например, в [1, 2, 4–6, 15]. Пагано в [15] представил общее решение для анизотропного цилиндра в виде рядов Фурье. Расчет оболочки, нагруженной внутренним давлением и образованной намоткой полимерных пленок, рассматривается в [14]. Расчеты выполнены с использованием пакета MathCad. Группой авторов в [4–5, 8–12] проводился анализ расчета упругих напряжений в слоистых трубах. Проверка полученных результатов производилась с использованием коммерческих программ, реализующих МКЭ. Конечно-элементная программа ABAQUS использовалась в работах [4, 6]. В [4] представлены алгоритм и исследования распределения напряжений в трубах из слоистого композиционного материала, поведение волокнистого композиционного материала определялось на основе новых информационных технологий. В расчетных примерах рассматривались цилиндры, сосуды и резервуары цилиндрической формы [9]. Для разработки математических моделей используем математическую теорию упругости анизотропной среды, применяя концепцию макромеханики. При этом необходимо, при определении параметров расчета использовать характеристики материалов: объемное содержание волокна в матрице, модули упругости, коэффициент Пуассона и пределы прочности в разных направлениях.

В проблеме исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрических тел и расчета слоистых конструкций из новых армированных полимеров можно выделить несколько важных аспектов:

- оценка влияния внешних воздействий (силовых, механических, воздействия температурных полей и т. д.) при производстве и эксплуатации трубопроводных систем слоистой структуры;

- использование в современных конструкциях новых композитов и армированных полимеров с учетом физико-механических характеристик материала, эксплуатационных условий функционирования исследуемых объектов;

- разработка современных систем оценки и диагностирования, прогнозирования состояния систем трубопроводов на базе новых компьютерных технологий.

## **2. Математические алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических труб из полимеров и композитов.**

Рассмотрим задачу о бесконечно длинном упругом цилиндре (математическая модель), заключенном в податливую оболочку, нагруженном внутренним давлением (рисунок 1). Внутренний слой (т. е. сам цилиндр) состоит из волокнистого материала. Необходимо определить НДС в слоистой трубе. На современном этапе развития техники все чаще в системе строительства теплоснабжения (рисунок 2.1) стали появляться трехслойные полимерные и композитные трубы, которые необходимо рассчитывать на НДС с учетом силовых, температурных, реологических и других факторов. В связи с этим, рассмотрим задачу о бесконечно длинном упругом цилиндре, заключенном в податливую оболочку и полиуретановой теплоизоляцией, нагруженном внутренним давлением. аналогично [15], строим решение для трехслойной трубы.

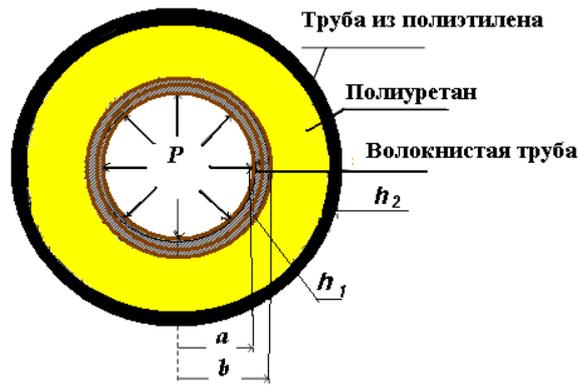


Рис. 2.1. Модель для расчета цилиндра в податливой оболочке под действием внутреннего давления

### 2.1. Волокнистый цилиндр в податливой оболочке под действием внутреннего давления. Алгоритм и программная реализация решения задачи.

Рассмотрим задачу о бесконечно длинном упругом цилиндре (математическая модель), заключенном в податливую оболочку, нагруженном внутренним давлением (рисунок 2.1). Внутренний слой (т. е. сам цилиндр) состоит из анизотропного материала. Примем, что поведение оболочки и наполнителя описывается уравнениями теории упругости. Для рассматриваемой задачи имеем уравнения: равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

геометрические

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad (2.1)$$

физические

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z; \\ \varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_z; \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как материал цилиндра (т. е. внутреннего слоя) – волокнистый, то для него справедливы эти формулы. Здесь  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  – компоненты тензора напряжений и деформаций в цилиндрической системе координат,  $a_{ij}$  – коэффициенты в законе Гука,  $i, j = \overline{1, 3}$ . На основании вышеприведенных уравнений, получим уравнение равновесия в перемещениях

$$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

**Расчет напряжений в трубе из функционально-градиентного материала с податливой оболочкой и теплоизоляцией.**

Так как материал цилиндра (т. е. внутреннего слоя) – функционально-градиентный, то для него справедлива формула [4, 16]:

$$E(r) = E_0 r^\beta, \quad -2 \leq \beta \leq 2.$$

Для упругой задачи связь между напряжением и деформацией имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta, \\ \sigma_\theta &= C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \left( \frac{E_0(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) r^\beta, \\ C_{12} &= \left( \frac{E_0\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) r^\beta. \end{aligned}$$

Из решения уравнения равновесия найдем перемещение, а затем – и напряжения. Следует отметить, что для наполнителя и оболочки физические уравнения будут:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2G_1\varepsilon_r + \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= 2G_1\varepsilon_\theta + \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \end{aligned}$$

Здесь коэффициент  $\lambda$  для случая плоского напряженного состояния (ПНС) имеет вид  $\lambda = \frac{2G\nu}{(1-\nu)}$ , а для плоского деформированного состояния (ПДС) –  $\lambda = \frac{2G\nu}{(1-\nu)}$ . В дальнейшем будем иметь в виду, что  $G_1$  и  $\lambda_1$  относятся к материалу цилиндра, а  $G_2$  и  $\lambda_2$  – к материалу наполнителя и  $G_3$  и  $\lambda_3$  – к материалу оболочки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Таким образом, с учетом формулы (2.1), имеем:

для трубы наполнителя

$$\begin{aligned} u_r^1 &= A_1 r^{k_1} + B_1 r^{-k}, \\ \sigma_r^1 &= C_{11}\varepsilon_r^1 + C_{12}\varepsilon_\theta^1 = C_{11}(A_1 m_1 r^{m_1-1} + A_2 m_2 r^{m_2-1}) + \\ &\quad C_{12}(A_1 r^{m_1-1} + A_2 r^{m_2-1}), \\ \sigma_\theta^1 &= C_{12}\varepsilon_r^1 + C_{11}\varepsilon_\theta^1 = C_{12}(A_1 m_1 r^{m_1-1} + A_2 m_2 r^{m_2-1}) + \\ &\quad C_{11}(A_1 r^{m_1-1} + A_2 r^{m_2-1}); \end{aligned} \tag{2.2}$$

для наполнителя

$$\begin{aligned} u_r^2 &= A_2 r + B_2 \frac{1}{r}, \\ \sigma_\theta^2 &= (2G_2 + 2\lambda)A_2 + 2G_2 B_2 \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_r^2 &= (2G_2 + 2\lambda)A_2 + 2G_2 B_2 \frac{1}{r^2}; \end{aligned} \tag{2.3}$$

для оболочки

$$\begin{aligned} u_r^3 &= A_3 r + B_3 \frac{1}{r}, \\ \sigma_\theta^3 &= (2G_3 + 2\lambda)A_3 + 2G_3 B_3 \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_r^3 &= (2G_3 + 2\lambda)A_3 + 2G_3 B_3 \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $m_{12} = \frac{1}{2}(-\beta \pm \sqrt{4 + \beta^2 - 4\beta\nu^*})$ ,  $\nu^* = \frac{\nu}{(1-\nu)}$ , постоянные  $A_i, B_i$  определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} u_{r/r=b}^1 &= u_{r/r=b}^2, & u_{r/r=b+h1}^2 &= u_{r/r=b+h1}^3, \\ \sigma_{r/r=b+h1}^2 &= \sigma_{r/r=b+h1}^3, & \sigma_{r/r=a}^1 &= -p, \\ \sigma_{r/r=b+h2}^3 &= 0, & \sigma_{r/r=b}^1 &= \sigma_{r/r=b}^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из граничных условий составляем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)  $6 \times 6$  для нахождения неизвестных коэффициентов  $A_i, B_i, i = \overline{1,3}$ . Матричным методом решаем полученную СЛАУ. Определенные коэффициенты подставляем в уравнения (2.1) для нахождения напряжений и перемещений в трубе.

При расчете трубы из волокнистого материала аналогично решаем такую же задачу приняв закон Гука в виде (2.2), а перемещение будет

$$\begin{aligned} u_r^1 &= A_1 r^{k_1} + B_1 r^{-k}, \\ \text{где } k &= \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}, \quad A_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad A_{12} = \frac{-c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad A_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \\ c_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

На основании исходных данных по формуле (2.4) определяем необходимые коэффициенты для случая волокнистого материала. Из граничных условий (2.5) составляем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения неизвестных коэффициентов  $A_i, B_i, i = \overline{1,3}$ . Матричным методом (методом Гаусса или любым другим) решаем полученную СЛАУ. Полученные коэффициенты подставляем в уравнения (2.2–2.4) для определения напряжений и перемещений в трубе.

Разработан алгоритм и создана программа, реализующая расчет напряжений и перемещений для трубы в податливой оболочке с полиуретановой теплоизоляцией (материал цилиндра – волокнистый).

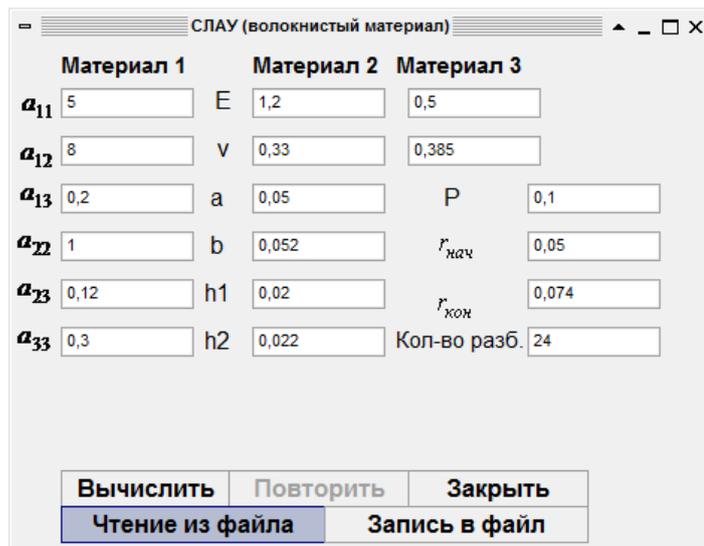


Рис. 2.2. Главное окно программы (для наглядного примера)

На рисунке 2.3 приведены результаты расчета тестового примера. Для граничных значений (на границе двух слоев) выводятся искомые характеристики для двух материалов. Также вывод результатов возможен и в графическом виде, по нажатию на кнопку «график» будет построен графики зависимости  $\sigma_{\theta}^{(k)}$ ,  $u_r^{(k)}$  от  $r$ .

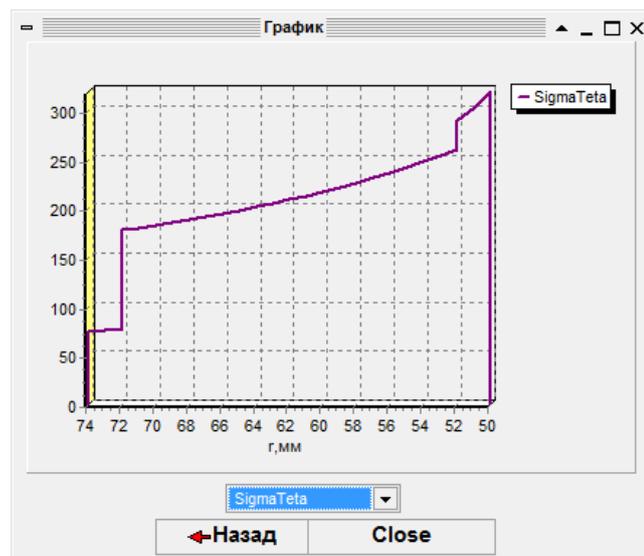


Рис. 2.3. График зависимости  $\sigma_{\theta}^{(k)}$ , от  $r$

Основные напряжения  $\sigma_{\theta}^{(k)}$  сконцентрированы в нижнем слое трубы; начиная с середины изоляции, перемещения  $u_r^{(k)}$  резко затухают. Для полной картины исследования напряженно-деформируемого состояния конструкции трубы необходимо рассчитать  $\tau_{\max}$  и эквивалентные напряжения.

### 3. Алгоритм определения численных результатов по расчету на прочность слоистых труб.

Рассмотрим многослойную трубу из композитных материалов. На трубу действует внутреннее давление  $p_0$ . Необходимо определить напряжения и перемещения, воз-

никающие в многослойной трубе. При расчете НДС трубопроводов и систем трубопроводов из-за сложной геометрии и особенностей конструкционного строения стенок труб, а также в связи с необходимостью моделирования слоистых тел, применяется, конечно-элементный анализ в двухмерных постановках.

Был разработан алгоритм и создана программа, реализующая расчет напряжений и перемещений многослойных труб из композиционных материалов. Программа реализована в среде Delphi в виде многооконного приложения. Реализована возможность записи и чтения из файла всех вводимых характеристик. Предусмотрена возможность выбора интервала по  $r$  и количества разбиений по  $r$ , просчитано множество различных примеров (различные материалы, давление и т. д.). Разбиение расчетной области, производится нерегулярной сеткой, треугольными конечными элементами. Увеличение количества конечных элементов (процедура дробления) в местах концентрации напряжений позволяет достичь наибольшей точности при расчетах. Разработанный программный комплекс позволяет свободно варьировать материалами покрытия труб и их характеристиками и показывает хорошие результаты. Программа не только определяет напряжения и перемещения слоистых труб, но и проверяет использованные в трубах материалы слоев ( $E_x, E_y, G_{zz}, \nu_{yx}, \nu_{yz}, \alpha_x, \alpha_y$ ) на прочность.

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_{\text{пр}} \leq \sigma_{\text{доп}},$$

где  $\sigma_{\text{доп}}$  – допустимое напряжение.

После расчета всех напряжений и перемещений перед выводом результатов в табличном виде выводится текстовое сообщение с информацией о том, подходит ли данный материал, исходя из допускаемого напряжения (рисунок 3.1).

Показатель	Требования	Расчет. значения	Результат
Плотность тепловой изоляции, кг/куб.м.	не менее 60	61.0000	Соответствует
Прочность ППУ при сжатии, МПа	не менее 0.15	0.1600	Соответствует
Водопоглощение ППУ, %	не более 10	10.0000	Соответствует
Объемная доля закрытых пор ППУ, %	не менее 88	90.0000	Соответствует
Прочность на сдвиг в оевом напр., МПа	не менее 0.12	0.1400	Соответствует

**Вывод: Соответствует ГОСТу!**

Рис. 3.1. Сравнение с ГОСТ

Описанную методику и разработанный программный комплекс можно легко применить на другие трубопроводные системы, использующие новые материалы (в том числе и композиционные).

#### **Программная реализация.**

Разработан алгоритм и создана программа (рисунок 3.2), реализующая расчет напряжений и перемещений многослойных труб из композиционных материалов.



Рис. 3.2. Главное окно программы

### Заключение.

На основе новых информационных технологий разработаны численные методы расчета напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций (в том числе трубопроводов) из новых армированных материалов, а также слоистых цилиндрических труб, находящейся под действием внутреннего давления с учетом влияния внешних факторов и процессов нагружения. Предложены алгоритмы вычисления напряжений в слоистой трубе, сделаны расчеты технических примеров. Предлагаемый программный комплекс может найти применение в машиностроении, энергетике при подборе материалов для конструкций с элементами в виде труб из композитов и полимеров.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел / В. И. Андреев. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2002. – 288 с.
2. Василевич, Ю. В. Математическое моделирование, экспериментальные исследования, расчет на прочность и жесткость труб и резервуаров из композиционных материалов с учетом неоднородности, анизотропии, концентраторов напряжений / Ю. В. Василевич, В. В. Можаровский // Сборник трудов V Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике, Минск, 26–28 октября 2011 г. // Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. – Минск, 2011. – т. 2. – С. 4–8.
3. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела. / С. Г. Лепницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Можаровский, В. В. Реалізація розрахунку напружень багатосарових труб / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки. – Киев, 2015. – № 5. – С. 173–178.
5. Можаровский, В. В. Влияние дефекта (трещины) на напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы из композита / Можаровский В. В., Марьин С. А. // Материалы. Технологии. Инструменты. – Гомель, 2015.– № 2. – С. 19–25.

6. Можаровский, В. В. Создание и работа программного комплекса контроля и диагностики сосудов и трубопроводов / Можаровский В. В., Марьина Н. А. // Информационно-компьютерные технологии 2010: материалы V Международной научной конференции, Житомир, 20–22 мая 2010 г. / Житомирский государственный университет. – Житомир, 2010. – С. 5–7
7. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
8. Bhaskar K. Three-dimensional analysis of a cross-ply cylindrical shell subjected to a localized circumferential shear force / K. Bhaskar, N. Ganapathysaran // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2002. – Vol. 79, Issue 7. – P. 519–524.
9. Gao X. L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory / X. L. Gao // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40, Issue 23. – P. 6445–6455.
10. Hyer M. W. Hydrostatic Response of Thick Laminated Composite Cylinders / M. W. Hyer // Jnl.Reinforced Plastics and Composites. – 1988. – Vol. 7. – P. 321–330.
11. Kim Y. J. Reference stress based approach to predict failure strength of pipes with local wall thinning under single loading / Y. J. Kim, D. J. Shim, H. Lim // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 2004. – Vol. 126, Issue 2. – P. 194–201.
12. Mohareb M. Plastic interaction relations for pipe sections / M. Mohareb // J. Eng. Mech. ASCE. – 2002. – Vol. 128, Issue 1. – P. 112–120.
13. Mohareb M. Plastic resistance of pipe sections – an upper bound solution eb / M. Mohareb // J. Struct. Eng. ASCE. – 2003. – Vol. 129, Iss 1. – P. 41–48.
14. Shim D. J. Failure strength assessment of pipes with local wall thinning under combined loading based on finite element analyses / D. J. Shim, J. B. Choi, Y. J. Kim // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 2004. – Vol. 126, Issue 2. – P. 179–183.
15. Pagano N. J. Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens / N. J. Pagano // Journal of Composite Materials. – 1970. – Vol. 4. – P. 360–378.
16. Tutuncu N. Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels / N. Tutuncu, M. Ozturk //Composites: – 2001. – Vol. 32 – P. 683–686.

*Поступила: 30.03.2022*