УДК 532.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ЗЕРНИСТЫХ СРЕД МЕТОДОМ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

[1]Поленов В. С., [2]Чигарев А. В.

[1]ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Россия
[2]Белорусский национальный технический университет, Минск

Математически исследуется двухфазная зернистая среда при помощи сейсмоакустической эмиссии, возникающей в пластах двухфазных пористых коллекторов, первая фаза которого состоит из жидкости или газа, заполняющая промежутки между зернами и зернистой твердой фазы (вторая фаза). Зерна твердой фазы могут иметь любую конфигурацию. В таких средах механизм передачи усилия проявляется через контакты между зернами. В это случае предполагается, что микро-деформации и смещения твердой фазы малы и эффекты прочности твердой фазы проявляются в тензоре фиктивных напряжений. Жидкость первой фазы будем считать сжимаемой.

Предположим, что размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать, что обе среды сплошными и в каждой точке пространства будет два вектора смещения: вектор смещения жидкости и вектор смещения упругой компоненты.

Сейсмоакустическая эмиссия (САЭ) в зернистых пористых геологических средах возникает в результате быстрых структурных изменений в некоторых областях упругой компоненты (при пластическом сдвиге, изменении атомной структуры, появлении микротрещин и т. п.). Такие области в зернистой пористой среде будем называть очагами эмиссии (ОЭ). Происходящие в ОЭ структурные изменения чаще всего не нарушают макроскопической сплошности остального объема твердой фазы, однако в окрестности очага при этом возникают по времени сигналы (внутренние напряжения), действие которых и приводит к появлению сейсмоакустических сигналов.

САЭ представляет собой процесс излучения упругих волн в результате обратимых или частично обратимых изменений структуры твердых тел под влиянием внутренних и внешних факторов различной физической природы (локальные перераспределения напряжений, образование новых трещин, дегазация и изменение химического состояния среды) [1, 2].

В работе [3] в качестве базовой математической модели двухфазной среды выбрана другая система уравнений, предложенная Drew и доработанная Bayer и Nunziato [4], а так же Saurel и Abgrall [5], в которой каждая фаза описывается отдельно своей подсистемой уравнений. Элементарные дислокационные механизмы акустической эмиссии и теория элементарных механизмов акустической эмиссии рассмотрены в работах [6, 7].

Математическому моделированию акустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухкомпонентных средах посвящены работы [8–10].

1. Постановка задачи построения математической модели сейсмоакустической эмиссии в пористых коллекторах.

Наличие очагов сейсмоакустической эмиссии (САЭ) в двухфазной среде порождает смещения среды $U^k = U_1^k + U_2^k$, где $U_1^i(\vec{r},t)-$ смещения элементов жидкости:

$U_2^i(\vec{r},t)-$ смещения элементов упругой зернистой среды. Упругие смещения можно разделить на спонтанные $U_2^{(s)k}$ и упругие $U_2^{(e)k}$

$$U_2^k = U_2^{(S)k} + U_2^{(e)k}. \tag{1}$$

Упругую дисторсия твердой фазы найдем по формуле

$$u_2^{(e)ik} = \frac{\partial U_2^i}{\partial x^k} - \frac{\partial U_2^{(s)i}}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2^i}{\partial x^k} + \frac{\partial U_2^k}{\partial x^i}\right) - u_2^{(s)ik}, \tag{2}$$

где $u_2^{(s)ik}$ − спонтанная дисторсия упругой среды.

Запишем основные соотношения, определяющие сейсмоакустическое поведение зернистой среды:

уравнения состояния межфазных связей можно записать в виде [11, 12]

$$T_f^{kl} = \alpha_2\left[\lambda_f^* u_2^{(}\delta^{kl} + 2\mu_f^* u_2^{(e)kl} + \nu_f^* p_1 \delta^{kl}\right], \tag{3}$$

где T_f^{kl} −тензор эффективных напряжений в смеси, $\lambda_f^*, \mu_f^*, \nu_f^*$ −комплексные эффективные модули упругости смеси. Они однозначно выражаются через модули упругости Ламе и модули упругости зернистой фазы; λ_2^*, μ_2^* – комплексные модули упругости Ламе; ν_f^* −комплексный коэффициент Пуассона; p_1 −давление жидкости (газа) в первой фазе; индекс 1 относится к жидкости, индекс 2 – к твердой фазе. По повторяющимся верхними индексами проводится суммирование от единицы до трех. Компоненты контравариантных тензоров будем обозначать верхними индексами;

уравнения совместного деформирования фаз среды

$$p_2 - p_1 = \frac{p_f}{\alpha_2}, \quad p_f = -\frac{1}{3}\sigma_f^{hh}. \tag{4}$$

Из формулы (4) определим давление в первой фазе, выраженное через тензор упругой дисторсии

$$p_1 = \Lambda^{*^*} u_2^{kk},$$
$$\Lambda^* = \frac{1}{1-\nu_f^*}[(\lambda_f^* - \lambda_2^*) + \frac{2}{3}(\mu_f^* - \mu_2^*)], \tag{5}$$

где u_2^{kk} тензор упругой дисторсии.

С учетом соотношений (2), уравнения состояния межфазных связей (3) и давление в первпй фазе (5) запишем в виде

$$T_f^{kl} = \alpha_2[\lambda_f \frac{\partial U_2^{(e)m}}{\partial x^m}\delta^{kl} + \mu_f(\frac{\partial U_2^i}{\partial x^k} + \frac{\partial U_2^k}{\partial x^i}) + \nu_f^* p_1 \delta^{kl}] - 2\mu^* u_2^{ik}\delta^{ik};$$
$$p_1 = \Lambda \cdot \frac{\partial U_2^k}{\partial x^2}; \tag{6}$$

уравнения движения фаз зернистой среды (импульсов фаз)

$$
\begin{gathered}
\rho_{11}\frac{\partial V_1^k}{\partial t}-\rho_{12}\frac{\partial V_2^k}{\partial t}=-\alpha_1\frac{\partial p_1}{\partial x^k},\\
\rho_{12}\frac{\partial V_1^k}{\partial t}-\rho_{22}\frac{\partial V_2^k}{\partial t}=\alpha_2\frac{\partial p_1}{\partial x^k}-\frac{\partial T_f^{kl}}{\partial x^l},\\
V_\alpha^k=\frac{\partial U_\alpha^k}{\partial t},\quad \alpha=1{,}2,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где $U_\alpha^i(\vec r,t)-$ смещения элементов фаз среды: $V_\alpha{}^i(\vec r,t)-$ скорость смещения элементов фаз среды: ρ_{11}, $\rho_{22}-$ эффективные плотности жидкости и твердой фаз среды; $\rho_{12}-$ динамический коэффициент связи жидкости и твердой фазы; α_1- доля объема жидкости; α_2- доля объема упругой фазы. По повторяющимся верхними индексами проводится суммирование от единицы до трех.

Дифференцируя выражения (6) сначала по переменной t, а затем по x^j, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 T^{jk}}{\partial t\partial x^j}=\alpha_2[\lambda_f^*\frac{\partial^2 V_2^i}{\partial x^i\partial x^k}+\mu_f^*(\frac{\partial^2 V_2^i}{\partial x^i\partial x^k}+\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^i\partial x^i})+\nu_f^*\frac{\partial^2 V_2^i}{\partial x^i\partial x^k}-2\mu_f^*\frac{\partial \varepsilon_2{}^{(s)ik}}{\partial x^i}],\\
\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^i\partial t}=\Lambda^*\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^k\partial x^i},
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где $\dfrac{\partial u_2^{(s)ij}}{\partial t}=\varepsilon_2^{(s)ij}-$ тензор скорости спонтанной дисторсии.

С учетом (8) уравнения движения (7) двухфазной зернистой среды, продифференцированные по переменной t, запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\rho_{11}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2}-\rho_{12}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2}=-\alpha_1\Lambda^\bullet\frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l\partial x^k},\\
\rho_{12}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2}-\rho_{22}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2}=\Gamma^\bullet\frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l\partial x^k}-\alpha_2\left\{\mu^\bullet{}_f\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^l\partial x^l}\right\}-2\mu_f^*\alpha_2\frac{\partial^2 V_2{}^{(s)i}}{\partial x^i\partial x^k},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Gamma^\bullet=\alpha_2\Lambda^\bullet-\alpha_2(\lambda^\bullet{}_f+\mu^\bullet{}_f+\nu_f^\bullet\Lambda^\bullet),\quad \lambda_f^\bullet=\lambda_f'+i\lambda_f'',\ \mu_f^\bullet=\mu_f'+i\mu_f'',\\
\lambda_2^\bullet=\lambda_2'+i\lambda_2''\quad \mu_2^\bullet=\mu_2'+i\mu_2'',\quad \nu_f^\bullet=\nu_f'+i\nu_f'',\quad V_2^{(s)k}=\frac{\partial U_2^{(s)k}}{\partial t}.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Здесь штрих обозначает действительную часть комплексного числа, а два штриха – мнимую часть комплексного числа.

Решение системы (9) будем искать в виде затухающей сейсмоакустической волны

$$
\begin{gathered}
V_1^j=C_1^j\exp(i\omega\cdot t-\theta\cdot x^k\nu^k),\quad V_2^j=C_2^j\exp(i\omega t-\theta\cdot x^k\nu^k),\\
V_2^{(s)j}=C_2^j\exp(i\omega t-\theta^{(s)}x^k\nu^k),\quad \theta=\gamma_1+i\beta_1,\quad \theta^{(s)}=\gamma^{(s)}+i\beta^{(s)},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$\beta = \beta_1 + \beta^{(s)}, \quad \beta_1 = \frac{\omega}{c_1}, . \quad \beta^{(s)} = \frac{\omega}{c^{(s)}}, \quad c = c_1 + c^{(s)},$$

где ν^k – координаты единичного вектора в направлении распространения сейсмоакустической волны в среде со скоростью $c > 0$; c_1 – скорость распространения сейсмоакустической волны в зернистой среде; $c^{(s)}$ – скорость распространения сейсмоакустической волны спонтанной дисторсии; $\gamma > 0$ – коэффициент затухания; $\omega > 0$ – частота, β – фазовая постоянная сейсмоакустической волны; $C_1^j, C_2^j, C_2^{(s)j}$ – амплитуды колебания.

Подставим (11) в соотношения (9), после несложных преобразований, получим

$$\begin{gathered} -\rho_{11}\omega^2 C_1^k + \rho_{12}\omega^2 C_2^k = -\alpha_1 \Lambda^{\bullet} C_2^l \theta^2 \nu^l \nu^k, \\ -\rho_{12}\omega^2 C_1^k + \rho_{22}\omega^2 C_2^k = \Gamma^{\bullet} C_2^l \theta^2 \nu^l \nu^k - \mu_f^* \alpha_2 \theta^2 . C_2^k - 2\mu_f^* \alpha_2 \theta^{(s)2} C_2^i \nu^i \nu^k . \end{gathered} \tag{12}$$

Характеристики продольных сейсмоакустических волн определяются из (12), если положить $C_1^k \nu^k = D_1 \neq 0$ и $C_2^k \nu^k = D_2 \neq 0$. Для этого умножим обе части (12) на ν^k и просуммируем по индексу k. В результате получим однородную систему уравнений с комплексными коэффициентами относительно неизвестных D_1, D_2

$$\begin{gathered} -\rho_{11}\omega^2 D_1 + (\rho_{12}\omega^2 + \alpha_1 \Lambda^{\bullet} \theta^2) D_2 = 0, \\ -\rho_{12}\omega^2 D_1 + [\rho_{22}\omega^2 - (\Gamma^{\bullet} - \alpha_2 \mu_f^{\bullet})\theta^2 + 2\alpha_2 \mu^* \theta^{(s)2}] D_2 = 0 . \end{gathered} \tag{13}$$

С учетом $\theta = \gamma + i\beta$, $\theta^{(s)} = \gamma^{(s)} + i\beta^{(s)}$ соотношение запишем в виде

$$\begin{gathered} -\rho_{11}\omega^2 D_1 + [\rho_{12}\omega^2 + \alpha_1 \Lambda^{\bullet} (\gamma_1 + i\beta_1)^2] D_2 = 0, \\ -\rho_{12}\omega^2 D_1 + [\rho_{22}\omega^2 - (\Gamma^{\bullet} - \alpha_2 \mu_f^{\bullet})(\gamma_1 + i\beta_1)^2 + 2\alpha_2 \mu_f^* (\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2] D_2 = 0 . \end{gathered} \tag{14}$$

Чтобы система (14) имела ненулевое решение, ее определитель, составленный из коэффициентов при D_1 и D_2 должен быть равен нулю [13]

$$\begin{vmatrix} -\rho_{11}\omega^2 & \rho_{12}\omega^2 + \alpha_1 \Lambda^{\bullet} (\gamma_1 + i\beta_1)^2 \\ -\rho_{12}\omega^2 & \rho_{22}\omega^2 - (\Gamma^{\bullet} - \alpha_2 \mu_f^*)(\gamma_1 + i\beta_1)^2 + 2\alpha_2 \mu_f^* (\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{15}$$

Раскроем определитель

$$\begin{gathered} k\omega^2 - [-\rho_{11}\alpha_2\mu_f^* + \rho_{11}\Gamma^* + \rho_{12}\alpha_1\Lambda^*](\gamma_1 + i\beta_1)^2 + 2\rho_{11}\alpha_2\mu_f^*(\gamma^{(s)} + \\ i\beta(s))2=0, \\ k = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 . \end{gathered} \tag{16}$$

Уравнение (16) представим в виде двух уравнений:

$$k\omega^2 - 2[-\rho_{11}\alpha_2\mu_f^* + \rho_{11}\Gamma^* + \rho_{12}\alpha_1\Lambda^*](\gamma_1 + i\beta_1)^2 = 0 \tag{17}$$
$$k\omega^2 + 4\rho_{11}\alpha_2\mu_f^*(\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2 = 0$$

Определим характеристики сейсмоакустической волны первого выражения (17). Для этого запишем его в виде

$$(\gamma_1 + i\beta_1)^2 = \frac{k\omega^2}{2[\rho_{11}\Gamma^\bullet + \rho_{12}\alpha_1\Lambda^\bullet - \rho_{11}\alpha_2\mu_f^\bullet]}. \tag{18}$$

Преобразуем комплексные модули зернистой среды

$$\Lambda^\bullet = \frac{1}{\nu'_f + i\cancel{\nu''}_f}\{[(\lambda'_f - \lambda'_2) + \frac{2}{3}(\mu'_f - \mu'_2)] +$$
$$+i\left[(\lambda''_f - \lambda''_2) + \frac{2}{3}(\lambda''_f - \mu''_2)\right] = \frac{\delta' + i\delta''}{\nu'_f + i\nu''_f} = \gamma' + i\gamma'',$$
$$\gamma' - \frac{\delta'\nu'_f + \delta''\nu''_f}{\nu'^2_f + \nu''^2_f}, \quad \gamma'' = \frac{\delta''\nu' - \delta'\nu'''}{\nu'^2_f + \nu''^2_f}, \tag{19}$$
$$\delta' = [(\lambda'_f - \lambda'_2) + \tfrac{2}{3}(\mu'_f - \mu'_2)], \quad \delta'' = [(\lambda''_f - \lambda''_2) + \tfrac{2}{3}(\lambda''_f - \mu''_2)],$$
$$\Gamma^\bullet = \alpha_2\Lambda^\bullet - \alpha_2\lambda^\bullet_f - \alpha_2\mu^\bullet_f - \alpha_2\nu^\bullet_f\Lambda^\bullet = \alpha_2(\chi' + i\chi''),$$
$$\chi' = \gamma' - (\lambda'_f + \mu'_f) - (\nu'_f\gamma' - \nu''\gamma''), \ \ \chi'' = \gamma'' - (\lambda''_f + \mu''_f) -$$
$$-(\nu'\gamma'' + \nu''\gamma').$$

Тогда (18) примет вид

$$(\gamma_1 + i\beta_1)^2 = \frac{k\omega^2}{2[\rho_{11}\alpha_2(\chi' + i\chi'') + \rho_{12}\alpha_1(\gamma' + i\gamma'') - \rho_{11}\alpha_2(\mu'_f + i\mu''_f)]}. \tag{20}$$

В знаменателе (20) выделим действительную и мнимую части, получим

$$\gamma_1^2 - \beta_1^2 = \frac{k\omega^2 q_1}{2(q_1^2 + q_2^2)}, \quad 2\gamma_1\beta_1 = -\frac{k\omega^2 q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}. \tag{21}$$

Из системы (21) находим фазовую постоянную β_1 и коэффициент затухания γ_1

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\omega^2(-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})}{4(q_1^2 + q_2^2)}}, \tag{22}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\omega^2 q_2^2}{4(q_1^2 + q_2^2)(-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})}}. \tag{23}$$

Учитывая, что $\beta_1 = \dfrac{\omega}{c_1}$, где c_1 - скорость сейсмоакустической волны в зернистой среде, получим

$$c_1 = \sqrt{\frac{4(q_1^2 + q_2^2)}{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)(-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})}}\,. \tag{24}$$

Таким образом, в упругой, насыщенной жидкостью зернистой среде, существует одна сейсмоакустическая волна, скорость которой определяются по формуле (24) и один коэффициент затухания γ_1, который находится по формуле (23).

Если связь между фазами отсутствует $(\rho_{12} = 0)$ и мнимые части модулей упругости в фазах равны нулю, то из (26) следует, что скорость распространения сейсмоакустических волн в пористой зернистой среде равна скорости сейсмоакустических волн, распространяющиеся в чисто сплошной упругой среде [4]

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_{22}}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_2}}\,. \tag{25}$$

Из второго равенства (19) определим характеристики волны спонтанной дисторсии. Для этого запишем его в виде

$$(\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2 = -\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\omega^2}{4\rho_{11}\alpha_2\mu_f^*}\,. \tag{26}$$

Учитывая, что $\mu_f^\bullet = \mu_f' + i\mu_f''$, разделим действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \gamma^{(s)2} - \beta^{(s)2} &= -\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\mu_f'\omega^2}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}, \\ 2\gamma^{(s)}\beta^{(s)} &= \frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\mu_f''\omega^2}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}. \end{aligned} \tag{27}$$

Из системы (27) находим коэффициент затухания и фазовую постоянную спонтанной скорости

$$\begin{aligned} \gamma^{(s)} &= \sqrt{\frac{k\omega^2\mu_f''^2}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f' + \sqrt{\mu_f'^2 + \mu_f''^2})}}, \\ \beta^{(s)} &= \sqrt{\frac{k\omega^2(\mu_f') + \sqrt{\mu_f'^2 + \mu_f''^2}}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}}\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Скорость волны спонтанной дисторсии в зернистой среде будет

$$\tilde{n}^{(s)} = \frac{\omega}{\beta^{(s)}} = \sqrt{\frac{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}{k(\mu_f' + \sqrt{\mu_f'^2 + \mu_f''^2})}}\,. \tag{29}$$

Из (29) следует, что при малом затухании $\mu_f'' = 0$ и $\alpha_2 = 1$

$$\tilde{n}^{(s)} = \sqrt{\frac{2\rho_{11}\mu'}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}}\,. \tag{30}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавров А. В., Шкуратник В. Л. Акустическая эмиссия при деформировании и разрушении горных пород // Акуст. журнал. 2005. Т. 51. С. 6–18.
2. Дрягин В. В. Сейсмоакустическая эмиссия нефтепродуктового пласта // Акуст. журнал. 2013. Т. 59. № 6. С. 744–751.
3. Drew D. A., Mathematical modeling of two-phase flows // An-nu.Rev. Fluid Mech. 1983 15 261–291.
4. Baer M. R., Nunziato J. W., A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive gra-nular materials // Int. J. Multiphase Flow. 12 1986 № 6 Pp. 861−889.
5. Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mis // J. Comput. Phys. 2003 Vol. 186 Pp. 361−396.
6. Бойко В. С., Нацик В. Д. Элементарные дислокационные механизмы акустической эмиссии // Элементарные процессы пластической деформации металлов. Киев. 1978. С. 159–189.
7. Нацик В. Д., Чишко К. А. Теория элементарных механизмов акустической эмиссии// Акустическая эмиссия материалов и конструкций Ростов-на-Дону. Изд. Ростовского университета, 1989. С.10–18.
8. Поленов В. С., Чигарев А. В. О математическом моделировании акустической эмиссии в анизотропных двухкомпонентных средах // Сб. Теоретическая и прикладная механика. БНТУ. Минск. Вып. 36 2021 С. 135–140
9. Поленов В. С., Ницак Д. А. Математическое моделирование акустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухкомпонентных средах // Наука России: цели и задачи. Сб. научных трудов по материалам XI МНК, Екатеринбург. ч. 2 2018. С. 52–58.
10. Поленов В. С., Кожанов А. А. О математическом моделировании акустической эмиссии в пористых средах // Научный журнал. «Тенденции развития науки и образования» XXXI МНК. №.31. ч. 1 Изд. НИЦ «Л-Журнал», Самара. 2017. С. 5–13.
11. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред // М.: Наука, 1978. 336 с.
12. Нигматулин Р. И. Механика многофазных сред // М.: Наука. ч. 1. 1967. 464 с., ч. 2. 1967. 380 с.
13. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра // М.: 1984. 204 с.

Поступила: 12.01.2022