

## БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО СЛЕДЯЩЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

Холодарь Б. Г.

*Брестский государственный технический университет, Брест*

**Введение.** В [1] рассмотрена задача о больших перемещениях консольного стержня, нагруженного на свободном торце следящей поперечной силой. Материал стержня предполагался линейно-упругим или нелинейно-упругим без ограничения по предельным деформациям.

Одной из особенностей рассмотренной задачи является возможность уменьшения уровня деформаций в зоне заделки при нарастании максимальной деформации материала под действием увеличивающейся нагрузки. В связи с этим нелинейно-упругое решение становится неприменимым к материалу, обладающему остаточными деформациями, так как деформации и напряжения в нем при разгрузке следуют не исходной диаграмме деформирования (ДР), а диаграммам обратного нагружения (ДОН) упруго-пластического материала. В настоящей работе рассматривается поведение стержня с учетом отмеченного обстоятельства. Предполагается также, что выполняется гипотеза плоских сечений.

**Постановка задачи.** Оговоримся сразу, что далее рассматривается идеализированный скле-рономный изотропный упруго-пластический материал, не обладающий возвратными деформациями.

Диаграмма растяжения материала описывается зависимостью  $\sigma(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \text{упругий участок:} & \quad \sigma(\varepsilon) = E\varepsilon, \\ \text{площадка текучести:} & \quad \sigma(\varepsilon) = \sigma_T, \\ \text{участок упрочнения:} & \quad \sigma(\varepsilon) = \sigma_B - (\sigma_B - \sigma_T) \cdot ((\varepsilon_B - \varepsilon)/(\varepsilon_B - \varepsilon_U))^m, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\sigma_T$  и  $\sigma_B$  – пределы текучести и прочности соответственно,  $\varepsilon_B$  – предельная деформация,  $\varepsilon_U = \varepsilon_T + p \cdot \varepsilon_T$  – деформация начала участка упрочнения, где  $\varepsilon_T = \sigma_T / E$  – деформация на пределе текучести,  $p \geq 0$  и  $m \geq 0$  – числовые параметры.

Методика построения диаграммы обратного нагружения по диаграмме растяжения рассмотрена в [2]. На рисунке 1 показаны диаграммы, построенные при следующих числовых данных:  $E = 10^5$  Мпа,  $\sigma_T = 10^2$  Мпа,  $\sigma_B = 2 \cdot 10^2$  Мпа,  $\varepsilon_B = 0,50$ ,  $m = 3$ ,  $p = 0$  и  $p = 9$ , которые использованы далее в расчетах.

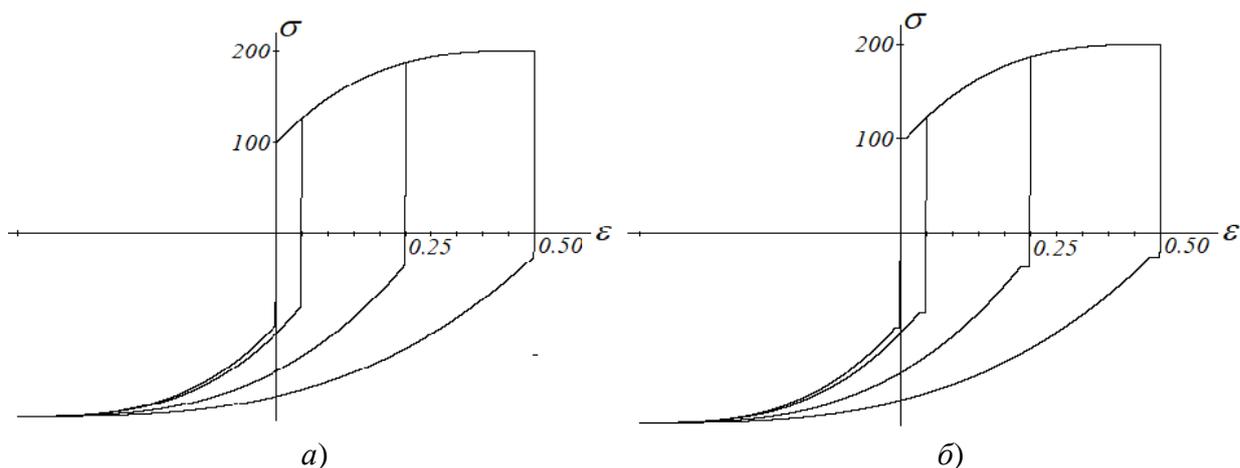


Рис. 1. Диаграммы растяжения, сжатия и обратного нагружения: *a* –  $p = 0$ ; *б* –  $p = 9$

На рисунке 2 показан стержень с используемыми координатами. Длина стержня  $L_0 = 1$  м, сечение – прямоугольное шириной  $b = 1$  см и высотой  $h = 0,25$  см. Начальный шаг разбиения стержня по длине равен  $\Delta L = 1 \cdot 10^{-4}$  м.

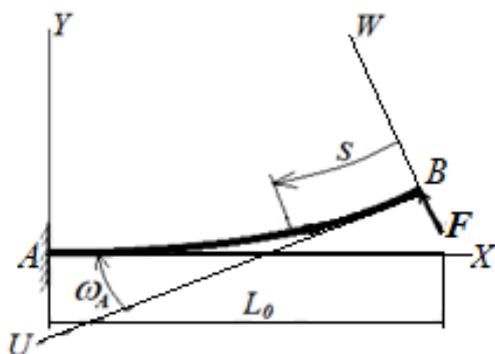


Рис. 2. Координаты стержня XY, UW, S

В связи с возможностью разгрузки материала на некотором участке стержня, решение задачи производится на продолжающееся нагружение пошагово увеличивающейся силой. Определив для заданного материала значения изгибающих моментов  $M_T$  и  $M_B$ , при которых напряжения в заделке прямолинейного стержня могли бы достичь пределов текучести  $\sigma_T$  и прочности  $\sigma_B$ , находим для них соответствующие усилия ( $F_T$  и  $F_B$ ) и далее задаем шаг нарастания нагрузки  $\Delta F$  и ее текущее значение  $F^{(i)}$  по формулам:  $F_T = M_T / L_0$ ,  $F_B = M_B / L_0$ ,  $\Delta F = (F_B - F_T) / N$ ,  $F^{(i)} = F_T + \Delta F i$ ,  $i = 0 - i_{max}$ , где  $N$  – число ступенек приращения нагрузки на участке упрочнения диаграммы растяжения материала. Построение формы изогнутой оси стержня базируется на методике, использованной в [1].

На рисунке 3 для нелинейно-упругого материала приведена форма изогнутой оси стержня и моменты в сечениях с координатой  $S$  при росте нагрузки. Видно (рисунок 3, в), что начиная с некоторого уровня нагружения зависимости  $M(S)$  начинают пересекаться, и на некотором участке стержня моменты при усилии  $F^{(i)}$  становятся меньше, чем моменты от силы  $F^{(i-1)} < F^{(i)}$ , что вызывает разгрузку материала в соответствующих зонах. При этом для упруго-пластического материала форма изогнутой оси и перемещения ее точек могут заметно измениться по отношению к показанным на рисунке.

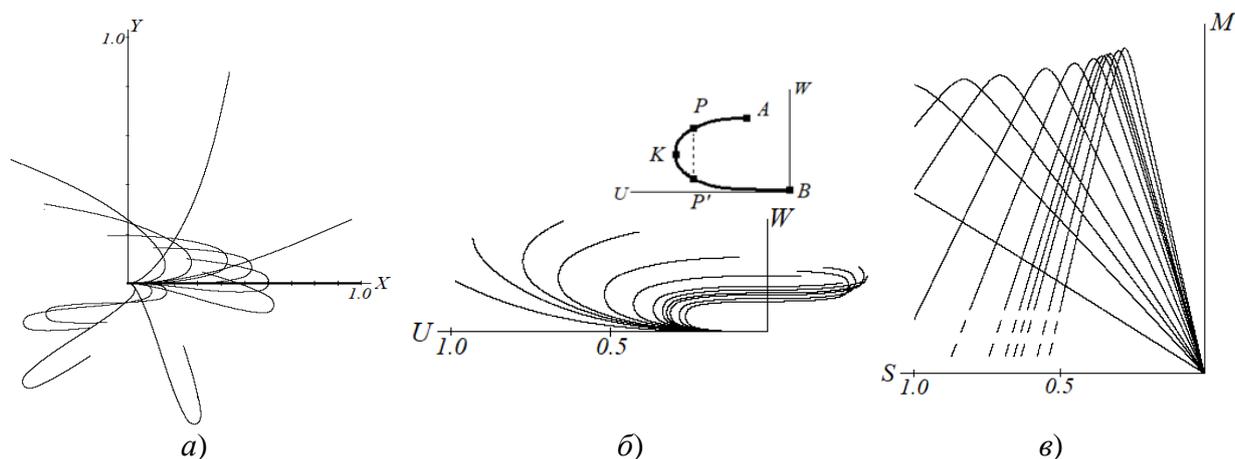


Рис. 3. Нелинейно-упругий материал. Изогнутая ось стержня в координатах XY (а) и UW (б) и распределение момента вдоль оси (в);  $N = 24, i = 1, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 56, 59, 62, 70, 77$

**Решение задачи.** Процедура уточнения решения описывается ниже с учетом того, что сравнивать значения деформаций для нагружений  $i$  и  $i - 1$  необходимо для одинаковых значений криволинейной координаты  $S$  сечения стержня. Анализируя форму кривых  $U(W)$  можно заключить [1], что на участке  $PP'$  ось стержня искривляется симметрично (рисунок 3, б), поэтому необходимое уточнение решения касается только участка  $PA$ , где точка  $P$  соответствует пересечению зависимостей  $M(S)$  для текущего  $i$  и предыдущего  $i - 1$  нагружений. Построение точки  $P$  произведено путем линеаризации зависимостей  $M(S)$  между найденными итерационно ближайшими точками на кривых  $i$  и  $i - 1$ .

После определения  $S_P$  и соответствующей координаты  $U_P$  нагружения  $i - 1$ , определяется значение  $M^{(i-1)}(S_P)$ . Поиск ведется также итерационно с линейной аппроксимацией кривой  $M^{(i-1)}(S)$  на интервале  $\Delta S$ , которому принадлежит точка  $P$  (такие же значения  $M$  и  $S$  имеют место и для кривой текущего нагружения). Далее уточняется деформация  $\varepsilon$  материала в этой точке на нагружении  $i - 1$  путем интерполяции по уже имеющимся данным.

Установив необходимые параметры кривых в точке  $P$  для обоих рассматриваемых нагружений, переходим к построению следующих точек отрезка  $PA$  для текущего нагружения. С этой целью принимаем значение  $S_j^{(i)}$  новой точки таким, как было ранее найдено для нее при нелинейно-упругом подходе, а соответствующую координату  $U_j$  получаем путем экстраполяции кривой  $U(S)$  на шаг  $\Delta S$  вперед по данным трех предыдущих точек  $j - 1 \div j - 3$  (квадратичная аппроксимация). Эта координата фактически нужна только для назначения величины момента в новой точке ( $M_j^{(i)} = F^{(i)} \cdot U_j$ ) и подлежит далее уточнению. Соответственно для точки с такой же дуговой координатой определяем момент  $M^{(i-1)}$  и деформацию  $\varepsilon^{(i-1)}$  на имеющейся кривой предшествующего нагружения  $i - 1$ .

Разница  $\Delta M = M^{(i-1)} - M_j^{(i)}$  принимается за величину момента разгрузки, который вызывает изменение напряженно-деформированного состояния в сечении с координатой  $U_j$  в соответствии со свойствами упруго-пластического материала при уменьшении нагрузки [3, 4]. Схема реализации этой ситуации иллюстрируется рисунком 4, где показана кривая обратного деформирования (ДОН) для точки  $S$  предыдущего нагружения и деформации материала после разгрузки. В связи с выбором достаточно малой длины разбиения стержня на исходные элементарные участки, при проведении

расчетов деформации разгрузки  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_{уп}$  на всех уровнях нагружения оставались на кривых ДОН в пределах упругих.

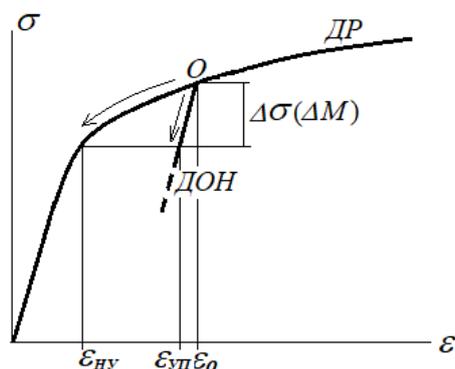


Рис. 4. Деформации при разгрузке нелинейно-упругого ( $\varepsilon_{нУ}$ ) и упруго-пластического ( $\varepsilon_{уп}$ ) материалов

Особенностью ситуации в рассматриваемой точке является уменьшение деформации  $\varepsilon$  при возросшей общей нагрузке  $F$ , и, как видно из рисунка 4, оно существенно ниже, чем при нелинейно-упругом подходе. По найденному таким образом значению  $\varepsilon_j = \varepsilon_{уп}$  определяется кривизна  $\varkappa$  нейтральной линии стержня при изгибе, которая оказывается больше прогнозируемой по схеме нелинейно-упругого материала и вызывает значительно более заметный изгиб стержня. Используя это ее значение и кривизны в двух предыдущих точках  $S_{j-1}$  и  $S_{j-2}$  кривой текущего нагружения, путем интегрирования выражения  $\varkappa = d\omega / ds$  на участке  $S_j \div S_{j-1}$  находим величину угла поворота сечения  $\omega$  в точке  $U_j$  и далее по определениям  $\cos\omega = dU / ds$  и  $\sin\omega = dW / ds$  получаем новые значения  $U_j$  и  $W_j$ . По приращениям этих координат уточняется значение дуговой координаты  $S_j$ . Все интегрирования выполнены через аппроксимацию соответствующей кривой по трем точкам.

Проводя процедуру вычислений по всем точкам от  $P$  до  $A$ , находим в координатах  $U, W$  значение перемещений и угла поворота в заделке и далее определяем положение всех точек оси стержня [1]. Из рисунка 5, а, б видно, что положение точек и углы поворота сечений с ростом силы  $F$  сравнительно с нелинейно-упругим решением (рисунок 3) меняются очень существенно.

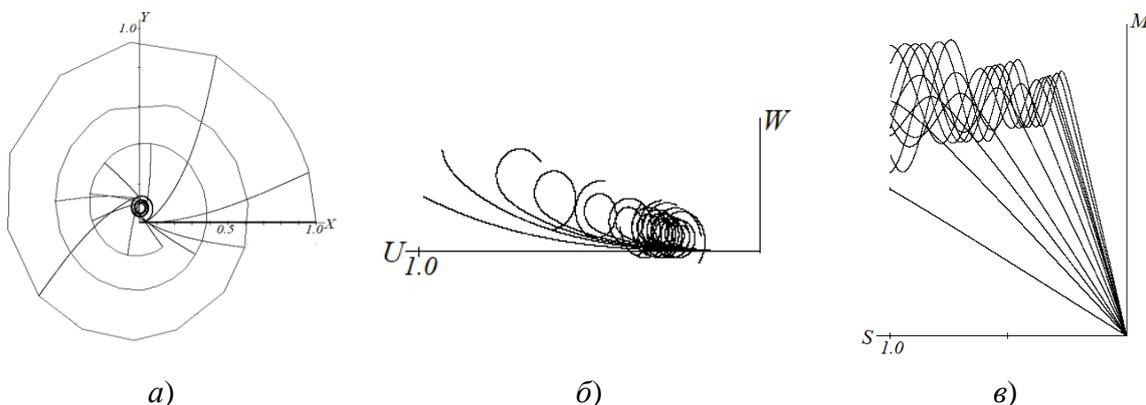


Рис. 5. Упруго-пластический материал без площадки текучести ( $p = 0$ )

Так как форма кривой на участке  $PA$  изменилась, то, используя ее теперь как исходную на текущем нагружении, можно повторить процедуру *уточнения* положения точек этого участка до достижения приемлемой стабильности результата. Как оказалось в нашем случае, решение идет устойчиво и позволяет ограничиться только ранее найденным результатом.

Более точное решение задачи можно получить, уменьшив первоначально выбранный шаг изменения внешней нагрузки  $\Delta F$ . На рисунке 6 показаны зависимости угла поворота нагруженного торца  $\omega_B(i)$  при возрастании силы до  $F_{max} = 0,714$  для  $N = 6, 12, 18, 24$ . В связи с итерационным способом решения графики не являются вполне гладкими, но в целом демонстрируют сходимость к некоторым предельным значениям во всем диапазоне нагружения. Например, для  $F = 0,628$  значения  $\omega_B$  составляют  $930,1^\circ, 985,1^\circ, 993,8^\circ, 999,0^\circ$ , для  $F = 0,586$  значения  $\omega_B$  равны  $877,1^\circ, 899,0^\circ, 908,6^\circ, 913,7^\circ, 915,4^\circ$  при указанных значениях  $N$ .

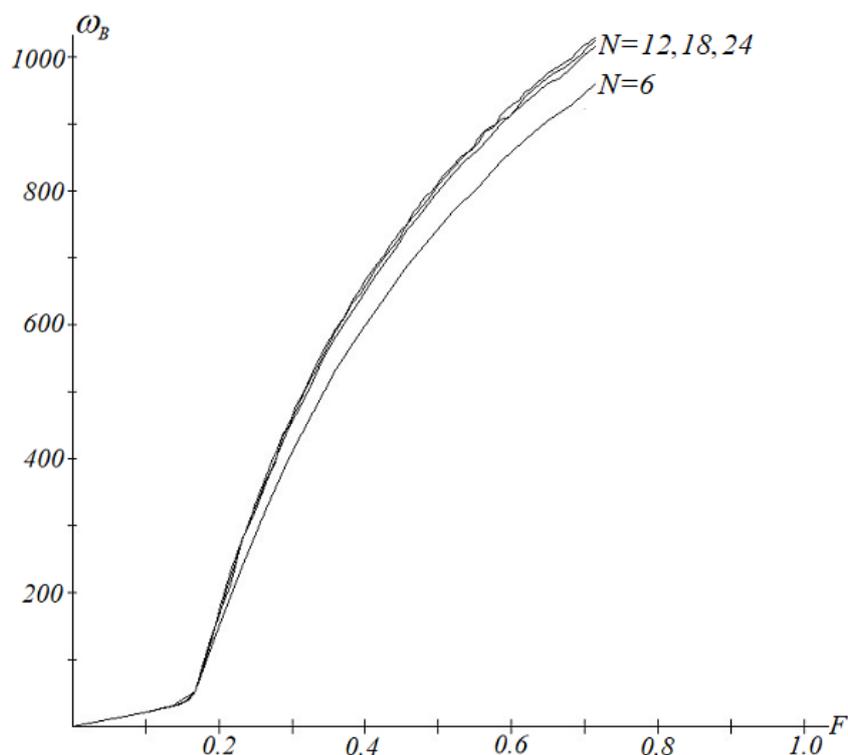


Рис. 6. Зависимость  $\omega_B(F)$  при различной величине шага возрастания нагрузки

С ростом нагрузки и появлением значительных углов поворота сечений имеют место повторные пересечения кривых моментов текущего  $M^{(i)}$  и предшествующего  $M^{(i-1)}$  нагружений (рисунок 5), что свидетельствует о наличии возвратов точек в состоянии догрузки и было учтено в вычислительной программе.

На рисунках 7 и 8 показаны результаты решения задачи для материала с площадью текучести, у которого участок упрочнения начинается с точки  $\varepsilon_U = 10\varepsilon_T$  (т. е., при  $p = 9$ ).

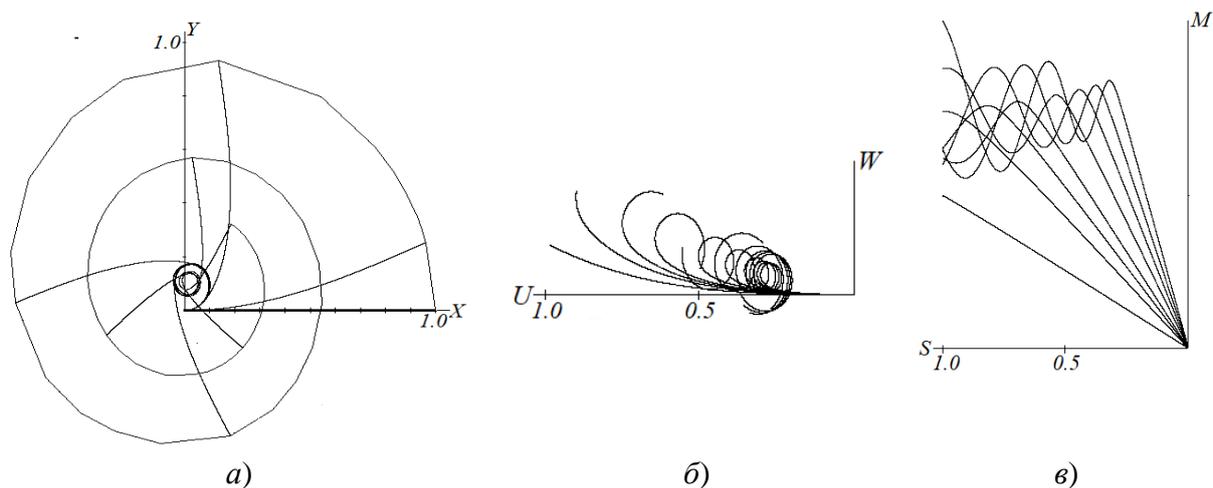


Рис. 7. Упруго-пластический материал с площадкой текучести ( $p = 9$ )

Для большей наглядности результатов на рисунке 8 показаны кривые  $UW$  и распределение напряжений и деформаций в поверхностном слое стержня из упруго-пластического материала при одинаковом уровне нагружения  $F = 0,628$ ,  $N = 24$ .

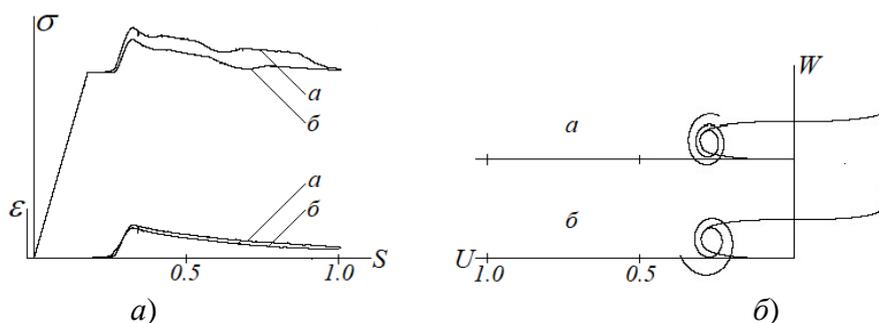


Рис. 8. Напряжения и деформации и форма изогнутой оси стержня:  $a - p = 0$ ,  $b - p = 9$

Как видно из рисунков 7–8, наличие площадки текучести на диаграмме растяжения материала не вносит существенных изменений в картину напряженно-деформированного состояния стержня. Отличия от предыдущего случая сводятся к уменьшению интенсивности изгиба, приводящему к некоторому падению величин напряжений и деформаций, а также уменьшению кривизны изогнутой оси стержня в соответствующих точках и угла поворота нагруженного конца стержня.

**Заключение.** Считая, что в целом решение получено с достаточной точностью, можно отметить некоторые особенности поведения стержня:

1. С ростом нагрузки имеет место резкое отличие формы изогнутой оси упруго-пластического стержня от ее формы для нелинейно-упругого материала.

2. После поворота торцевого сечения на угол  $\omega > 90^\circ$  максимум момента переходит из заделки в точку  $K$ , где  $\omega_K = 90^\circ$  и  $S = S_K^{(i)}$ . При продолжающемся увеличении силы на осевой линии стержня появляются завитки и петли, в соответствии с чем зависимость  $M(S)$  при  $S > S_K$  постепенно приобретает волнообразный характер, а ее максимумы превосходят  $M_K$  и сдвигаются в сторону закрепленного торца стержня, причем максимум  $M$  может не находиться в сечении заделки. Положения локальных максимумов и минимумов изгибающего момента соответствуют плечу силы, а сам момент  $M(S)$

на всей длине стержня не меняет знака, что отражает принципиальное различие в поведении упругого и пластического материалов.

3. Максимумы деформаций и напряжений материала имеют место в точке  $K$  и дальше уменьшаются в сторону заделки, непосредственно не следуя изменениям  $M(S)$ , что объясняется наличием разгрузки материала на этом участке стержня. Зависимость  $\sigma(\epsilon)$  вдоль оси стержня имеет достаточно сложную форму, на которую кроме уровня нагрузки оказывает влияние характер упрочнения стержня. Так как положение точки  $K$  связано только с известной ДР материала и нагрузкой, то это обстоятельство значительно облегчает определение допустимого уровня нагружения и прогноз положения места разрушения.

4. При подходе к задаче с позиций малых перемещений при  $F_B = M_B / L_0$  деформация достигает своего предельного значения  $\epsilon_B$ , а в рассмотренной задаче при силе  $F = F_{MAX}$ , превосходящей  $F_B$  более, чем в 2,4 раза, максимальная деформация материала составила всего  $\epsilon_{MAX} \approx 0,051$  при принятом  $\epsilon_B = 0,50$ . Расчеты для более низкого значения  $\epsilon_B = 0,2$  дают  $\epsilon_{MAX} \approx 0,033$ . Таким образом, учет геометрической нелинейности задачи позволяет выявить значительный ресурс работоспособности изогнутого элемента и принадлежит перспективным направлениям дальнейших исследований.

5. Наличие площадки текучести на диаграмме растяжения материала приводит к уменьшению угла поворота нагруженного торца и изменению формы изогнутой оси стержня, выражающемуся в увеличении ее радиуса кривизны в соответствующих точках.

Использованная методика решения задачи может быть применена к решению аналогичных задач о напряженно-деформированном состоянии стержней.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Холодарь. Напряженно-деформированное состояние гибкого консольного стержня, нагруженного следящей поперечной силой // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, БНТУ, 2021, вып. 36, С.103 – 108

2. Б. Г. Холодарь. Диаграммы обратного нагружения и напряжения в сечении изогнутого стержня при реверсе нагрузки // Сборник «Механика. Исследования и инновации», Гомель, БелГУТ, 2021, вып. 2, С. 234 – 243

3. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности. М.: ГИТТЛ, 1969 г. – 420 с.

4. Н. Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968 г. – 400 с.

*Поступила: 21.02.2022*