УДК 51:539.3

Медведев Д.Г., Босяков С.М.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA* ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ДВУМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Метод конечных элементов в настоящее время является одним из самых распространенных методов решения линейных и нелинейных прикладных задач, например изучения тепловых процессов, прочностных расчетов, проблем динамики жидкости [4–7]. Наглядность метода и сравнительная простота его применения в случае областей сложной формы сделали его весьма популярным среди широкого круга инженерных работников. На основе этого метода создан и успешно эксплуатируются ряд программных комплексов прикладных расчетов, в частности пакеты ANSYS [1], NASTRAN [2] и др. Тем не менее, любой конечноэлементный пакет является лишь инструментом для расчета необходимых пользователю характеристик элемента конструкции или детали при заданных граничных условиях. Поэтому по-прежнему большую роль играет освоение общих методов построения конечноэлементных моделей непрерывных полей и их применение при решении типичных задач механики сплошной среды и машиностроения. В настоящей работе представлены алгоритмы использования функциональных средств внешнего пакета *Structural Mechanics* расширения компьютерной системы *Mathematica*, позволяющих определить функции формы для различных двумерных конечных элементов. Отметим, что понятие функции формы является ключевым в концепции метода конечных элементов, поскольку широкие классы задач могут быть решены только при задании определенных интерполяционных функций [4]. Однако выбор функций формы представляет собой вопрос, в решении которого роль пользователя является определяющей. Функциональные средства пакета *Structural Mechanics* позволяют вычислить двумерные функции формы для лагранжевых, эрмитовых, треугольных, прямоугольных и серендиповых конечных элементов, а также самостоятельно определять пользователю функции формы для нестандартных элементов.

Простой и универсальный способ получения функций формы двумерных конечных элементов состоит в перемножении соответствующих интерполяционных полиномов от переменных y и x [3]. Так, функции формы для прямоугольного элемента с четырьмя узлами в углах можно получить как произведения линейных многочленов Лагранжа. Применим этот подход, чтобы вычислить двумерные функции формы для квадратичного элемента, узловые точки которого находятся в точках с координатами (1, 1), (1,-1), (-1,-1) и (-1, 1). При расчете используем результаты функции HermiteElement1D, предназначенной для нахождения эрмитовых функций формы для одномерных элементов.

Transpose[HermiteElement1D[{-1,1},0,x]].HermiteElement1D[{-1,1},0,y]

$$\left\{\left\{\frac{1}{4}(1-x)(1-y),\ \frac{1}{4}(1-x)(1+y)\right\},\left\{\frac{1}{4}(1+x)(1-y),\ \frac{1}{4}(1+x)(1+y)\right\}\right\}.$$

Такой подход можно применять для нахождения функций формы конечных элементов с любым количеством регулярно расположенных узловых точек. Ниже приведен пример нахождения функций формы для квадратичного элемента с девятью узлами, расположенными в точках (0, 0), (1, 1), (1, 0), (1,-1), (0, -1), (-1,-1), (-1, 0), (-1, 1) и (0, 1).

Transpose[HermiteElement1D[{-1,0,1},0,x]].HermiteElement1D[{-1,0,1},0,y]

$$\Big\{\Big\{\frac{1}{4}(-1+x)\,x\,(-1+y)\,y,\ -\frac{1}{2}(-1+x)\,x\,(-1+y)\,(1+y),\ \frac{1}{4}(-1+x)\,x\,y\,(1+y)\Big\},$$
$$\Big\{-\frac{1}{2}(-1+x)\,(1+x)\,(-1+y)\,y,\ (-1+x)\,(1+x)\,(-1+y)\,(1+y),\ -\frac{1}{2}(-1+x)\,(1+x)\,y\,(1+y)\Big\},$$
$$\Big\{\frac{1}{4}x\,(1+x)\,(-1+y)\,y,\ -\frac{1}{2}x\,(1+x)\,(-1+y)\,(1+y),\ \frac{1}{4}x\,(1+x)\,y\,(1+y)\Big\}\Big\}.$$

Более сложным является расчет интерполяционных функций в случае, когда узловые точки прямоугольного или треугольного элемента расположены нерегулярно, поскольку получить функции формы путем скалярного произведения не представляется возможным. Треугольный и квадратичный конечные элементы с нерегулярным расположением узлов показаны на рис. 1 (при построении использована графическая функция ElementPlot пакета *Structural Mechanics*).

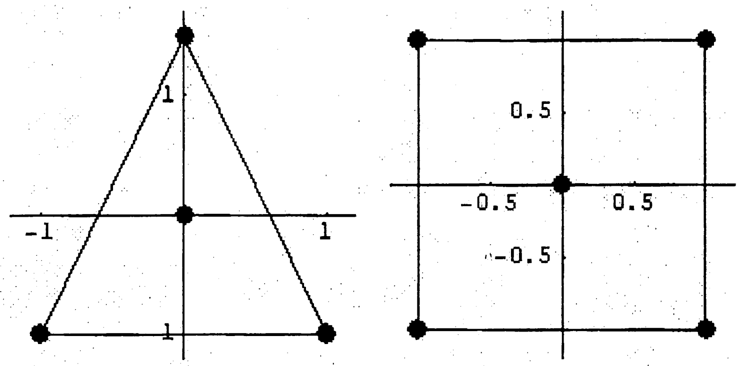

Рисунок 1 - Конечные элементы с нерегулярным расположением узлов

Для нахождения функций формы различных треугольных и прямоугольных конечных элементов предназначены функции TriangularCompleteness, Rectangular-Completeness и ShapeFunction2D. Первые две функции находят значения степеней одночленов в интерполяционных функциях треугольного и прямоугольного элементов соответственно. В качестве входных аргументов этих функций указывается количество узловых точек, порядок непрерывности интерполяционных функций, а также минимальное количество симметрических одночленов, которые можно исключить из соответствующих функций формы. Заметим, что если последнее значение противоречит требованию полноты структуры результирующих полиномов [4], выдается предупреждающее сообщение. В качестве примера вычислим список степеней одночленов лагранжевых функций формы для треугольного элемента с четырьмя узловыми точками, показанного на рисунке 1 (порядок непрерывности равен нулю). Минимальное количество симметрических одночленов, которые можно опустить в полном полиноме интерполяционной функции, также принимаем равным нулю.

com=TriangularCompleteness[4,0,0]
{CompletePolynomialDegree→2,ContinuityOrder→0,CompletePolynomialTerms→6,
CompleteSymmetricTerms→2,CompleteAntisymmetricTerms→4,ExtraTerms→2,
SymmetricTerms→{{0,0},{1,1}},SymmetricTermsDropped→{},
AntisymmetricTerms→{{1,0},{0,1}},AntisymmetricTermsDropped→{{2,0},{0,2}}}.

Анализируя эти результаты, можно установить те одночлены, которые будут использоваться в функциях формы, а также те одночлены, которые следует исключить из этих функций. Так, первый элемент этого списка CompletePolynomialDegree→2 подразумевает, что все многочлены в интерполяционных функциях формы будут состоять из одночленов степени не выше второй. Второй элемент ContinuityOrder→0 накладывает требование на порядок непрерывности функции формы. CompleteSymmetricTerms→2 и CompleteAntisym-metricTerms→4 указывают на то, что полный полином интерполяционной функции включает два симметрических и четыре антисимметрических одночлена. Выражение SymmetricTerms→{{0,0},{1,1}} говорит о том, что в результирующем полиноме будут использованы симметрические одночлены, представляющие собой произведения нулевых и первых степеней двух переменных, а именно одночлены 1 и xy. SymmetricTermsDropped указывает на те симметрические одночлены, которые будут опущены в интерполяционной функции. В случае если SymmetricTermsDropped→{}, то ни один из симметрических одночленов не будет исключен. Выражение AntisymmetricTerms→{{1,0},{0,1}} указывает на то, что в функцию формы будут включены только два антисимметрических одночлена x и y. Последний элемент списка AntisymmetricTermsDropped→{{2,0},{0,2}}} говорит о том, что антисимметрические одночлены x^2 и y^2 будут исключены из полинома интерполяционной функции.

Необходимую информацию об одночленах функций формы прямоугольного конечного элемента позволяет получить функция RectangularCompleteness, аргументы которой имеют тот же смысл, что и аргументы функции TriangularCompleteness. Данные, представленные в результирующем списке com функций TriangularCompleteness и RectangularCompleteness, содержат полную информацию о двумерной функции формы элемента и используются в аргументе функции ShapeFunction2D[com, nodelist,{x,y},ders], которая предназначена для нахождения функций формы двумерных элементов. Аргумент nodelist этой функции является списком координат узловых точек, {x,y} – переменные, ders – список частных производных по x и y (для случая лагранжевых двумерных интерполяционных функций аргумент ders не указывается).

Приведем пример применения функций RectangularCompleteness и Shape-Function2D для вычисления функций формы прямоугольного серендипова элемента с двенадцатью узловыми точками, координаты которых составляют следующий список pts. Положение узловых точек этого элемента показано на рисунке 2.

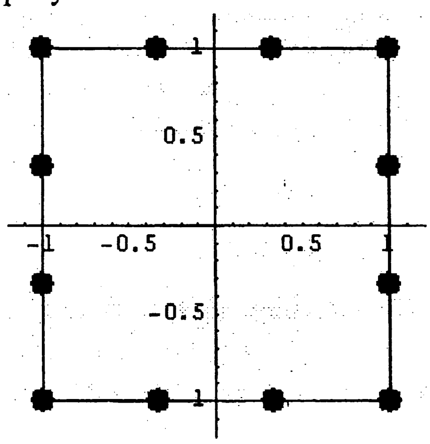

Рисунок 2 - Серендипов элемент с двумя узлами

При вычислении степеней соответствующих одночленов интерполяционных полиномов зададим аргумент sym равным двум, чтобы опустить два симметрических одночлена в результирующем полиноме.

com1=RectangularCompleteness[12,0,2]

{CompletePolynomialDegree→3,ContinuityOrder→0,CompletePolynomialTerms→16,
CompleteSymmetricTerms→4,CompleteAntisymmetricTerms→12,ExtraTerms→4,
SymmetricTerms→{{0,0},{1,1}},SymmetricTermsDropped→{{2,2},{3,3}},

Antisymmet-ricTerms→{{1,0},{2,0},{2,1},{3,0},{3,1},{0,1},{0,2},{1,2},{0,3},{1,3}},AntisymmetricTermsDr opped→{{3,2},{2,3}}}.

Далее, используя функцию ShapeFunctions2D, найдем двенадцать функций формы. Ввиду громоздкости искомого списка функций выпишем первую, четвертую, восьмую и двенадцатую интерполяционные функции.

pts={{1/3,1},{1,1},{1,1/3},{1,-1/3},{1,-1},{1/3,-1},
{-1/3,-1},{-1,-1},{-1,-1/3},{-1,1/3},{-1,1},{-1/3,1}};

sfr=ShapeFunctions2D[com1,pts,{x,y},{}]//Expand;
Take[%,{1,12,3}]//TableForm;

$$\frac{9}{32}+\frac{27\,x}{32}-\frac{9\,x^2}{32}-\frac{27\,x^3}{32}+\frac{9\,y}{32}+\frac{27\,x\,y}{32}-\frac{9\,x^2\,y}{32}-\frac{27\,x^3\,y}{32},$$
$$\frac{9}{32}+\frac{9\,x}{32}-\frac{27\,y}{32}-\frac{27\,x\,y}{32}-\frac{9\,y^2}{32}-\frac{9\,x\,y^2}{32}+\frac{27\,y^3}{32}+\frac{27\,x\,y^3}{32},$$
$$\frac{9}{32}-\frac{27\,x}{32}-\frac{9\,x^2}{32}+\frac{27\,x^3}{32}-\frac{9\,y}{32}+\frac{27\,x\,y}{32}+\frac{9\,x^2\,y}{32}-\frac{27\,x^3\,y}{32},$$
$$\frac{9}{32}-\frac{9\,x}{32}+\frac{27\,y}{32}-\frac{27\,x\,y}{32}-\frac{9\,y^2}{32}+\frac{9\,x\,y^2}{32}-\frac{27\,y^3}{32}+\frac{27\,x\,y^3}{32}.$$

Продемонстрировать выполнение одного из требований, предъявляемых к функциям формы [3, 4], позволяют соответствующие трехмерные поверхности. Так, на рисунке 3 приведены две поверхности, описываемые одиннадцатой и двенадцатой функцией формы из списка sfr.

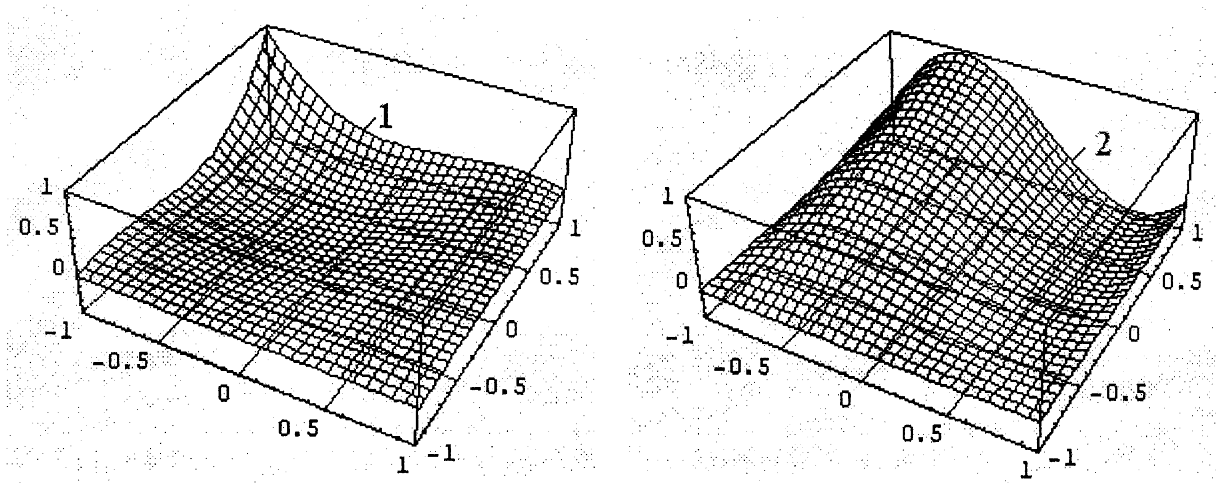

Рисунок 3 - Поверхности, описываемые одиннадцатой (1) и двенадцатой (2) функциями формы

Из рисунка 3 видно, что одиннадцатая и двенадцатая функции формы равны единице в соответствующем узле, а в остальных одиннадцати узлах, расположенных по сторонам прямоугольного элемента, принимают нулевые значения.

Заметим, что в некоторых случаях функция ShapeFunctions2D не способна вычислить список функций формы, поскольку соответствующая этим вычислениям система уравнений является неразрешимой. В таких случаях результатом ShapeFunctions2D оказывается список нулей. Так, для треугольного элемента, представленного на рис. 1, получим (узловые элементы и информация о линейных одночленах описываются списками точек ders и com соответственно):

ders={{1,-1},{-1,-1},{0,3/2},{0,0}};
ShapeFunctions2D[com,ders,{x,y}];
{0,0,0,0}.

Полученный список означает, что одночлены, определяемые списком com, не соответствуют функциям формы конечного элемента, описанного данным списком координат четырех узловых точек. Иначе говоря, получить интерполяционные функции для этого элемента, выраженные через одночлены xy, x, y и константу, не представляется возможным. В этом случае добиться положительного результата можно с помощью использования одночленов более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев, А. В., Кравчук, А. С., Смалюк, А. Ф. ANSYS для инженеров. М.: Машиностроение-1, 2004. 512 с. 2. Шимкович Д. Г. Применение MSC/NASTRAN при расчете строительных конструкций. 3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с. 4. Зенкевич, О., Морган, К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.

УДК 621.359.48

Авдейко В.П., Оськин Д.А.

МАЛОГАБАРИТНЫЙ ФИЛЬТР ДЛЯ УЛАВЛИВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПЫЛЕЙ.

Полоцкий государственный университет
Новополоцк, Беларусь

Электрофильтр является универсальным газоочистным аппаратом с высокой степенью очистки и низкими энергетическими затратами [1]. Он не только успешно конкурирует с тканевыми фильтрами [2], но в некоторых случаях является единственным газоочистным аппаратом. Например, при очистке воздуха от цементной пыли остаточный цемент адсорбирует атмосферную влагу, и твердая фракция забивает фильтрующую ткань. При этом регенерация фильтра становится невозможной, резко возрастает сопротивление газовому потоку и тканевый фильтр выходит из строя.

В электрофильтре роль фильтрующей ткани играет электрическое поле, практически не имеющее гидравлического сопротивления.

Несмотря на многообразие конструкций электрофильтров [3], все они работают по одной технологической схеме. Частицы пыли заряжаются в поле коронного разряда и по мере движения пылегазового потока в электрическом поле осаждаются на электродах под действием кулоновской силы и удерживаются на них благодаря адгезии и когезии. Регенерация электрофильтра производится периодически, чаще всего ударно-молотковой или вибрационной системой встряхивания.

Анализируя пути повышения эффективности работы электрофильтра, следует отметить два основных направления:

1. Повышение эффективности скорости дрейфа частиц к электродам;
2. Оптимальная организация процесса осаждения и регенерации.